

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

М.А. Шеремет

Лекции по курсу
Математическое моделирование и алгоритмизация
задач теплоэнергетики

Томск 2009

Лекция №1

Введение. Математическое моделирование. Этапы математического моделирования. Основные этапы численного решения задачи на компьютере. Классификация погрешностей численного решения.

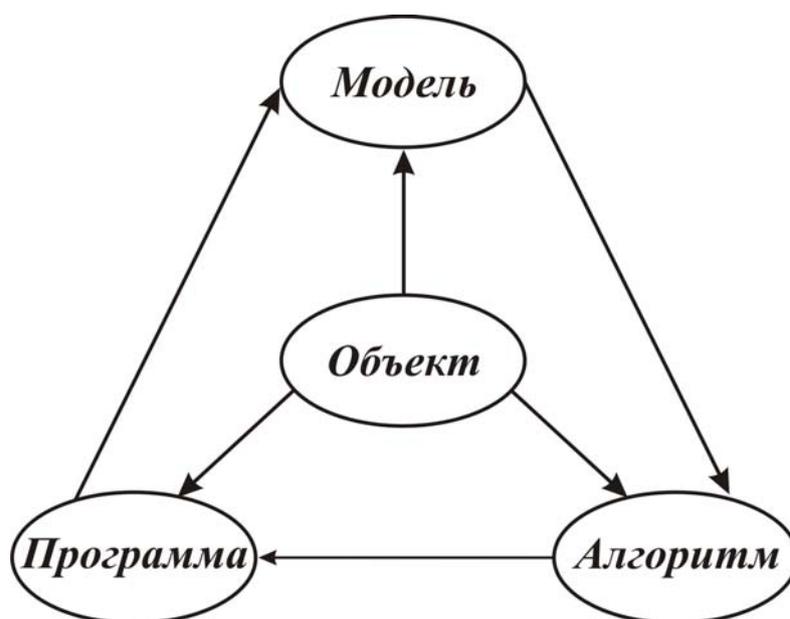
Невозможно представить себе науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его “образом” – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот “третий метод” познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово “алгоритм” происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми.

Второе “рождение” этой методологии пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами.

Первая из них – появление ЭВМ (компьютеров). Вторая – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа.



На первом этапе выбирается (или строится) “эквивалент” объекта, отражающий в математической форме важнейшие свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям и т.д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап – выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не исказить основные свойства модели и, следовательно, исходного

объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, “переводящие” модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности.

Создав триаду “модель – алгоритм – программа”, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который сначала отлаживается, тестируется на “пробных” вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные “опыты”, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта.

Рассмотрим два примера.

1. Предположим, что нам необходимо проанализировать распределение температуры в конструктивном элементе теплоэнергетического оборудования (некоторый 3d объект). Для этого мы воспользуемся трехмерным нестационарным уравнением теплопроводности.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

где ρ – плотность; C_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; $T = T(x, y, z, t)$; $\lambda = \lambda(x, y, z)$.

Наиболее сложная и ответственная работа при постановке задачи заключается в выборе связей и характеристик явления, существенных для данной задачи и подлежащих включению в математическую модель.

Вторая стадия работы – это математическое исследование. В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы. Для наиболее грубых и несложных моделей зачастую удается получить аналитические решения. Обычно используют некоторые математические приближения при анализе сложных объектов.

Например, в нашей модели определения температурного поля можно предположить $\lambda = \text{const}$.

Тогда

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

и если мы рассматриваем бесконечно длинную и широкую пластину, то нас интересует распределение температуры только по глубине пластины.

Таким образом, уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

где $T = f(z, t)$; $\lambda = \text{const}$.



Такой поэтапный анализ задачи позволяет провести наиболее оптимальную декомпозицию для вычленения значимых характеристик.

2. Необходимо определить тепловые потери на теплотрубопроводе.

Конечно, вы можете использовать известные методики по определению потерь, но все они строятся в основном на интегральных (балансовых) соотношениях и при этом не учитываются пространственно-временные изменения определяемых параметров.

Поэтому необходимо смоделировать процесс движения теплоносителя по трубопроводу.



Изолятор – минеральная вата (толщина 70 мм)
 пенополиуретан (ППУ, толщина 50 мм)
 диаметр условного прохода 600 мм.

Рассмотрим ряд моделей, которые можно применять для анализа поставленной задачи.

Модель 1.

- течение теплоносителя – турбулентное (уравнения Рейнольдса);
- теплофизические характеристики зависят от температуры;
- процесс переноса тепла – нестационарный;
- изоляция – пористый материал.

Модель 2.

- течение теплоносителя – ламинарное (уравнения Навье-Стокса);
- теплофизические характеристики являются постоянными;
- процесс переноса тепла – нестационарный;
- изоляция – сплошная среда с эффективными параметрами.

Модель 3.

- течение теплоносителя – ламинарное (модель пограничного слоя – уравнения Прандтля);
- теплофизические характеристики являются постоянными;
- процесс переноса тепла – нестационарный;
- изоляция – сплошная среда с эффективными параметрами.

Численные методы являются одним из мощных математических средств решения задач. Существуют задачи, где без использования достаточно сложных численных методов не удалось бы получить ответа. Более того, часто требуется выполнить огромное число действий за короткое время, иначе ответ не нужен. Например, суточный прогноз погоды должен быть вычислен за несколько часов, коррекцию траектории ракеты надо рассчитать за несколько минут...

Основные этапы численного решения задачи на ЭВМ

Решение прикладных задач математической физики с использованием ЭВМ можно разбить на несколько этапов:

1) *Физическая постановка задачи.* На этом этапе осуществляется физическая постановка задачи и намечается путь ее решения.

2) *Математическое моделирование.* На этом этапе строится или выбирается математическая модель, описывающая соответствующую физическую задачу. Модель должна адекватно описывать основные законы физического процесса.

3) *Выбор численного метода.* Для решения задачи необходимо найти численный метод, позволяющий свести ее к некоторому вычислительному алгоритму.

4) *Разработка алгоритма решения задачи.* Алгоритм решения задачи записывается как последовательность логических и арифметических

операций. Алгоритм можно представить в виде блок-схемы или стилизованной диаграммы.

5) *Составление программы.* Программа, реализующая алгоритм решения задачи, записывается на одном из языков программирования высокого уровня (это зависит от математического обеспечения ВЦ, где предполагается решение задачи).

6) *Отладка программы.* Отладка программы состоит из 2-х этапов: тестирование и исправление ошибок.

7) *Счет по отлаженной программе.* На этом этапе готовятся исходные данные для рассчитываемых вариантов и осуществляется счет по отлаженной программе.

8) *Анализ результатов счета.* Полученные с помощью ЭВМ результаты численного счета анализируются, сравниваются с экспериментальными данными, и оформляется соответствующая научно-техническая документация.

9) *Внедрение полученных результатов.*

Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач на ЭВМ

Одним из главных вопросов, возникающих при численном решении задач математической физики, является оценка достоверности полученного результата. Получение такой оценки усложняется, если в распоряжении исследователя нет экспериментальных или каких-либо иных результатов. Источник возникновения погрешностей можно проследить, следуя вышеприведенным этапам численного решения задачи. Во-первых, это погрешность, вносимая математической моделью задачи. Величина погрешности, вносимой в результат математической моделью, может возрасти, если в модели не учтены какие-либо важные характеристики изучаемого явления.

Кроме того, исходные данные вносят свою долю (иногда основную) в образование погрешности результата.

Эти источники погрешности называют *неустраняемыми погрешностями*, так как их нельзя полностью устранить ни до начала решения задачи, ни, тем более, в процессе ее решения.

Не следует стремиться к уменьшению погрешности одних данных, оставляя другие без изменения. Это не приводит к повышению точности результата, поэтому на практике исходные данные задаются примерно с одинаковой точностью.

Еще одним источником погрешности является численный метод. Во многих численных методах, связанных, например, с приближенным вычислением интегралов или с нахождением промежуточных значений функции, заданной в виде таблицы, используется идея приближения функции с помощью алгебраического многочлена степени n . Это приводит к образованию погрешности, связанной с такой заменой.

Заметим, что приближенное вычисление интеграла осуществляется также путем замены его конечной суммой, исходя из определения интеграла. Такая замена приводит к погрешности. Этот список примеров можно продолжить. Заметим, что *погрешность численного метода* может быть уменьшена до разумных пределов за счет изменения некоторых параметров задачи, например, шага интегрирования.

При вычислении на ПЭВМ неизбежно возникает *погрешность округления* в силу ограниченности разрядной сетки компьютера.

Лекция №2

Математические модели теплоэнергетики

План:

1. Введение.
2. Теплопроводность твердых тел. Уравнение теплопроводности.
3. Замыкающие соотношения.
 - а. Начальные и граничные условия.
 - б. Условия сопряжения.
4. Примеры численного решения краевых задач теплопроводности.
 - а. Нестационарная задача теплопроводности в неоднородном стержне.
 - б. Нестационарная задача теплопроводности в неоднородной пластине.
 - с. Нестационарная задача теплопроводности в однородном сечении цилиндрической формы.

Введение

Объектом нашего исследования является тепловое поле, перенос тепла от одних участков твердого тела к другим. Тепловое поле на данный момент времени t определяется распределением температуры по телу, то есть функцией $T = T(x, y, z, t)$, где (x, y, z) – декартовы координаты. В простейшем случае тепловой поток направлен из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой.

Выделяют три основных способа переноса тепла:

- 1) теплопроводность – перенос тепла, определяемый взаимодействием микрочастиц соприкасающихся тел;
- 2) конвекция – перенос, обусловленный пространственным перемещением вещества. Наблюдается в движущихся средах (жидкости, газы);
- 3) излучение – перенос энергии в виде электромагнитных волн.

Во многих прикладных проблемах процесс переноса тепла осуществляется различными способами (сложный теплообмен). При описании конвективных переносов необходимо учитывать процессы теплопроводности между отдельными частями сплошной среды (тепло- и массоперенос). Радиационный теплообмен (излучение) может осложняться теплопроводностью, конвекцией и т.д. Примером такого сложного теплообмена могут служить процессы при фазовых превращениях, химических реакциях.

Уравнение теплопроводности

Основное положение теории теплопроводности, известное как закон Фурье, состоит в предположении пропорциональности теплового потока градиенту температуры в однородной неподвижной среде: $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$. Для получения уравнения теплопроводности запишем закон сохранения энергии в виде:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + f \quad (1)$$

где f – определяет мощность внутренних источников тепла; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Подстановка выражения для потока тепла в (1) позволяет записать дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (2)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (2) могут зависеть от точки пространства (неоднородная среда). В этом случае $C_p = C_p(x, y, z)$; $\rho = \rho(x, y, z)$; $\lambda = \lambda(x, y, z)$; $f = f(x, y, z)$, а само уравнение – линейное параболическое уравнение 2 порядка. Типичной в теплофизических исследованиях является ситуация, когда теплофизические свойства среды зависят от T , т.е. в уравнении (2) $C_p = C_p(T)$; $\rho = \rho(T)$; $\lambda = \lambda(T)$; $f = f(T)$. Таким образом, получаем квазилинейное уравнение теплопроводности.

Если теплофизические свойства среды постоянные (однородная среда), то уравнение теплопроводности (2) упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{f}{\rho C_p} \quad (3)$$

$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Другой частный случай уравнения теплопроводности (2) соответствует описанию установившихся тепловых полей. Стационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = -f \quad (4)$$

При моделировании теплопереноса в движущейся среде уравнение теплопроводности (2) соответствующим образом трансформируется, а именно:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (5)$$

здесь слагаемое $\vec{v}gradT$ определяет изменение температуры за счет конвективного переноса.

Уравнение теплопроводности в прямоугольной декартовой системе координат (в плоском случае) имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

в случае отсутствия внутренних тепловых источников.

$$\text{В полярной системе координат } (r, \varphi) \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right),$$

где $0 < r < \infty$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $T = T(r, \varphi, t)$; $\lambda = \lambda(r, \varphi, t, T)$.

Начальные и граничные условия

Распределение температуры в точках среды на различные моменты времени определяется из уравнения в частных производных. Для однозначного определения температурного поля $T = T(x, y, z, t)$ помимо уравнения теплопроводности необходимо сформулировать дополнительные (замыкающие) соотношения:

1) условие для температуры во всей области решения в начальный момент времени, т.е.

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma, \text{ где } \Gamma - \text{ области решения};$$

2) граничные условия

а) граничные условия 1 рода

$$T(x, y, z, t) = g(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma;$$

б) граничные условия 2 рода соответствуют заданию на границе теплового потока:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = q(x, y, z, t) \quad (x, y, z, t) \in \Gamma.$$

Например, на границе $x = 0$ $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q$.

Если $q > 0 \Rightarrow$ происходит нагрев области.

Если $q < 0 \Rightarrow$ происходит охлаждение области.

На границе $x = L$ $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = q$.

в) граничные условия 3 рода моделируют конвективный теплообмен между поверхностью твердого тела с окружающей средой, которая имеет температуру T^e :

на границе $x = 0$: $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (T^e - T|_{x=0})$, где α – коэффициент теплообмена.

г) граничные условия 4 рода (условия сопряжения). Эти условия ставятся на границе контакта двух сред с различными теплофизическими характеристиками.

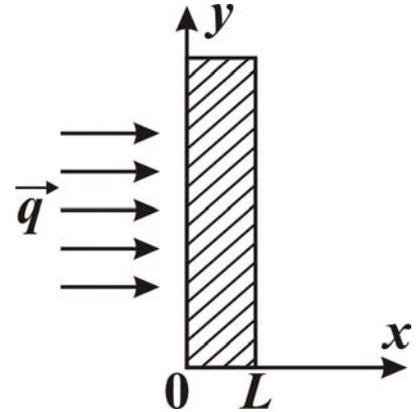


Рис. 1

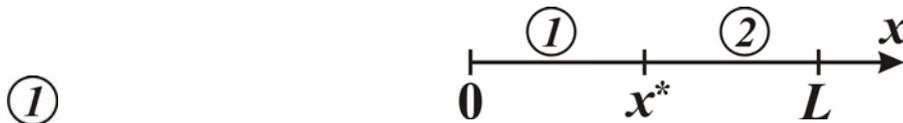


Рис. 2

①

– $\lambda_1, \rho_1, C_{p1}$;

②

– $\lambda_2, \rho_2, C_{p2}$.

$$\begin{cases} \rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, & 0 \leq x < x^* \\ \rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, & x^* < x \leq L \end{cases}$$

на границе x^* рассматривают следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} T_1|_{x^*} &= T_2|_{x^*} \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x^*} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x^*} \end{aligned} \right\} \text{условия идеального контакта}$$

В прикладных исследованиях большого внимания заслуживают условия неидеального контакта. Такой случай реализуется, например, при недостаточно плотном соприкосновении шероховатых твердых тел. При неидеальном контакте тепловой поток непрерывен, т.е.

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x^*} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x^*} .$$

Температура же при переходе границы неидеального контакта терпит разрыв, пропорциональный тепловому потоку

$$T_2 \Big|_{x^*} - T_1 \Big|_{x^*} = \frac{1}{\alpha} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} ,$$

где α – коэффициент контактного теплообмена, который связан с условиями контакта.

Одномерная задача теплопроводности для неоднородного стержня

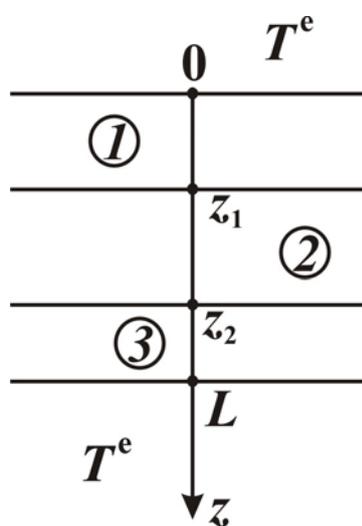


Рис. 3

Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности для неоднородного стержня.

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} \rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, & 0 \leq z < z_1; \\ \rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, & z_1 < z < z_2; \\ \rho_3 C_{p3} \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}, & z_2 < z \leq L; \end{cases}$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
t = 0: & \quad T(z) = T_0, \quad 0 \leq z \leq L; \\
z = 0: & \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T^e - T), \quad t > 0; \\
z = L: & \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T^e - T), \quad t > 0; \\
\begin{cases} T_1(t, z_1) = T_2(t, z_1), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}; \end{cases} & \quad \begin{cases} T_2(t, z_2) = T_3(t, z_2), \\ -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_{z=z_2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Первым этапом при численном решении краевой задачи является построение разностной сетки. Рассмотрим равномерную пространственно-временную разностную сетку. Для этого введем шаг сетки по координате и по времени. Пусть h – шаг сетки по координате z ($h = \frac{L}{N-1}$, N – количество отрезков разбиения оси z), τ – шаг сетки по времени t .

Формулы для вычисления всех узлов разностной сетки будут иметь следующий вид:

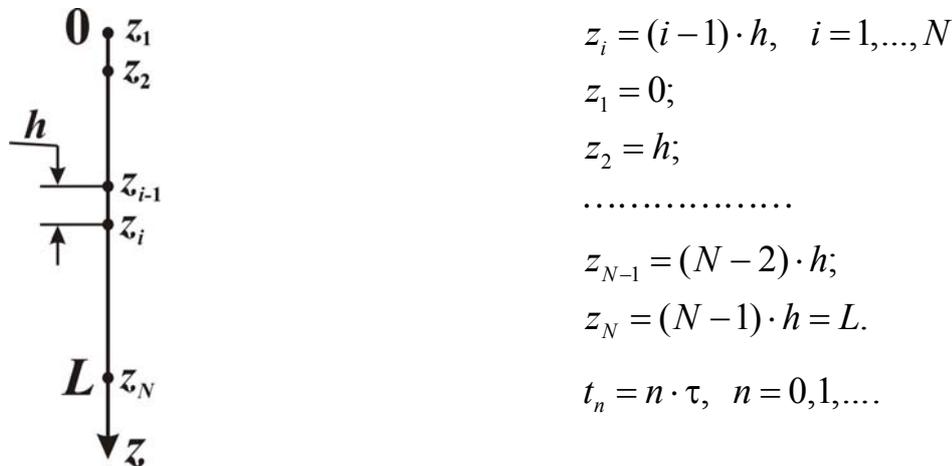


Рис. 4 Таким образом, непрерывная функция $T(z, t)$ заменяется дискретной функцией $T(z_i, t_n) = T_i^n$.

После того как разностная сетка построена, необходимо провести дискретизацию дифференциального уравнения в частных производных (уравнения теплопроводности). Для аппроксимации частных производных воспользуемся конечными разностями, т.е. проведем следующую замену:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Тогда уравнение теплопроводности можно свести к разностному уравнению:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \begin{cases} i = 2, \dots, N-1 \\ n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1)$$

где $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Полученное разностное уравнение (1) решается методом прогонки. Для этого данное уравнение необходимо привести к канонической форме:

$$A_i T_{i+1} - B_i T_i + C_i T_{i-1} = F_i, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

Сравнивая выражение (2) с уравнением (1) получаем следующие соотношения для коэффициентов уравнения (2):

$$A_i = C_i = \frac{a}{h^2}, \quad B_i = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad F_i = -\frac{T_i^n}{\tau}.$$

Решение разностного уравнения (2) проводится на основе прогоночной формулы $T_i = \alpha_i T_{i+1} + \beta_i$. Подставляя прогоночную формулу в виде $T_{i-1} = \alpha_{i-1} T_i + \beta_{i-1}$ в уравнение (2) получим соотношения для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (3)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (3) необходимо определить начальные прогоночные коэффициенты из левого граничного условия. В нашем случае имеем (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

$$\alpha_1 = \frac{2a\tau\lambda}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + h\alpha)}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda h^2 T_1^n + 2a\tau h\alpha T^e}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + h\alpha)}.$$

Далее необходимо определить все прогоночные коэффициенты по формулам (3) за исключением узлов, в которых происходит сопряжение материалов, имеющих различные теплофизические характеристики. В этих узлах для определения прогоночных коэффициентов используют граничные условия IV рода из которых получают. Например, пусть в точке z_1 и z_2 (рис. 3) находятся узлы z_{i^*} и $z_{i^{**}}$, соответственно, тогда прогоночные коэффициенты в этих узлах будут вычисляться по следующим формулам (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

$$\alpha_{i^*} = \frac{2a_1a_2\tau\lambda_2}{2a_1a_2\tau(\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1)},$$

$$\beta_{i^*} = \frac{2a_1a_2\tau\lambda_1\beta_{i^*-1} + h^2(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1)T_{i^*}^n}{2a_1a_2\tau(\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2(\lambda_1a_2 + \lambda_2a_1)};$$

$$\alpha_{i^{**}} = \frac{2a_2a_3\tau\lambda_3}{2a_2a_3\tau(\lambda_3 + \lambda_2(1 - \alpha_{i^{**}-1})) + h^2(\lambda_2a_3 + \lambda_3a_2)},$$

$$\beta_{i^{**}} = \frac{2a_2a_3\tau\lambda_2\beta_{i^{**}-1} + h^2(\lambda_2a_3 + \lambda_3a_2)T_{i^{**}}^n}{2a_2a_3\tau(\lambda_3 + \lambda_2(1 - \alpha_{i^{**}-1})) + h^2(\lambda_2a_3 + \lambda_3a_2)}.$$

После того как найдены все прогоночные коэффициенты необходимо определить поле температуры по формулам $T_i = \alpha_i T_{i+1} + \beta_i$, $i = N-1, \dots, 1$, но для этого необходимо определить температуру на правой границе используя соответствующее граничное условия. Для рассматриваемой задачи получим (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

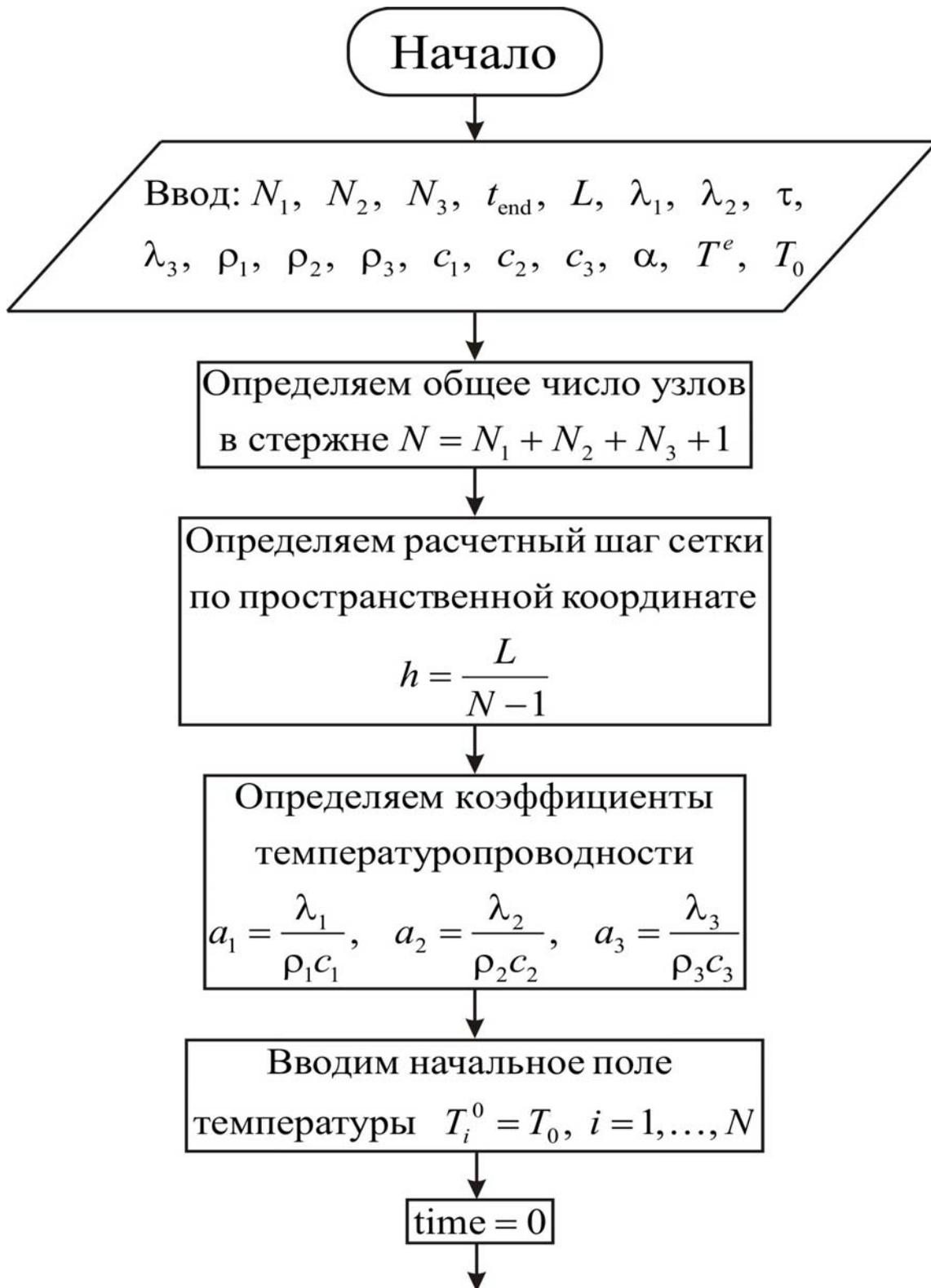
$$T_N^{n+1} = \frac{\lambda h^2 T_N^n + 2a\tau(\lambda\beta_{N-1} + h\alpha T^e)}{\lambda h^2 + 2a\tau(\alpha h + \lambda(1 - \alpha_{N-1}))}.$$

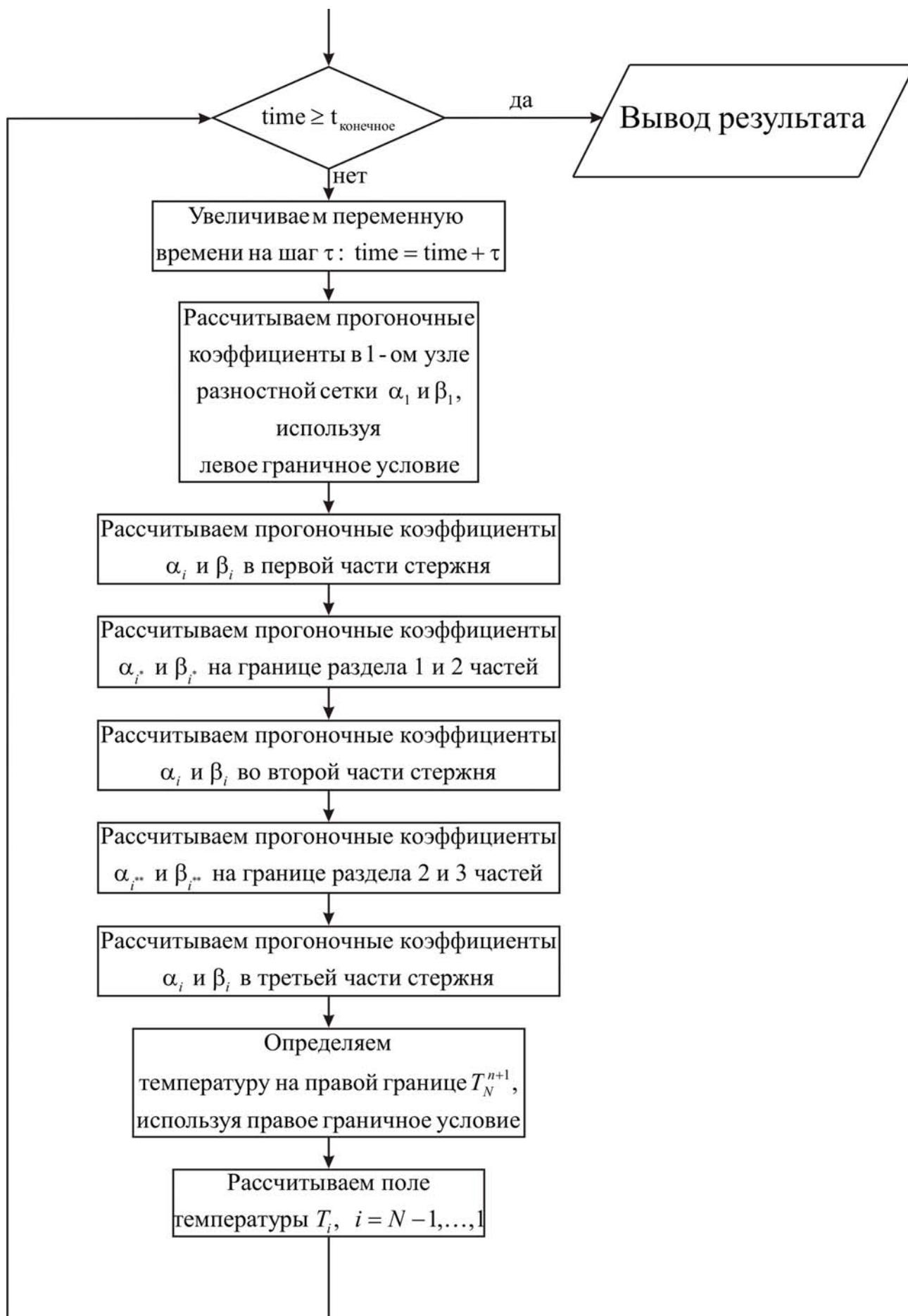
В качестве примера определим температурное поле в составном стержне (рис. 3) через 3, 10 и 60 минут. Длина стержня $L = 0.09$ м. Начальная температура $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Теплофизические характеристики первой части стержня (I) – $\lambda = 0.6$ Вт/(м·°C), $\rho = 2500$ кг/м³, $c = 700$ Дж/(кг·°C)),

теплофизические характеристики второй части стержня (2) – $\lambda = 0.6$ Вт/(м·°С), $\rho = 1000$ кг/м³, $c = 4220$ Дж/(кг·°С) и для третьей части стержня (3) – $\lambda = 46$ Вт/(м·°С), $\rho = 7800$ кг/м³, $c = 460$ Дж/(кг·°С). На границе $x=0$ стержень контактирует с внешней средой с параметрами $\alpha = 20$ Вт/(м²·К), $T^e = -20$ °С, а на границе $x=L$ также осуществляется теплообмен со средой с такими же параметрами.

Будем полагать, что при построении сетки в первой части пластины будет $n_1 = 20$ отрезков, во второй части – $n_2 = 40$ отрезков, а в третьей части – $n_3 = 30$. Тогда общее число узлов $N = n_1 + n_2 + n_3 + 1 = 91$.

Блок-схема к рассматриваемой задаче имеет вид:





Ниже приведен листинг программы для решения рассматриваемой задачи (на языке программирования *Pascal*)

```
program conduction;
uses crt;
const mf=500;
type
  vector=array[1..mf] of real;
var
  i, j, N, N1, N2, N3      : integer;
  T, alfa, beta           : vector;
  ai, bi, ci, fi          : real;
  a1, lamda1, ro1, c1     : real;
  a2, lamda2, ro2, c2     : real;
  a3, lamda3, ro3, c3     : real;
  h, tau, t_end, time     : real;
  T0, alpha, Te, L        : real;
  f, g                    : text;
begin
  clrscr;
  Writeln('Введите толщину системы, L');
  Readln(L);
  Writeln('Введите количество промежутков в первой части системы, N1');
  Readln(N1);
  Writeln('Введите количество промежутков во второй части системы, N2');
  Readln(N2);
  Writeln('Введите количество промежутков в третьей части системы, N3');
  Readln(N3);
  Writeln('Введите окончание по времени, t_end');
  Readln(t_end);
  Writeln('Введите шаг по времени, tau');
  Readln(tau);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала первой части системы, lamda1');
  Readln(lamda1);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала второй части системы, lamda2');
  Readln(lamda2);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала второй части системы, lamda3');
  Readln(lamda3);
  Writeln('Введите плотность материала первой части системы, ro1');
  Readln(ro1);
  Writeln('Введите плотность материала второй части системы, ro2');
  Readln(ro2);
  Writeln('Введите плотность материала третьей части системы, ro3');
  Readln(ro3);
  Writeln('Введите теплоемкость материала первой части системы, c1');
  Readln(c1);
  Writeln('Введите теплоемкость материала второй части системы, c2');
  Readln(c2);
```

```

Writeln('Введите теплоемкость материала третьей части системы, c3');
Readln(c3);
Writeln('Введите коэффициент теплообмена, alpha');
Readln(alpha);
Writeln('Введите температуру окружающей среды, Te');
Readln(Te);
Writeln('Введите начальную температуру, T0');
Readln(T0);
{-----
  Определяем общее число узлов в пластине
-----}
N:=N1+N2+N3+1;
{-----
  Определяем расчетный шаг сетки по пространственной координате
-----}
h:=L/(N-1);
{-----
  Определяем коэффициенты теплопроводности
-----}
a1:=lamda1/(ro1*c1);
a2:=lamda2/(ro2*c2);
a3:=lamda3/(ro3*c3);
{-----
  Определяем поле температуры в начальный момент времени
-----}
for i:= 1 to N do
  T[i]:=T0;
{-----
  Проводим интегрирование
  нестационарного уравнения теплопроводности
-----}
time:=0;
while time<t_end do
  begin
  time:=time+tau;
  alfa[1]:=2.0*a1*tau*lamda1/(2.0*a1*tau*(lamda1+alpha*h)+lamda1*sqr(h));
  beta[1]:=(lamda1*sqr(h)*T[1]+2.0*a1*tau*alpha*h*Te)
    /(2.0*a1*tau*(lamda1+alpha*h)+lamda1*sqr(h));
  for i:= 2 to N1 do
  begin
  ai:=a1/sqr(h);
  bi:=2.0*a1/sqr(h)+1.0/tau;
  ci:=a1/sqr(h);
  fi:=-T[i]/tau;
  alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
  beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
  end;
  alfa[N1+1]:=2.0*a1*a2*tau*lamda2/(2.0*a1*a2*tau*(lamda2+lamda1*(1-alfa[N1]))
    +sqr(h)*(a1*lamda2+a2*lamda1));
  beta[N1+1]:=(2.0*a1*a2*tau*lamda1*beta[N1]+sqr(h)*(a1*lamda2+a2*lamda1)
    *T[N1+1])/(2.0*a1*a2*tau*(lamda2+lamda1*(1-alfa[N1]))+sqr(h)
    *(a1*lamda2+a2*lamda1));
  
```

```

for i:= N1+2 to N1+N2 do
begin
ai:=a2/sqr(h);
bi:=2.0*a2/sqr(h)+1.0/tau;
ci:=a2/sqr(h);
fi:=-T[i]/tau;
alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
end;
alfa[N1+N2+1]:=2.0*a2*a3*tau*lamda3/(2.0*a2*a3*tau*(lamda3
+lamda2*(1-alfa[N1+N2]))+sqr(h)*(a2*lamda3+a3*lamda2));
beta[N1+N2+1]:=(2.0*a2*a3*tau*lamda2*beta[N1+N2]+sqr(h)*(a2*lamda3+a3*lamda2)
*T[N1+N2+1])/(2.0*a2*a3*tau*(lamda3+lamda2*(1-alfa[N1+N2]))+sqr(h)
*(a2*lamda3+a3*lamda2));
for i:= N1+N2+2 to N-1 do
begin
ai:=a3/sqr(h);
bi:=2.0*a3/sqr(h)+1.0/tau;
ci:=a3/sqr(h);
fi:=-T[i]/tau;
alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
end;
T[N]:=(lamda3*sqr(h)*T[N]+2.0*a3*tau*(lamda3*beta[N-1]+alpha*h*Te))/
(lamda3*sqr(h)+2.0*a3*tau*(lamda3*(1-alfa[N-1])+alpha*h));
for i:= N-1 downto 1 do
T[i]:=alfa[i]*T[i+1]+beta[i];
end;
{-----
Выводим результат в файл
-----}
Assign(f,'res.txt');
Rewrite(f);
Writeln(f,'Толщина пластины L = ',L:6:4);
Writeln(f,'Толщина первой части системы = ',N1*h:6:4);
Writeln(f,'Толщина второй части системы = ',N2*h:6:4);
Writeln(f,'Толщина третьей части системы = ',N3*h:6:4);
Writeln(f,'Число промежутков по координате в первой части системы N1 = ',N1);
Writeln(f,'Число промежутков по координате во второй части системы N2 = ',N2);
Writeln(f,'Число промежутков по координате в третьей части системы N3 = ',N3);
Writeln(f,'Общее число узлов по координате N = ',N);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала первой части системы lamda1 =
',lamda1:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала второй части системы lamda2 =
',lamda2:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала третьей части системы lamda3 =
',lamda3:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала первой части системы ro1 = ',ro1:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала второй части системы ro2 = ',ro2:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала третьей части системы ro3 = ',ro3:6:4);
Writeln(f,'Теплоемкость материала первой части системы c1 = ',c1:6:4);
Writeln(f,'Теплоемкость материала второй части системы c2 = ',c2:6:4);

```

```

Writeln(f,'Теплоемкость материала третьей части системы c3 = ',c3:6:4);
Writeln(f,'Начальная температура T0 = ',T0:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплообмена alpha = ',alpha:6:4);
Writeln(f,'Температура окружающей среды Te = ',Te:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по координате h = ',h:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по времени tau = ',tau:6:4);
Writeln(f,'Температурное поле в момент времени t = ',t_end:6:4);
close(f);
Assign(g,'tempr.txt');
Rewrite(g);
for i:=1 to N do
  writeln(g,' ',h*(i-1):10:8,' ',T[i]:8:5);
close(g);
end.

```

Файл 'res.txt'

Толщина пластины $L = 0.09$ м
Толщина первой части системы = 0.02 м
Толщина второй части системы = 0.04 м
Толщина третьей части системы = 0.03 м
Число промежутков по координате в первой части системы $N1 = 20$
Число промежутков по координате во второй части системы $N2 = 40$
Число промежутков по координате в третьей части системы $N3 = 30$
Общее число узлов по координате $N = 91$
Коэффициент теплопроводности материала первой части системы $\lambda_1 = 0.6000$
Коэффициент теплопроводности материала второй части системы $\lambda_2 = 0.6000$
Коэффициент теплопроводности материала третьей части системы $\lambda_3 = 46.0000$
Плотность материала первой части системы $\rho_1 = 2500.0000$
Плотность материала второй части системы $\rho_2 = 1000.0000$
Плотность материала третьей части системы $\rho_3 = 7800.0000$
Теплоемкость материала первой части системы $c_1 = 700.0000$
Теплоемкость материала второй части системы $c_2 = 4220.0000$
Теплоемкость материала третьей части системы $c_3 = 460.0000$
Начальная температура $T_0 = 293.0000$
Коэффициент теплообмена $\alpha = 20.0000$
Температура окружающей среды $T_e = 253.0000$
Результат получен с шагом по координате $h = 0.0010$
Результат получен с шагом по времени $\tau = 1.0000$
Температурное поле в момент времени $t = 3600.0000$

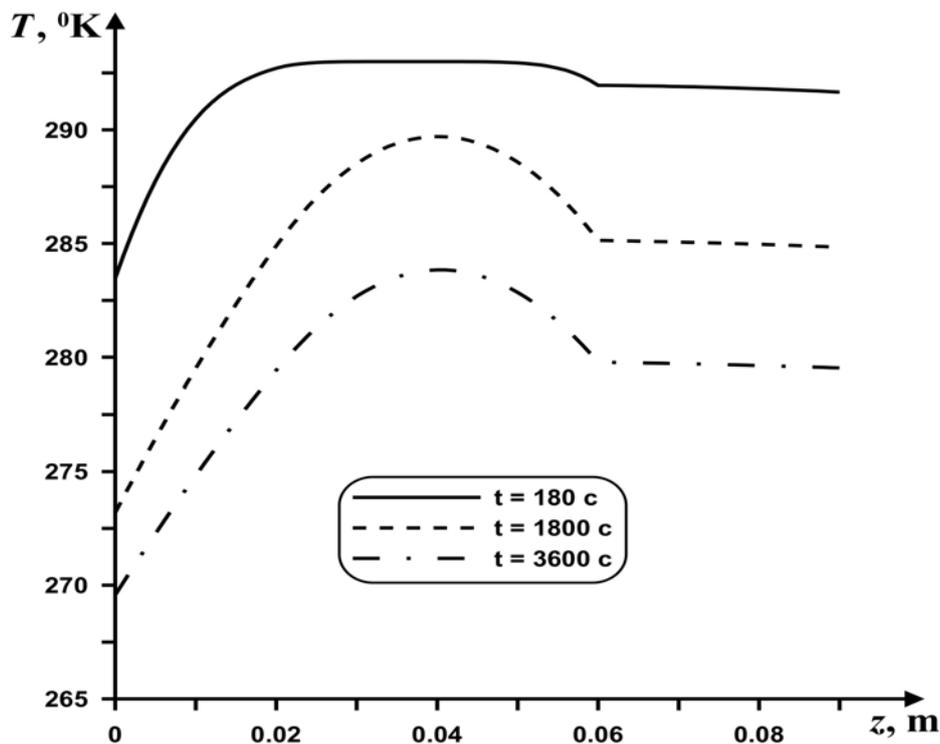


Рис. 5

Нестационарная задача теплопроводности в неоднородной пластине

Рассмотрим двумерную задачу теплопроводности для неоднородной пластины.

Необходимо определить температурное поле в неоднородной пластине с размерами $L = 0.3$ м, $H = 0.4$ м через 10 минут, с шагом по времени 10 секунд. Начальная температура $T_0 = 293^{\circ}\text{K}$. Теплофизические характеристики пластины:

$$\lambda_1 = 0.6 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \rho_1 = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_1 = 700 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda_2 = 46 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \rho_2 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_2 = 460 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

На границе $x = 0$ поддерживается постоянная температура $T_c = 253^{\circ}\text{K}$, на границе $x = L$ — температура $T_h = 333^{\circ}\text{K}$, границы $y = 0$ и $y = H$ — теплоизолированы. Сеточные параметры (количество отрезков в каждой подобласти): $N_1 = 30$, $N_2 = 40$, $N_3 = 30$, $M_1 = 30$, $M_2 = 40$, $M_3 = 30$.

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

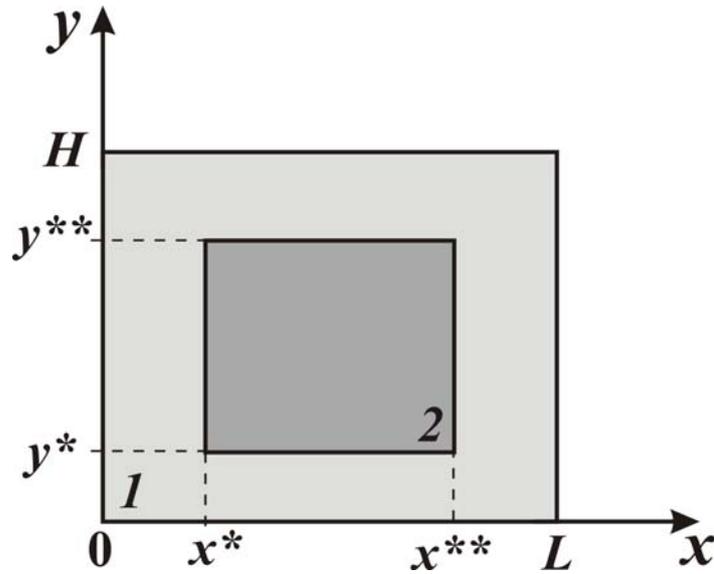


Рис. 6

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < x^*, \quad 0 < y < H; \\ x^* < x < x^{**}, \quad 0 < y < y^*, \quad y^* < y < H; \\ x^{**} < x < L, \quad 0 < y < H; \\ x^* < x < x^{**}, \quad y^* < y < y^{**}. \end{array} \right.$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{array}{l} t=0: \quad T = T_0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H; \\ x=0: \quad T = T_c, \quad t > 0; \\ x=L: \quad T = T_h, \quad t > 0; \\ y=0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t > 0; \\ y=H: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t > 0; \end{array} \left\{ \begin{array}{l} T_1(t, x^*, y) = T_2(t, x^*, y), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x^*}, \quad \text{при } y^* \leq y \leq y^{**}; \\ T_1(t, x^{**}, y) = T_2(t, x^{**}, y), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x^{**}} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x^{**}}, \quad \text{при } y^* \leq y \leq y^{**}; \\ T_1(t, x, y^*) = T_2(t, x, y^*), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=y^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=y^*}, \quad \text{при } x^* \leq x \leq x^{**}; \\ T_1(t, x, y^{**}) = T_2(t, x, y^{**}), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=y^{**}} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=y^{**}}, \quad \text{при } x^* \leq x \leq x^{**}. \end{array} \right.$$

Первым этапом при численном решении краевой задачи является построение разностной сетки. Рассмотрим равномерную пространственно-временную разностную сетку. Для этого введем шаги сетки по координатам и по времени. Пусть h_x, h_y – шаги сетки по координатам x и y , соответственно

$$\left(h_x = \frac{L}{N_1 + N_2 + N_3}, h_y = \frac{H}{M_1 + M_2 + M_3} \right), \tau - \text{ шаг сетки по времени } t.$$

Формулы для вычисления всех узлов разностной сетки будут иметь следующий вид:

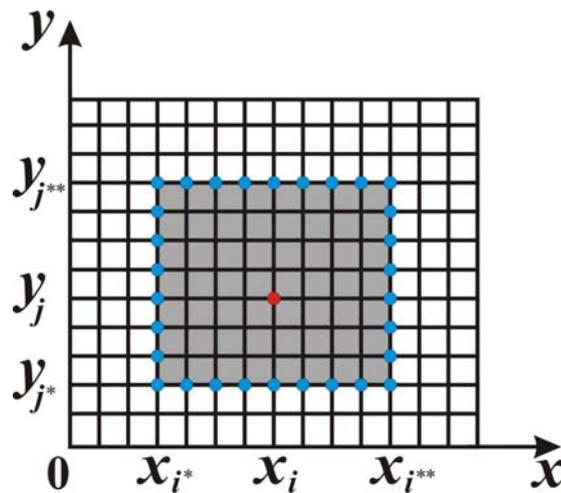


Рис. 7

$$x_i = (i-1) \cdot h_x, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = N_1 + N_2 + N_3;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = h_x;$$

.....

$$x_{N-1} = (N-2) \cdot h_x; \quad x_N = (N-1) \cdot h_x.$$

$$y_j = (j-1) \cdot h_y, \quad j = 1, \dots, M, \quad M = M_1 + M_2 + M_3;$$

$$y_1 = 0; \quad y_2 = h_y;$$

.....

$$y_{M-1} = (M-2) \cdot h_y; \quad y_M = (M-1) \cdot h_y.$$

$$t_n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, непрерывная функция $T(x, y, t)$ заменяется дискретной функцией $T(x_i, y_j, t_n) = T_{i,j}^n$.

После того как разностная сетка построена, необходимо провести дискретизацию дифференциального уравнения в частных производных (уравнения теплопроводности). Для аппроксимации частных производных воспользуемся конечными разностями:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}.$$

Дискретизацию дифференциального уравнения будем проводить на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского, которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Сущность этого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном временном шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения только в направлении оси x и получаем одномерное уравнение, после его решения проводим вновь дискретизацию уравнения, но уже в направлении оси y и, решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температуры на целом шаге по времени.

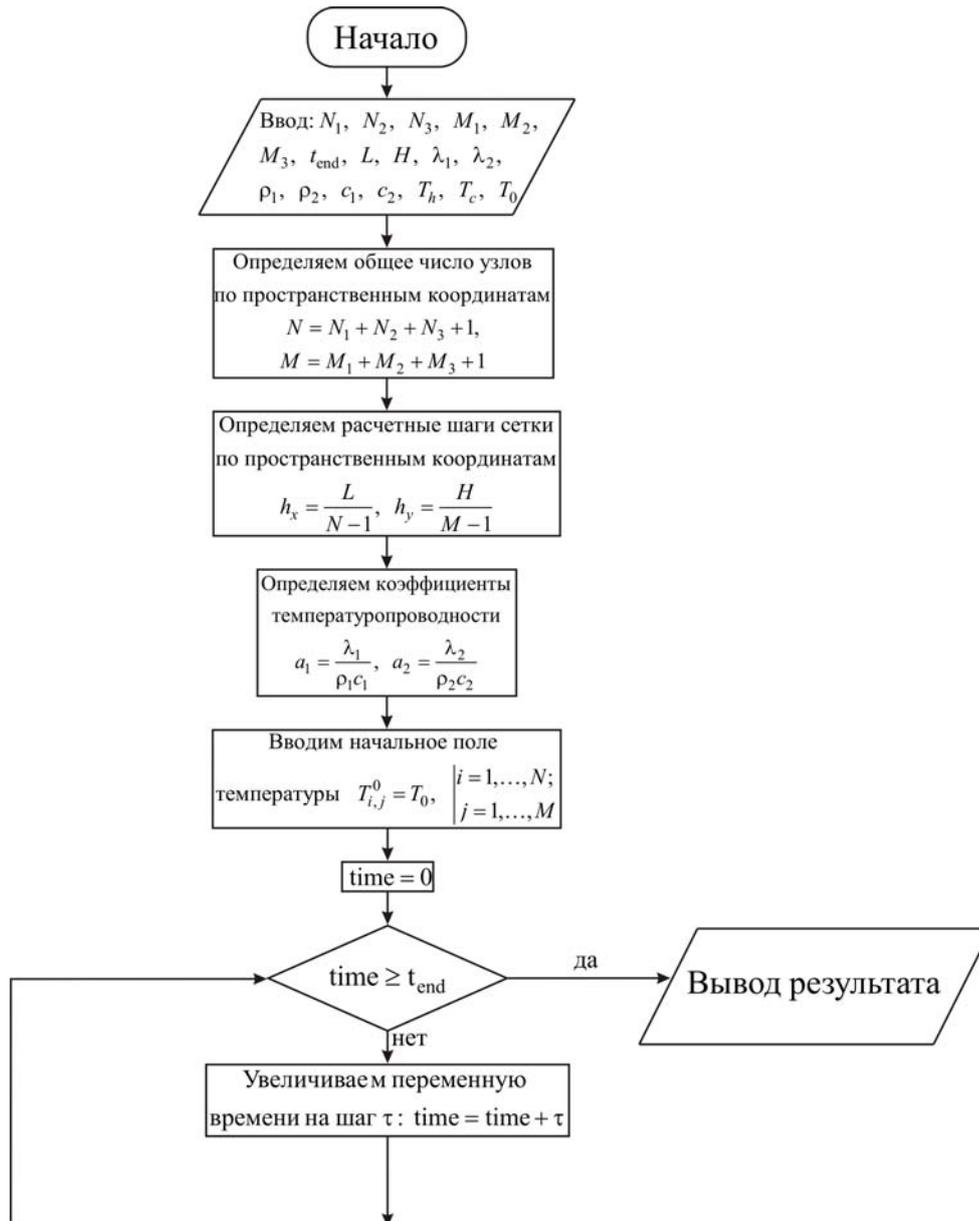
Итак:

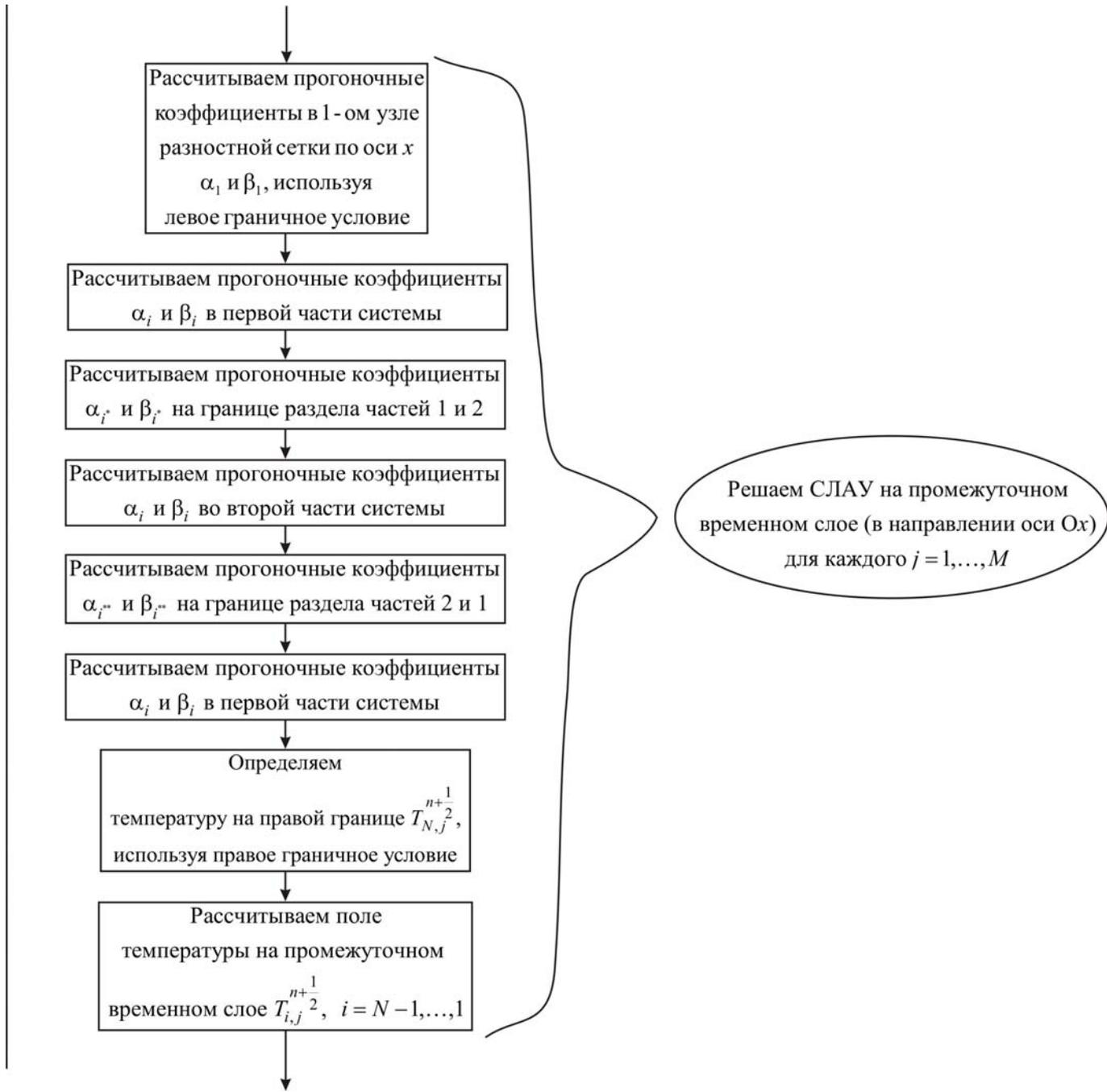
$$\frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau} = a \cdot \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right),$$

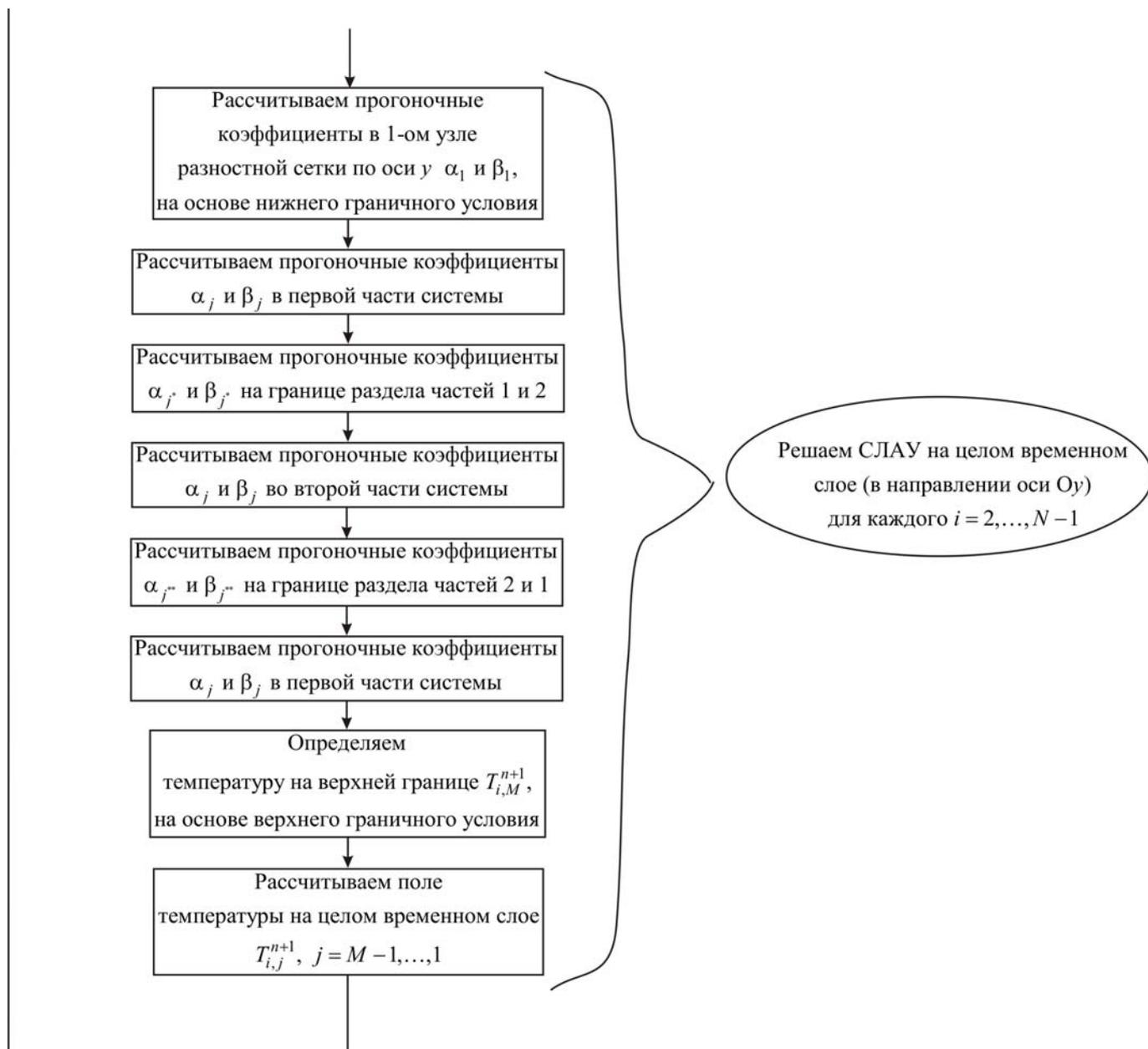
$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = a \cdot \left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right).$$

Полученные разностные уравнения сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки. Сначала для всей области решается первое разностное уравнение, после того как его решение будет найдено, переходят к решению второго разностного уравнения.

Блок-схема к рассматриваемой задаче имеет вид:







Ниже приведен листинг программы для решения рассматриваемой задачи (на языке программирования Pascal)

```
program conduction;
uses crt;
const mf=101;
type
  vector1=array[1..mf] of real;
  vector2=array[1..mf,1..mf] of real;
var
  i, j, Nx, Ny      : integer;
  nx1, nx2, nx3    : integer;
  ny1, ny2, ny3    : integer;
  T                : vector2;
  a1, lamda1, ro1, c1 : real;
  a2, lamda2, ro2, c2 : real;
  hx, hy, tau, t_end, time : real;
  T0, L, H, Th, Tc  : real;
  f, g              : text;
procedure progonx(j: integer; a,lamda:real; var W:vector2);
var
  i      : integer;
  alfa, beta : vector1;
  ai, bi, ci, fi : real;
begin
  alfa[1]:=0.0;
  beta[1]:=Th;
  for i:= 2 to Nx-1 do
    begin
      ai:=a/sqr(hx);
      bi:=2.0*a/sqr(hx)+1.0/tau;
      ci:=a/sqr(hx);
      fi:=-W[i,j]/tau;
      alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
      beta[i]:=ai*(beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
    end;
  W[Nx,j]:=Tc;
  for i:= Nx-1 downto 1 do
    W[i,j]:=alfa[i]*W[i+1,j]+beta[i];
  end;
end;
procedure progony(i:integer; a,lamda:real; var W:vector2);
var
  j      : integer;
  alfa, beta : vector1;
  ai, bi, ci, fi : real;
begin
  alfa[1]:=2.0*a*tau/(2.0*a*tau+sqr(hy));
  beta[1]:=sqr(hy)*W[i,1]/(2.0*a*tau+sqr(hy));
  for j:= 2 to Ny-1 do
    begin
      ai:=a/sqr(hy);
```

```

bi:=2.0*a/sqr(hy)+1.0/tau;
ci:=a/sqr(hy);
fi:=-W[i,j]/tau;
alfa[j]:=ai/(bi-ci*alfa[j-1]);
beta[j]:=(ci*beta[j-1]-fi)/(bi-ci*alfa[j-1]);
end;
W[i,Ny]:=(2.0*a*tau*lamda*beta[Ny-1]+lamda*sqr(hy)*W[i,Ny])/
(lamda*sqr(hy)+2.0*a*tau*lamda*(1.0-alfa[Ny-1]));
for j:= Ny-1 downto 1 do
W[i,j]:=alfa[j]*W[i,j+1]+beta[j];
end;
procedure progonxIV(j,n1,n2:integer; a,an,lamda,lamdan:real; var W:vector2);
var
i      : integer;
alfa, beta  : vector1;
ai, bi, ci, fi  : real;
begin
alfa[1]:=0.0;
beta[1]:=Th;
for i:= 2 to n1 do
begin
ai:=a/sqr(hx);
bi:=2.0*a/sqr(hx)+1.0/tau;
ci:=a/sqr(hx);
fi:=-W[i,j]/tau;
alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
end;
alfa[n1+1]:=2.0*a*an*tau*lamdan/(2.0*a*an*tau*(lamdan+lamda*(1-alfa[n1]))+
sqr(hx)*(a*lamdan+an*lamda));
beta[n1+1]:=(2.0*a*an*tau*lamda*beta[n1]+sqr(hx)*(a*lamdan+an*lamda)*W[n1+1,j])/
(2.0*a*an*tau*(lamdan+lamda*(1-alfa[n1]))+sqr(hx)*(a*lamdan+an*lamda));
for i:= n1+2 to n1+n2 do
begin
ai:=an/sqr(hx);
bi:=2.0*an/sqr(hx)+1.0/tau;
ci:=an/sqr(hx);
fi:=-W[i,j]/tau;
alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
end;
alfa[n1+n2+1]:=2.0*an*a*tau*lamda/(2.0*an*a*tau*(lamda+lamdan*(1-alfa[n1+n2]))+
sqr(hx)*(an*lamda+a*lamdan));
beta[n1+n2+1]:=(2.0*an*a*tau*lamdan*beta[n1+n2]+sqr(hx)*(a*lamdan+an*lamda)*
W[n1+n2+1,j])/(2.0*an*a*tau*(lamda+lamdan*(1-alfa[n1+n2]))+sqr(hx)*
(an*lamda+a*lamdan));
for i:= n1+n2+2 to Nx-1 do
begin
ai:=a/sqr(hx);
bi:=2.0*a/sqr(hx)+1.0/tau;
ci:=a/sqr(hx);
fi:=-W[i,j]/tau;

```

```

    alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
    beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
end;
W[Nx,j]:=Tc;
for i:= Nx-1 downto 1 do
    W[i,j]:=alfa[i]*W[i+1,j]+beta[i];
end;
procedure progonyIV(i,n1,n2:integer; a,an,lamda,lamdan:real; var W:vector2);
var
    j          : integer;
    alfa, beta  : vector1;
    ai, bi, ci, fi : real;
begin
    alfa[1]:=2.0*a*tau/(2.0*a*tau+sqr(hy));
    beta[1]:=sqr(hy)*W[i,1]/(2.0*a*tau+sqr(hy));
    for j:= 2 to n1 do
        begin
            ai:=a/sqr(hy);
            bi:=2.0*a/sqr(hy)+1.0/tau;
            ci:=a/sqr(hy);
            fi:=-W[i,j]/tau;
            alfa[j]:=ai/(bi-ci*alfa[j-1]);
            beta[j]:=(ci*beta[j-1]-fi)/(bi-ci*alfa[j-1]);
        end;
    alfa[n1+1]:=2.0*a*an*tau*lamdan/(2.0*a*an*tau*(lamdan+lamda*(1-alfa[n1]))+sqr(hy)*
        (a*lamdan+an*lamda));
    beta[n1+1]:=(2.0*a*an*tau*lamda*beta[n1]+sqr(hy)*(a*lamdan+an*lamda)*W[i,n1+1])/
        (2.0*a*an*tau*(lamdan+lamda*(1-alfa[n1]))+sqr(hy)*(a*lamdan+an*lamda));
    for j:= n1+2 to n1+n2 do
        begin
            ai:=an/sqr(hy);
            bi:=2.0*an/sqr(hy)+1.0/tau;
            ci:=an/sqr(hy);
            fi:=-W[i,j]/tau;
            alfa[j]:=ai/(bi-ci*alfa[j-1]);
            beta[j]:=(ci*beta[j-1]-fi)/(bi-ci*alfa[j-1]);
        end;
    alfa[n1+n2+1]:=2.0*an*a*tau*lamda/(2.0*an*a*tau*(lamda+lamdan*(1-alfa[n1+n2]))+sqr(hy)*
        (an*lamda+a*lamdan));
    beta[n1+n2+1]:=(2.0*an*a*tau*lamdan*beta[n1+n2]+sqr(hy)*(a*lamdan+an*lamda)*
        W[i,n1+n2+1])/(2.0*an*a*tau*(lamda+lamdan*(1-alfa[n1+n2]))+sqr(hy)*
        (an*lamda+a*lamdan));
    for j:= n1+n2+2 to Ny-1 do
        begin
            ai:=a/sqr(hy);
            bi:=2.0*a/sqr(hy)+1.0/tau;
            ci:=a/sqr(hy);
            fi:=-W[i,j]/tau;
            alfa[j]:=ai/(bi-ci*alfa[j-1]);
            beta[j]:=(ci*beta[j-1]-fi)/(bi-ci*alfa[j-1]);
        end;
    W[i,Ny]:=(2.0*a*tau*lamda*beta[Ny-1]+lamda*sqr(hy)*W[i,Ny])/

```

```

        (lamda*sqr(hy)+2.0*a*tau*lamda*(1.0-alfa[Ny-1]));
for j:= Ny-1 downto 1 do
  W[i,j]:=alfa[j]*W[i,j+1]+beta[j];
end;
begin
  clrscr;
  Writeln('Введите длину пластины, L');
  Readln(L);
  Writeln('Введите толщину пластины, H');
  Readln(H);
  Writeln('Введите количество промежутков между границей x=0 и включением 2 по оси x,
nx1');
  Readln(nx1);
  Writeln('Введите количество промежутков во включении 2 по оси x, nx2');
  Readln(nx2);
  Writeln('Введите количество промежутков между включением 2 и границей x = L, nx3');
  Readln(nx3);
  Writeln('Введите количество промежутков между границей y=0 и включением 2 по оси y,
ny1');
  Readln(ny1);
  Writeln('Введите количество промежутков во включении 2 по оси y, ny2');
  Readln(ny2);
  Writeln('Введите количество промежутков между включением 2 и границей y = H, ny3');
  Readln(ny3);
  Writeln('Введите окончание по времени, t_end');
  Readln(t_end);
  Writeln('Введите шаг по времени, tau');
  Readln(tau);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала пластины, lamda1');
  Readln(lamda1);
  Writeln('Введите плотность материала пластины, ro1');
  Readln(ro1);
  Writeln('Введите теплоемкость материала пластины, c1');
  Readln(c1);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала включения 2, lamda2');
  Readln(lamda2);
  Writeln('Введите плотность материала включения 2, ro2');
  Readln(ro2);
  Writeln('Введите теплоемкость материала включения 2, c2');
  Readln(c2);
  Writeln('Введите температуру на границе x=0, Th');
  Readln(Th);
  Writeln('Введите температуру на границе x=L, Tc');
  Readln(Tc);
  Writeln('Введите начальную температуру, T0');
  Readln(T0);
  {-----}
  Определяем общее число узлов по осям x и y
  {-----}
  Nx:=nx1+nx2+nx3+1;
  Ny:=ny1+ny2+ny3+1;
  {-----}

```

Определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам

```
-----}
hx:=L/(Nx-1);
hy:=H/(Ny-1);
{-----}
    Определяем коэффициент теплопроводности
-----}
a1:=lamda1/(ro1*c1);
a2:=lamda2/(ro2*c2);

{-----}
    Записываем все входные параметры
-----}
Assign(f,'res.txt');
Rewrite(f);
Writeln(f,'Длина пластины L = ',L:6:4);
Writeln(f,'Расстояние между границей x=0 и включением 2 = ',nx1*hx:6:4);
Writeln(f,'Длина включения 2 = ',nx2*hx:6:4);
Writeln(f,'Расстояние между включением 2 и границей x = L = ',nx3*hx:6:4);
Writeln(f,'Толщина пластины H = ',H:6:4);
Writeln(f,'Расстояние между границей y=0 и включением 2 = ',ny1*hy:6:4);
Writeln(f,'Толщина включения 2 = ',ny2*hy:6:4);
Writeln(f,'Расстояние между включением 2 и границей y = H = ',ny3*hy:6:4);
Writeln(f,'Число узлов по пространственной координате x в пластине Nx = ',Nx);
Writeln(f,'Число промежутков между границей x=0 и включением 2 = ',nx1);
Writeln(f,'Число промежутков во включении 2 = ',nx2);
Writeln(f,'Число промежутков между включением 2 и границей x = L = ',nx3);
Writeln(f,'Число узлов по пространственной координате y в пластине Ny = ',Ny);
Writeln(f,'Число промежутков между границей y=0 и включением 2 = ',ny1);
Writeln(f,'Число промежутков во включении 2 = ',ny2);
Writeln(f,'Число промежутков между включением 2 и границей y = H = ',ny3);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала пластины lamda1 = ',lamda1:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала пластины a1 = ',a1:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала пластины ro1 = ',ro1:6:4);
Writeln(f,'Теплоемкость материала пластины c1 = ',c1:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала включения 2 lamda2 = ',lamda2:6:4);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала включения 2 a2 = ',a2:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала включения 2 ro2 = ',ro2:6:4);
Writeln(f,'Теплоемкость материала включения 2 c2 = ',c2:6:4);
Writeln(f,'Начальная температура T0 = ',T0:6:4);
Writeln(f,'Температура на границе x=0 области решения Th = ',Th:6:4);
Writeln(f,'Температура на границе x=L области решения Tc = ',Tc:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по координате x hx = ',hx:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по координате y hy = ',hy:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по времени tau = ',tau:6:4);
Writeln(f,'Температурное поле в момент времени t = ',t_end:6:4);
close(f);
{-----}
    Определяем поле температуры в начальный момент времени
-----}
for i:= 1 to Nx do
for j:= 1 to Ny do
```

```

T[i,j]:=T0;
{-----
    Проводим интегрирование
    нестационарного уравнения теплопроводности
-----}
time:=0;
while time<t_end do
begin
time:=time+tau;
{-----
    СЛАУ в направлении оси Ox
    В промежутке между границей y=0 и включением 2
-----}
for j:=1 to ny1 do
progonx(j,a1,lamda1,T);
{-----
    На нижней границе включения 2
-----}
progonxIV(ny1+1,nx1,nx2,a1,0.5*(a1+a2),lamda1,0.5*(lamda1+lamda2),T);
{-----
    Во включении 2
-----}
for j:=ny1+2 to ny1+ny2 do
progonxIV(j,nx1,nx2,a1,a2,lamda1,lamda2,T);
{-----
    На верхней границе включения 2
-----}
progonxIV(ny1+ny2+1,nx1,nx2,a1,0.5*(a1+a2),lamda1,0.5*(lamda1+lamda2),T);
{-----
    Между включением 2 и границей y = H
-----}
for j:=ny1+ny2+2 to Ny do
progonx(j,a1,lamda1,T);
{-----
    СЛАУ в направлении оси Oy
    В промежутке между границей x = 0 и включением 2
-----}
for i:=2 to nx1 do
progony(i,a1,lamda1,T);
{-----
    На левой границе включения 2
-----}
progonyIV(nx1+1,ny1,ny2,a1,0.5*(a1+a2),lamda1,0.5*(lamda1+lamda2),T);
{-----
    Во включении 2
-----}
for i:=nx1+2 to nx1+nx2 do
progonyIV(i,ny1,ny2,a1,a2,lamda1,lamda2,T);
{-----
    На правой границе включения 2
-----}
progonyIV(nx1+nx2+1,ny1,ny2,a1,0.5*(a1+a2),lamda1,0.5*(lamda1+lamda2),T);

```

```

{-----}
  В промежутке между включением 2 и границей  $x = L$ 
{-----}
for i:=nx1+nx2+2 to Nx-1 do
  progony(i,a1,lamda1,T);
end;
{-----}
      Выводим результат в файл
{-----}
Assign(g,'tempr.txt');

Rewrite(g);
for i:=1 to Nx do
  for j:=1 to Ny do
    writeln(g, ' ,hx*(i-1):10:8,' ,hy*(j-1):10:8,' ',T[i,j]:8:5);
  close(g);
end.

```

Файл 'res.txt'

Длина пластины $L = 0.3$ м
 Расстояние между границей $x=0$ и включением 2 = 0.09 м
 Длина включения 2 = 0.12 м
 Расстояние между включением 2 и границей $x = L = 0.09$ м
 Толщина пластины $H = 0.4$ м
 Расстояние между границей $y=0$ и включением 2 = 0.12 м
 Толщина включения 2 = 0.16 м
 Расстояние между включением 2 и границей $y = H = 0.12$ м
 Число узлов по пространственной координате x в пластине $Nx = 101$
 Число промежутков между границей $x=0$ и включением 2 = 30
 Число промежутков во включении 2 = 40
 Число промежутков между включением 2 и границей $x = L = 30$
 Число узлов по пространственной координате y в пластине $Ny = 101$
 Число промежутков между границей $y=0$ и включением 2 = 30
 Число промежутков во включении 2 = 40
 Число промежутков между включением 2 и границей $y = H = 30$
 Коэффициент теплопроводности материала пластины $\lambda_1 = 0.6$
 Коэффициент температуропроводности материала пластины $a_1 = 0.0000$
 Плотность материала пластины $\rho_1 = 2500.0$
 Теплоемкость материала пластины $c_1 = 700.0$
 Коэффициент теплопроводности материала включения 2 $\lambda_2 = 46.0$
 Коэффициент температуропроводности материала включения 2 $a_2 = 0.0000$
 Плотность материала включения 2 $\rho_2 = 7800.0$
 Теплоемкость материала включения 2 $c_2 = 460.0$
 Начальная температура $T_0 = 293.0$
 Температура на границе $x=0$ области решения $T_h = 253.0$
 Температура на границе $x=L$ области решения $T_c = 333.0$
 Результат получен с шагом по координате x $h_x = 0.0030$
 Результат получен с шагом по координате y $h_y = 0.0040$
 Результат получен с шагом по времени $\tau = 10.0$
 Температурное поле в момент времени $t = 36000.0$

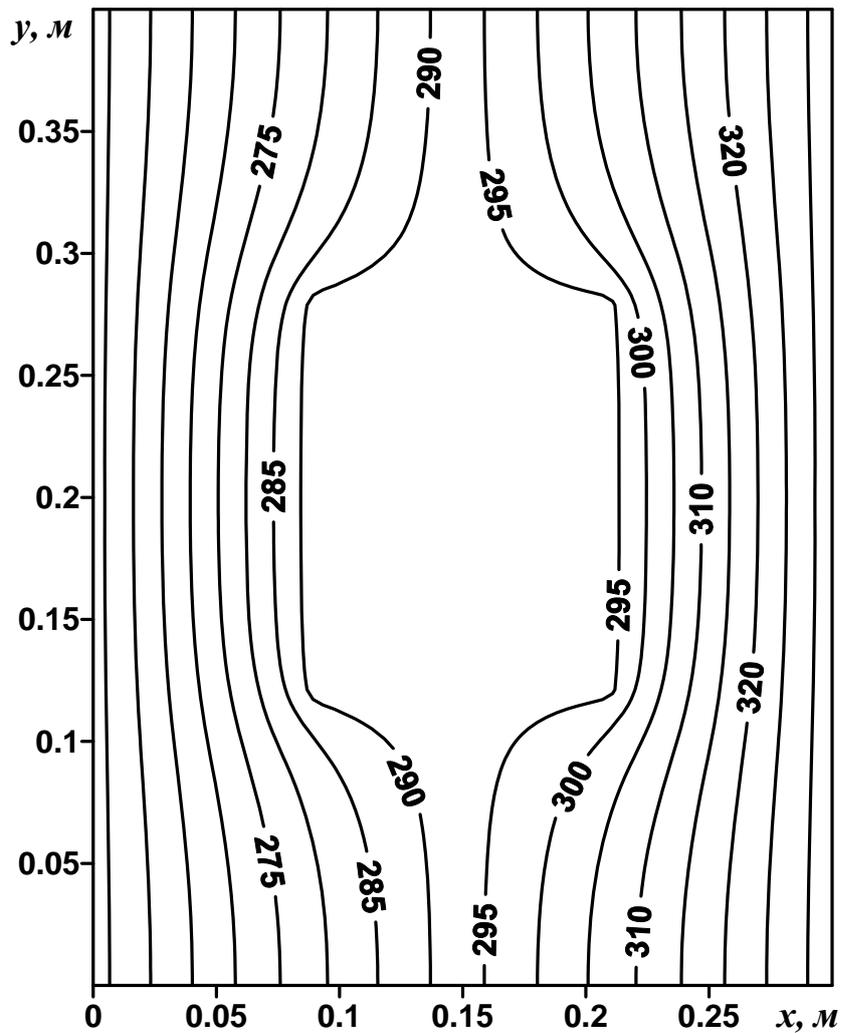


Рис. 8

Нестационарная задача теплопроводности в однородном сечении цилиндрической формы

Рассмотрим двумерную задачу теплопроводности в полярных координатах.

Необходимо определить температурное поле в сечении цилиндрической формы с размерами $R_1 = 0.2$ м, $R_2 = 0.25$ м через 6 минут, с шагом по времени 1 секунда. Начальная температура $T_0 = 293^0$ К.

Теплофизические характеристики материала сечения:

$$\lambda = 460 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^0\text{К}}, \quad \rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c = 460 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^0\text{К}}.$$

На границе $\varphi = 0, R_1 \leq r \leq R_2$ – условие симметрии; на границе $\varphi = \pi, R_1 \leq r \leq R_2$ – условие симметрии; на границе $r = R_1, 0 \leq \varphi \leq \pi$ поддерживается постоянная температура $T_h = 363 \text{ }^\circ\text{K}$; на границе $r = R_2, 0 \leq \varphi \leq \pi$ также поддерживается постоянная температура $T_c = 253 \text{ }^\circ\text{K}$. Сеточные параметры (количество отрезков в каждом направлении): $N_r = N_\varphi = 50$.

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{a}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}, \quad | R_1 < r < R_2, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

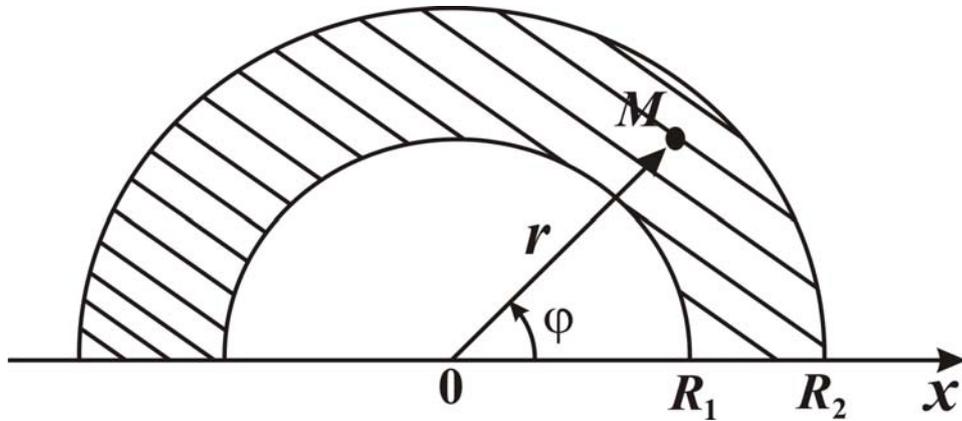


Рис. 9

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$t = 0: \quad T = T_0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$

$$r = R_1: \quad T = T_h, \quad t > 0;$$

$$r = R_2: \quad T = T_c, \quad t > 0;$$

$$\varphi = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad t > 0;$$

$$\varphi = \pi: \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad t > 0.$$

Первым этапом при численном решении краевой задачи является построение разностной сетки. Рассмотрим равномерную пространственно-временную разностную сетку. Для этого введем шаги сетки по координатам и по времени. Пусть h_r, h_φ – шаги сетки по координатам r и φ , соответственно

$\left(h_r = \frac{R_2 - R_1}{N_r}, h_\varphi = \frac{\pi}{N_\varphi} \right)$, τ – шаг сетки по времени t . Разностная сетка при

этом будет иметь следующий вид:

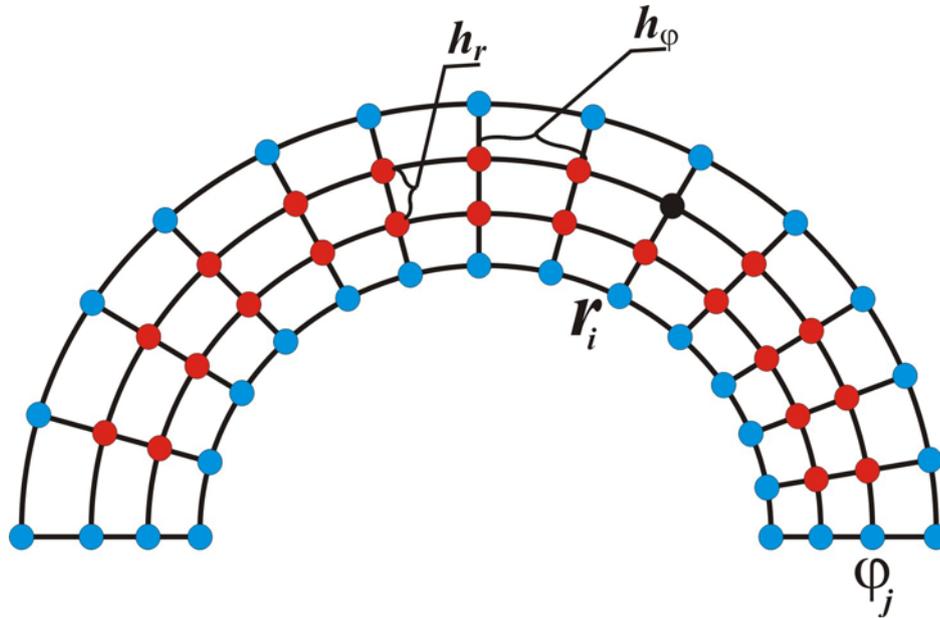


Рис. 10

Формулы для вычисления всех узлов разностной сетки будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 r_i &= R_1 + (i-1) \cdot h_r, \quad i=1, \dots, N_r + 1; \\
 x_1 &= R_1; \quad x_2 = R_1 + h_r; \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{N_r} &= R_1 + (N_r - 1) \cdot h_r; \quad x_{N_r+1} = R_1 + N_r \cdot h_r. \\
 \varphi_j &= (j-1) \cdot h_\varphi, \quad j=1, \dots, N_\varphi + 1; \\
 \varphi_1 &= 0; \quad \varphi_2 = h_\varphi; \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_{N_\varphi} &= (N_\varphi - 1) \cdot h_\varphi; \quad y_{N_\varphi+1} = N_\varphi \cdot h_\varphi. \\
 t_n &= n \cdot \tau, \quad n=0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Таким образом, непрерывная функция $T(r, \varphi, t)$ заменяется дискретной функцией $T(r_i, \varphi_j, t_n) = T_{i,j}^n$.

После того как разностная сетка построена, необходимо провести дискретизацию дифференциального уравнения в частных производных (уравнения теплопроводности), но только уже в полярных координатах. Для аппроксимации частных производных воспользуемся конечными разностями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &\approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau}; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &\approx \frac{1}{h_r} \left[r_{i+\frac{1}{2}} \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{h_r} - r_{i-\frac{1}{2}} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{h_r} \right]; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} &\approx \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_\varphi^2},\end{aligned}$$

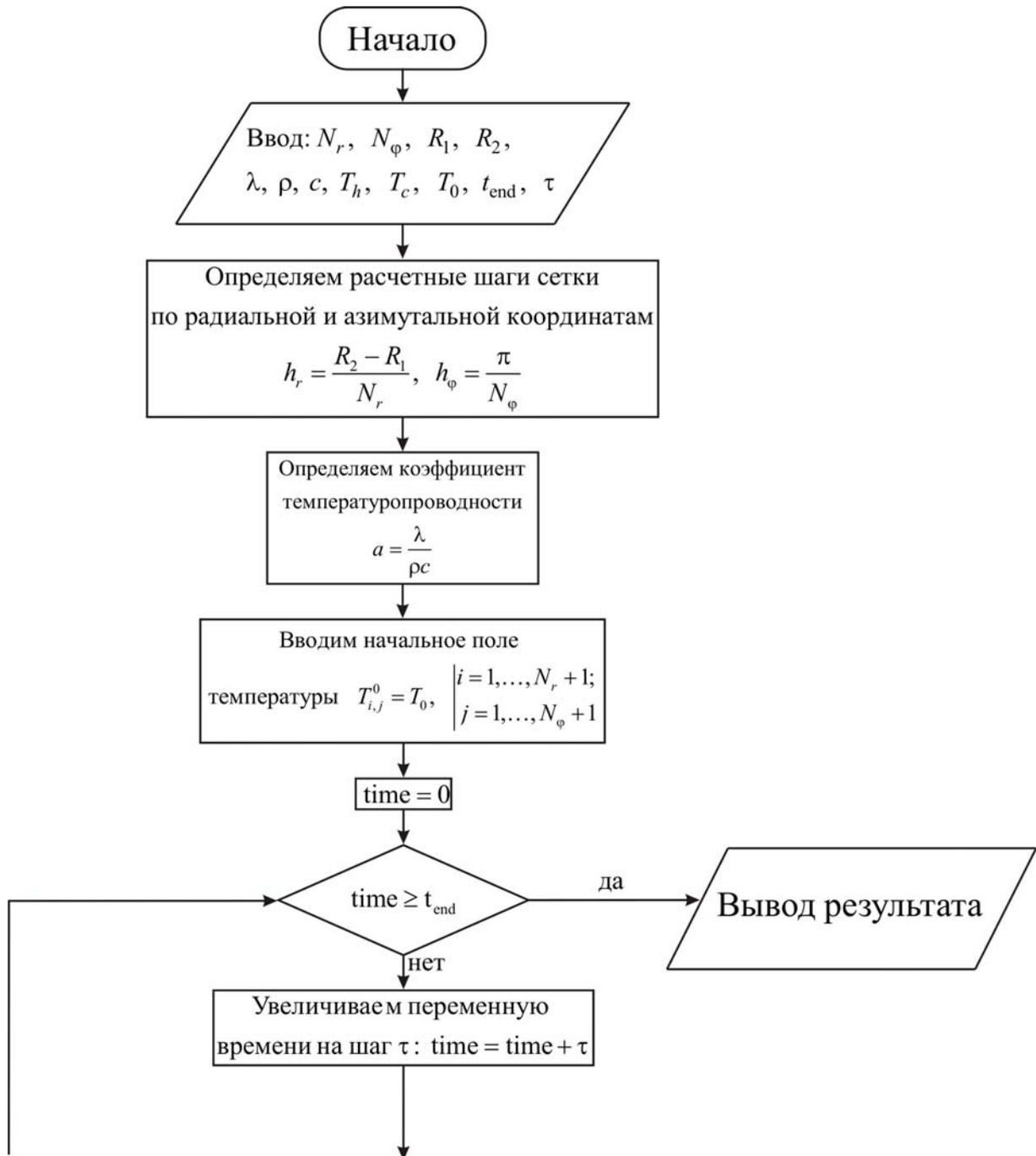
где $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$; $r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$.

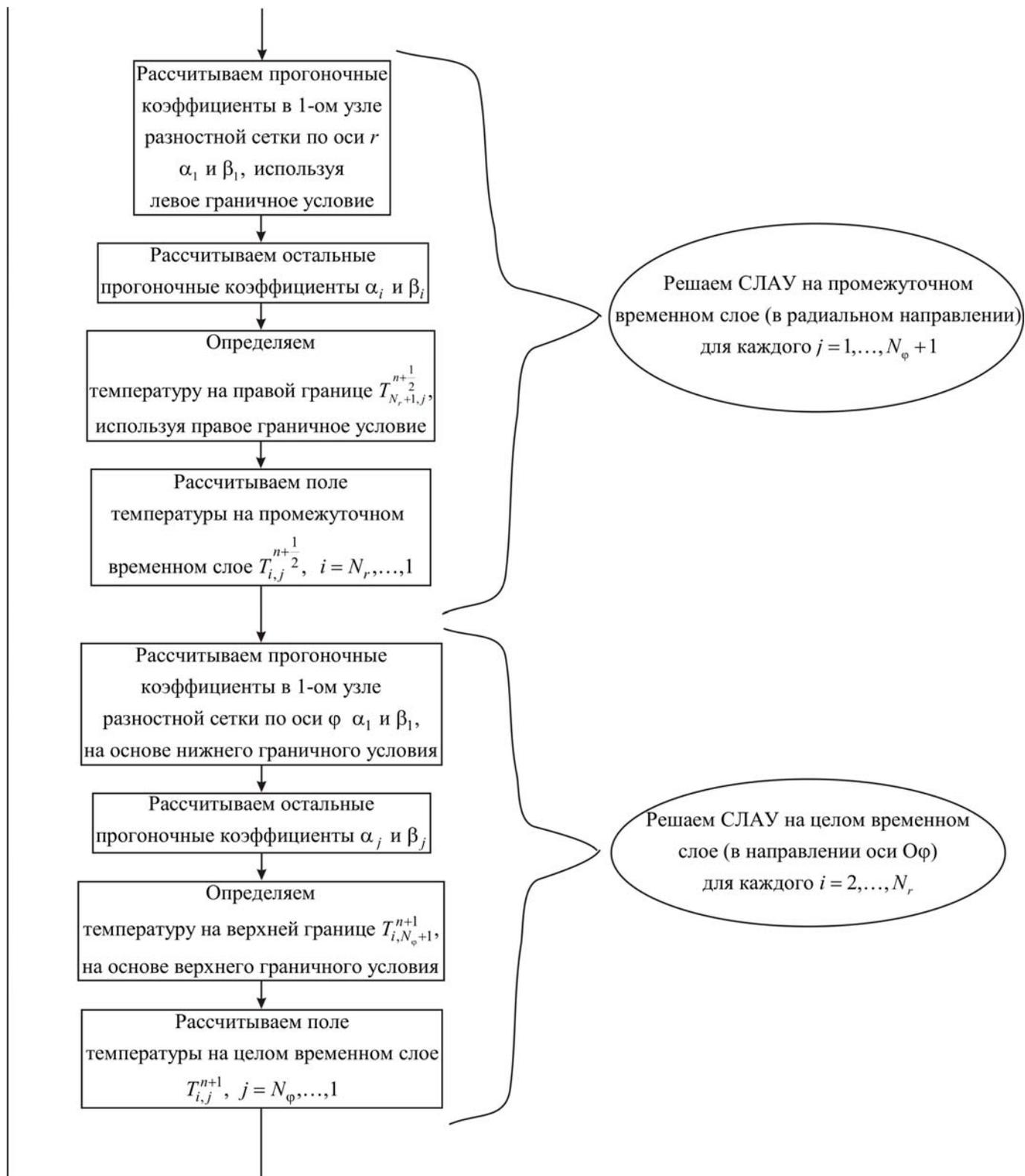
Дискретизацию дифференциального уравнения будем проводить также на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского. Эта схема позволяет за счет введения промежуточного временного слоя свести двумерное уравнение к двум одномерным в радиальном и азимутальном направлениях. Эти разностные уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau} &= \frac{a}{r_i h_r} \cdot \left[r_{i+\frac{1}{2}} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right], \\ \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{a}{r_i^2} \cdot \left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_\varphi^2} \right).\end{aligned}$$

Полученные разностные уравнения сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки. Сначала для всей области решается первое разностное уравнение, после того как его решение будет найдено, переходят к решению второго разностного уравнения.

Блок-схема к рассматриваемой задаче имеет вид:





Ниже приведен листинг программы для решения рассматриваемой задачи (на языке программирования Pascal)

```
uses crt;
const mf=100;
type
  vector1=array[1..mf] of real;
  vector2=array[1..mf,1..mf] of real;
var
  i, j, n, m      : integer;
  alfa, beta     : vector1;
  T              : vector2;
  ai, bi, ci, fi : real;
  a, lamda, ro, c, hr, hfi : real;
  T0, Th, Tc, R1, R2 : real;
  t_end, time, tau : real;
  f, g           : text;
begin
  clrscr;
  Writeln('Введите количество узлов по радиусу, n');
  Readln(n);
  Writeln('Введите количество узлов по углу, m');
  Readln(m);
  Writeln('Введите окончание по времени, t_end');
  Readln(t_end);
  Writeln('Введите шаг по времени, tau');
  Readln(tau);
  Writeln('Введите внутренний радиус канала, R1');
  Readln(R1);
  Writeln('Введите внешний радиус канала, R2');
  Readln(R2);
  Writeln('Введите коэффициент теплопроводности материала пластины, lamda');
  Readln(lamda);
  Writeln('Введите плотность материала пластины, ro');
  Readln(ro);
  Writeln('Введите теплоемкость материала пластины, c');
  Readln(c);
  Writeln('Введите начальную температуру, T0');
  Readln(T0);
  Writeln('Введите температуру на границе r=R1, Th');
  Readln(Th);
  Writeln('Введите температуру на границе r=R2, Tc');
  Readln(Tc);
  {-----}
  Определяем коэффициент температуропроводности
  {-----}
  a:=lamda/(ro*c);
  {-----}
  Определяем расчетный шаг сетки по радиальной координате
```

```

-----}
hr:=(R2-R1)/(N-1);
{-----
  Определяем расчетный шаг сетки по азимутальной координате
-----}
hfi:=pi/(M-1);
{-----
  Определяем поле температуры в начальный момент времени
-----}
for i:= 1 to N do
  for j:= 1 to M do
    T[i,j]:=T0;
  {-----
    Проводим интегрирование
    нестационарного уравнения теплопроводности
-----}
  time:=0;
  while time<t_end do
    begin
      writeln('Проработан шаг по времени',time:8:4);
      time:=time+tau;
    {-----
      На промежуточном шаге по времени
      (в радиальном направлении)
-----}
    for j:= 1 to M do
      begin
        alfa[1]:=0.0;
        beta[1]:=Th;
        for i:= 2 to N-1 do
          begin
            ai:=a*(2.0*R1+hr*(2*i-1))/(2.0*sqr(hr)*(R1+hr*(i-1)));
            ci:=a*(2.0*R1+hr*(2*i-3))/(2.0*sqr(hr)*(R1+hr*(i-1)));
            bi:=2.0*a/sqr(hr)+1.0/tau;
            fi:=-T[i,j]/tau;
            alfa[i]:=ai/(bi-ci*alfa[i-1]);
            beta[i]:=(ci*beta[i-1]-fi)/(bi-ci*alfa[i-1]);
          end;
          T[N,j]:=Tc;
          for i:= N-1 downto 1 do
            T[i,j]:=alfa[i]*T[i+1,j]+beta[i];
          end;
        {-----
          На целом шаге по времени
          (в азимутальном направлении)
-----}
      for i:= 2 to N-1 do
        begin
          alfa[1]:=1.0;
          beta[1]:=0.0;
          for j:= 2 to M-1 do
            begin

```

```

    ai:=a/(sqr(hfi)*sqr(R1+hr*(i-1)));
    ci:=ai;
    bi:=2.0*a/(sqr(hfi)*sqr(R1+hr*(i-1)))+1.0/tau;
    fi:=-T[i,j]/tau;
    alfa[j]:=ai/(bi-ci*alfa[j-1]);
    beta[j]:=(ci*beta[j-1]-fi)/(bi-ci*alfa[j-1]);
    end;
    T[i,M]:=beta[M-1]/(1-alfa[M-1]);
    for j:= M-1 downto 1 do
        T[i,j]:=alfa[j]*T[i,j+1]+beta[j];
    end;
end;
}-----
                Выводим результат в файл
}-----
Assign(f,'res.txt');
Rewrite(f);
Writeln(f,'Внутренний радиус канала R1 = ',R1:6:4);
Writeln(f,'Внешний радиус канала R2 = ',R2:6:4);
Writeln(f,'Число узлов по радиальной координате N = ',N);
Writeln(f,'Число узлов по азимутальной координате M = ',M);
Writeln(f,'Коэффициент теплопроводности материала пластины lamda = ',lamda:6:4);
Writeln(f,'Плотность материала пластины go = ',go:6:4);
Writeln(f,'Теплоемкость материала пластины c = ',c:6:4);
Writeln(f,'Начальная температура T0 = ',T0:6:4);
Writeln(f,'Температура на границе r = R1, Th = ',Th:6:4);
Writeln(f,'Температура на границе r = R2, Tc = ',Tc:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по радиальной координате hr = ',hr:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по азимутальной координате hfi = ',hfi:6:4);
Writeln(f,'Результат получен с шагом по времени tau = ',tau:6:4);
Writeln(f,'Температурное поле в момент времени t = ',t_end:6:4);
close(f);
Assign(g,'tempr.txt');
Rewrite(g);
for i:=1 to N do
    for j:=1 to M do
        writeln(g,' ',(R1+hr*(i-1))*cos(hfi*(j-1)):6:3,' ',(R1+hr*(i-1))*sin(hfi*(j-1)):6:3,' ',T[i,j]:8:5);
    end;
end.

```

Файл 'res.txt'

Внутренний радиус канала R1 = 0.2000
 Внешний радиус канала R2 = 0.2500
 Число узлов по радиальной координате N = 51
 Число узлов по азимутальной координате M = 51
 Коэффициент теплопроводности материала пластины lamda = 460.0000
 Плотность материала пластины go = 7800.0000
 Теплоемкость материала пластины c = 460.0000
 Начальная температура T0 = 293.0000
 Температура на границе r = R1, Th = 363.0000
 Температура на границе r = R2, Tc = 253.0000
 Результат получен с шагом по радиальной координате hr = 0.0010

Результат получен с шагом по азимутальной координате $h\phi = 0.0628$
Результат получен с шагом по времени $\tau = 1.0000$
Температурное поле в момент времени $t = 360.0000$

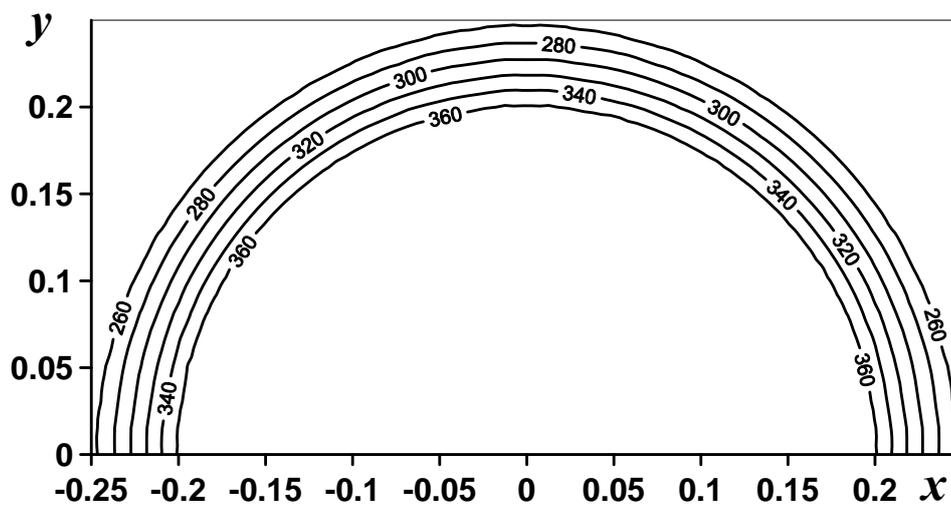


Рис. 11

Основная литература

1. Фаронов, В.В. Турбо Паскаль 7.0. Начальный курс: учебное пособие / В.В. Фаронов. – 7-е изд., перераб. – М.: “Нолидж”, 2000. – 576 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 782 с.
4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задачи теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ. 2007. – 172 с.

Дополнительная литература

5. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
6. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
8. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А., Соловьев С.Л. Теплообмен в ядерных энергетических установках. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 548 с.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
10. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. – Минск: Наука и техника, 1976. – 141 с.