Лекція №4 – Псевдорозв’язок матричного рівняння

1.1. Узагальнене поняття розв’язку

Перш ніж перейти до розгляду методів наближеного розв’язання погано обумовлених систем, необхідно з’ясувати питання про те, що слід розуміти під розв’язком системи рівнянь (СЛАР)

$$Ax = b, \tag{1.7}$$

котра в загальному випадку може бути перевизначеною, недовизначеною, тобто такою, коли апріорі невідомо існування і єдиність розв’язку.

Позначимо через $\bar{x}$ вектор, який реалізує мінімум нев’язки, тобто норми

$$\left\| A \cdot \bar{x} - b \right\|^2 = \min_x \left\{ \left\| A \cdot x - b \right\|^2 : x \in R^n \right\}. \tag{1.8}$$

Величину $\bar{x}$ називають розв’язком системи (1.7) в сенсі методу найменших квадратів. Необхідною умовою мінімуму функціонала $I(x) = \left\| A \cdot x - b \right\|^2$ в (1.8) є умова $\delta I(\bar{x}) = 0$, де I – варіація функціонала. Оскільки для приросту функціонала має місце представлення

$$I(\bar{x} + h) - I(\bar{x}) = 2(Ax, Ah) - 2(Ah, b) + (Ah, Ah),$$

то $\delta I(\bar{x}) = 2\left(A^* A\bar{x} - A^* b\right) = 0$. Таким чином, $\bar{x}$ задовольняє системі рівнянь

$$A^* A\bar{x} = A^* b, \tag{1.9}$$

де A^* – транспонована до A матриця. Неважко показати, що справедливе й обернене твердження: кожний розв’язок (1.9) мінімізує нев’язку в (1.8). Із елементарних геометричних міркувань можна встановити, що задача (1.8) завжди має розв’язок, можливо не один. З цієї причини через встановлений факт еквівалентності система (1.9) також має розв’язок для будь-якої матриці A та вектору b.

Позначимо $\overline{X}$ – множину розв’язків системи (1.9) (а значить, і задачі (1.8)). Задавши деякий фіксований елемент x^0, який відіграє роль пробного розв’язку (наприклад, можна покласти $x^0 = 0$), розглянемо задачу на мінімум:

$$\min \left\{ \left\| x - x^0 \right\|^2 : x \in \overline{X} \right\}. \tag{1.10}$$

Розв’язок $\tilde{x}$ задачі (1.10) існує і єдиний, що випливає з того факту, що строго опуклий функціонал досягає найменшого значення на опуклій замкнутій множині в єдиній точці. Вектор $\tilde{x}$ будемо називати псевдорозв’язком задачі (1.7).

Із співвідношень

$$A^* Au = 0,$$
$$\left(A^* Au, u\right) = \left\| Au \right\|^2 = 0,$$
$$Au = 0,$$
$$Ax = 0,$$
$$A^* Ax = 0$$

випливає, що множина розв'язків однорідних систем $A^*Au = 0$, $Ax = 0$ збігається. Звідси негайно випливає наступний важливий факт. Якщо система (1.7) сумісна, то псевдорозв'язок $\tilde{x}$ збігається з нормальним розв'язком цієї системи, тобто є розв'язком, який найменше відхиляється за нормою від вектору x^0. І в частинному випадку, якщо (1.7) однозначно розв'язується, то псевдорозв'язок співпадає зі звичайним розв'язком.