Практичне заняття № 3. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді диференціал їх добутку $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\int d(uv) = uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du.$$

Звідси отримуємо *формулу інтегрування частинами*:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \qquad (3)$$

Формула інтегрування частинами (3) дає змогу звести обчислення інтеграла $\int u \cdot dv$ звести до обчислення інтеграла $\int v \cdot du$, який може виявитися набагато простішим, ніж вихідний інтеграл $\int u \cdot dv$.

Інтегрування частинами полягає у тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла записують у вигляді добутку двох співмножників: *u* та *dv*. Потім, після знаходження du та $v = \int dv$, використовують формулу інтегрування частинами (3). При цьому у знайденому виразі для v звичайно приймають $C = 0$. Інколи цю формулу доводиться використовувати декілька разів.

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких зручно використовувати метод інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, *k*– задане число. Тут зручно прийняти $u = P(x)$, а dv позначити інший співмножник у підінтегральному виразі.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\arcsin x\, dx$, $\int P(x)\arccos x\, dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\, dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\, dx$, $\int P(x)\ln x\, dx$. Тут зручно прийняти $P(x)dx = dv$, а за u позначити інший співмножник.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, де a та b – задані числа, знаходять дворазовим інтегруванням частинами. За u можна прийняти функцію e^{ax}.

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (3) інтегрування частинами. Виберемо $u = 2x+1$, $dv = e^{3x}dx$. Тоді $du = 2dx$, $v = \int dv = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Тоді за формулою (3) отримуємо:

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = \frac{2x+1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{2x+1}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

.

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Розв'язання. Для обчислення даного інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами, для чого виберемо $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$. Тоді $du = ae^{ax}dx$, $v = \int \sin bxdx = -\frac{1}{b}\cos bx$. За формулою (3) знаходимо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

До інтеграла $\int e^{ax}\cos bxdx$ у правій частині отриманої рівності ще раз застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \left\| \begin{matrix} u = e^{ax}, dv = \cos bxdx, \\ du = ae^{ax}dx, v = \frac{1}{b}\sin bx \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Підставивши знайдене значення цього інтеграла у вираз для шуканого інтеграла $\int e^{ax}\sin bxdx$, отримаємо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx =$$

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

Отримали рівняння відносно інтеграла $I = \int e^{ax}\sin bxdx$:

$$I = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}I\right).$$

Звідси знаходимо:

$$I = \frac{b\cdot e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right).$$

Приклад 20. Обчислити інтеграл $\int x^{\alpha}\ln xdx, \quad \alpha \neq -1.$

Розв’язання. Виберемо за u $\ln x$. При цьому отримуємо:

$$u=\ln x,\ dv=x^{\alpha}dx,\ du=\frac{dx}{x},$$
$$v=\int dv=\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}.$$

Тут і в інших прикладах при знаходженні v ми вибираємо найпростішу первісну, для якої $C=0$. З формули інтегрування частинами знаходимо:

$$\int x^{\alpha}\ln x dx=\left\| \begin{matrix} u=\ln x,\ dv=x^{\alpha}dx; \\ du=\dfrac{dx}{x};\ v=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \end{matrix} \right\|=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-$$
$$-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{x^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)^{2}}+C.$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $I=\int\arcsin x dx$.

Розв’язання. Для даного інтеграла $u=\arcsin x,\ dv=dx$. Тоді $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}},\ v=x$.

Підставивши ці вирази у формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int\arcsin x dx=x\cdot\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}}=x\arcsin x+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^{2}\right)}{\sqrt{1-x^{2}}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}}+C.$$

Приклад 22. Обчислити інтеграл $I=\int\cos\left(\ln x\right)dx$.

Розв’язання. Приймемо $u=\cos\left(\ln x\right),\ dv=dx$. Тоді $du=-\dfrac{\sin\left(\ln x\right)dx}{x},\ v=\int dv=x$.Отже, отримуємо:

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\,dx.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами ще раз:

$$u=\sin(\ln x),\ dv=dx,\ du=\frac{\cos(\ln x)\,dx}{x},\ v=x.$$

Знайдемо інтеграл $I_1=\int\sin(\ln x)\,dx$:

$$I_1=\int\sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-I$$

Підставивши I_1 у вираз для I, отримуємо:

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-I.$$

Звідси знаходимо інтеграл I:

$$I=\frac{x}{2}\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+C.$$

Приклад 23. Обчислити інтеграл $I=\int\left(x^2-3x+7\right)\sin 2x\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо інтегрування частинами. За u виберемо многочлен: $u=x^2-3x+7$. Тоді $dv=\sin 2x\,dx,\ du=(2x-3)\,dx,\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

За формулою інтегрування частинами знаходимо:

$$I=\int\left(x^2-3x+7\right)\sin 2x\,dx=-\frac{x^2-3x+7}{2}\cdot\cos 2x+$$

$$+\frac{1}{2}\int(2x-3)\cos 2x\,dx.$$

У інтегралі у правій частині даної рівності покладемо

$$u=(2x-3),\ dv=\cos 2x\,dx,\ du=2dx,$$

$$v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$I=\frac{-x^2+3x-7}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{2}\sin 2x-\int\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{6x-2x^2-13}{4}\cos 2x+\frac{2x-3}{4}\sin 2x+C.$$

Приклад 24. Обчислити інтеграл $I=\int\sin\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx=2tdt$. Отримаємо $I=2\int t\sin tdt$. Застосуємо формулу інтегрування частинами, прийнявши $u=t$, $dv=\sin tdt$, $du=dt$, $v=-\cos t$:

$$I=\int\sin\sqrt{x}dx=2\left(-t\cos t+\int\cos tdt\right)=2\left(\sin t-t\cos t\right)+C=$$

$$=2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C.$$

.

Приклад 25. Отримати рекурентну формулу для інтеграла

$$J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}.$$

Користуючись цією формулою, знайти інтеграл $J=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$.

Розв'язання. Для отримання рекурентної формули використаємо інтегрування частинами. Нехай $u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $dv=dx$. Звідси отримуємо:

$$du=-\frac{2nxdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},\ v=x.$$

Отже, маємо:

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1}.$$

З отриманого рівняння відносно J_{n+1} знаходимо:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n.$$

При цьому інтеграл $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$.

Використаємо знайдену рекурентну формулу для обчислення інтеграла $J = \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3} = J_3$. Тут $a^2 = 4$, $a = 2$, $n+1 = 3$, $n = 2$, $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C_1$. Далі послідовно знаходимо:

$$J_2 = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2^2}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{4}J_1 =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right) + C_2.$$

$$J_3 = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}J_2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x}{2}\right)\right) + C_3.$$

Задачі для самостійної роботи

Обчислити інтеграли

1. $\int \ln x dx$.

Відповідь: $x\ln x - x + C$.

2. $\int \text{arctg} x\, dx$.

Відповідь: $x\cdot\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$.

3. $\int x\cdot\sin x dx$.

Відповідь: $-x\cdot\cos x + \sin x + C$.

4. $\int x^2 e^x dx$.

Відповідь: $\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$.

5. $\int e^{2x}\cos x dx$.

Відповідь: $\frac{e^{2x}}{5}\left(\sin x + 2\cos x\right) + C$.

6. $\int \left(x-2\right)\arcsin x dx$.

Відповідь: $\frac{2x^2-8x-1}{4}\arcsin x + \frac{x-8}{4}\sqrt{1-x^2} + C$.