**Геометрія Лобачевського**

**Ключові поняття:** аксіома Лобачевського, паралельні прямі, розбіжні прямі, функція Лобачевського, орицикл, еквідістанта.

**1. Відкриття Лобачевського. Неевклідова геометрія.**

У лютому 1826 професор Казанського університету М. І. Лобачевський виступив перед вченою радою фізико-математичного факультету з доповіддю, в якій виклав основи нової геометрії. Головна ідея полягала в тому, що аксіома Евкліда про паралельні незалежна від інших аксіом геометрії Евкліда і, отже, можна побудувати іншу геометрію, настільки ж несуперечливу, як і евклідова, якщо в системі аксіом евклідової геометрії замінити аксіому про паралельні на протилежне твердження. У наступні роки Лобачевський всебічно розвинув теорію нової геометрії і вказав ряд її додатків в області математичного аналізу. Одночасно з Лобачевским ті ж ідеї були розвинені молодим угорським математиком Яношем Больяї. Значення неевклідових геометрій полягає насамперед у тому, що їх побудова і доведення несуперечливості являє собою остаточне вирішення проблеми п’ятого постулату, що була нерозв’язаною протягом двох тисячоліть. Надалі ці геометрії знайшли найрізноманітніші застосування в задачах самої математики і в теоретичній фізиці. Вони стали великою подією в розвитку математики XIX ст., фактом, який суперечив всім сформованим на той час уявленням про природу математичного знання. Відкриття Лобачевского і Больяї привело математиків до корінного перегляду уявлень про власну науку, про її функції в системі знання, про методи побудови і обґрунтування математичних теорій.

Великий внесок у правильне розуміння неевклідових геометрій вніс видатний французький математик А. Пуанкаре. Він був одним з перших математиків, які побачили неспроможність чисто емпіричного розуміння геометрії. А. Пуанкаре винайшов модель геометрії Лобачевського на множині об’єктів евклідової геометрії, що доводило її несуперечливість. Вперше ж аксіоматику площини Лобачевського вдалося реалізувати італійському геометру Бельтрамі на спеціальній поверхні – псевдосфері – як внутрішню геометрію цієї поверхні.

**2. Аксіоматична теорія геометрії Лобачевського.**

**а) Аксіома Лобачевського. Означення і властивості паралельних і розбіжних прямих в геометрії Лобачевського.**

Аксіоматика геометрії Лобачевського складається з аксіом абсолютної геометрії та аксіоми Лобачевського

**Аксіома Лобачевського.** Існують принаймні одна пряма  і одна точка  поза нею такі, що в площині, яку вони визначають, через точку  проходить принаймні дві прямі, що не перетинають пряму .

Аксіоматичні теорії евклідової геометрії та геометрії Лобачевського мають спільну частину – абсолютну геометрію.

**Теорема.** Через будь-яку точку, яка не належить довільній даній прямій, проходить принаймні дві прямі, що не перетинають дану пряму.

**Теорема.** Через точку, яка не належить даній прямій можна провести безліч прямих, що не перетинають дану пряму.



Далі будемо вважати всі прямі напрямленими. Тобто якщо використано символ  для прямої, то це означає, що на ній точка  передує точці . При цьому будемо вважати, що всі необхідні нам точки прямої  лежать між точками  та . Прямі  та  різні, або, інакше, два різні напрями на прямій, що проходить через точки  та , визначаються різними порядками  та  цих точок.

**Означення.** Пряма  називається паралельною прямій , якщо:

1) ці прямі не перетинаються;

2) для будь-яких точок  і  кожен внутрішній промінь кута  перетинає промінь . Позначають .



**Теорема (ознака паралельності).** Якщо прямі  та  не мають спільних точок і існують такі точки  і , що кожен внутрішній промінь кута  перетинає промінь , то .

**Теорема (існування паралельних прямих).** Нехай дано пряму  і точку , яка не лежить на ній. Тоді в площині, яку вони визначають, існує і лише одна пряма , яка проходить через точку  і паралельна прямій .

**Наслідок.** Нехай , ,  і . Нехай також пари точок  та  симетричні в осьовій симетрії відносно прямої . Тоді пряма , яка буде симетричною прямій , паралельна прямій .

Остання теорема і наслідок з неї дають можливість сформулювати наступну теорему.

**Теорема.** Через точку, яка не належить заданій прямій, в даному на цій прямій напрямку можна провести тільки одну пряму, паралельну заданій. Через точку, яка не належить заданій прямій, можна провести дві прямі, паралельні заданій, але в різних напрямках.

**Властивості відношення паралельності прямих:**

1) (симетричність) якщо , то і .

2) (транзитивність) якщо  і , то .

**Означення.** Нехай , ,  і . Кут  називається *кутом паралельності*, що відповідає відрізку , який називають *відрізком паралельності* (або *стрілкою*).

**Теорема.** Будь-який гострий кут може бути кутом паралельності. Або, інакше, яким би не був гострий кут, існує єдина пряма, яка перпендикулярна одній стороні кута і паралельна другій.

Лобачевський довів, що між множиною всіх гострих кутів  і множиною додатних дійсних чисел  існує бієктивна відповідність і знайшов її явний вигляд, який називають тепер функцією Лобачевського (або основною формулою Лобачевського) і позначають . Вона має вигляд

 або ,

де  називається константою Лобачевського або радіусом кривини. З рівностей ,  випливає, що зі збільшенням відрізка паралельності відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда стає все більшою, і, навпаки, в достатньо малому околі площини Лобачевського виконується геометрія Евкліда (або, геометрія Евкліда є граничним випадком геометрії Лобачевського).

**Теорема.** Нехай  і . Якщо точка  рухається по прямій в сторону паралельності, то її відстань до прямої  прямує до нуля. Якщо ж точка  рухається по прямій  в протилежному напрямку, то її відстань до прямої  необмежено збільшується.

**Доведення** складається з двох частин. Спочатку доводиться, що при умові , де  - нове положення точки  виконується , а потім – що  може стати менша за будь-яке як завгодно мале додатне дійсне число .

**Наслідок.** Будь-яка пара паралельних прямих може за допомогою руху накладена на іншу пару паралельних прямих.

**Означення.** Дві різні прямі називаються розбіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні.

**Теорема.** Розбіжні прямі існують.

Наприклад, розбіжними є два перпендикуляри до однієї прямої.

**Теорема (ознаки розбіжності прямих).** Дві різні прямі є розбіжними тоді і тільки тоді, коли при перетині цих прямих третьою утворюються або рівні відповідні кути, або рівні навхрест лежачі кути, або внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює .

**б) Основні факти геометрії Лобачевського.**

Оскільки аксіома Лобачевського є запереченням аксіоми паралельності Евкліда, то побудувавши заперечення еквівалентів 5 постулату Евкліда, ми отримаємо твердження, справедливі в геометрії Лобачевського. Наведемо кілька таких тверджень.

**Теорема.** Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, не завжди перетинаються.

**Доведення.** Припустимо супротивне, тобто нехай в площині Лобачевського виконується твердження Лежандра. Але його наслідком є аксіома паралельності Евкліда, що неможливо в аксіоматичній теорії Лобачевського.

**Теорема.** Існують трикутники, навколо яких не можна описати коло.

**Доведення.** Аналогічно методом від супротивного, використовуючи еквівалентність твердження Ф. Бойяї та аксіоми паралельності Евкліда.

На практичному занятті буде побудовано трикутник, що задовольняє теоремі, тобто трикутник, навколо якого не можна описати коло.

**Теорема**. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за .

**Доведення.** За теоремою абсолютної геометрії в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника не більша (менша або дорівнює) . Якщо припустити, що існує хоча б один трикутник, в якому сума внутрішніх кутів дорівнює , то як наслідок отримаємо, що сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює . Це твердження є еквівалентним аксіомі паралельності Евкліда, що і говорить про те, що наше припущення невірне. Отже, сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за .

**Наслідок.** Сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника менша за .

**Теорема**. Сума внутрішніх кутів трикутника є непостійною величиною.

**Доведення.** Методом від супротивного проведенням трансверсалі.

, ,  - транверсаль. ,  як суміжні. Тоді з припущення , . Тоді , а з іншого боку  за попередньою теоремою.

**Означення**. Еквідистантою називається множина точок, рівновіддалених від даної прямої.

**Теорема.** Еквідистанта є кривою.

**Доведення.** Розглянемо на еквідистанті 3 різні точки  і припустимо, що вони колінеарні. Опустимо з них перпендикуляри на дану пряму і позначимо основи перпендикулярів через  відповідно. Отримані чотирикутники ,  і  є чотирикутниками Саккері. Кути при верхній основі чотирикутника Саккері повинні бути рівними. Отже,  і  як суміжні. Ці рівності дають , звідки сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює , що неможливо в геометрії Лобачевського.

**Теорема.** Дві розбіжні прямі мають єдиний спільний перпендикуляр, по обидві сторони від якого вони необмежено віддаляються одна від одної.

**Теорема (четверта ознака рівності трикутників).** Якщо три кути одного трикутника рівні відповідним кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

**Наслідок.** Не існують не конгруентні подібні трикутники. На площині Лобачевського немає відношення подібності фігур.

**Теорема.** Кут при верхній основі чотирикутника Саккері гострий.

**Теорема.** Середня лінія трикутника має довжину, меншу за половину довжини основи.

**Теорема.** Сторона правильного шестикутника більша за радіус описаного кола.

**3. Дослідження системи аксіом планіметрії Лобачевського. Інтерпретації Пуанкаре.**

Побудуємо модель неевклідової планіметрії на множині об’єктів евклідової площини, що була запропонована А.Пуанкаре. Розглянемо на евклідовій площині деяку пряму  (наприклад, горизонтальну). Ця пряма визначає дві півплощини. Одну з них назвемо «верхньою». Будемо називати *неевклідовими точками* точки верхньої півплощини (без точок прямої ), *неевклідовими прямими* – евклідові півкола, що знаходяться в верхній півплощині та ортогональні до прямої  (тобто мають центри на прямій ), а також евклідові півпрямі, що спираються на пряму  та утворюють з нею прямий кут. Ці півпрямі будемо називати півколами нескінченно великого радіусу

Далі визначимо поняття: «точка належить прямій» або «пряма проходить через точку». Нехай  – неевклідова точка,  – неевклідова пряма, яка є деяким півколом (яке теж будемо позначати буквою ). Будемо говорити, що точка  знаходиться на (неевклідовій) прямій , якщо ця точка розташована на евклідовому півколі  в сенсі тих відношень, які мають місце в евклідовій геометрії. Те, що для неевклідових точок та прямих справедливі аксіоми 1.1–1.3, легко перевіряється засобами евклідової геометрії.

Насправді, аксіома 1.1 виконується, оскільки через дві точки  і  верхньої півплощини завжди можна провести півколо, ортогональне до прямої .

Аксіома 1.2 виконується, оскільки два півкола, що зображають неевклідові прямі, можуть мати не більше однієї спільної точки.

Аксіома 1.3. виконується, оскільки на півколі існує нескінченно багато точок і в верхній півплощині існує нескінченно багато точок, що не належать вибраному півколу.

Далі визначимо поняття «лежати між» по відношенню до неевклідових точок на неевклідових прямих. Нехай  – три точки неевклідової прямої, яка зображується півколом . Будемо говорити, що точка  (в неевклідовому сенсі) лежить між точками  і , якщо на півколі  вона розташована між точками  і  в тому сенсі, як це розуміється в евклідовій геометрії . Інакше кажучи, порядок точок на неевклідовій прямій співпадає з порядком точок на евклідовому півколі, що зображає цю пряму в верхній півплощині.

Тому неевклідів відрізок  зображується дугою півкола з кінцями ; неевклідова півпряма, що виходить з точки , зображується дугою , кінець  якої знаходиться на прямій . Точка  при цьому не повинна зараховуватись до точок неевклідової півпрямої.



*Неевклідовим кутом* будемо називати сукупність двох неевклідових півпрямих, що виходять з однієї неевклідової точки.

В цій моделі роль рухів відіграють інверсії з центрами на прямій . Тому для неозначуваного поняття «конгруентність» дамо такі означення.

Назвемо неевклідів відрізок  *конгруентним* неевклідову відрізку , якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає евклідову кругову дугу  в кругову дугу .

Аналогічно, назвемо неевклідів  *конгруентним* неевклідовому куту , якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає сторони першого кута на сторони другого кута.

Можна перевірити, що аксіоми другої, третьої та четвертої груп теж виконуються.

Перевіримо, чи виконується на цій моделі аксіома Лобачевського.

Візьмемо будь-яке півколо  верхньої півплощини, ортогональне до прямої  (неевклідову пряму). Нехай  – деяка точка верхньої півплощини, яка не належить цьому півколу. Легко перевірити що через точку  проходить нескінченно багато різних півкіл, ортогональних до прямої , які не мають спільних точок з півколом . Іншими словами можна сказати: через довільну неевклідову точку, що лежить поза даною неевклідовою прямою, проходить нескінченно багато різних неевклідових прямих, які не перетинають дану пряму. Отже, в системі об’єктів, що розглядаються, має місце постулат Лобачевського. Таким чином, ця система представляє собою модель геометрії Лобачевського.

**Приклади розв’язання задач**

**Задача 1.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Середня лінія трикутника менша половини його основи».

***Доведення.*** Розглянемо трикутник ,  – середня лінія. Доведемо, що .

Через середини сторін  і  проведемо пряму і опустимо на неї перпендикуляри з вершин трикутника. Рівності  та  для пар вертикальних кутів і рівність за умовою відмічених пар відрізків дає можливість зробити висновок  та  про рівність прямокутних трикутників (за гіпотенузою та гострим кутом). З цього випливає, що  та , тобто . Отриманий чотирикутник  є чотирикутником Саккері. В цьому чотирикутнику , тобто . В трикутнику : , тобто , звідки .

З того, що  та  випливає, що . Таким чином, .

 **Задача 2.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Кут, під яким діаметр кола видно з будь-якої точки цього кола, відмінної від кінців діаметра, – гострий»

******

***Доведення.*** Розглянемо коло з центром в точці  та діаметром . Візьмемо на колі довільну точку  та розглянемо утворений трикутник . З того, що  як радіуси випливає, що  та . Сума кутів трикутника в геометрії Лобачевского менша , тому

,

Або . Отже, , тобто він гострий. Доведено.

**Задача 3.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «В прямокутному трикутнику величина хоча б одного з його кутів менше ».

***Доведення*.** В прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює . Якщо припустити, що кожен з останніх двох кутів не менший за , то їх сума буде більшою за . Ми отримали суперечність, оскільки в геометрії Лобачевского сума внутрішніх кутів трикутника менша за .

**Задача 4.** Довести твердження: «Якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні» (четверта ознака рівності трикутників.)

******

***Доведення.*** Розглянемо трикутники  та , в яких , , . Потрібно довести рівність відповідних сторін цих трикутників.

Припустимо, що . Існує така точка , що . Через точку  проведемо півпряму  так, що . За теоремою 46 пряма  паралельна стороні . За аксіомою Паша промінь  перетинає відрізок , позначимо точку перетину . Трикутники  і  конгруентні (за теоремою 15). Ми довели, що трикутники  і  подібні та не конгруентні. Але твердження про існування подібних не конгруентних трикутників є еквівалентом п’ятого постулату Евкліда. Отже, отримали протиріччя, а значить , звідки за теоремою 15 можемо зробити висновок про рівність даних трикутників.

**Задача 5.** Довести, що існують такі трикутники, навколо яких не можна описати коло.

***Доведення*.** На площині Лобачевського проведемо прямі . Через точку  проведемо пряму , яка з прямою  утворює кут  – кут паралельності . Візьмемо точку , побудуємо точку , яка симетрична точці  відносно прямої  та точку , яка симетрична точці  відносно прямої . Точки  не належать одній прямій, оскільки в противному випадку , що неможливо для кута паралельності. Розглянемо трикутник . В ньому пряма  є серединним перпендикуляром до сторони , пряма  є серединним перпендикуляром до сторони  та  за умовою, тому навколо цього трикутника не можна описати коло.

**Задача 5.** Довести, що ортогональна проекція однієї зі сторін гострого кута на іншу сторону є півінтервалом.



***Доведення.*** Розглянемо гострий кут . Відомо, що яким би не був гострий кут, завжди існує єдина пряма, перпендикулярна до сторони  цього кута і паралельна стороні . Отже, точка *С* не є ортогональною проекцією жодної з точок прямої  на сторону  кута, а кожна з точок півінтервала  буде ортогональною проекцією деякої точки сторони .

**Завдання 3 (20 балів)**

***(надіслати в папку Індивідуальне завдання)***

Довести наступні твердження в геометрії Лобачевського:

1. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша .

2. Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника менша за .

3. Для будь-яких двох паралельних прямих існує і тільки одна пряма, яка перпендикулярна одній із двох даних прямих і паралельна другій.

4. Будь-які дві паралельні прямі мають вісь симетрії.

5. Сума внутрішніх кутів трикутника не є постійною.

6. Множина точок площини, рівновіддалених від даної прямої є кривою (яка називається еквідистантою).

7. Ортогональна проекція однієї із сторін гострого кута на другу сторону є пів інтервалом.

8. Катет прямокутного трикутника, який є протилежним до кута з величиною , менший за половину гіпотенузи.