ЛЕКЦІЯ 2
КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ПРИ ПИЛОГАЗОВИХ ВИМІРАХ

Вимірюванням називають послідовність експериментальних операцій для знаходження фізичної величини, що характеризує об'єкт чи явище.

Виміряти – значить порівняти вимірювану величину з іншою, однорідною з нею величиною, прийнятою за еталон.

Усі вимірювання можна умовно поділити на прямі і непрямі (побічні).

Прямими називаються вимірювання, в процесі яких числове значення фізичної величини одержують безпосередньо шляхом порівняння з еталоном цієї величини, або відліковим пристроєм вимірювального приладу.

Непрямими називаються вимірювання, в процесі яких числове значення фізичної величини знаходять шляхом обчислень за формулами, попередньо підставивши в них результати прямих вимірювань. Таким чином, непрямі вимірювання завжди містять в собі (або складаються з них) прямі вимірювання.

Фізична величина — це властивість, якісно спільна для багатьох об'єктів або процесів, а кількісно — індивідуальна для кожного об'єкту або процесу. Фізична величина має два аспекти — кількісний та якісний [2].

Якісна ознака фізичної величини визначає її рід. Фізичні величини з однаковою якісною ознакою є однорідними (наприклад, довжина, висота, відстань, діаметр).

Кількісний вміст фізичної величини в певному об'єкті є розміром фізичної величини [2].

Числовим значенням фізичної величини називають число, що дорівнює відношенню виміряного розміру фізичної величини до розміру одиниці цієї фізичної величини.

Значенням фізичної величини називають відображення фізичної величини у вигляді її числового значення з зазначенням одиниці вимірювання. Значення фізичної величини можна отримати як результат обчислення або вимірювання.

При проведені пилогазових вимірів спостерігається виникнення похибок, які можуть чинити суттєвий вплив на результати дослідів. Тому при проведені досліджень виникає завдання встановити причину та величину похибок, та, як наслідок, погрішність вимірів.

Похибки при проведені вимірів класифікують [1]:

1) **Абсолютні – відносні.**

Істинним значенням x фізичної величини **X** називають таке її значення, яке ідеально відображає певну властивість об'єкта та не залежить від способу вимірювання. Це абсолютно точне значення фізичної величини.

Дійсним (умовно істинним) значенням $\bar{x}$ фізичної величини **X** називають знайдене експериментальним шляхом значення, настільки близьке до істинного, що заданих умов різницею між ними можна знехтувати.

Похибкою фізичної величини X називають різницю між її істинним **x** та дійсним $\bar{x}$ значеннями.

Абсолютна похибка фізичної величини Δx - це різниця за модулем між її істинним та дійсним значеннями:

$$\Delta x = |x - \bar{x}| . \tag{1.1}$$

Абсолютна похибка Δx фізичної величини показує, наскільки істинне значення **x** фізичної величини відрізняється від дійсного $\bar{x}$. Розмірність абсолютної похибки відповідає розмірності фізичної величини.

Користуючись значенням модуля числа вираз (1.1) можна переписати так [2]:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x . \tag{1.2}$$

Визначення абсолютної похибки **Δx** за формулою (1.1) точне, але на практиці не може бути застосоване, бо в ньому є величина, яку виміряти неможливо — істинне значення **x** фізичної величини [2]. Тому під час розрахунку абсолютної похибки Δx_i *i*-того повторного вимірювання замість істинного значення **x** необхідно брати найближче до нього значення, яке можна знайти — вибіркове середнє $\bar{x}$ (дійсне), і від нього віднімають значення *i*-того повторного вимірювання.

Відносна похибка δx фізичної величини чисельно дорівнює відношенню абсолютної похибки **Δx** вимірювання до її істинного значення **x**:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \tag{1.3}$$

Зазвичай відносну похибку **δ*x*** виражають у відсотках. Тоді (1.3) записують так:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% \tag{1.4}$$

Обернену до відносної похибки величину **ψ називають точністю**:

$$\psi = 1/\delta x \tag{1.5}$$

2) **Систематичні – випадкові.**

Систематичні – це ті, що повторюються з досліду в дослід і мають одне й теж значення. З них можна виділити: **виправлення** (уточнюючі теорію, постійні впливи й т.п.), **невідомого походження** (недостатньо розроблена теорія, складний експеримент) і **клас точності приладів.** Найчастіше клас точності приладів уважається основним джерелом систематичних помилок. В електровимірювальних приладах звичайно є класи від 0.05 до 4. Для класу 0.5 при загальній шкалі 100 розподілів показання приладу даються не точніше, чим 0.5% від усієї шкали, тобто 0.5 розподілу. Максимальні погрішності, що даються іншими вимірювальними приладами, іноді наносяться на самі прилади (наприклад, багато лінійок мають напис 0.1 мм). Це ціна розподілу. Треба мати на увазі, що в реальності експериментатор зможе зробити вимір лінійкою з точністю, не краще 0.25 мм [1].

Випадкові помилки беруть своє походження з безлічі одночасно діючих джерел перешкод. Вони проявляються лише при багаторазових вимірах. Це помилки, які піддаються обробці за допомогою математичної статистики, більш точно, теорії ймовірностей. Їхня непередбачуваність, таким чином, зводиться до мінімуму.

Важливий тип випадкових – систематичних помилок - **промахи**, тобто грубі помилки, що виникли в ході експерименту.

Їх треба вміти відокремити від нормальних вимірів, основний спосіб їх усунення - це увага й старанність.

1.2 Теорія випадкових похибок

Для визначення значень вимірюваної величини служать прямі і непрямі вимірювання.

Випадкові похибки піддаються строгому математичному опису, що дозволяє робити висновки про якість вимірювань, у яких вони наявні. Похибки інших типів більш складні для аналізу, їх виявляють і аналізують тільки в умовах конкретного експерименту. Для одного вимірювання випадкові похибки не піддаються обліку, однак для ряду повторних вимірювань однієї тієї самої постійної величини, проведених з однаковою старанністю, їх вплив на отриманий результат після виключення систематичних і грубих похибок можна оцінити з певною імовірністю.

Теорія випадкових похибок, заснована на методах теорії ймовірностей і математичної статистики, дозволяє при проведенні певної кількості повторних вимірювань уточнити кінцевий результат. Внаслідок цього теорія випадкових похибок широко використовується для оцінки точності вимірювань і надійності роботи вимірювальних приладів.

Нехай величина **X** виміряна **n** раз. Тоді відповідно до теорії ймовірності найбільш імовірне значення вимірюваної величини дорівнює її середньому вимірювальному значенню при нескінченно великому **n**:

$$\bar{x}_{вим} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (1.7)$$

де x_i – результат i-го вимірювання (i=1, 2,…, n)

Умова, в якій **x**→**X** при $\boldsymbol{n}\to\infty$, правильна тільки в тому ідеальному випадку, коли систематичні похибки повністю виключені. Якщо кількість $\boldsymbol{n}$ вимірювань обмежена, то найбільш близьким до цього значення є **середнє арифметичне значення**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1.8)$$

Середнє значення вимірюваної величини $\bar{x}$ показує центр розподілу, біля якого групуються результати окремих вимірювань.

Дисперсію вводять як середній квадрат відхилення окремих результатів від середнього значення випадкової величини:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} . \qquad (1.9)$$

Основною характеристикою випадкової похибки є **середня квадратична похибка.** Необхідно чітко розрізняти середню квадратичну похибку **σ** для одиничного (окремого) вимірювання і середню квадратичну похибку $\sigma_{\bar{x}}$ для середнього значення $\bar{x}$.

Середня квадратична похибка одиничного вимірювання обчислюється за результатами ***n*** вимірювань $\boldsymbol{x_1, x_2,\dots,x_n}$, тобто визначають як квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad (1.10)$$

Як наслідок, зі способу обчислення ця величина характеризує розкид результатів окремих вимірювань навколо середнього значення, одержуваного після обробки всіх даних багаторазового вимірювання. Значення $\boldsymbol{\sigma}$ є основною характеристикою для визначення точності даного способу вимірювань. Хоча величина $\boldsymbol{\sigma}$ характеризує випадкову похибку результату одиничного вимірювання, виконаного даним методом, сама вона може бути визначена тільки з результатів досить великої кількості вимірювань і тим точніше, чим більше n (на практиці можна обмежитися значенням n = 10-50). При кінцевих n доцільніше використати термін **експериментальна оцінка**, що так само відносять і до середнього значення, і до дисперсії [1-4].

Зі збільшенням кількості ***n*** вимірювань середньоквадратична похибка зменшується. Через обмеження кількості ***n*** вимірювань $\boldsymbol{\sigma}$ збігається з випадковою похибкою тільки з певною ймовірністю, так званою довірчою ймовірністю p, тому результат вимірювань величини x подають у вигляді

$$x = \bar{x} \pm \alpha_{n,p} \cdot \sigma , \qquad (1.11)$$

де $\alpha_{n,p}$ - коефіцієнт Стьюдента, залежить як від кількості ***n*** вимірювань, так і від заданої випробувачем довірчої ймовірності $\boldsymbol{p}$.

Для попередньої оцінки ступеня вірогідності окремого ряду вимірювань, крім середнього квадратичного відхилення, застосовується **також імовірна похибка $\Delta_{ім}$:**

$$\Delta_{iм} = 0{,}675 \times \sigma \tag{1.12}$$

1.3 Графічна характеристика похибок

При побудові діаграми, яка показує, як часто отримуються ті або інші результати вимірювання, можливо наочно вивчити закономірні за якими розподіляються випадкові похибки. Така діаграма отримала назву **гістограма розподілу результатів вимірювання.**

Гістограма – східчаста діаграма, що показує, як часто при вимірюваннях виникають результати, що потрапили у той або інший інтервал Δx між найменшим $\mathbf{x_{min}}$ і найбільшим $\mathbf{x_{max}}$ з обмірюваних значень величини x. Гістограму будують у таких координатах: по осі абсцис відкладають вимірювану величину x, по осі ординат – $\mathbf{\Delta n/n\Delta x}$ (рис.1.1).

Тут $\boldsymbol{n}$ – повна кількість проведених вимірювань, $\boldsymbol{\Delta n}$ – кількість результатів, що потрапили в інтервал $\mathbf{[x, x+\Delta x]}$.

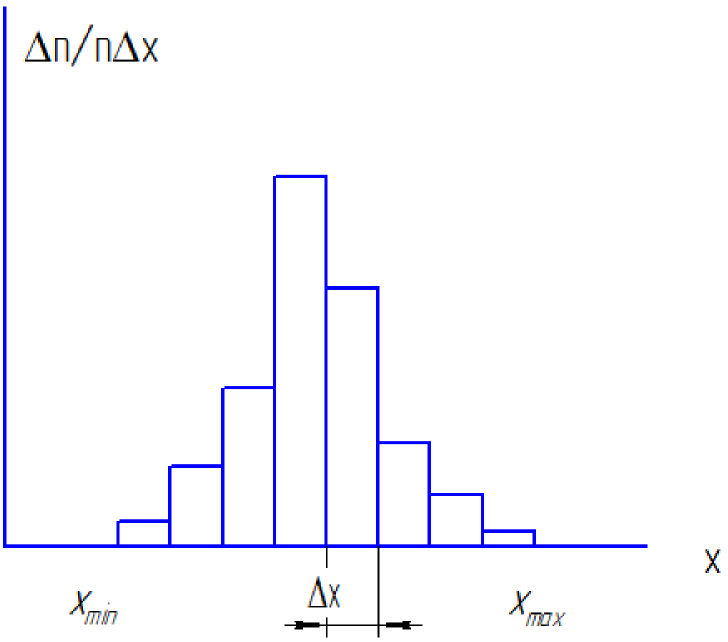


Рисунок 1.1 – Гістограма

Відношення $\boldsymbol{\Delta n/n}$ є часткою результатів, що попали в зазначений інтервал. Воно має сенс імовірності потрапляння результату окремого вимірювання в даний інтервал. Вираз $\mathbf{\Delta n/(n\cdot\Delta x)}$, одержуване після розподілу $\boldsymbol{\Delta n/n}$ на ширину інтервалу $\mathbf{\Delta x}$, набуває сенсу щільності ймовірності.

При дуже великій кількості вимірювань $\boldsymbol{(n\to\infty)}$ весь діапазон зміни величини x можна розбити на нескінченно малі інтервали $\mathbf{\Delta x}$, як це робиться в математиці, і знайти кількість результатів $\boldsymbol{\Delta n}$ у кожному з них.

У цьому випадку гістограма перетвориться в плавну криву - графік функції:

$$\rho(x) = \frac{dn}{n \cdot dx} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}. \qquad (1.13)$$

Таку функцію називають **щільністю ймовірності**, або **розподілом** імовірності, іноді – просто розподілом величини **x**. Розподіл виступає в ролі остаточної характеристики випадкової величини. Закон розподілу можна задати у вигляді функціонального вираження, графіка, таблиці або іншим способом. При будь-якому варіанті завдання встановлюється зв'язок між імовірністю того, що результат однократного вимірювання випадкової величини потрапить у заданий інтервал можливих значень і шириною цього інтервалу.

Розподіл містить найбільш повну інформацію про випадкову величину, однак користуватися ним не завжди зручно. Оперуючи результатами проведеного експерименту, замість функції розподілу краще мати звичні числові величини – ними є **середнє значення і дисперсія.**

На рис.1.2 наведені гістограми, побудовані для різної кількості *n* вимірювань. На гістограмі (рис.1.2*а*) для *n*=5 тільки-но визначається картина розкиду результатів; на гістограмі (рис.1.2*б*) для *n*=50 уже проявляється певна закономірність, що стає ще більш виразною на рис.1.2*в* для *n*=300 [2].

Гістограми, побудовані за великою кількості вимірювань, дозволяють вивчити закономірності, властиві випадковим похибкам. Гістограма на рис.1.2 *в* практично симетрична, має вигляд дзвону, положення її максимуму близьке до *X*. Це означає, що випадкові похибки приблизно з однаковою частотою набувають як позитивних, так і негативних значень; більші похибки трапляються рідше, ніж менші.

Ширина гістограми, що практично не залежить від кількості вимірювань, характеризує зону розсіювання результатів вимірювань, тобто випадкові похибки одиничних (окремих) вимірювань. Вона залежить від приладів, методів і умов вимірювань. Це бачимо з порівняння з гістограмою на рис.1.3, отриманої при тих самих вимірюваннях іншим, більш удосконаленим методом. Гістограма (рис.1.3) також має вигляд дзвону але ширина її в 5 разів менша, ніж на рис.1.2*в*.

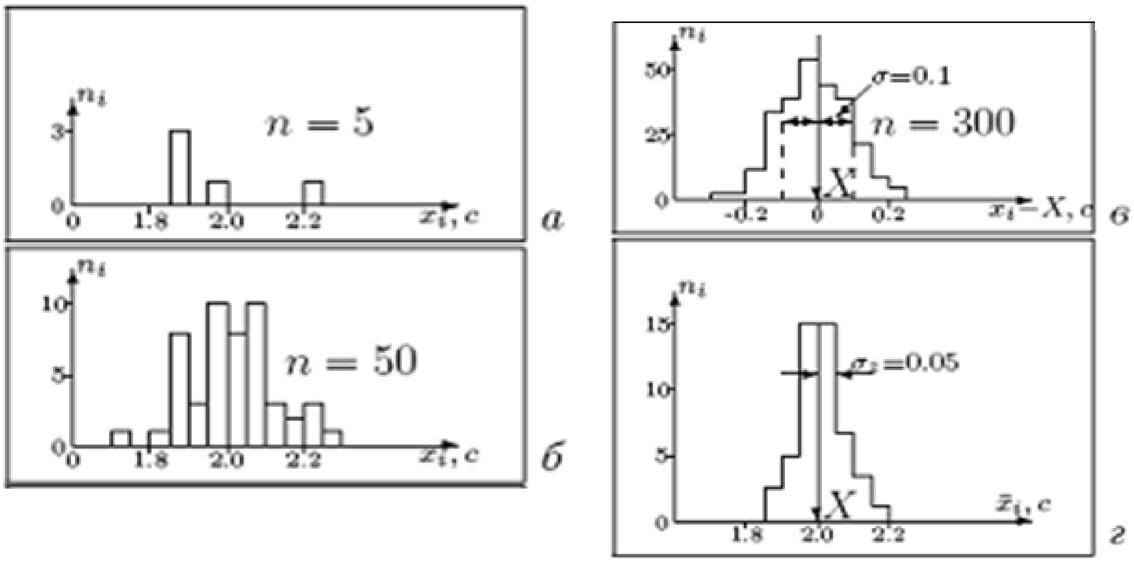


Рисунок 1.2 – Гістограми результатів проведених вимірювань

Гістограми, побудовані за великою кількості вимірювань, дозволяють вивчити закономірності, властиві випадковим похибкам. Гістограма на рис.3.2 *в* практично симетрична, має вигляд дзвону, положення її максимуму близьке до *X*. Це означає, що випадкові похибки приблизно з однаковою частотою набувають як позитивних, так і негативних значень; більші похибки трапляються рідше, ніж менші.

Ширина гістограми, що практично не залежить від кількості вимірювань, характеризує зону розсіювання результатів вимірювань, тобто випадкові похибки одиничних (окремих) вимірювань. Вона залежить від приладів, методів і умов вимірювань. Це бачимо з порівняння з гістограмою на рис.1.3, отриманої при тих самих вимірюваннях іншим, більш удосконаленим методом. Гістограма (рис.1.3) також має вигляд дзвону але ширина її в 5 разів менша, ніж на рис.1.2*в*.

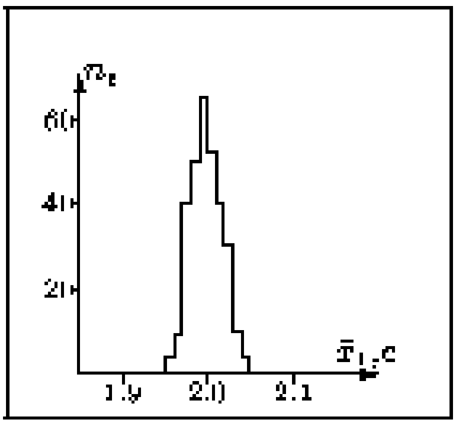


Рисунок 1.3 – Гістограма результатів проведених вимірювань удосконаленим методом

Необхідно відзначити таку важливу обставину. Гістограми розподілу результатів вимірювання, отримані при вимірюваннях фізичних величин, виконаних за допомогою різноманітних приладів і методів, здебільшого дуже схожі за формою на гістограмах рис.1.2 *в* і рис.1.3. Вони розрізняються тільки шириною гістограми і положенням максимуму, тобто величиною X. При такому розподілі говорять, що вони підпорядковуються закону Гауса (розподіл Гауса, або нормальний розподіл). У теорії похибок наводиться математичний вираз для розподілу Гауса (нормального розподілу):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\cdot\sigma^2}}, \tag{1.14}$$

де X – істинне значення вимірюваної величини;

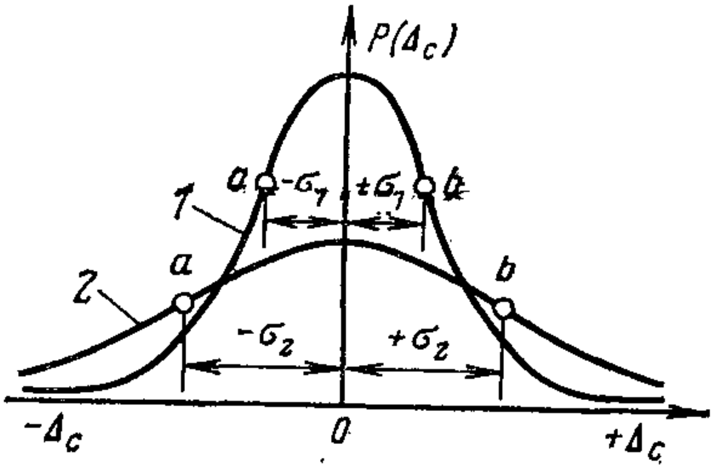
σ – середня квадратична похибка;

σ^2 – дисперсія.

На рис.1.4 показані криві 1 і 2 нормального розподілу випадкових похибок, побудованих за формулою (1.12), для двох значень середнього квадратичного відхилення σ, причому в кривій 1 це відхилення у два рази менше, ніж у кривій 2. Криві розподілу симетричні щодо осі ординат, тобто поява рівних за величиною, але протилежних за знаком випадкових похибок має однакову ймовірність, у середній частині криві утворять опуклість, по обидва боки від якої перебувають точки перегину a і b, нижче яких криві стають угнутими, асимптотично наближаючись до осі абсцис. Найбільша ймовірність для обох кривих відповідає випадковій похибці Δ_c=0. При зростанні похибки з будь-яким знаком імовірність її появи зменшується.

Як бачимо з рис.1.4, криві розподілу 1 і 2 мають різні відстані між точками a і b перегину кривих. Проміжки між цими точками і віссю ординат дорівнюють середньому квадратичному відхиленню $\pm\sigma$ результату вимірювання, що характеризує ступінь розсіювання (розкиду) значень випадкових похибок. Чим нижче значення σ, тим менше розсіювання похибок, тому що при цьому майже вся площа під кривою розподілу розміщується поблизу осі ординат, що збільшує ймовірність появи менших і зменшує появу більших похибок. Отже, зменшення σ приводить до підвищення точності вимірювань.

Основні характеристики кривої нормального розподілу випадкових похибок наведені на рис.1.5. Імовірність того, що випадкові похибки не вийдуть за межі (границі) якого-небудь інтервалу, визначається за площею, обмеженої кривою розподілу і цим інтервалом, відкладеним по осі абсцис. Такий інтервал $\pm\varepsilon$ називається **довірчим інтервалом**, а відповідна йому ймовірність появи випадкової похибки (заштрихована площа) *Ф(t)* (Рдов) – **довірчою ймовірністю**.



1 – при σ_1; 2 – при σ_2=2σ
Рисунок 1.4 – Криві нормального розподілу випадкових похибок

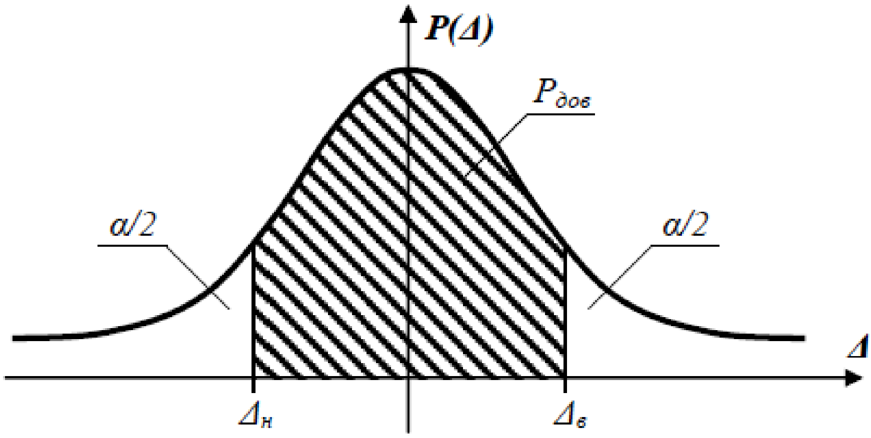


Рисунок 1.5 – Основні характеристики кривої нормального розподілу випадкових похибок

Довірчий інтервал, що характеризує ступінь відтворюваності результатів вимірювання, може мати різні значення, причому при великому довірчому інтервалі виходить і більша довірча ймовірність. При вимірюванні може задаватися або довірчий інтервал і за ним визначатися довірча ймовірність, або, навпаки, за довірчою імовірністю підраховуватися довірчий інтервал. Таким чином, для характеристики значення випадкової похибки необхідно мати дві величини - довірчий інтервал і довірчу ймовірність.

Функція *f(x)*, що називається щільністю розподілу результатів вимірювання (1.12), має такий сенс: *f(x)dx* є ймовірність того, що окреме випадково обране значення багаторазово вимірюваної величини виявиться в інтервалі від *x* до *x*+*dx*. З рис.1.4 бачимо, що при зменшенні σ крива нормального розподілу стискується уздовж осі *Ox* і витягується уздовж осі *f(x)* (*P*(Δ_c)). Результати вимірювання групуються навколо істинного значення *X* і тим тісніше, чим менше σ. Імовірність того, що результат вимірювання потрапить у довірчий інтервал (X-Δx, X+Δx):

$$P = \int_{X-\Delta x}^{X+\Delta x} f(x)dx. \tag{1.14}$$

Для повноти опису випадкової похибки необхідно вміти зазначати ймовірність *P(k)* потрапляння результату вимірювання x_i в інтервал будь-якої заданої напівширини Δx, тобто в довірчий інтервал ε ($\varepsilon = \Delta x$):

$$X - \Delta x < x_i < X + \Delta x, \tag{1.15}$$

де Δx зручно виражати через σ і певний множник k:

$$\Delta x = k \cdot \sigma. \tag{1.16}$$

У таблиці 1.1 наведені значення цього інтеграла для різних значень $\Delta x = k\sigma$, а також визначені теоретично значення *P(k)*. Імовірність *P(k)* змінюється від 0 до 1 при зміні k від 0 до ∞. Однак уже при k=2 імовірність $P(2) = 0,95$, а при k=3 маємо $P(3) = 0,997$. Імовірність 0,997 означає, що з 1000 вимірювань у середньому 997 потраплять в інтервал від $X - 3\sigma$ до $X + 3\sigma$ і тільки три вимірювання будуть мати відхилення більше 3δ. Тому з деякою часткою умовності величину Δx=3σ називають **граничною похибкою вимірювання**.

Таблиця 1.1 - Значення величини довірчої ймовірності

$k = \dfrac{\Delta x}{\sigma}$ або $k = \dfrac{\Delta \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}}$	Довірча ймовірність *P(k)*
1	0,68
2	0,95
2,6	0,99
3	0,997

Нерівність (1.15) можна записати в іншому вигляді:

$$x_i - \Delta x < X < x_i + \Delta x, \tag{1.17}$$

або

$$X = x_i \pm \Delta x. \tag{1.18}$$

Цей запис має наступну важливу інтерпретацію. Зробивши одне вимірювання певної величини і одержавши її значення x_i, можна стверджувати, що істинне значення величини X перебуває в інтервалі від x_i — Δx до $x_i + \Delta x$ з імовірністю *P(k)*. Інтервал, у якому із заданою ймовірністю P перебуває істинне значення вимірювальної величини, називається *довірчим інтервалом*. Відповідна ймовірність P — *довірча ймовірність* цього інтервалу.

Напівширина довірчого інтервалу є оцінкою похибки результату вимірювання.

Примітка. Імовірність P іноді називають надійністю.

Якщо в завданні вимірювання задана максимально припустима похибка вимірювання, то зменшити похибку до заданої величини можна, або збільшуючи кількість n вимірювань при незмінній довірчій імовірності, або зменшуючи довірчу ймовірність при тій самій кількості n вимірювань, або збільшуючи n і зменшуючи P одночасно.

На практиці прийнято обирати P такою, що дорівнює 0,7 для всіх видів вимірювань. Клас точності засобу вимірювання визначають на заводі-виробнику за умови, що P=0,7.

1.4 Похибка середнього значення

Випадкову похибку можна зменшити, якщо провести не одне, а кілька вимірювань і як результат вимірювання взяти середнє значення $\Delta\bar{x}$. Вивчаючи випадкові похибки одиничних вимірювань, розглядалася велика сукупність однорідних вимірювань. Діємо так само із середніми, одержавши з досвіду велику кількість різних середніх значень однієї тієї самої вимірюваної величини. Нехай, наприклад, виконано чотири вимірювання і знайдено їхнє середнє значення $\Delta\bar{x}_1$. Виконавши ще чотири вимірювання, одержимо трохи інше $\Delta\bar{x}_2$. Зробивши таку операцію досить велику кількість раз, можна побудувати гістограму розподілу середніх значень $\Delta\bar{x}_i$.

Теорія дає такий зв'язок між середньою квадратичною похибкою середнього значення, середньою квадратичною похибкою одиничного вимірювання $\sigma_{\bar{x}}$ і кількістю вимірювань n, використаних для обчислення середнього $\Delta\bar{x}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (1.19)$$

Співвідношення (1.19) має велике значення для теорії похибок. По-перше, з нього проглядається значна роль σ, від якої залежать похибки не тільки одиничного вимірювання, але й усередненого результату. По-друге, (1.19) являє собою закон зменшення випадкової похибки при зростанні кількості вимірювань. Наприклад, бажаючи зменшити похибку в 2 рази, ми повинні зробити замість одного чотири вимірювання; щоб зменшити похибку в 3 рази - 9 вимірювань, а 100 вимірювань зменшують похибку результату в 10 разів. Цей шлях зменшення випадкової похибки часто використовують на практиці. При цьому не слід забувати, що формула (1.19) справедлива тільки для випадкової складової похибки вимірювань. Систематична похибка, а також значною мірою інструментальна похибка не зменшуються при зростанні кількості вимірювань.

Таким чином, все сказане про зв'язок між довірчою ймовірністю *P(k)* і похибкою $\Delta x = k\sigma$ одиничного вимірювання справедливо і для похибки $\Delta\bar{x}$ середнього. При цьому потрібно тільки замінити σ на $\sigma_{\bar{x}}$.

Якщо як результат вимірювання береться середнє $\bar{x}$ з n вимірювань, то

$$X = \bar{x} \pm \sigma . \qquad (1.20)$$

Причому напівширину довірчого інтервалу $\Delta\bar{x}$ (похибка середнього) для заданої довірчої ймовірності *P(k)* можна визначити в такий спосіб.

1. Припустимо, що з великої серії певних вимірювань значення $\sigma_{\bar{x}}$ відомо; воно характеризує похибку даного методу вимірювань. Тоді для нової серії подібних вимірювань похибка середнього значення

$$\Delta\bar{x} = k \cdot \sigma_{\bar{x}} = \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (1.21)$$

де n – кількість проведених вимірювань досліджуваної величини.

2. Якщо значення $\sigma_{\bar{x}}$ невідомо, але оброблювана серія вимірювань (x_1, x_2,..., x_n) досить велика (n більше 10-20), то σ і $\sigma_{\bar{x}}$, знаходять із цієї серії. Тоді

$$\Delta\bar{x} = k \cdot \sigma_{\bar{x}} = \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = k\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} . \qquad (1.22)$$

У такий спосіб для характеристики випадкової похибки необхідно зазначити два числа – саму похибку, тобто напівширину довірчого інтервалу Δx або $\Delta\bar{x}$, і пов'язану з нею довірчу ймовірність P. У фізичній науковій літературі звичайно беруть P=0,68, тобто зазначають середню квадратичну похибку.

1.5 Похибка середнього, обумовлена малою кількістю вимірювань

На практиці часто зустрічається випадок, коли проводиться невелика кількість вимірювань (n 2-10). Для них обчислюється середнє і на підставі тільки цих вимірювань оцінюється похибка середнього $\Delta\bar{x}$. У цьому випадку похибки вимірювань заздалегідь не вивчалися і значення σ невідомо. Тому не можна скористатися формулою (1.19), а формула (1.20) для малої кількості вимірювань дає погані результати Похибка $\Delta\bar{x}$ обчислена за (1.20) для малої кількості вимірювань, має інше значення довірчої ймовірності. У випадку малого n правильна оцінка похибки заснована на використанні так званого розподілу Стьюдента (*t-розподілу*).

За результатами n вимірювань ($n \geq 2$) обчислюємо середнє $\Delta\bar{x}$ і напівширину довірчого інтервалу:

$$\Delta\bar{x} = t_{P,f} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} \ . \tag{1.23}$$

Цей вираз відрізняється від (1.22) множником перед радикалом. Замість множника k (функції довірчої ймовірності P) використовується множник $t_{P,f}$, що є функцією не тільки P, але й кількості вимірювань. Параметр f, названий числом ступенів свободи, у цьому випадку відповідає f=n—1, де n – пп кількість вимірювань. Значення $t_{P,f}$, розраховані за теорією ймовірностей, наведені в табл.1.2.

Даний метод оцінки похибки середнього значення придатний для будь-якої кількості вимірювань – як для малої, так і великої. При більших n він переходить у більш простий метод (1.22). Дійсно, з табл.1.2 бачимо, що при зростанні n значення $t_{P,f}$ прагне до відповідного значення k; наприклад, $t_{P,f} \rightarrow 1{,}96 \approx 2$ при P = 0,95. Відношення $t_{P,f}/k > 1$ зростає зі зменшенням n і збільшенням P. Розбіжність у значеннях $\Delta\bar{x}$, обчислених за (1.23) і наближеною формулою (1.22) тим більше, чим менше n.

Таблиця 1.2 – Значення коефіцієнта $t_{P,f}$

f=n-1	Значення коефіцієнта $t_{P,f}$			
	P=0,9	P=0,935	P=0,95	P=0,957
1	6,31	12,71	63,66	636,6
2	2,92	4,3	9,93	31,6
3	2,35	3,18	5,84	12,9
4	2,13	2,78	4,6	8,6
5	2,02	2,57	4,03	6,9
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,9	2,37	3,5	5,4
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,6
20	1,73	2,09	2,85	3,85
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,65	1,96	2,58	3,29