Лекція 11. Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)-$ одна з первісних функцій $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)\ (x\in X)$, C – довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$	8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл

1. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ (за формулою **2**)

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$ (за формулою **2**)

3. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ (за формулою **3**)

4. $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + C$. (за формулою **10**)

5. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C$. (за формулою **11**)

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right| + C$. (за формулою **13**)

Методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Сталий множник можна винести з-під знака інтеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k = const, k \neq 0.$$

2. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b $(k \neq 0)$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл

7. $\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = (\textit{за правилом } 1) = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx + C$.

8. $\int (4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2})dx = (\textit{за правилами } 1 \ i\ 2) = 4\int dx - 3\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x dx =$

$= 4x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^x + C$.

9. $\int \sin(4x+3)dx = (\textit{за правилом } 3,\ k=4, b=3) = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$.

10. $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \int \frac{dx}{(3x)^2+2^2} = (\textit{за правилом } 3 \textit{ та формулою } 10) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} arctg \frac{3x}{2} + C$

2. Метод заміни змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

де $F(x)$ - первісна функція $f(x)$, $g'(x)$ - похідна функції $g(x)$.

При застосуванні цієї формули зручно до нової змінної t, поклавши $t = g(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x, запишемо диференціал $dt = g'(x)dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t: $\int f(t)dt = F(t) + C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t = g(x)$, остаточно отримаємо $F(g(x)) + C$.

Обчислення інтеграла методом заміни змінної зручно оформляти наступним чином

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{vmatrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Приклади. Обчислити інтеграл

11. $\int \sin^2 x \cos x dx$

Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t^2 dt = (\textit{за формулою } 2 \textit{ з таблиці інтегралів}) =$$

$$= \frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \begin{vmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{vmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = (\textit{за прикладом } 2) = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

13. $\int e^x \cos(e^x)dx$. Оскільки $(e^x)' = e^x$, то

$$\int e^x \cos(e^x)dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(e^x) + C$$