Лекція №2 – Коректно і некоректно поставлені задачі. Приклади некоректних задач.

1.1. Поняття коректно і некоректно поставлених задач.

Розв'язання будь-якої кількісної задачі зазвичай полягає в знаходженні розв'язку z по заданим вихідним даним u:

$$z = R(u) \tag{1.1}$$

Будемо вважати їх елементами метричних просторів F і U з відстанями між елементами

$$\rho_F(z_1, z_2),\ \rho_U(u_1, u_2),\ z_1, z_2 \in F,\ u_1, u_2 \in U.$$

Метрики зазвичай визначають постановкою задачі.

Нехай визначено поняття розв'язку і кожному елементу $u \in U$ відповідає єдиний розв'язок $z = R(u)$ із простору F.

Означення 1.1. Задачу знаходження розв'язку $z = R(u)$ із простору F за вихідними даними $u \in U$ називають *стійкою на просторах* F і U, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що із нерівності

$$\rho_U(u_1, u_2) < \delta(\varepsilon)$$

випливає нерівність $\rho_F(z_1, z_2) < \varepsilon$, де $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$, $z_1, z_2 \in F$, $u_1, u_2 \in U$.

Означення 1.2. Задачу знаходження розв'язку z із простору F за вихідними даними u із простору U будемо називати *коректно поставленою (за Адамаром* на парі метричних просторів F і U, якщо виконуються умови:

1) для будь-якого елемента $u \in U$ існує розв'язок $z \in F$;

2) розв'язок z визначено однозначно;

3) задача є стійкою на просторах F і U.

Зауважимо, що в математичній літературі довгий час існувала точка зору, згідно якої будь-яка математична задача повинна задовольняти цим вимогам.

Означення 1.3. Задачі, які не задовольняють переліченим умовам (хоча б одній), будемо називати *некоректно поставленими*.

Слід відмітити, що означення некоректно поставлених задач відноситься лише до даної пари метричних просторів F і U, оскільки в інших метриках та сама задача може бути коректно поставленою.

Якщо клас U вихідних даних вибрано природно для задачі то умови 1) і 2) характеризують математичну визначеність. Умова 3) має зв'язок з фізичною детермінованістю задачі, а також із можливістю застосування числових методів її розв'язання по наближеним вихідним даним.

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є однією із актуальних задач обчислювальної математики. Важливими є дослідження методів, пов'язаних із виникненням, аналізом та розв'язуванням погано обумовлених СЛАР.

При розв'язуванні СЛАР дуже часто трапляється, що малі похибки правих частин чи заданих коефіцієнтів призводять до великих похибок у розв'язках. Похибки можуть виникати під час вимірювання, обчислення чи заокруглення елементів матриць систем або правих частин. Такі СЛАР називаються *некоректно поставленими*, або *погано обумовленими*.

Отже, погано обумовленою може бути не сама задача, а лише алгоритм, вибраний для її розв'язування. Якщо обчислений розв'язок суттєво відрізняється від точного внаслідок виконання числового алгоритму, то такий алгоритм називають нестійким.

Розглянемо приклади некоректних задач.

Приклад 1.1. Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Az = u, \tag{1.2}$$

де z – шуканий вектор, u – відомий вектор, $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ – квадратна матриця.

Якщо система (1.2) невироджена, то вона має єдиний розв'язок, який можна знайти за відомими формулами Крамера або іншими способами. Звідси випливає неперервна залежність розв'язку від правої частини.

Якщо система (1.2) вироджена, то вона має розв'язок (причому не єдиний) лише при виконанні умови сумісності, яка складається із рівності нулю відповідних визначників.

Таким чином, перш ніж розв'язати систему (1.2), треба перевірити, вироджена вона чи ні. Для цього потрібно обчислити визначник системи.

З якою б ми точністю не проводили обчислення $\det A$, при достатньо великому значенні n (порядку системи), внаслідок накопичення помилок обчислення, ми можемо отримати значення $\det A$, яке буде як завгодно відрізнятися від точного. Тому бажано мати такі алгоритми знаходження розв'язку системи (1.2), які не потребують попереднього з'ясування виродженості або невиродженості системи (1.2).

У практичних задачах часто права частина u та елементи матриці A, тобто коефіцієнти системи рівнянь (1.2), відомі нам наближено. В таких випадках замість системи (1.2) маємо справу з деякою іншою системою $A\tilde{z} = \tilde{u}$ такою, що $\left\|\tilde{A} - A\right\| \le h$, $\left\|\tilde{u} - u\right\| \le \delta$, де зміст норм зазвичай визначається характером задачі. Маючи замість матриці A матрицю $\tilde{A}$, ми тим більше не можемо висловити певного судження про виродженість або невиродженість системи (1.2).

У таких випадках про точну систему $Az = u$ відомо лише те, що для матриці A та правої частини u виконуються нерівності $\left\|\tilde{A} - A\right\| \le h$ та $\left\|\tilde{u} - u\right\| \le \delta$. Але систем з такими вихідними даними нескінченно багато, і при відомій похибці вони не чіткі.

Оскільки замість точної системи (1.2) маємо наближену систему $A\tilde{z} = \tilde{u}$, то мова може йти лише про знаходження наближеного розв'язку. Але наближена система може бути і нерозв'язною. Виникає питання: що треба розуміти під наближеним розв'язком системи? Він повинен бути також стійким до малих змін вихідних даних. Чи буде одержаний наближений розв'язок розв'язком некоректної задачі [13].

Розглянемо систему (1.2) наступного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}001x_2 = 2; \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Очевидно, що система (1.3) має розв'язок $x_1 = 2$ і $x_2 = 0$. Нехай тепер права частина першого рівняння системи (1.3) обчислена з відносною похибкою $0{,}05\%$ і дорівнює $2{,}001$, тобто замість системи (1.3) одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}001x_2 = 2{,}001; \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$

яка має розв'язок $x_1 = 1$ і $x_2 = 1$.

Нарешті, нехай права частина першого рівняння дорівнює $1{,}999$ (відносна похибка – $0{,}05\%$). Тоді відповідна система

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}001x_2 = 1{,}999; \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

має розв'язок $x_1 = 3$ і $x_2 = -1$.

Отже, в розглянутих системах лінійних алгебраїчних рівнянь лише праві частини мають відмінність в межах відносної похибки $0{,}05\%$, однак розв'язки систем відрізняються досить істотно. Це означає, що задача розв'язання системи (1.3) є некоректною з погляду третьої умови Адамара.

З'ясуємо джерело такої некоректності. Знайдемо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1{,}001 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}001.$$

Як бачимо, визначник системи близький до нуля, тобто матриця системи є майже виродженою. Звичайно, цей приклад системи другого порядку є штучний. Однак, із зростанням порядку системи кількість ситуацій, за яких визначник наближається до нуля, стає набагато більшою, причому джерело таких некоректних систем становлять цілком реальні та практично важливі проблеми.

Проаналізуємо одну з задач (приклад Адамара: задача Коші для рівняння Лапласа) для рівняння з частинними похідними, запропоновану Ж.Адамаром для ілюстрації некоректності за третьою умовою.

Приклад 1.2. Розглянемо задачу знаходження функції $u(x, y)$, гармонічної на всій площині, тобто

$$\Delta u(x, y) \equiv 0,$$

якщо задані значення $u(x, y) = f(x)$ цієї функції та її похідної

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x)$$

на осі абсцис.

Для спрощення аналізу вважатимемо, що $f(x) \equiv 0$.

Нехай функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x) \equiv \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}.$$

Переконаємося, що функція

$$u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sin \frac{x}{\varepsilon} \operatorname{sh} \frac{y}{\varepsilon}$$

буде розв'язком сформульованої задачі Коші за будь-яких значень ε. Справді, маємо

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = -\sin \frac{x}{\varepsilon} \operatorname{sh} \frac{y}{\varepsilon}; \; \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} = \sin \frac{x}{\varepsilon} \operatorname{sh} \frac{y}{\varepsilon};$$

$$\Delta u_\varepsilon = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} = 0.$$

Також очевидно, що

$$u_\varepsilon = (x, 0) \equiv 0, \; \left. \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right|_{y=0} = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} \left. \operatorname{ch} \frac{y}{\varepsilon} \right|_{y=0} = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}.$$

Розглянемо тепер поведінку цих функцій при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} = 0.$$

Це означає, що при малих ε функція $\varphi_\varepsilon(x)$ мало відрізняється від нуля. Водночас при $\varphi(x)$ розв'язок сформульованої задачі такий:

$$u(x, y) \equiv 0.$$

Слід було б чекати, що тоді й $u_\varepsilon(x, y)$ за малих ε також буде набувати значень, близьких до нуля. Однак для $x \neq k\pi$ одержано

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \sin \frac{x}{\varepsilon} \operatorname{sh} \frac{y}{\varepsilon} = \infty,$$

тобто малим змінам у значеннях функції $\varphi(x)$ відповідають великі зміни в розв'язку задачі. Отже, ця задача Коші є некоректною в сенсі третьої умови Адамара.