Лекція 2. Визначники та їх властивості.

Визначником n-го порядку, що відповідає квадратній матриці $A_{n\times n}$ називається число, яке позначається наступним чином

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правила обчислення визначників.

1. Якщо $n=1$, то $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.
2. Якщо $n=2$, то $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

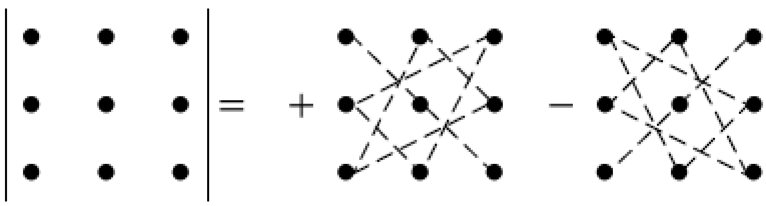
Приклад. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - (-1)\cdot 5 = 11$

3. Якщо $n=3$

а) правило трикутника

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$



Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 6 - (-3)\cdot 0\cdot(-1) - 5\cdot 6\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= 0 - 24 - 6 - 0 - 120 - 6 = -156$$

б) правило прямих (Саррюса)

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -3 & 6 & -4 \end{array}\right| = 4\cdot1\cdot(-3)+(-1)\cdot5\cdot6+2\cdot3\cdot(-4)-2\cdot1\cdot6-4\cdot5\cdot(-4)-$$

$$-(-1)\cdot3\cdot(-3) = -12-30-24-12+80-9=-7$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, отриманий з вихідного визначника викреслюванням $i-го$ рядка та $j-го$ стовпця.

Приклад. Для визначника $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ мінори

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot3-6\cdot(-1)=6+6=12$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20-(-1)=21 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-2=-2$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

тобто його мінор, взятий зі знаком «+», якщо $i+j$ – парне число, та із знаком «-», якщо $i+j$ – непарне число.

Для попереднього прикладу $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -12$, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -21$, $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -2$

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення до цих елементів:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розкладаючи його по елементам: а) першого рядка; б) другого стовпця.

а) $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} = 5 \cdot (-24) + 1 \cdot (-12) + (-3) \cdot 8 =$$

$$= -120 - 12 - 24 = -156$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - (-6)) = -12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8$$

б) $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{32} = 1 \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot (-36) =$$

$$= -12 - 144 = -156$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(30 - (-6)) = -36$$

Властивості визначників.

1. Величина визначника не змінюється при транспонуванні.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник рівний нулю.
3. При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник міняє знак.
4. Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він рівний нулю.
5. Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Обернена матриця.

Квадратна матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо добуток цих двох матриць в будь-якому порядку дорівнює одиничній матриці

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Матриця має обернену матрицю тільки в тому випадку, коли вона не вироджена, тобто $|A| \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник вихідної матриці A.
2. Обчислити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A.
3. Записати матрицю A^*, яка складається з алгебраїчних доповнень до елементів рядків, записаних в стовпчики з відповідними номерами
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
4. Записати обернену матрицю у вигляді
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
5. Робимо перевірку.

Приклад. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

1.Обчислимо визначник матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-18-6+20-3-16-45=-68$$

2. Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-9-8=-17, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(9-4)=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-(-3)=9, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-(15-(-2))=-17,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-(-1)=7, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4-5)=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=20-3=17, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-(8-(-3))=-12,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-6-15=-21.$$

3. Запишемо обернену матрицю у вигляді $A^{-1}=\dfrac{1}{-68}\begin{pmatrix}-17 & -17 & 17\\ -5 & 7 & -12\\ 9 & 1 & -21\end{pmatrix}$