2.5 Функции от матриц

Задача 44. *Вычислить* A^{50}, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Поскольку непосредственное возведение матрицы в большую степень не представляется разумным, приведём данную матрицу к жордановой форме. Нетрудно проверить, что матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda = 2$; поскольку $\mathrm{rk}(A - 2E) = 1$, жорданова форма J матрицы A состоит из единственной жордановой клетки ранга 2. В качестве корневого вектора возьмём вектор $e_2 = (1, 0)$ (можно взять любой вектор, не являющийся собственным); тогда собственный вектор

$$e_1 = (A - 2E)e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

дополняет вектор e_1 до жорданова базиса. Матрица перехода к жорданову базису имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место матричное равенство $J = C^{-1}AC$, откуда $A = CJC^{-1}$; поэтому

$$A^{50} = (CJC^{-1})^{50} = CJC^{-1} \cdot CJC^{-1} \cdot \dots \cdot CJC^{-1} = CJ^{50}C^{-1}.$$

Легко заметить, что

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix};$$

поэтому,

$$A^{50} = CJ^{50}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 45. *Вычислить* $\cos A$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Приведём сперва данную матрицу к жорданову виду. Нетрудно проверить, что её характеристический многочлен имеет вид $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3$. Это означает, что $\lambda = 0$ является единственным собственным значением матрицы A. Поскольку матрица

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, жорданова форма исходной матрицы состоит из единственной трёхмерной клетки:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения соответствующего жорданова базиса найдём корневой вектор высоты 3: поскольку $\lambda = 0$ является единственным собственным значением, в качестве корневого вектора высоты 3 можно взять любой вектор, не аннулирующий матрицу A^2. Положим $e_3 = (1,0,0)$; тогда

$$e_2 := Ae_3 = (3,1,0), \quad e_1 = Ae_2 = (1,0,-1).$$

Таким образом, матрица перехода к жорданову базису и обратная ей имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Требуется найти cos исходной матрицы; поскольку $\cos' = -\sin$ и $\cos'' = -\cos$, согласно общей формуле

$$\cos J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому,

$$\cos A = C \cdot \cos J \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 46. *Вычислить* $\exp A$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдём экспоненту от данной матрицы методом неопределённых коэффициентов. Для любой матрицы A второго порядка $\exp A = \alpha E + \beta A$ для некоторых скаляров α, β, причем многочлен $\alpha + \beta t$ должен совпадать с функцией e^t на спектре матрицы A. Легко заметить, что собственными значениями матрицы A являются $\lambda = \pm 2i$. Таким образом, неопределённые коэффициенты α и β должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 2i\beta = e^{2i} \\ \alpha - 2i\beta = e^{-2i} \end{cases}.$$

Решая эту систему и пользуясь формулой Эйлера $e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2$, получаем, что $\alpha = \cos 2$, $\beta = \frac{1}{2}\sin 2$. Таким образом,

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos 2 & \sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}. \ \square$$