Лекція №3 – Некоректність інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

1.1. Операторні рівняння

Більшість математичних моделей розв'язання природознавчих задач будують за допомогою термінів, означень теорії функціонального аналізу.

Розглянемо рівняння вигляду:

$$Az = u, \tag{1.4}$$

де A – оператор, який діє з метричного простору F в метричний простір U, до того ж $u \in U$, $z \in F$. Припустимо, що існує обернений оператор A^{-1}, але він не є цілком неперервним.

Означення 1.4. Рівняння (1.4) з оператором A, який має вище вказані властивості, будемо називати *операторним рівнянням першого роду* [13]. Задачі розв'язання таких рівнянь, як правило, некоректні.

Означення 1.5. Операторне рівняння вигляду

$$z - Az = u,$$

де припущення стосовно просторів і елементів аналогічні, будемо називати *операторним рівнянням другого роду*. Задачі розв'язання таких рівнянь, як правило, коректні.

У загальному випадку:

$$\alpha z - Az = u \tag{1.5}$$

є загальним операторним рівнянням і задача його розв'язання буде коректною, якщо α не є власним значенням оператора A.

Операторні рівняння можуть мати різноманітний вигляд, тому доцільно їх класифікувати по виду оператора A. Розрізняють наступні рівняння:

1) Якщо оператор A представлений у вигляді матриці, а простори F та U – лінійні векторні простори, то рівняння називають *матричними рівняннями*. Коректність задачі залежить в більшості випадків від вибору матриці A та правої частини рівняння (дивись приклад 1.1).

2) Якщо F та U – простори неперервних на відрізку функцій, а оператор A має вигляд інтегрального оператора, тоді рівняння називають *інтегральним рівнянням*. Зокрема, найчастіше розглядають інтегральні рівняння наступного вигляду:

$\int\limits_a^b k(x,s)z(s)ds = u(x)$ – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду;

$z(x) + \int\limits_a^b k(x,s)z(s)ds = u(x)$ – інтегральне рівняння Фредгольма другого роду;

$\int\limits_a^x k(x,s)z(s)ds = u(x)$ – інтегральне рівняння Вольтера першого роду;

$z(x)+\int_a^x k(x,s)z(s)ds = u(x)$ – інтегральне рівняння Вольтера другого роду.

Більш простими є рівняння другого роду. Для їх розв'язання використовують ітераційні методи, розвинення в ряди тощо. Інтегральні рівняння другого роду приводять до коректних задач, а рівняння першого роду є більш складними і приводять до некоректних задач. Зауважимо, що в залежності від просторів, в яких розглядають задачу, і від умов гладкості ядра $k(x,s)$ і правої частини $u(x)$ одне і те саме рівняння може приводити як до коректної, так і до некоректної задачі.

Ще наприкінці XIX століття шведський математик Івар Фредгольм звернув увагу на деякий клас лінійних інтегральних рівнянь і одержав перші глибокі результати з їх аналізу. У подальшому інтегральні рівняння привернули увагу найвизначніших математиків світу, і за короткий час була створена теорія лінійних інтегральних рівнянь, які одержали назву Фредгольма. Незабаром ця теорія набула значного поширення в різних галузях науки та техніки.

Приклад 1.3. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_a^b k(x,s)z(s)ds = u(x). \tag{1.6}$$

Нехай $u \in U,\ z \in F$ і нехай $k(x,s)$ – неперервне за змінним x та s, а також має неперервні частинні похідні за цими змінним. Нехай простори $U = C[a;b]$ і $F = C[a;b]$ – простори неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій. Задача знаходження елемента u за елементом z при таких положеннях буде коректною.

Доведення. $\triangleright$Дійсно $\forall z \in C[a;b]$ по формулі (1.6) інтеграл існує і є неперервною функцією по змінній x, ця функція визначена однозначно. Таким чином умови коректності 1) і 2) в означенні 1.2 виконано. Доведемо умову 3).

Нехай $k_1 = \max\limits_{\substack{x\in[c,d]\\ s\in[a,b]}} |k(x,s)|$, $u_1(x)$ і $u_2(x)$ – деякі функції із простору $C[c;d]$, що відповідають елементам $z_1(x)$ і $z_2(x)$ із простору $C[a;b]$. Тоді

$$\|u_1 - u_2\|_{C[c,d]} \le k_1|b-a|\|z_1 - z_2\|_{C[a,b]}.$$

Із означення норми маємо доведення умови 3).◀

Розглянемо обернену задачу, тобто задачу знаходження елемента z за елементом u. Така задача буде некоректною.

Доведення. $\triangleright$Розглянемо першу умову коректності. Розв'язок оберненої задачі існує не для усіх правих частин. Нехай $u(x)$ – неперервна функція, тоді існує $u(x) \in C[c,d]$, яка не є диференційованою функцією. Оскільки розв'язок z шукаємо в класі неперервних функцій, то в результаті підстановки z в ліву частину рівняння (1.6) ліворуч одержуємо диференційовану функцію. Отримали протиріччя – ліворуч і неперервна і диференційована функція, а праворуч неперервна. При перевірці умови 3) в просторі F виберемо послідовність $z_n = z_0 + n\sin(n^2 s)$, підставляємо z_n в ліву частину рівності (1.6), одержимо $u_n(x)$

$$u_n(x) = \int_a^b k(x,s) z_n(s) ds = \int_a^b k(x,s)\left(z_0 + n\sin(n^2 s)\right) ds .$$

Оцінимо модуль різниці

$$\left|u_n(x) - u_0(x)\right| = \left|\int_a^b k(x,s)\left(z_0 + n\sin(n^2 s)\right) ds - \int_a^b z_0 k(x,s) ds\right| \le \left|\int_a^b k(x,s) n\sin(n^2 s) ds\right| .$$

Розглянемо величину $\left|z_n(s) - z_0(s)\right| = \left|n\sin(n^2 s)\right|$. Використовуючи умову диференційованості ядра, проінтегруємо частинами та одержимо наступне:

$$\left|\int_a^b k(x,s) n\sin(n^2 s) ds\right| = \left|-\int_a^b k(x,s) \frac{n}{n^2} d\cos(n^2 s)\right| =$$

$$= \left|-\frac{k(x,s)}{n}\cos(n^2 s)\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b k'(x,s)\cos(n^2 s) ds\right| \le \frac{k_1}{n},$$

тоді при $n \to \infty$ одержимо $\left|u_n(x) - u_0(x)\right| \to 0 \Rightarrow \left\|u_n - u_0\right\|_{C[c,d]} \le \frac{k_1}{n} \to 0$. Для елементів z одержимо інше: $\left|z_n(s) - z_0(s)\right| = \left|n\sin(n^2 s)\right| \not\to 0$,

Таким чином, третю умову коректності не виконано. Зауважимо, що друга умова коректності теж не завжди виконується, все залежить від вибору ядра рівняння.◀