где $u(x)$ — решение однородного уравнения

$$u''+u\operatorname{ch} x=0, \tag{15}$$

удовлетворяющее начальным условиям (9), где принято $k=-1$, т. е.

$$u(0)=0, \quad u'(0)=1. \tag{16}$$

Из второго краевого условия (14) получаем $cu(1)=1$, отсюда $c=\frac{1}{u(1)}$.

Решая любым численным методом задачу Коши (15)—(16), находим $u(x)$, а следовательно, и постоянную $c$, после чего определяем $y$.

Таблица 60

**Решение краевой задачи для однородного уравнения (13)**

| $x$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | 0 | 0,199 | 0,389 | 0,563 | 0,710 | 0,819 |
| $y(x)$ | 0 | 0,243 | 0,475 | 0,687 | 0,867 | 1 |

В данном случае соответствующая задача Коши решена в гл. III, § 12. Необходимые данные находятся в таблице 58. Так как $u(1)=0{,}819$, то $c=1{,}221$ и $y=1{,}221\,u(x)$. Окончательные результаты вычислений приведены в таблице 60.

## § 4. Метод конечных разностей

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x) \tag{1}$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)&=A,\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)&=B \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$(|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0, \quad |\beta_0|+|\beta_1|\neq 0),$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является *сведение ее к системе конечно-разностных уравнений*. Для этого разобьем основной отрезок $[a, b]$ на $n$ равных частей длины $h$ (шаг), где

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

Точки разбиения имеют абсциссы:

$$x_i=x_0+ih \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n), \quad x_0=a, \quad x_n=b.$$

Значения в точках деления $x_i$ искомой функции $y=y(x)$ (рис. 47) и ее производных $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$ обозначим соответственно через $y_i=y(x_i)$, $y'_i=y'(x_i)$, $y''_i=y''(x_i)$. Введем также обозначения: $p_i=p(x_i)$, $q_i=q(x_i)$, $f_i=f(x_i)$.

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями для внутренних точек $x_i$ отрезка $[a, b]$, будем иметь

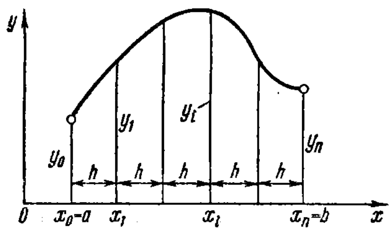

Рис. 47.

$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},$$
$$y''_i=\frac{y_{i+2}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \qquad (3)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Для концевых точек $x_0=a$ и $x_n=b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a, b]$, можно положить

$$y'_0=\frac{y_1-y_0}{h}, \quad y'_n=\frac{y_{n-1}-y_n}{-h}. \qquad (4)$$

Однако если функция $y=y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения дают формулы [2]

$$y'_0=\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h} \qquad (5)$$

и

$$y'_n=\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}, \quad n\geqslant 2. \qquad (6)$$

Действительно, полагая, например, $y_1=y(x_0+h)$ и $y_2=y(x_0+2h)$ и используя формулу Тейлора, будем иметь

$$y_1=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\ldots,$$
$$y_2=y_0+2hy'_0+\frac{(2h)^2}{2!}y''_0+\frac{(2h)^3}{3!}y'''_0+\ldots$$

Отсюда

$$\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}=y'_0+O(h^2),$$

где через $O(h^2)$, как обычно, обозначена величина порядка $h^2$. Аналогично показывается, что

$$\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}=y'_n+O(h^2).$$

Используя формулы (3), дифференциальное уравнение (1) во внутренних точках $x=x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ приближенно можно заменить линейной системой уравнений

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i \tag{7}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Кроме того, в силу формул (5) и (6) краевые условия (2) дополнительно дают еще два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0y_0+\alpha_1\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}&=A,\\ \beta_0y_n+\beta_1\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}&=B. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом получена линейная система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, представляющими собой значения искомой функции $y=y(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Решив эту систему, если это возможно, получим таблицу значений искомой функции $y$.

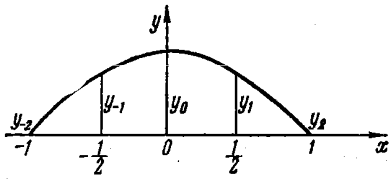


Рис. 48.

Пример 1. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &y''+(1+x^2)\,y=-1,\\ &y(-1)=y(1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Механически уравнения (9) представляют собой дифференциальные уравнения для изгибающего момента некоторого бруса с переменным поперечным сечением и шарнирно закрепленными концами.

Для грубого решения выберем шаг $h=1/2$.

Полагая $x_{-2}=-1$, $x_{-1}=-1/2$, $x_0=0$, $x_1=1/2$, $x_2=1$, ввиду симметрии уравнения и краевых условий будем иметь $y_{-2}=y_2=0$, $y_{-1}=y_1$ (рис. 48). Таким образом, нужно определить лишь две ординаты $y_0$ и $y_1$.

Полагая $x=0$ и пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{y_{-1}-2y_0+y_1}{1/4}+y_0=-1,$$

где $y_{-1}=y_1$. Аналогично при $x=1/2$ получаем

$$\frac{y_0-2y_1+y_2}{1/4}+\left(1+\frac{1}{4}\right)y_1=-1.$$

Следовательно, используя краевое условие $y_2=0$, имеем систему

$$-7y_0+8y_1=-1,\quad 4y_0-6\frac{3}{4}\,y_1=-1,$$

откуда $y_0=0{,}967$; $y_1=0{,}721$.

При большом $n$ непосредственное решение системы (7)—(8) становится затруднительным. В этом случае решение краевой задачи целесообразно заменить, используя результаты предыдущего параграфа, решением двух задач Коши.

Например, предполагая, что $\alpha_0 \neq 0$, имеем $y = cu + v$, где $u$ находится, как решение задачи Коши

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad u(a) = \alpha_1, \quad u'(a) = -\alpha_0, \tag{10}$$

а $v$ — как решение задачи Коши

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x), \quad v(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad v'(a) = 0. \tag{11}$$

Постоянная $c$ в силу краевых условий (2) имеет значение

$$c = \frac{B - [\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)]}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}. \tag{12}$$

Заменяя дифференциальное уравнение (10) соответствующим конечно-разностным уравнением, получим

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$u_0 = \alpha_1, \quad \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h} = -\alpha_0.$$

Отсюда будем иметь

$$u_0 = \alpha_1, \qquad u_1 = \frac{\alpha_1(1 + p_1 h) - \alpha_0 h\left(1 + \frac{p_1}{2}h\right)}{1 + p_1 h + \frac{q_1}{2}h^2},$$

$$u_{i+1} = \frac{(2 - q_i h^2)u_i - \left(1 - \frac{p_i}{2}h\right)u_{i-1}}{1 + \frac{p_i}{2}h}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. С помощью этого процесса находим

$$u(b) = u_n, \quad u'(b) = \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h}. \tag{13}$$

Аналогично, заменяя дифференциальное уравнение (11) конечно-разностным уравнением, будем иметь

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + q_i v_i = f_i \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ v_0 = \dfrac{A}{\alpha_0}, \quad \dfrac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h} = 0. \end{array}\right\} \tag{14}$$