Лекція №9 – Метод регуляризації для інтегрального рівняння Фредголма першого роду

За допомогою регуляризуючого алгоритму для рівняння Фредгольма I роду з гладким ядром на основі методу А. М. Тихонова, знайдемо наближений розв'язок, який задовольняє інтегральному рівнянню

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c,d], \tag{1.44}$$

$K(x,s) \in C([c,d] \times [a,b]), u(x) \in L_2[c,d]$.

Нехай замість u нам відоме таке її наближення u_δ, що $\| u - u_\delta \|_{L_2} \le \delta$. Нехай із апріорних даних відомо, що $z(s)$ – кусочно-гладка, тоді виберемо $F = W_2^1[a,b]$. Нехай замість $K(x,s)$ відома функція $K_h(x,s)$, що $\| K - K_h \| \le h$, тоді $\| A - A_h \|_{W_2^1 \to L_2} \le h$, де A_h – інтегральний оператор, який відповідає ядру $K_h(x,s)$.

Використаємо схему побудови регуляризуючого алгоритму А.М. Тихонова, перейдемо від (1.44) до мінімізації функціонала $M^\alpha[z]$, який має вигляд:

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2 = \int_c^d \left(\int_a^b K_h(x,s)z(s)ds - u_\delta(x) \right)^2 dx +$$

$$+ \alpha \int_a^b \left[z^2(s) + (z'(s))^2 \right] ds, \tag{1.45}$$

Будуємо скінченновимірну апроксимацію функціонала $M^\alpha[z]$, використовуємо квадратурні формули, для чого вводимо рівномірні сітки по x і по s з кроками відповідно $h_s = (b-a)/n$, $h_x = (d-c)/m$, $s_j = a + (j-1)h_s$, $x_i = c + (i-1)h_x$. Позначимо $z(s_j) = z_j$, $u(x_i) = u_i$, $K(x_i, s_j) = a_{ij}$, використаємо квадратурну формулу прямокутників для обчислення інтегралів і апроксимуємо похідну скінченною різницею $z'(s) = \dfrac{z_{j+1} - z_j}{h_x}$. Таким чином скінченновимірна апроксимацію функціонала має вигляд:

$$M^\alpha(z_i) = h_x \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n h_s a_{ij} z_j - u_i \right)^2 + \alpha h_s \sum_{j=1}^n [z_j^2 + z_j'^2] \ h_s. \tag{1.46}$$

Використаємо необхідну умову мінімуму функціонала:

$$\frac{\partial M^\alpha[z_j]}{\partial z_k} = h_x \sum_{j=1}^m \left(h_s \sum_{i=1}^n a_{ji} z_i - u_j \right) 2 h_s a_{jk} +$$

$$+ \alpha h_s \left[2 z_k + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j - z_{j+1}}{h_s^2} (\delta_{j+1k} - \delta_{jk}) \right] = 0$$

приходимо до лінійної алгебраїчної системи з симетричною матрицею:

$$B^{\alpha} z = U\,, \tag{1.47}$$

де

$$B^{\alpha} = B + \alpha C\,, B = \{b_{ik}\}, \quad b_{ik} = h_x h_s \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}\,,\; U = \{u_k\},\; u_k = h_x \sum_{j=1}^{m} u_j a_{jk}\,, \tag{1.48}$$

$$C = E + C_1, C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_s^2} & \frac{2}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h_s^2} \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h_s^2} & \frac{1}{h_s^2} \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Для розв’язання системи (1.47) можна використати різні чисельні методи. При цьому слід враховувати, що матриця системи є симетричною і додатньо визначеною. Одним із найбільш ефективних методів розв’язання таких систем є метод квадратного кореня.

В цьому методі симметричну додатньо визначену матрицю B^{α} записують у вигляді добутку верхньо і нижньо трикутних матриць $B^{\alpha} = \left(T^{\alpha}\right)^{*} T^{\alpha}$, де T^{α}:

$$T^{\alpha} = \begin{pmatrix} t_{11}^{\alpha} & t_{12}^{\alpha} & \dots & t_{1n}^{\alpha} \\ 0 & t_{22}^{\alpha} & \dots & t_{2n}^{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

причому елементи матриці T^{α} знаходять за формулою:

$$\begin{gathered} t_{11}^{\alpha} = \sqrt{b_{11}^{\alpha}},\;\; t_{1j}^{\alpha} = \frac{b_{1j}^{\alpha}}{t_{11}^{\alpha}},\;\; (j > 1),\;\; t_{ii}^{\alpha} = \left(b_{ii}^{\alpha} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(t_{ki}^{\alpha}\right)^2 \right)^{1/2},\;\; (i = 2,..n), \\ t_{ij}^{\alpha} = \frac{\left(b_{ij}^{\alpha} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^{\alpha} t_{kj}^{\alpha} \right)}{t_{ii}^{\alpha}},\;\; (i < j); \quad t_{ij}^{\alpha} = 0,\;\; (i > j), \end{gathered} \tag{1.50}$$

Таким чином, від системи (1.47) приходимо до розв’язання системи

$$\left(T^{\alpha}\right)^{*} T^{\alpha} z_{\alpha} = U,$$

або, до розв’язання двох систем з трикутними матрицями:

$$\begin{cases} \left(T^{\alpha}\right)^{T} y = U, \\ T^{\alpha} u_{\alpha} = y. \end{cases} \tag{1.51}$$

Слід зауважити, що при виборі параметра регуляризації по принципу узагальненої невязки при розв'язанні (1.44), слід неодноразово при різних α розв'язувати системи (1.51), при цьому права частина системи U і матриця B не залежать від α. Це дозволяє будувати спеціальні економічні методи розв'язання систем (1.51).

Нехай для різних $\alpha > 0$ необхідно розв'язати систему (1.51) або

$$(A_h^* A_h + \alpha C) z^\alpha = A_h^* u, \tag{1.52}$$

де $z^\alpha \in R^n, u \in R^m$. Матрицю C визначаємо відповідно до формули (1.49).

Представимо матрицю C у вигляді $C = S^* S$, де S – двухдіагональна матриця. Виконаємо заміну в (1.52) $y^\alpha = S z^\alpha$, $(z^\alpha = S^{-1} y^\alpha)$, одержимо

$$(A_h^* A_h + \alpha C) S^{-1} y^\alpha = A_h^* u. \tag{1.53}$$

Домножимо це рівняння зліва на $(S^{-1})^*$, одержимо

$$(D^* D + \alpha E) y^\alpha = D_h^* u, \; D = A_h S^{-1}. \tag{1.54}$$

Представимо матрицю D у вигляді: $D = QPR$, де $Q\,(m \times m)$, $R\,(n \times n)$ – ортогональні матриці, P – права двухдіагональна матриця [16].

Тепер у рівнянні (1.54) зробимо заміну змінних $x^\alpha = R y^\alpha, (y^\alpha = R^{-1} x^\alpha)$, в результаті одержимо

$$(R^* P^* Q^* QPR + \alpha E) R^{-1} x^\alpha = D_h^* u \text{ або}$$

$$(P^* P + \alpha E) x^\alpha = R D_h^* u = U, \tag{1.55}$$

де матриця $P^* P$ – трьохдіагональна і рівняння (1.55) без проблем розв'язують, наприклад, методом прогонки [16]. Початковий невідомий вектор: $z^\alpha = S^{-1} R^{-1} x^\alpha$, однак, часто немає необхідності повертатись до вектора z^α, оскільки, наприклад, якщо $h = 0$, то необхідно лише перевірити умову $\| A_h z^\alpha - u \| = \delta$, яка еквівалентна умові $\| P x^\alpha - Q^* u \| = \delta$.