Лекція №6 – Метод квазірозв'язків. Квазірозв'язки матричного рівняння

1.1. Метод квазірозв'язків

Нехай оператор A в рівнянні $Az = u$ – цілком неперервний. Побудова стійкого до малих змін правої частини u наближеного розв'язку рівняння $Az = u$ за формулою

$$z = A^{-1}u \tag{1.21}$$

можлива в тих випадках, коли розв'язок шукають на компакті $M \subset F$ та права частина рівняння належить множині $N = AM$.

Зазвичай не існує ефективних критеріїв, які дозволяють встановити належність елемента u множині N. В практичних задачах часто замість точного значення правої часини $\overline{u}$ нам відомо її наближене значення $\widetilde{u}$, яке може не належати множині $N = AM$. В таких випадках не можна будувати наближений розв'язок рівняння $Az = u$ за формулою (1.21), оскільки символ $A^{-1}\widetilde{u}$ може не мати змісту.

Прагнення усунути труднощі, пов'язані з відсутністю розв'язку рівняння $Az = u$ при неточній правій частині, привело В.К. Іванова до поняття квазірозв'язку рівняння – узагальненого поняття розв'язку цього рівняння.

Означення 1.10. Елемент $\widetilde{z} \in M$, мінімізуючий при даному u функціонал $\rho_U(Az, u)$ на множині M, називають квазірозв'язком рівняння $Az = u$ на M, якщо

$$\rho_U(A\widetilde{z}, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u). \tag{1.22}$$

Якщо M – компакт, то квазірозв'язок існує $\forall u \in U$ і якщо, крім того, $u \in AM$, квазірозв'язок співпадає зі звичайним (точним) розв'язком рівняння $Az = u$. Квазірозв'язок може бути і не один. У цьому випадку під квазірозв'язком будемо розуміти будь-який елемент із множини квазірозв'язків.

Можна вказати достатні умови, при яких квазірозв'язок єдиний і неперервно залежить від правої частини. Наведемо ці умови.

Означення 1.11. Нехай елемент y та множина Q належать простору U. Елемент $q \in Q$ називають проекцією елемента y на множину Q, $q = Py$, якщо

$$\rho_U(y, q) = \rho_U(y, Q),$$

де $\rho_U(y, Q) = \inf_{h \in Q} \rho_U(y, h)$.

Теорема 1.7. Якщо рівняння $Az = u$ може мати на компакті M не більше одного розв'язку і проекція кожного елементу $u \in U$ на множину $N = AM$ єдина, то квазірозв'язок рівняння $Az = u$ єдиний і неперервно залежить від правої частини u.

Теорема 1.8. Нехай рівняння $Az = u$ лінійне, однорідне рівняння $Az = 0$ має лише нульовий розв'язок, множина M випукла, а будь-яка сфера у просторі U строго випукла. Тоді квазірозв'язок рівняння $Az = u$ на компакті M єдиний і неперервно залежить від правої частини u.

1.1.1. Квазірозв'язки матричного рівняння

Розглянемо операторне рівняння $Az = u$, де оператор A діє з лінійного векторного простору в лінійний векторний простір і, який задано в матричній формі наступним чином:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Права частина $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Нехай компакт M задано умовами на границі: $f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Задача знаходження розв'язку такого операторного рівняння буде некоректною, коли матриця A буде виродженою. Алгоритм побудови квазірозв'язків такої некоректної задачі наступний.

Згідно з означенням квазірозв'язку потрібно знаходити $\inf\limits_{z \in M} \rho_U(Az, u)$, тобто мінімізувати функціонал. Для цього знайдемо $\min\limits_{z \in M} \|Az - u\|_U^2$ і отримаємо задачу на умовний екстремум.

Якщо потрібно знайти $\min\limits_{z \in M} \|Az - u\|_U^2$, де компакт M обмежений одним контуром, тобто заданий, наприклад, у вигляді $\|z\| \le q$, $q \in R$, то будуємо функцію Лагранжа:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n, \lambda) = \|Az - u\|_U^2 + \lambda\left(\|z\|_F^2 - q^2\right) =$$

$$= (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n - u_1)^2 + (a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n - u_2)^2 + \dots +$$
$$+ (a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n - u_n)^2 + \lambda\left(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - q^2\right)$$

та знаходимо розв'язок задачі на умовний мінімум. Використаємо необхідну умову екстремуму. Одержимо при цьому систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z_2} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial z_n} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Із отриманої системи алгебраїчних рівнянь знаходимо значення $z_1, z_2, \dots, z_n$ та відповідні λ. Підставляємо отримані значення в функцію:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n - u_1)^2 +$$
$$+ (a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n - u_2)^2 + \dots + (a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n - u_n)^2$$

і знаходимо значення функції $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Вибираємо найменше значення і у відповідь записуємо ті $z_1, z_2, \dots, z_n$, які дають це значення.

Отже, знайдений розв’язок буде квазірозв’язком задачі.

Якщо компакт M обмежений декількома контурами, то задачу на умовний екстремум розв’язуємо для кожного контуру окремо, а потім із усіх знайдених значень змінної функції $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обираємо найменше і записуємо у відповідь ті $z_1, z_2, \dots, z_n$, які дають це значення.