

Міністерства освіти і науки України
Запорізький національний університет

П.Г. Стеганцева, Є.В. Стеганцев, М.О. Гречнева

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної
програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол від

Запоріжжя
2019

УДК: 514.7: 515.1 (075.8)
С 79

Стеганцева П.Г., Стеганцев Є.В., Гречнева М.О. Диференціальна геометрія і топологія: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика» Запоріжжя : ЗНУ, 2019. – 160 с.

У навчальному посібнику подано в систематизованому вигляді програмний матеріал дисципліни “Диференціальна геометрія та топологія”. Він містить матеріал, необхідний для розуміння і свідомого засвоєння основних понять, теорем, конструкцій всіх подальших курсів. В посібнику наведено достатню кількість задач з детальними та обґрунтованими розв’язаннями. До кожної теми подано задачі, які можуть бути використані на практичних заняттях. Для самостійної роботи студентам пропонуються питання для самоконтролю та задачі.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика».

Рецензент

Н.М. Д’яченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск

І.В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
I КЛАСИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ.....	7
Тема 1. Диференціальна геометрія кривої у тривимірному евклідовому просторі.....	7
1.1 Векторна функція одного скалярного аргументу.....	7
1.2 Визначення параметризованої кривої. Способи задання кривої. Довжина кривої. Натуральна параметризація.....	9
1.3 Метод рухомого репера. Формули Серре-Френе.....	17
1.4 Кривина й скрут кривої. Геометричний зміст кривини й скруту. Натуральні рівняння кривої.....	20
Тема 2. Диференціальна геометрія двовимірної поверхні у тривимірному евклідовому просторі.....	26
2.1 Визначення поверхні. Дотична площина й нормаль поверхні.....	26
2.2 Фундаментальні форми поверхні.....	30
2.3 Нормальна кривина кривої на поверхні. Головні напрямки і головні кривини.....	34
2.4 Лінії кривини та асимптотичні лінії на поверхні.....	39
Тема 3. Внутрішня геометрія поверхонь.....	45
3.1 Ізометричні відображення поверхонь.....	45
3.2 Гаусове сферичне відображення поверхні.....	46
3.3 Дериваційні формули Вейнгартена гаусового рухомого репера поверхні.....	46
3.4 Геодезична кривина кривої на поверхні.....	49
3.5 Напівгеодезична параметризація поверхні.....	53
3.6 Поверхні постійної гаусової кривини.....	55
II МЕТРИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ.....	59
Тема 4. Метричні та топологічні простори.....	59
4.1 Означення та приклади метричних просторів.....	59
4.2 Відриті й замкнені множини в метричному просторі та їх властивості	60
4.3 Означення та приклади топологічних просторів.....	62
4.4 Індуковані топології.....	65
4.5 База топології.....	66
4.6 Операції над множинами в топологічному просторі.....	67
Тема 5. Неперервні відображення топологічних просторів.....	71
5.1 Неперервні відображення.....	71
5.2 Гомеоморфізми топологічних просторів.....	72
5.3 Зв'язність топологічних просторів.....	75
5.4 Лінійна зв'язність.....	78
5.5 Аксіоми віддільності. Означення та приклади T_k -просторів.....	79
5.6 Компактні топологічні простори.....	80
5.7 Аксіоми зліченності та сепарабельні топологічні простори.....	85

5.8 Конструювання топологічних просторів.....	87
Тема 6. Топологічні многовиди	92
6.1 Топологічні многовиди. Двовимірні топологічні многовиди (поверхні).....	92
6.2 Клітинне розбиття поверхні. Ейлерова характеристика.....	93
6.3 Класифікаційні теореми.....	96
III ГЛАДКІ МНОГОВИДИ.....	100
Тема 7. Означення та способи задання гладких многовидів. Приклади побудови гладкої структури.....	100
7.1 Означення та приклади топологічних много видів.....	100
7.2 Функції переходу. Означення та приклади гладких многовидів. Орієнтовні та неорієнтовні много види.....	102
7.3 Індуковані гладкі структури.....	104
7.4 Задання многовидів рівняннями.....	105
Тема 8. Гладкі відображення гладких многовидів та їх диференціали.....	109
8.1 Означення та приклади гладких відображень гладких многовидів.....	109
8.2 Дотичні вектори та дотичний простір гладкого многовиду.....	111
8.3 Диференціал гладкого відображення гладких много видів.....	113
8.4 Занурення та вкладення много видів. Вкладення многовидів у евклідов простір.....	115
IV ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА КУРСУ.....	118
Тема 1. Диференціальна геометрія кривої у тривимірному евклідовому просторі.....	118
Тема 2. Диференціальна геометрія двовимірної поверхні у тривимірному евклідовому просторі.....	124
Тема 3. Внутрішня геометрія поверхонь.....	128
Тема 4. Метричні та топологічні простори.....	132
Тема 5. Неперервні відображення топологічних просторів.....	137
Тема 6. Топологічні много види.....	141
Тема 7. Означення та способи задання гладких многовидів. Приклади побудови гладкої структури.....	141
Тема 8. Гладкі відображення гладких многовидів та їх диференціали.....	150
ЛІТЕРАТУРА.....	155
ДОДАТОК А.....	157
ДОДАТОК Б.....	159

ВСТУП

Курс «Диференціальна геометрія і топологія» є базовим курсом, який передбачений програмою для студентів математичних факультетів університетів. Його можна розділити, але лише умовно, на дві частини. В першій частині властивості геометричних об'єктів (кривих, поверхонь) вивчаються засобами диференціального та інтегрального числення. Цей матеріал зазвичай називають класичною диференціальною геометрією. Окремо розглядаються властивості поверхонь, які не залежать від способу їх занурення в тривимірний простір. Такі властивості називають інваріантами внутрішньої геометрії поверхонь.

Друга частина курсу присвячена кільком розділам топології. Загальна топологія досліджує поняття топологічного простору та гомеоморфного відображення топологічних просторів. Поняття топологічного простору успішно застосовується у багатьох розділах сучасної математики як загальне, об'єднуюче поняття. Поняття гомеоморфізму топологічних просторів відкриває шляхи до класифікації всіх топологічних просторів. Отже, предметом загальної топології є вивчення топологічних інваріантів, або, інакше, властивостей топологічних просторів, які зберігаються при гомеоморфізмах.

У XVIII столітті Л. Ейлер сформулював і довів теорему, з якої почалось вивчення замкнених поверхонь, які складають важливий клас об'єктів топології. Теорема Ейлера мала велике значення для топологічної класифікації поверхонь, оскільки введена в ній характеристика $\chi = B - P + G$ для опуклого многокутника виявилась топологічним інваріантом. За допомогою деяких понять теорії графів поняття ейлерової характеристики многогранника легко переноситься на випадок замкнених поверхонь і дозволяє доводити негомеоморфність (нееквівалентність) поверхонь, наприклад, негомеоморфність тора і кренделя, сфери і тора.

Метою курсу є систематичне введення в теорію гладких многовидів та теорію топологічних інваріантів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- елементи диференціальної геометрії кривих та поверхонь евклідового простору;
- основні поняття теоретико-множинної топології та елементи теорії метричних просторів;
- означення неперервного та гомеоморфного відображень топологічних просторів та їх властивості;
- основні топологічні інваріанти;
- означення гладкого многовиду та гладкого відображення многовидів;

вміти:

- обчислювати інваріанти кривих і поверхонь (кривина, скрут, гаусова та середня кривини);
- обчислювати довжини кривих та площі областей в криволінійних

- координатах;
- перевіряти виконання аксіом метричного та топологічного просторів; перевіряти відображення топологічних просторів на неперервність;
 - будувати гладку структуру на непустих підмножинах в двовимірному та тривимірному евклідових просторах;
 - перевіряти виконання умов вкладень та занурень для гладких відображень многовидів.

Для успішного засвоєння матеріалу студент повинен вільно володіти знаннями з аналітичної геометрії (векторна алгебра, прямі на площині і в просторі, площини в просторі, криві та поверхні другого порядку), лінійної алгебри (матриці, визначники, лінійні оператори, квадратичні форми), математичного аналізу (границі, похідні, інтеграли), мати уяву про основні алгебраїчні структури (векторний простір, група).

Знання і навички, які студенти отримають при вивченні курсу «Диференціальна геометрія і топологія», будуть корисними для подальшої математичної підготовки.

Даний навчальний посібник складений у відповідності до робочої програми навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія», він є систематичною та ґрунтовною побудовою курсу. Після кожної теми є перелік питань для самоконтролю. Щоб відповісти на ці питання, буде не достатньо лише знайти відповідне означення або теорему в тексті. Більшість з питань мають творчий характер і вимагатимуть кмітливості і вдумливого розуміння теоретичних положень. Це можна розглядати як особливість даного навчального посібника.

Практична частина курсу «Диференціальна геометрія і топологія» представлена у посібнику прикладами розв'язання задач та задачами для самостійної роботи по кожній темі курсу. Розв'язання задач супроводжуються детальними поясненнями та посиланнями на означення та теореми.

В кінці посібника є додатки з необхідними для розв'язання задач матеріалами з інших математичних дисциплін, які можна використовувати як довідник.

І КЛАСИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 1. Диференціальна геометрія кривої у тривимірному евклідовому просторі.

1.1 Векторна функція одного скалярного аргументу.

Нехай E_3 – тривимірний евклідів простір і G – зв'язна множина точок числової прямої (сегмент, напівсегмент, інтервал, відкрита або замкнута напівпряма, вся пряма).

Означення. Векторною функцією $\vec{r}(t)$ (вектор – функцією $\vec{r}(t)$), заданою на множині G , називається відображення, при якому кожному значенню $t \in G$ відповідає вектор $\vec{r}(t)$ простору E_3 .

$$\vec{r}: G \rightarrow E_3 \mid t \in G \rightarrow \vec{r}(t) \in E_3.$$

Зафіксуємо в E_3 деякий декартовий базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ і розкладемо вектор $\vec{r}(t)$ по цьому базису

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Скалярні функції $x(t), y(t), z(t)$ називаються *координатами векторної функції* $\vec{r}(t)$. Їх завдання рівносильне завданню векторної функції.

Якщо відкласти всі вектори $\vec{r}(t)$ від початку O репера $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, то при зміні t кінець M вектора $\overline{OM} = \vec{r}(t)$ опише деяку множину точок D простору E_3 , яка називається *годографом векторної функції* (або її *графіком*).

Означення. Постійний вектор $\vec{a}$ називається *границею векторної функції* $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $t \in G$, які задовольняють умові $0 < |t - t_0| < \delta$, виконується нерівність $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Позначають: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Теорема 1.1 Для того, щоб вектор $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ був границею функції $\vec{r}(t)$ в точці t_0 , необхідно й достатньо, щоб координати вектора $\vec{a}$ були границями відповідних координат вектора $\vec{r}(t)$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \alpha, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \beta, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \gamma.$$

Означення. Векторна функція $\vec{r}(t)$ називається *неперервною в точці* $t_0 \in G$, якщо $\vec{r}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$. Якщо векторна функція $\vec{r}(t)$ неперервна в усіх

точках множини G , то вона називається *неперервною на цій множині*.

Теорема 1.2 Для того, щоб векторна функція $\vec{r}(t)$ була неперервною в точці t_0 , необхідно й достатньо, щоб у точці t_0 були неперервні її координати.

Нехай векторна функція $\vec{r}(t)$ визначена на множині G . Виберемо деяке $t_0 \in G$ й надамо йому приріст Δt так, щоб $(t_0 + \Delta t) \in G$. Різницю

$\Delta \bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$ назвемо приростом векторної функції в точці t_0 .

Означення. Векторна функція $\bar{r}(t)$ називається диференційованою в точці $t_0 \in G$, якщо при $\Delta t \rightarrow 0$ існує границя відношення

$$\frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Ця границя називається похідною векторної функції $\bar{r}(t)$ в точці t_0 й позначається $\bar{r}'(t_0)$ або $\left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_{t_0}$.

Очевидно, що для диференційованості векторної функції в точці потрібна її неперервність у цій точці.

Якщо векторна функція $\bar{r}(t)$ диференційована в кожній точці множини G , то вона називається диференційованою на множині G .

Теорема 1.3 Функція $\bar{r}(t)$ диференційована в точці $t_0 \in G$ тоді й тільки тоді, коли її координати диференційовані в точці t_0 . У цьому випадку має місце рівність $\bar{r}'(t_0) = x'(t_0)\bar{i} + y'(t_0)\bar{j} + z'(t_0)\bar{k}$.

Нескладно довести, що похідна постійного вектора дорівнює нульовому вектору. Нехай векторна функція $\bar{r}(t)$ диференційована на множині G . Похідна $\frac{d\bar{r}}{dt}$ є векторною функцією на цій же множині і тому можна розглядати похідні вищих порядків, які визначаються по індукції:

$$\frac{d^n \bar{r}}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} \bar{r}}{dt^{n-1}} \right).$$

Лема (про векторну функцію постійного модуля). Якщо векторна функція $\bar{r}(t)$, $t \in G$ має на множині G постійний модуль, то в кожній точці цієї множини вектор $\bar{r}(t)$ ортогональний похідній $\bar{r}'(t)$, яка обчислюється в цій точці.

Доведення. Нехай $|\bar{r}(t)| = c$, тоді $(\bar{r}(t), \bar{r}(t)) = c^2$. Після диференціювання останньої тотожності одержимо

$$(\bar{r}'(t), \bar{r}(t)) + (\bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = 2(\bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = (c^2)' = 0.$$

Звідси випливає, що $(\bar{r}'(t), \bar{r}(t)) = 0$, а це і означає, що вектори $\bar{r}(t)$ й $\bar{r}'(t)$ ортогональні.

Теорема 1.4 (формула Тейлора) Якщо векторна функція $\bar{r}(t)$ n раз диференційована в точці $t \in G$ й $(t + \Delta t) \in G$, то

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \frac{\bar{r}'(t)}{1!}(\Delta t) + \frac{\bar{r}''(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \dots + \frac{\bar{r}^{(n)}(t)}{n!}(\Delta t)^n + \bar{\varepsilon}(\bar{r}(t), n),$$

$$\text{де } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\bar{\varepsilon}(\bar{r}(t), n)|}{(\Delta t)^n} = 0.$$

1.2 Визначення параметризованої кривої. Способи задання кривої. Довжина кривої. Натуральна параметризація

Нехай дано множину $I \subset \mathbb{R}$, що є відкритим, напіввідкритим або замкнутим інтервалом числової прямої.

Означення. Параметризованою кривою (або шляхом) у просторі E_3 називається неперервне відображення $\gamma: I \rightarrow E_3$, при якому кожному значенню $t \in I$ відповідає деяка точка простору E_3 . Змінна t називається *параметром* кривої. Образ $\gamma(I)$ множини I при відображенні γ називається *носієм кривої*.

Після вибору в просторі E_3 ортонормованого репера кожній *точці* носія кривої можна поставити у взаємно однозначну відповідність радіус-вектор цієї *точки*. Тим самим, зазначене у визначенні відображення γ є неперервною векторною функцією $\vec{r}(t)$, а образ $\gamma(t)$ цього відображення є її годографом. У зв'язку із цим рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.1)$$

називають *векторним рівнянням кривої*, а векторну функцію $\vec{r}(t)$ називають *параметризацією кривої*. Рівняння

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (1.2)$$

будемо називати *параметричними рівняннями кривої*. Говорять також, що крива задана за допомогою векторної функції $\vec{r}(t)$ і пишуть

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Будемо користуватися записом $M = \vec{r}(t)$, маючи на увазі, що *точка* M кривої є образом при відображенні $\gamma: I \rightarrow E_3$.

Означення. Крива γ , задана за допомогою векторної функції $\vec{r}(t)$ називається *гладкою кривою класу C^k* , де $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ або $k = \infty$, якщо векторна функція $\vec{r}(t)$ має неперервні похідні до порядку k включно. Гладка крива класу C^1 називається *регулярною* в точці t_0 , якщо $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. Вектор $\vec{r}'(t_0)$ називається *вектором швидкості* кривої у точці t_0 .

Приклад 1.1 Крива γ , задана рівнянням $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0; 2\pi)$ регулярна в кожній *точці* $t \in [0; 2\pi)$, тому що вектор $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ні при якому t не є нульовим. Вона є гладкою кривою класу C^∞ .

Приклад 1.2 Крива $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$, $t \in \mathbb{R}$ є регулярною й гладкою класу C^∞ . Вона називається *гвинтовою лінією*.

Приклад 1.3 Розглянемо криву $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. Її вектор швидкості $\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 0\vec{k}$. При $t = 0$ $\vec{r}'(0) = \vec{0}$. Виходить, маємо нерегулярну криву, але вона є гладкою класу C^∞ .

Означення. Точка параметризованої кривої, у якій вектор швидкості нульовий, називається *особливою точкою кривої*, у протилежному випадку точка кривої називається *неособливою*.

Нехай задана регулярна крива $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in I$. Установимо взаємно-однозначну та взаємно-неперервну відповідність між I і $I_1 \subset R$ за законом $\tau = h(t)$, де $t \in I$, $\tau \in I_1$. Тоді $h^{-1}: I_1 \rightarrow I$ й $t = h^{-1}(\tau)$. Виходить, що вектор-функція

$$\bar{r}(\tau) = x(h^{-1}(\tau))\bar{i} + y(h^{-1}(\tau))\bar{j} + z(h^{-1}(\tau))\bar{k}$$

задає відображення з I_1 в E_3 , що визначає ту ж саму криву. Говорять, що функція $\tau = h(t)$ визначає заміну параметра t на даній кривій.

Означення. Заміна параметра на кривій за законом $\tau = h(t)$, $t \in I$, $\tau \in I_1$ називається *припустимою*, якщо функція $h(t)$ в проміжку I має неперервну похідну $h'(t)$, що у всіх точках проміжку I відмінна від нуля.

Теорема 1.5 Якщо деяка точка кривої є регулярною, то при припустимих замінах параметра вона також залишиться регулярною.

Доведення. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – регулярна крива, $t \in I$ і нехай функція $\tau = \tau(t)$ здійснює припустиму заміну, тобто для кожного $t \in I$ $\tau'(t) \neq 0$. Нова параметризація кривої має вигляд $\bar{r} = \bar{r}(t(\tau))$. Знайдемо вектор швидкості за правилом диференціювання складної функції

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}}.$$

Очевидно, він відмінний від нуля, що й **доводить теорему**.

Приклад 1.4 Дана регулярна крива $\bar{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in R$ і скалярна функція $\tau = \sqrt[3]{t}$. Оскільки при $t = 0$ похідна $\frac{d\tau}{dt}$ не існує, то запропонована заміна параметра не є припустимою. Нова параметризація кривої $\bar{r}(t) = (\tau^3, \tau^6)$ не є регулярною, тому що $\bar{r}'(t) = (3\tau^2, 6\tau^5) = \bar{0}$ при $\tau = 0$. Для цієї ж кривої, наприклад, заміна $\tau = t + 1$ є припустимою (доведіть це самостійно).

Нехай регулярна крива задана за допомогою векторної функції $\bar{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Виберемо на відрізку $[a, b]$ $n-1$ *точок*, що розбивають його на n частин: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Ламана з вершинами в *точках* $M_0 = \bar{r}(t_0)$, $M_1 = \bar{r}(t_1), \dots, M_n = \bar{r}(t_n)$ називається вписаною в дану криву (рис 1.1).

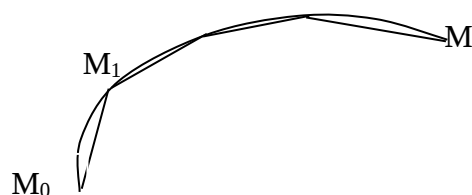


Рисунок 1.1 – Ламана, вписана в криву

Означення. Довжиною кривої називається границя, до якої прямує довжина вписаних у неї ламаних, якщо максимальна з довжин ланок цих ламаних прямує до нуля.

У випадку, коли ця границя є скінченою, крива називається *спрямлюваною* і для обчислення довжини кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ використовується формула

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Ми можемо записати цю формулу у вигляді $s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$, тому що $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Нехай $M_0 = \vec{r}(t_0)$ – деяка фіксована точка кривої, $t_0 \in [a, b]$. Кожній точці $M = \vec{r}(t)$ цієї кривої поставимо у відповідність число $s(t)$, знайдене за формулою

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(p)| dp. \quad (1.3)$$

Розглянемо властивості отриманої функції $s = s(t)$. З (1.3) випливає, що $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$, причому $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, а значить $|\vec{r}'(t)| > 0$. Отже й $s'(t) > 0$. Тому функція $s = s(t)$ монотонно зростає. А оскільки вона до того ж диференційована, то вона буде неперервною. Отже, існує обернена до неї функція $t = t(s)$, що також диференційована й монотонно зростає, причому $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \neq 0$. За означенням заміна $s = s(t)$ припустима. Таким чином,

доведена

Теорема 1.6 Будь-яка регулярна параметризована крива завжди може бути параметризованою за допомогою довжини дуги s й ця параметризація знову є регулярною.

Означення. Параметризація кривої за допомогою довжини дуги, що відлічується від деякої точки кривої, називається *природною* або *натуральною параметризацією*.

Теорема 1.7 Параметризація кривої є природною тоді й тільки тоді, коли вектор швидкості кривої задовольняє умові $|\vec{r}'(s)| \equiv 1$.

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $M_0 = \vec{r}(s_0)$. Тоді

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = |\vec{r}'(t)| \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} = 1.$$

В іншу сторону. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ і $|\vec{r}'(t)| \equiv 1$ й нехай $0 \in [a, b]$ (якщо це не так, можна зробити заміну параметра). Виберемо 0 за початок відліку,

тоді $s(t) = \int_0^t 1 dt = t$, тобто параметр t є довжиною дуги кривої. **Теорема доведена.**

Щоб знайти натуральну параметризацію кривої, заданої векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, необхідно

1. Знайти $s = s(t)$ за формулою $s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(p)| dp$;
2. Виразити t через s ;
3. Підставити у векторне рівняння кривої $t = t(s)$.

Примітка. Самим складним звичайно є другий етап, тобто знаходження явного виразу t через s . Для більшості кривих у явному виді це зробити не вдається, тому доводиться просто констатувати факт можливості переходу до натуральної параметризації.

Інший підхід до визначення кривої в E_3 розглядається в аналітичній геометрії. Криву в E_3 можна визначити як множину точок, координати яких задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

де $F(x, y, z)$ – скалярні функції змінних x, y, z . Оскільки кожне рівняння системи (1.4) задає в просторі E_3 поверхню, то крива є перетином поверхонь. Будемо називати таку криву *неявно заданою*.

Вектор $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ називається *градієнтом* функції $F(x, y, z)$. Точка M кривої L , заданої неявно системою (1.4), називається неособливою, якщо в ній вектор $[\nabla F, \nabla \Phi] \neq \vec{0}$. Ця умова рівносильна наступній

$$\text{rang} \begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix} = 2. \quad (1.5)$$

Теорема 1.8 (про неявно задану криву) Нехай F і Φ – неперервно-диференційовані функції. Нехай Ω – множина *точок*, що задовольняють систему (1.4) і $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, причому в точці M_0 виконується умова (1.5). Тоді існує окіл U_{M_0} точки M_0 такий, що перетин $\Omega \cap U_{M_0}$ є носієм регулярної параметризованої кривої.

Доведення. Так як M_0 – неособлива точка, то серед мінорів другого порядку матриці з (1.5) існує відмінний від нуля. Нехай, наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0. \text{ З курсу математичного аналізу відомо, що тоді } \Delta \neq 0 \text{ й у}$$

деякому околі U_{M_0} точки M_0 . Тоді за теоремою про неявні функції система (1.4) може бути розв'язана щодо змінних x й y в околі U_{M_0} . Це означає, що

система (1.4) рівносильна системі $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$, тобто множина Ω в околі U_{M_0}

може бути задана за допомогою цієї системи. Покладемо $z = t$. Тоді $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = t$. Отримаємо, що Ω є годографом вектор – функції $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), t)$, що є k раз диференційованою функцією. Необхідний результат випливає з того, що функція $\bar{r} = \bar{r}(t)$ визначає регулярну криву, тому що $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ для кожного t . **Теорема доведена.**

Для більшості неявних кривих параметризацію, про яку йде мова в теоремі, не завжди можна записати через елементарні або навіть спеціальні функції. Тому доводиться просто констатувати факт можливості переходу до параметризації.

Означення. Регулярною кривою тривимірного евклідового простору називається підмножина цього простору, яка або є носієм регулярної параметризованої кривої, або є неявною кривою без особливих точок.

Означення. Нехай M_0 – фіксована точка регулярної кривої, M довільна точка цієї кривої. Граничне положення січної M_0M при прямуванні точки M по кривій до точки M_0 називають дотичною прямою даної кривої у точці M_0 (Рис.1.2).

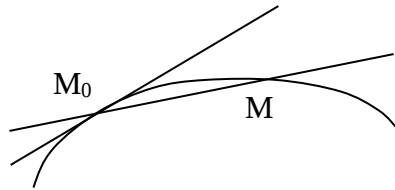


Рис.1.2. Січна (M_0M) і дотична пряма до кривої

Теорема 1.9 (геометричний зміст вектора швидкості кривої) Нехай $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – регулярна крива й $M_0 = \bar{r}(t_0)$ – точка цієї кривої. Тоді вектор швидкості $\bar{r}'(t_0)$ є напрямним вектором дотичної прямої цієї кривої у точці M_0 .

Доведення. Нехай $M_0 = \bar{r}(t_0)$ – фіксована точка заданої кривої, $M = \bar{r}(t)$ – змінна точка, близька до точки M_0 . Вектор $\overline{M_0M} = \bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)$ є напрямним вектором січної прямої M_0M . Вектор $\frac{\overline{M_0M}}{t - t_0} = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0}$ є також напрямним вектором січної прямої. Тому що крива $\bar{r} = \bar{r}(t)$ регулярна, то існує границя $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} = \bar{r}'(t_0)$. Але граничним положенням січної прямої є дотична пряма, тому $\bar{r}'(t_0)$ є напрямним вектором дотичної, **що й потрібно було довести.**

Користуючись цією теоремою, неважко скласти рівняння дотичної прямої. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – регулярна крива й точка $M_0 = \bar{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$

належить цій кривій. Вектор $\bar{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ є напрямним вектором дотичної прямої у точці M_0 , канонічні рівняння якої мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (1.6)$$

Означення. Площина, що проходить через точку кривої перпендикулярно її дотичній прямій у цій точці, називається *нормальною площиною кривої* в даній точці.

Рівняння нормальної площини має вигляд

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 \quad (1.7)$$

Якщо вектор постійної довжини відкладати від початку репера $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то його кінець буде лежати на сфері, тобто годографом такої векторної функції є деяка множина точок сферичної поверхні – сферична крива. Нехай вектор $\bar{r}'(t)$ – напрямний вектор дотичної прямої цієї кривої. Очевидно, він перпендикулярний радіусу-вектору, проведеному в точку дотику. Тому лема про векторну функцію постійного модуля може бути сформульована так: дотична пряма сферичної кривої перпендикулярна радіусу, проведеному із центра сфери в точку дотику.

Теорема 1.10 Якщо неявна крива L задана системою рівнянь (1.4) і $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – неособлива точка цієї кривої, то вектор $[\nabla F, \nabla \Phi]_{M_0}$ є напрямним вектором дотичної прямої цієї кривої у точці M_0 .

Доведення. За умовою теореми M_0 – неособлива точка кривої L . Відповідно до теореми 1.8 про неявну криву, в околі U_{M_0} точки M_0 множина точок, що задовольняють системі (1.4), є носієм регулярної кривої $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, тобто в околі U_{M_0} мають місце тотожності:

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \quad \Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

Після диференціювання цих тотожностей по t одержимо

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' \equiv 0, \quad \Phi'_x x' + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' \equiv 0.$$

У точці $M_0 = \bar{r}(t_0)$ ці рівності означають, що пари векторів $\nabla F|_{M_0}$ й $\bar{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, $\nabla \Phi|_{M_0}$ і $\bar{r}'(t_0)$ ортогональні. Отже, вектори $\bar{r}'(t_0)$ й $[\nabla F, \nabla \Phi]_{M_0}$ колінеарні. **Теорема доведена.**

Складемо рівняння дотичної прямої для неявно заданої кривої в точці M_0 . Її напрямний вектор

$$[\nabla F, \nabla \Phi]_{M_0} = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ \Phi'_z & \Phi'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix} \right) (M_0).$$

Позначимо координати вектора $[\nabla F, \nabla \Phi]_{M_0}$ через α, β, γ і запишемо рівняння дотичної прямої у вигляді

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}. \quad (1.8)$$

Рівняння нормальної площини в точці M_0 має вигляд

$$\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) = 0, \quad (1.9)$$

або, в іншому записі

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} = 0, \quad (1.10)$$

де всі похідні обчислені в точці M_0 .

Наслідок. Якщо неявно задана крива L лежить у площині $z=0$ й має рівняння $F(x,y)=0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$, у якій вектор $(F'_x, F'_y)|_{M_0}$ ненульовий, рівняння дотичної прямої має вигляд

$$F'_x(M_0) \cdot (x-x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y-y_0) = 0. \quad (1.11)$$

Доведення. Крива L в E_3 задається системою рівнянь $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$. Тоді

$$\begin{aligned} \overline{\nabla F}|_{M_0} &= (F'_x(M_0), F'_y(M_0), 0), \quad \overline{\nabla \Phi}|_{M_0} = (0, 0, 1), \\ [\overline{\nabla F}, \overline{\nabla \Phi}]|_{M_0} &= (F'_x(M_0), -F'_y(M_0), 0). \end{aligned}$$

Рівняння дотичної прямої у точці M_0 має вигляд

$$\frac{x-x_0}{F'_y(M_0)} = \frac{y-y_0}{-F'_x(M_0)} = \frac{z-0}{0}$$

або

$$\begin{cases} F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

що й було потрібно довести.

Означення. *Стичною площиною* просторової кривої L в даній її точці M_0 називається граничне положення, до якого прямує січна площина $(M_0 M_1 M_2)$, за умови, що точки M_1 й M_2 прямують по кривій до точки M_0 .

Означення. Нехай дана гладка класу C^k , $k \geq 2$ крива $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Точка $M_0 = \bar{r}(t_0)$ називається *бірегулярною точкою* цієї кривої, якщо в ній виконана умова $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)] \neq \bar{0}$. У протилежному випадку точка M_0 називається *точкою розпрямлення*.

Теорема 1.11 (про стичну площину) Кожна крива в будь-якій своїй бірегулярній точці $M_0 = \bar{r}(t_0)$ має стичну площину, нормальним вектором якої є вектор $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)]$.

Доведення. Нехай $M_0 = \bar{r}(t_0)$ – бірегулярна точка кривої $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Розглянемо точки $M_1 = \bar{r}(t_1)$ й $M_2 = \bar{r}(t_2)$. Січну площину $\alpha = (M_0 M_1 M_2)$ будемо задавати рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Розглянемо допоміжну скалярну функцію $f(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D$.

Так, як $M_0 \in \alpha$, то $f(t_0) = 0$. Аналогічно, так, як $M_1, M_2 \in \alpha$, то $f(t_1) = 0$, $f(t_2) = 0$. За теоремою Ролля існують такі $\xi_1 \in [t_0, t_1]$, $\xi_2 \in [t_0, t_2]$, що $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$. Функція $f'(t)$ також задовольняє теоремі Ролля. Тому існує $h \in [\xi_1, \xi_2]$ таке, що $f''(h) = 0$. Спрямуємо t_1, t_2 до t_0 , тоді $\xi_1 \rightarrow t_0, \xi_2 \rightarrow t_0$ й $h \rightarrow t_0$. Внаслідок неперервності функцій $f'(t)$ й $f''(t)$ в граничному положенні матимемо $f(t_0) = 0, f'(t_0) = 0, f''(t_0) = 0$, де $f'(t) = Ax'(t) + By'(t) + Cz'(t)$, $f''(t) = Ax''(t) + By''(t) + Cz''(t)$.

Таким чином, $(\bar{N}, \bar{r}'(t_0)) = 0$ і $(\bar{N}, \bar{r}''(t_0)) = 0$, де вектор $\bar{N} = (A, B, C)$ є нормальним вектором граничного положення площини α . З останніх двох рівностей випливає колінеарність векторів $\bar{N}$ й $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)]$, **що й потрібно було довести.**

Складемо рівняння стичної площини кривої, заданої параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для цього знайдемо координати (α, β, γ) вектора $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)]$.

Рівняння стичної площини має вигляд

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0, \quad (1.12)$$

де $\alpha = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $\beta = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $\gamma = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$, і α, β, γ обчислюються при $t = t_0$.

Стична площина плоскої кривої збігається із площиною, у якій лежить крива (це безпосередньо впливає з визначення стичної площини).

Встановимо *геометричний зміст стичної площини*. Розглянемо гладку криву класу C^k , $k \geq 2$. Будемо називати будь-яку площину, що проходить через дотичну пряму, дотичною площиною. Стична площина також є дотичною площиною. Разом зі стичною площиною π з нормальним вектором $\bar{n}$ розглянемо й іншу дотичну площину π_1 з нормальним вектором $\bar{n}_1$. Векторні рівняння цих площин мають такий вигляд: $\pi: (\bar{R} - \bar{r}(t_0), \bar{n}) = 0$, $\pi_1: (\bar{R}_1 - \bar{r}(t_0), \bar{n}_1) = 0$, де $\bar{R}, \bar{R}_1$ – радіус-вектори поточних точок площин π й π_1 . Нехай $M = \bar{r}(t_0 + \Delta t)$ – точка кривої, досить близька до точки $M_0 = \bar{r}(t_0)$. Знайдемо її відстань до площини π

$$\begin{aligned} \rho(M, \pi) &= |(\bar{n}, \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0))| = \left| \bar{n}, \bar{r}'(t_0) \Delta t + \frac{\bar{r}''(t_0)}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\bar{r}'''(t_0)}{6} (\Delta t)^3 + \bar{O}(\Delta t)^4 \right| = \\ &= \left| \bar{n}, \frac{\bar{r}'''(t_0)}{6} (\Delta t)^3 + \bar{O}(\Delta t)^4 \right| = |\bar{O}(\Delta t)^3| = O(\Delta t)^3. \end{aligned}$$

Говорять, що в цьому випадку маємо дотикання другого порядку. У

неособливих точках кривої це найбільший порядок дотикання площини із кривою. Стична площина є єдиною площиною, що має цю властивість. Тому що вектор $\bar{n}_1$ неколінеарний до вектора $\bar{n}$, то $(\bar{n}_1, \bar{r}'') \neq 0$. Тоді відстань $\rho(M, \pi_1) = O(\Delta t)^2$. У цьому випадку маємо дотикання першого порядку. Таким чином, із всіх дотичних площин стична площина «найбільш близько прилягає до кривої».

1.3 Метод рухомого репера. Формули Серре-Френе.

Подібно тому, як в аналітичній геометрії вивчення того або іншого геометричного образу (кривої, поверхні) спрощується шляхом доцільного вибору нерухомої (фіксованої) системи координат, так у диференціальній геометрії із часів Жана Фредеріка Френе (Frenet J.F.) прагнуть відшукати найбільш зручні рухливі системи координат - канонічні репери геометричних образів.

Нехай разом із кривою L задані вектор-функція $\bar{\rho}(t)$ й вектор - функції $\bar{e}_1(t)$, $\bar{e}_2(t)$, $\bar{e}_3(t)$, що задовольняють умові $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \neq 0$, і ці функції залежать від того ж параметра t , що й крива. Тоді обумовлений ними афінний репер $R_M = \{M(\bar{\rho}), \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ називається *рухомим репером кривої L* (рис. 1.3).

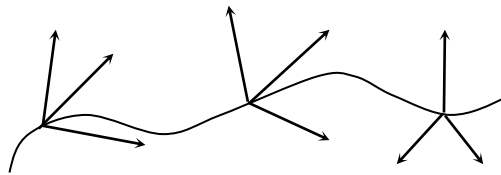


Рисунок 1.3 – Рухомий репер

Рухомий репер R_M кривої L називається *диференційованим класу C^k* , якщо вектор - функції $\bar{\rho}(t), \bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \bar{e}_3(t)$ диференційовані класу C^k . Вивчення геометричного образу за допомогою рухомого репера називається *методом рухомого репера*.

Нехай дано диференційований (класу C^1) репер. Тоді існують похідні $\bar{\rho}'(t), \bar{e}_1'(t), \bar{e}_2'(t), \bar{e}_3'(t)$, що є неперервними функціями параметра t . Можна записати розклад

$$\begin{aligned}\bar{\rho}'(t) &= \alpha^1 \bar{e}_1(t) + \alpha^2 \bar{e}_2(t) + \alpha^3 \bar{e}_3(t), \\ \bar{e}_1'(t) &= \alpha_1^1 \bar{e}_1(t) + \alpha_1^2 \bar{e}_2(t) + \alpha_1^3 \bar{e}_3(t), \\ \bar{e}_2'(t) &= \alpha_2^1 \bar{e}_1(t) + \alpha_2^2 \bar{e}_2(t) + \alpha_2^3 \bar{e}_3(t), \\ \bar{e}_3'(t) &= \alpha_3^1 \bar{e}_1(t) + \alpha_3^2 \bar{e}_2(t) + \alpha_3^3 \bar{e}_3(t).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Припускаючи, відповідно до правила Ейнштейна, що по індексах, які повторюються, виконується підсумовування, перепишемо ці розклади у вигляді

$$\bar{p}'(t) = \alpha^i(t) \bar{e}_i(t), \quad \bar{e}_j'(t) = \alpha_j^i(t) \bar{e}_i(t), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Означення. Формули, що представляють собою розкладання похідних від векторів рухомого репера по векторах базису цього репера, називаються *дери́ваційними формулами рухомого репера*. Матриця $A = (a_i^j)$ називається *матрицею дери́ваційних формул рухомого репера*.

Теорема 1.12 Матриця дери́ваційних формул ортонормованого рухомого репера кососиметрична.

Доведення. Нехай $R_M = \{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – ортонормований репер, тобто $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$, де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, і всі функції $\bar{e}_i$ залежать від t . З визначення символу Кронекера відразу випливає властивість: $\sigma_k^i \delta_{ij} = \sigma_k^j$. Продиференціюємо по t скалярний добуток $(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. За правилом диференціювання скалярного добутку одержимо $(\bar{e}_i', \bar{e}_j) + (\bar{e}_i, \bar{e}_j') = 0$. Підставляючи значення $\bar{e}_i'$ з дери́ваційних формул, приведемо останню рівність до виду $\alpha_i^k (\bar{e}_k, \bar{e}_j) + \alpha_j^k (\bar{e}_i, \bar{e}_k) = 0$, або $\alpha_i^k \delta_{kj} + \alpha_j^k \delta_{ik} = \alpha_i^j + \alpha_j^i = 0$.

Із рівності $\alpha_i^j + \alpha_j^i = 0$ випливає рівність $\alpha_i^j = -\alpha_j^i$, а це означає, що матриця дери́ваційних формул ортонормованого репера має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ -\alpha_1^2 & 0 & \alpha_2^3 \\ -\alpha_1^3 & -\alpha_2^3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ що й було потрібно довести.}$$

Означення. Головною нормаллю кривої в точці M називається пряма, що є перетином стичної і нормальної площин кривої у цій точці.

Означення. Пряма, що проходить через точку M й перпендикулярна стичній площині, називається *бінормаллю* кривої в точці M .

Означення. Площина, яка містить в собі дотичну пряму і бінормаль, називається *спрямною площиною* кривої.

Фігура, що складається із трьох прямих (дотичної, головної нормалі й бінормалі) і трьох площин (нормальної, стичної й спрямної), називається *тригранником Френе* (рис. 1.4)



Рисунок 1.4 – Тригранник Френе

Означення. Репером Френе кривої L у її точці M називають правий декартів ортонормований репер $\{M, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$, базисні вектори якого визначають, відповідно, дотичну, головну нормаль і бінормаль кривої L в точці M (рис. 1.5).

Зауваження. Вектори репера Френе ще позначають $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ або $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$.

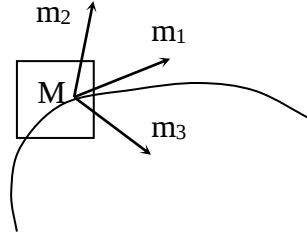


Рисунок 1.5 – Репер Френе

Нехай гладка крива L класу $C^k, k \geq 2$ задана за допомогою вектор-функції $\bar{r}(t)$. Тоді вектор $\bar{r}'(t)$ є напрямним вектором дотичної прямої, а вектор $[\bar{r}', \bar{r}'']$ визначає напрямок бінормалі кривої L . Виберемо вектори $\bar{m}_1$ й $\bar{m}_3$ так, щоб $\bar{m}_1 \uparrow \bar{r}'$, $\bar{m}_3 \uparrow [\bar{r}', \bar{r}'']$. Оскільки репер $\{M, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$ правий й ортонормований, то вектор $\bar{m}_2$ однозначно визначається векторами $\bar{m}_1$ й $\bar{m}_3$. Остаточно одержимо наступні формули для визначення базисних векторів репера Френе:

$$\bar{m}_1 = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}, \quad \bar{m}_3 = \frac{[\bar{r}', \bar{r}'']}{|[\bar{r}', \bar{r}'']|}, \quad \bar{m}_2 = [\bar{m}_3, \bar{m}_1]. \quad (1.14)$$

З'ясуємо, як змінюються вектори базису Френе кривої при припустимій заміні параметра. Нехай $t = t(s)$ – функція заміни параметра, причому $t'_s \neq 0$. Тоді $\bar{r}(s) = \bar{r}(t(s))$ – нова параметризація кривої. Знайдемо:

$$\bar{r}'_s = \bar{r}'_t t'_s, \quad \bar{r}''_{ss} = \bar{r}''_{tt} (t'_s)^2 + \bar{r}'_s t''_{ss}, \quad [\bar{r}'_s, \bar{r}''_{ss}] = [\bar{r}'_t, \bar{r}''_{tt}] (t'_s)^3.$$

Якщо $t'_s > 0$, то $\bar{r}'_s \uparrow \bar{r}'_t$ й $[\bar{r}'_s, \bar{r}''_{ss}] \uparrow [\bar{r}'_t, \bar{r}''_{tt}]$. Якщо $t'_s < 0$, то $\bar{r}'_s \uparrow \bar{r}'_t$ й $[\bar{r}'_s, \bar{r}''_{ss}] \downarrow [\bar{r}'_t, \bar{r}''_{tt}]$. У кожному із цих випадків вектор $\bar{m}_2$ не змінює напрямку, тому що репер Френе, за означенням, правий.

Нехай $\bar{r} = \bar{r}(s)$, $s \in [a, b]$ – бірегулярна крива, параметризована довжиною дуги. У кожній точці M кривої можна побудувати ортонормований репер Френе $\{M, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$. Дериваційні формули цього репера називаються *формулами Серре – Френе*.

Теорема 1.13 Дериваційні формули Серре – Френе ортонормованого репера Френе бірегулярної кривої мають вигляд:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{m}_1, \quad \frac{d\bar{m}_1}{ds} = k\bar{m}_2, \quad \frac{d\bar{m}_2}{ds} = -k\bar{m}_1 + \kappa\bar{m}_3, \quad \frac{d\bar{m}_3}{ds} = -\kappa\bar{m}_2, \quad (1.15)$$

де k й κ (читається *каппа*) – скалярні функції натурального параметра s , причому $k(s) > 0$ для кожного $s \in [a, b]$.

Доведення. Якщо репер ортонормований, то матриця його дериваційних формул кососиметрична. Тому

$\frac{d\bar{m}_1}{ds} = \alpha_1^2 \bar{m}_2 + \alpha_1^3 \bar{m}_3$, $\frac{d\bar{m}_2}{ds} = -\alpha_1^2 \bar{m}_2 + \alpha_2^3 \bar{m}_3$, $\frac{d\bar{m}_3}{ds} = -\alpha_1^3 \bar{m}_1 - \alpha_2^3 \bar{m}_2$. Врахуємо, що

$\bar{m}_3 \parallel \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right]$ й $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{m}_1$, тоді $\bar{m}_3 \perp \frac{d\bar{m}_1}{ds}$. Отже, $\left(\bar{m}_3, \frac{d\bar{m}_1}{ds} \right) = 0$, або

$\left(\bar{m}_3, \alpha_1^2 \bar{m}_2 + \alpha_1^3 \bar{m}_3 \right) = 0$, звідки $\alpha_1^3 = 0$. Позначимо $\alpha_1^2 = k$, $\alpha_2^3 = \kappa$. Одержимо дериваційні формули у вигляді (1.15). Крім того,

$\bar{m}_3 \uparrow\uparrow \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right] = [\bar{m}_1, k\bar{m}_2] = k\bar{m}_3$. Отже, $\bar{m}_3 \uparrow\uparrow k\bar{m}_3$, а це значить $k > 0$.

1.4 Кривина й скрут кривої. Геометричний зміст кривини й скруту. Натуральні рівняння кривої

Розглянемо регулярну криву $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(s)$, де s - натуральний параметр.

Вектор $\bar{m}_1 = \frac{d\bar{r}}{ds}$ є одиничним вектором дотичної прямої у деякій точці M .

Означення. Вектор $\bar{N} = \frac{d\bar{m}_1}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ називається *вектором кривини кривої*

у точці M . Довжина $|\bar{N}|$ цього вектора називається *кривиною кривої в точці M* .

Оскільки $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$ (параметризація натуральна), то вектор $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{N}$

ортогональний до вектора $\frac{d\bar{r}}{ds}$ й, отже, лежить у нормальній площині й

направлений по головній нормалі. З другої формули Френе (1.15): $\frac{d\bar{m}_1}{ds} = k\bar{m}_2$

ясно, що коефіцієнт k є кривиною кривої. Тому можна дати інше означення кривини кривої.

Означення. *Кривиною кривої* називається коефіцієнт k у формулах Френе.

Означення. Якщо в точці M кривої $k \neq 0$, то число $R = \frac{1}{k}$ називається

радіусом кривини кривої у точці M .

Ця назва пов'язана з тим, що коло радіуса R якнайкраще (у порівнянні з усіма іншими колами) наближає криву в околі точки M .

Теорема 1.14 (геометричний зміст кривини) Кривина k кривої $\bar{r} = \bar{r}(s)$ в точці $M_0 = \bar{r}(s_0)$ дорівнює кутовій швидкості обертання дотичної прямої

навколо точки M_0 , тобто $k(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$, де $\Delta \varphi$ – кут повороту дотичної, що відповідає приросту довжини дуги Δs .

Доведення. Розглянемо точку $M = \bar{r}(s_0 + \Delta s)$, досить близьку до точки M_0 . З рівнобедреного трикутника M_0BC , де $\overline{M_0B} = \bar{m}_1(s_0)$, $\overline{M_0C} = \bar{m}_1(s_0 + \Delta s)$, можна знайти

$$\overline{BC} = \Delta \bar{m}_1(s_0) = \bar{m}_1(s_0 + \Delta s) - \bar{m}_1(s_0).$$

Довжина $|\overline{BC}|$ дорівнює $|\Delta \bar{m}_1(s_0)| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$, причому $\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \rightarrow 0$, тому що $\Delta \varphi \rightarrow 0$ при $\Delta s \rightarrow 0$. За першою формулою Френе

$$k = \left| \frac{d\bar{m}_1}{ds} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{m}_1}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{m}_1}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|},$$

що й було потрібно довести.

Теорема 1.15 (характеристична властивість прямої) Для того, щоб крива була прямою або її частиною (відрізком, променем), необхідно й достатньо щоб у кожній її точці кривина дорівнювала нулю.

Доведення. Необхідність. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – пряма, що проходить через точку $M_0 = \bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)$ й має напрямний вектор $\bar{a}$, тоді $\bar{r}(s) = \bar{r}_0 + \bar{a}s$ – її векторне рівняння. Тому що $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{a}$, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{0}$, то $k = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = 0$.

Достатність. Нехай для кожного s $k(s) = 0$, тобто

$$k = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}} = 0. \text{ Тоді одночасно } \frac{d^2x}{ds^2} = 0, \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

звідки $\frac{dx}{ds} = a_1$, $\frac{dy}{ds} = a_2$, $\frac{dz}{ds} = a_3$, і, нарешті, $x = a_1s + x_0$, $y = a_2s + y_0$, $z = a_3s + z_0$ – параметричні рівняння кривої. **Теорема доведена.**

Означення. Точки кривої, у яких $k = 0$ називаються *точками розпрямлення*.

Таким чином, пряма складається із точок розпрямлення.

У формулах Френе для бірегулярної кривої $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(s)$ крім коефіцієнта k є ще й коефіцієнт κ , що називається *скрутом кривої*.

Означення. Абсолютним скрутом $|\kappa|$ у точці M кривої γ називається абсолютна величина вектора $\frac{d\bar{m}_3}{ds}$, $|\kappa| = \left| \frac{d\bar{m}_3}{ds} \right|$.

Теорема 1.16 (геометричний зміст абсолютного скруту й знака скруту) Абсолютний скрут кривої в точці M дорівнює кутовій швидкості

обертання бінормалі кривої навколо точки M_0 , тобто $|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}$, де $\Delta \psi$ – кут повороту бінормалі, що відповідає приросту довжини дуги Δs . Скрут буде додатним (від’ємним), якщо при спостереженні з кінця вектора швидкості вектор бінормалі при русі точки по кривій обертається проти (по) годинникової стрілки.

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1.14.

Теорема 1.17 (характеристична властивість плоскої кривої) Для того, щоб бірегулярна крива була плоскою, необхідно й достатньо, щоб у кожній її точці скрут дорівнював нулю.

Доведення. Достатність. Нехай $\kappa = 0$, тоді $\frac{d\bar{m}_3}{ds} = -\kappa \bar{m}_2 = \bar{0}$. Отже, $\bar{m}_3 = \overline{const} = \bar{m}_0$. Оскільки $(\bar{r}(s), \bar{m}_0)' = (\bar{r}', \bar{m}_0) = (\bar{m}_1, \bar{m}_3) = 0$, то, інтегруючи, одержимо $(\bar{r}(s), \bar{m}_0) \equiv C$. Віднімаючи від цієї рівності рівність $(\bar{r}(s_0), \bar{m}_0) \equiv C$, одержимо $(\bar{r}(s) - \bar{r}(s_0), \bar{m}_0) \equiv 0$. Звідси випливає, що довільна точка $M = \bar{r}(s)$ кривої належить площині $(\bar{R} - \bar{r}(s_0), \bar{m}_0) \equiv 0$. Тут $\bar{R}$ – радіус-вектор поточної точки цієї площини.

Необхідність. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – плоска крива, α – площина, у якій вона лежить. Тому що це стична площина, то $\bar{m}_3(s)$ – постійний вектор. Таким чином, $\frac{d\bar{m}_3}{ds} = -\kappa \bar{m}_2 = \bar{0}$, звідки $\kappa = 0$ для кожного s . **Теорема доведена.**

Означення. Точка бірегулярної кривої, у якій скрут дорівнює нулю, називається точкою *сплощення*.

Скрут характеризує відмінність просторової кривої від плоскої. Плоска крива цілком складається із точок сплощення.

Очевидно, скрут кривої визначений в тих точках, у яких кривина відмінна від нуля.

Знайдемо обчислювальні формули для кривини й скруту бірегулярної кривої. Спочатку розглянемо криву $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(s)$, параметризовану довжиною дуги. Для неї

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{m}_1, \quad \frac{d\bar{m}_1}{ds} = k\bar{m}_2 = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \quad \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\bar{m}_2 + k\frac{d\bar{m}_2}{ds} = \frac{dk}{ds}\bar{m}_2 + k(-k\bar{m}_1 + \kappa\bar{m}_3).$$

$$\text{Тому } \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right] = k[\bar{m}_1, \bar{m}_2] = k\bar{m}_3, \quad \left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right) = k^2\kappa(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3).$$

Таким чином,

$$k = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \left| \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right] \right|, \quad (1.16)$$

$$\kappa = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right). \quad (1.17)$$

У випадку довільної параметризації кривої $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t)$, перейдемо до натурального параметра за формулою $s = s(t)$. Тоді $\bar{r} = \bar{r}(t(s))$. Обчислимо

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2 \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^3t}{ds^3}.$$

Скористаємося отриманими формулами (1.16) і (1.17)

$$k = \frac{\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right]}{\left| \frac{ds}{dt} \right|^3} = \frac{\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right]}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|^3}, \quad \kappa = \frac{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^6}{k^2}$$

або, інакше

$$k = \frac{[\bar{r}', \bar{r}']}{|\bar{r}'|^3}, \quad (1.18)$$

$$\kappa = \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{[\bar{r}', \bar{r}'']^2}. \quad (1.19)$$

Таким чином, для обчислення кривини й скруту бірегулярної кривої у випадку натуральної параметризації можна користуватися формулами (1.16), (1.17), а у випадку довільної параметризації - формулами (1.18), (1.19).

Для регулярної кривої можна одержати залежності

$$\begin{cases} k = k(s) \\ \kappa = \kappa(s) \end{cases}, \quad (1.20)$$

де s - довжина дуги.

Ці рівності називаються *натуральними рівняннями кривої*.

Теорема 1.17 (основна теорема теорії кривих) Нехай задані неперервні функції $k(s) > 0$ й $\kappa(s)$ ($s \in (0, S)$) класів C^1 і C^0 відповідно. Тоді існує єдина (з точністю до положення в просторі) бірегулярна крива, натуральні рівняння якої мають вигляд (1.20).

На практиці плоска крива досить легко відновлюється за її натуральними рівняннями. Параметричні рівняння просторової кривої за відомими натуральними рівняннями аналітично відновлюються лише у окремих випадках.

Питання для самоконтролю

1. Як визначаються регулярні криві для різних типів їх задання (параметричного, неявного, як графіка функції)?
2. Написати рівняння ребер та граней тригранника Серре-Френе для кривої $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$.

3. Які властивості має натуральна параметризація кривої?
4. Чому дорівнюють кривина та скрут кривої $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$?
5. Яким буде параметричне рівняння плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k = k(s)$?
6. Як знайти особливі точки кривої $F(x, y) = 0$?
7. Як за допомогою кривини та скруту визначити чи є крива прямою, чи є вона плоскою?
8. Як перетворюються координати дотичного вектора при заміні криволінійної системи координат?
9. Яке взаємне розташування нормальної та стичної площин, побудованих в одній точці?
10. Яке взаємне розташування нормальної площини і дотичної прямої, побудованих в одній точці?
11. Яке взаємне розташування стичної площини і нормальної прямої, побудованих в одній точці?
12. Яка крива є графіком векторної функції $\bar{r}(t) = \bar{i} \cos t + \bar{j} \sin t + \bar{k} 0$, $t \in [0, 2\pi)$?
13. На якій максимальній множині векторна функція $\bar{r}(t) = (\cos t, \ln(t+1), 2t^2)$ задає регулярну криву?
14. Чи є параметризація кривої $\bar{r}(t) = \left(\frac{1}{2} \cos 2t, \frac{1}{2} \sin 2t, \sqrt{2} \right)$ натуральною?
15. Чи задає векторна функція $\bar{r}(t) = \left(t^2 - 1, \frac{1}{t}, \sin t \right)$ криву на множині дійсних чисел?
16. Чи існує стична площина для кривої $\bar{r}(t) = (t^2 + 1, t^4 - 1, t)$ в точці $M = \bar{r}(0)$?
17. Відомо, що вектори $\bar{a}(1, 0, -1)$ і $\bar{b}(0, 1, 0)$ є напрямними векторами дотичної прямої і бінормалі відповідно деякої кривої в деякій точці. Знайти напрямний вектор головної нормалі кривої в тій же точці.
18. Відомо, що вектор $\bar{p}(a \sin t, a \cos t, 0)$ є напрямним вектором дотичної прямої до деякої кривої. Чи достатньо цієї інформації, щоб знайти напрямний вектор головної нормалі цієї кривої?
19. Відомо, що для кривої $\bar{r} = \bar{r}(t)$ при всіх значеннях параметру t вектори $\frac{d\bar{r}}{dt}$ та $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ ортогональні. Чи можна стверджувати, що ця крива параметризована натуральним параметром?

20. Відомо, що матриця $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ * & * & * \\ * & 2 & * \end{pmatrix}$ є матрицею дериваційних формул репера

Френе деякої кривої в деякій точці. Поновити всі елементи цієї матриці.

21. Чому дорівнюють кривина і скрут кола радіусу R ?
22. Відомо, що добуток кривини і скруту деякої просторової бірегулярної кривої в деякій точці від'ємний. Що можна сказати про знаки кривини і скруту?
23. Як називається крива, у якої $k = \kappa \equiv 5$?
24. Відомо, що добуток кривини і скруту в кожній точці бірегулярної кривої рівний нулю. Що можна сказати про цю криву?

Тема 2. Диференціальна геометрія двовимірної поверхні у тривимірному евклідовому просторі.

2.1 Визначення поверхні. Дотична площина й нормаль поверхні

Означення. Нехай E_3 - тривимірний евклідів простір й V - деяка область числової площини R^2 . Вектором-функцією двох аргументів $\bar{r}(u, v)$, заданою на V , називається відображення, при якому кожній парі $(u, v) \in V$ відповідає вектор $\bar{r}(u, v)$ простору E_3 .

Розкладання вектора $\bar{r}(u, v)$ по векторах ортонормованого базису $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ простору E_3 має вигляд

$$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}.$$

Скалярні функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ називаються *координатами вектора-функції* $\bar{r}(u, v)$ в цьому базисі. Якщо в E_3 зафіксувати точку O й розглянути вектори $\overline{OM} = \bar{r}(u, v)$, то сукупність точок M називається *годографом вектора-функції двох скалярних аргументів*.

Поняття границі, неперервності вектор-функцій двох аргументів вводяться аналогічно відповідним поняттям для вектор-функцій одного скалярного аргументу. Те ж саме стосується й операцій над векторними функціями. Невелика відмінність стосується диференціювання. Замість однієї похідної у вектора-функції двох аргументів є дві частинні похідні, які будемо позначати $\bar{r}_u(u, v), \bar{r}_v(u, v)$ або $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$, або $\partial_u \bar{r}, \partial_v \bar{r}$. Відзначимо, що u й v , записані як індекси, утворюють єдиний символ з позначенням функції.

Означення. Нехай V - деяка область на площині R^2 з декартовими координатами u, v . *Параметризованою поверхнею* називається неперервне відображення з області V в простір E_3 , при якому кожній парі $(u, v) \in V$ відповідає точка простору E_3 . Змінні u, v називаються параметрами поверхні. Образ області V називається *образом* або *носієм поверхні*.

Зазначена у визначенні відповідність за умови фіксування в E_3 реперу $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ визначає неперервну вектор-функцію $\bar{r}(u, v)$. Тому, інакше кажучи, поверхнею в E_3 називається *годограф неперервної вектор-функції* $\bar{r}(u, v)$. Рівняння $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ називається *векторним рівнянням* поверхні, векторна

функція $\bar{r}(u, v)$ - *параметризацією* поверхні, а рівняння
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

параметричними рівняннями поверхні.

Означення. Поверхня F , задана векторною функцією $\bar{r}(u, v)$, називається *поверхнею класу C^k* , якщо ця вектор-функція має неперервні частинні похідні

до k -го порядку включно. Якщо крім цього виконується умова $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq \bar{0}$, то поверхня називається регулярною. Точки нерегулярної поверхні, у яких $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] = \bar{0}$, називаються *особливими*. Неособливі точки поверхні називаються *звичайними*.

Нехай $\bar{r}(u, v), (u, v) \in V$ - регулярна параметризована поверхня. Оскільки значеннями змінних u і v повністю визначається положення будь-якої точки P на поверхні $P = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то числа u і v будемо називати внутрішніми (або криволінійними) координатами точки P .

Розглянемо довільне взаємно однозначне й взаємно неперервне відображення φ області W на область V , тобто $\varphi: W \rightarrow V$, $(\xi, \eta) \rightarrow (u, v)$, де $u = \varphi_1(\xi, \eta)$, $v = \varphi_2(\xi, \eta)$.

Якщо відображення $\bar{f}: V \rightarrow E_3$ - одна параметризація поверхні, то відображення $\bar{g} = \bar{f} \circ \varphi$, обумовлене формулою $\bar{g} = \bar{f}(\varphi_1(\xi, \eta), \varphi_2(\xi, \eta))$ - інша параметризація тієї ж поверхні. Говорять, що її можна отримати із першої за допомогою заміни внутрішніх координат за формулами

$$u = \varphi_1(\xi, \eta), \quad v = \varphi_2(\xi, \eta). \quad (2.1)$$

Означення. Заміна внутрішніх координат поверхні за формулами (2.1) називається припустимою, якщо функції φ_1 й φ_2 неперервно диференційовані і

$$\text{якобіан заміни відмінний від нуля: } \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Неважко довести, що припустима заміна внутрішніх координат поверхні зберігає властивість регулярності.

Нехай регулярна поверхня задана рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in V$. Нехай $\bar{c}(t) = (u(t), v(t))$ - регулярна крива в області V . Цій кривій на даній поверхні відповідає крива $\bar{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$.

Нехай крива $f: \bar{c}(t) = (u(t), v(t))$, що задана в області V , регулярна. Тоді її образ на регулярній поверхні $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in V$ також є регулярною кривою. Це так, тому що вектор-функція $\bar{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, що задає образ регулярної кривої l на поверхні F , регулярна як складна функція двох регулярних функцій $\bar{r}(u, v), \bar{c}(t)$.

Параметричні рівняння $u = u(t), v = v(t)$ називаються *внутрішніми рівняннями кривої на поверхні* $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.

Криві на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, що мають внутрішні рівняння $u = t, v = v_0 = \text{const}$ й $v = t, u = u_0 = \text{const}$ називаються *координатними лініями*. Координатні лінії регулярної поверхні утворюють дві сім'ї регулярних кривих.

Раніше введена умова $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq \bar{0}$ регулярності поверхні набуває наступного геометричного змісту: дотичні вектори до координатних ліній

завжди ненульові, а будь-які дві координатні лінії з різних сімей перетинаються під кутом, відмінним від 0 й π .

Теорема 2.1 Дотичні прямі до всіх регулярних кривих, що лежать на регулярній поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ й проходять через точку M_0 цієї поверхні, лежать в одній і тій самій площині $\alpha = \{M_0, \bar{r}_u(M_0), \bar{r}_v(M_0)\}$. Має місце і обернене твердження: будь-яка пряма, що лежить у площині α й проходить через точку M_0 , є дотичною до деякої регулярної кривої поверхні, що проходить через точку M_0 .

Доведення прямої теореми. Нехай $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in V$ – регулярна поверхня. Точка $M_0(u_0, v_0) \in F$, $M_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$. Нехай

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, t \in G \subset V (G \subset R),$$

причому, функції $u(t)$ й $v(t)$ неперервно диференційовані. Тоді $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$ – регулярна крива поверхні F . Припустимо, що вона проходить через точку M_0 , тоді існує $t_0 \in G$ таке, що $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Напрямний вектор дотичної прямої цієї кривої має вигляд

$$\bar{r}'(t_0) = \bar{r}_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \bar{r}_v(u_0, v_0) v'(t_0).$$

З того, що вектори $\bar{r}'(t_0)$, $\bar{r}_u(u_0, v_0)$, $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ компланарні випливає, що дотична пряма лежить у площині α .

Доведення оберненої теореми. Нехай пряма l лежить у площині α , проходить через точку M_0 й $\bar{P}$ – її напрямний вектор. Тоді $\bar{P} = a\bar{r}_u(u_0, v_0) + b\bar{r}_v(u_0, v_0)$ для деяких чисел a й b . Розглянемо криву поверхні з параметричними рівняннями $u = u_0 + at$, $v = v_0 + bt$, $t \in G$ так, що $(u, v) \in V$. Її векторно-параметричне рівняння має вигляд

$$\bar{R}(t) = \bar{r}(u_0 + at, v_0 + bt),$$

а напрямний вектор

$$\bar{R}'(t_0) = \bar{r}_u(u_0, v_0)a + \bar{r}_v(u_0, v_0)b$$

дотичної прямої збігається з вектором $\bar{P}$. **Теорема доведена.**

Означення. Площина, що проходить через точку M_0 поверхні F й містить всі дотичні прямі до всіх регулярних кривих поверхні, що проходять через цю точку, називається *дотичною площиною поверхні* в даній точці. Позначають $T_{M_0}F$.

Дотична площина визначається точкою $M_0(u_0, v_0)$ й напрямним бівектором $[\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)]$. Дотична площина має з поверхнею не обов'язково єдину спільну точку. Наприклад, дотична площина в довільній точці циліндра містить всю твірну, що проходить через цю точку.

Для складання рівняння дотичної площини поверхні $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0) \in F$ потрібно знайти

$$\bar{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \bar{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

$$\bar{r}_u(M_0) = (x_u^0, y_u^0, z_u^0), \quad \bar{r}_v(M_0) = (x_v^0, y_v^0, z_v^0).$$

Потім варто записати детермінантне рівняння дотичної площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Можна спочатку обчислити нормальний вектор $[\bar{r}_u, \bar{r}_v](M_0) = (\alpha, \beta, \gamma)$ площини й записати рівняння дотичної площини по точці й нормальному вектору:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Означення. Нормаллю регулярної поверхні в даній її точці називається пряма, що проходить через цю точку й перпендикулярна дотичній площині поверхні в даній точці.

Для поверхні $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ канонічні рівняння нормалі мають вигляд $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$.

Неявною поверхнею будемо називати підмножину тривимірного евклідового простору, яка задана рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2.2)$$

де $F(x, y, z)$ – деяка функція від змінних x, y, z .

Точка M неявної поверхні, заданої рівнянням (2.2), називається неособливою, якщо в ній вектор $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ ненульовий, або, інакше, якщо $\text{rang}(F_x, F_y, F_z) = 1$. Неявна поверхня називається *регулярною*, якщо всі її точки є неособливими.

Теорема 2.2 Нехай Ω – множина точок, координати x, y, z яких задовольняють рівнянню (2.2) і нехай $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Якщо в деякому околі U_{M_0} точки M_0 функція $F(x, y, z)$ та її частинні похідні F_x, F_y, F_z неперервні, а сама точка M_0 є неособливою, то існує окіл $U_{M_0}^* \subset U_{M_0}$ точки M_0 такий, що переріз $\Omega \cap U_{M_0}^*$ є носієм регулярної параметризованої поверхні.

Доведення. Нехай у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ відмінна від нуля похідна $F_z(x_0, y_0, z_0)$. Тому що F_z неперервна за умовою, то вона буде відмінна від нуля в деякому околі U_{M_0} точки M_0 , тоді в досить малому околі $U_{M_0}^* \subset U_{M_0}$ точки M_0 рівняння (2.2) можна переписати у вигляді $z = f(x, y)$. Будь-яка точка $(x, y, f(x, y))$ околу $U_{M_0}^*$ задовольняє рівнянню (2.2). Тим самим ми одержуємо

регулярну параметризацію даної поверхні у вигляді $\bar{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Теорема доведена.

Означення. Регулярною поверхнею тривимірного евклідового простору називається підмножина цього простору, яка або є носієм регулярної параметризованої поверхні, або є регулярною неявною поверхнею.

Теорема 2.3 Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і вектор $\bar{N} = (F_x, F_y, F_z) \neq \bar{0}$ у точці M , то вектор $\bar{N}$ перпендикулярний до дотичної площини поверхні в точці M .

Доведення. Розглянемо довільну регулярну криву, задану параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, що лежить на поверхні і проходить через точку M . Маємо тотожність $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$.

Продиференціюємо її по змінній t й одержимо: $F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0$.

Остання рівність є умовою перпендикулярності векторів $\bar{N} = (F_x, F_y, F_z)$ й

$\bar{r}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$. Вектор $\bar{r}'(t)$ лежить у дотичній площині поверхні в точці

M . Таким чином, вектор $\bar{N}(M)$ перпендикулярний до дотичного вектора будь-якої регулярної кривої, що лежить на поверхні й проходить через точку M . За теоремою 2.1 вектор $\bar{N}(M)$ перпендикулярний до площини $T_M F$. **Теорема доведена.**

Рівняння дотичної площини й нормалі неявної поверхні (2.2) в точці $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ мають відповідно вигляд

$$F_x(\bar{x} - x) + F_y(\bar{y} - y) + F_z(\bar{z} - z) = 0,$$

$$\frac{\bar{x} - x}{F'_x} = \frac{\bar{y} - y}{F'_y} = \frac{\bar{z} - z}{F'_z}.$$

2.2 Фундаментальні форми поверхні

Нагадаємо необхідні відомості з курсу лінійної алгебри. Білінійною формою на векторному просторі V над полем R називається відображення $f: V \times V \rightarrow R$, лінійне по кожному аргументу. Симетрична білінійна форма $f(\bar{x}, \bar{x}) = \phi(\bar{x}), \bar{x} \in V$ називається квадратичною формою. Квадратична форма в координатному виді є однорідним многочленом другого степеня, тобто $a_{ij}x_i x_j$, $i, j = \overline{1, n}$ де $a_{ij} = a_{ji}$ (по індексах, що повторюються, передбачається підсумовування), x_i — координати вектора $\bar{x}$ в деякому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, $a_{ij} = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Зокрема, для $i, j = 1, 2$, $\phi(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

Симетрична матриця $A = (a_{ij})$ називається матрицею квадратичної форми, а $\det A$ – детермінантом квадратичної форми. При переході до нового базису матриця квадратичної форми змінюється за законом $A' = T^t A T$, де T – матриця переходу від старого базису до нового.

Квадратична форма називається додатно-визначеною, якщо для кожного $\bar{x} \neq \bar{0}$ $\phi(\bar{x}) > 0$. Для дослідження цієї властивості квадратичної форми користуються критерієм Сільвестра (Квадратична форма буде додатно-визначеною тоді й тільки тоді, коли всі кутові мінори матриці цієї квадратичної форми будуть додатними).

Нехай F – регулярна поверхня, задана рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. У будь-якій точці $M = \bar{r}(u, v) \in F$ існує дотична площина $T_M F$. Будемо розглядати дотичну площину як двовимірний векторний простір. Вектори цього простору мають вигляд $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, де $\{M, \bar{r}_u, \bar{r}_v\}$ – локальний репер поверхні. Введемо в $T_M F$ структуру евклідового простору за допомогою скалярного добутку векторів і знайдемо

$$(d\bar{r}, d\bar{r}) = (\bar{r}_u, \bar{r}_u)(du)^2 + 2(\bar{r}_u, \bar{r}_v)dudv + (\bar{r}_v, \bar{r}_v)(dv)^2,$$

або, позначивши

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_u) = g_{11}, (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = g_{12}, (\bar{r}_v, \bar{r}_v) = g_{22},$$

одержимо

$$d\bar{r}^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 -$$

квадратичну форму від змінних du, dv . Вона визначена в дотичній площині поверхні й називається *першою квадратичною формою поверхні*.

Матриця $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ називається *матрицею першої квадратичної форми*, а $g = \det(g_{ij})$ – її *детермінантом*.

Для коефіцієнтів першої квадратичної форми використовують ще позначення E, F, G й записують $I = (d\bar{r})^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$. Тому що поверхня F регулярна, то вектори $\bar{r}_u$ й $\bar{r}_v$ ненульові, а це означає, що $\bar{r}_u^2 > 0, \bar{r}_v^2 > 0$. Крім того, $\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2 > 0$ відповідно до нерівності Коші - Буняковського для векторів евклідового простору. Отже, відповідно до критерію Сільвестра, для кожного $d\bar{r} \neq \bar{0}$ матимемо $d\bar{r}^2 > 0$, тобто перша квадратична форма додатно-визначена.

Нехай $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – регулярна поверхня й регулярна крива γ цієї поверхні задана внутрішніми рівняннями $u = u(t), v = v(t)$. Векторне рівняння $\bar{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ являє собою зовнішнє рівняння кривої γ . Для довжини дуги кривої γ маємо:

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\bar{R}}{dt} \right| dt = \int_a^b |d\bar{R}|, \quad a \leq t \leq b.$$

Оскільки $\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}$, то $d\bar{R} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, і значить

$$s = \int_a^b |d\bar{R}| dt = \int_a^b \sqrt{d\bar{R}^2} = \int_a^b \sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2}. \quad (2.3)$$

Таким чином, $ds = |d\bar{R}|$, але тоді $ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2$.

Висновок: Перша квадратична форма поверхні є квадратом диференціала довжини дуги кривої, що лежить на поверхні. Це твердження розкриває геометричний зміст першої квадратичної форми.

Означення. Кутом між кривими називається кут між дотичними прямими в точці перетину кривих.

Нехай криві γ й $\tilde{\gamma}$ лежать на регулярній поверхні $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ й перетинаються в точці $M = \bar{r}(u, v)$. Розглянемо локальний базис $\{\bar{r}_u, \bar{r}_v\}$ у точці M . Тому що поверхня регулярна, то вектори $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ неколінеарні. Напрямний вектор дотичної прямої до довільної кривої, що лежить на поверхні й проходить через точку M , має вигляд $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, тобто відношення $du:dv$ визначає напрямок дотичної прямої, тому що вектори $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ в точці M постійні.

Введемо наступні позначення:

ϕ - кут між кривими,

$d\bar{r}$ - напрямний вектор дотичної прямої до кривої γ ,

$\delta \bar{r}$ - напрямний вектор дотичної прямої до кривої $\tilde{\gamma}$.

Тоді $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, $\delta \bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$. Таким чином, $\cos \phi = \frac{(d\bar{r}, \delta \bar{r})}{|d\bar{r}| |\delta \bar{r}|}$,

або, в розгорнутому вигляді

$$\cos \phi = \frac{g_{11} du \delta u + g_{12} (du \delta v + dv \delta u) + g_{22} dv \delta v}{\sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2} \sqrt{g_{11} \delta u^2 + 2g_{12} \delta u \delta v + g_{22} \delta v^2}} \quad (2.4)$$

В цій формулі коефіцієнти g_{ij} потрібно обчислювати в точці перетину кривих.

Частинний випадок (кут між координатними лініями). Нехай

$$\gamma: u = \text{const}, \quad \tilde{\gamma}: v = \text{const}.$$

Тоді $du = 0$, dv – будь-яке, $\delta v = 0$, δu – будь-яке, і

$$\cos \phi = \frac{g_{12} dv \delta u}{\sqrt{g_{22} dv^2} \sqrt{g_{11} \delta u^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}. \quad (2.5)$$

З (2.5) випливає

Теорема 2.4 (критерій ортогональності координатної сітки поверхні)

Координатна сітка поверхні ортогональна тоді й тільки тоді, коли другий

коефіцієнт першої квадратичної форми поверхні дорівнює нулю, тобто $g_{12} = 0$.

Нехай F – регулярна поверхня, G – область на цій поверхні, обмежена скінченим числом кусково-гладких кривих. Розіб'ємо область G на маленькі області кусково-гладкими кривими. Нехай g – одна з таких областей. Візьмемо в області g точку P . Побудуємо в точці P дотичну площину й спроектуємо всю область g на цю дотичну площину. У дотичній площині одержуємо область $\bar{g}$. Під площею області G будемо розуміти число

$$S = \lim_{V(\bar{g}) \rightarrow 0} \sum_g S(\bar{g}),$$

де $S(\bar{g})$ – площа плоскої області $\bar{g}$, $V(\bar{g})$ – діаметр області $\bar{g}$.

Нехай поверхня $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ визначена на множині V , тобто $(u, v) \in V$. Розглянемо комірку

$$\begin{aligned} MM_1M_2M_3: M &= \bar{r}(u, v), M_1 = \bar{r}(u + du, v), \\ M_2 &= \bar{r}(u, v + dv), M_3 = \bar{r}(u + du, v + dv), \end{aligned}$$

обмежену координатними лініями $\gamma: u = \text{const}$ і $\tilde{\gamma}: v = \text{const}$. Для довжин сторін MM_1 і MM_2 маємо:

$$\begin{aligned} dS^2 &= g_{22}dv^2 = \bar{r}_v^2 dv^2, dS = |\bar{r}_v| dv, \\ \delta S^2 &= g_{11}du^2 = \bar{r}_u^2 du^2, \delta S = |\bar{r}_u| du. \end{aligned}$$

Замінімо комірку паралелограмом зі сторонами dS й δS і позначимо через ΔS його площу. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta S &= [\bar{r}_u du, \bar{r}_v dv] = [\bar{r}_u, \bar{r}_v] dudv = \sqrt{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]^2} dudv = \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \sin^2 \varphi} dudv = \\ &= \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \left(1 - \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2}{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2}\right)} dudv = \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2} dudv = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv \end{aligned}$$

Підсумувавши й перейшовши до границі, одержимо

$$S = \iint_V \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv, \quad (2.6)$$

причому $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, тому що перша квадратична форма додатно-визначена.

Таким чином, знаючи першу квадратичну форму поверхні, можна:

- 1) обчислити довжину дуги лінії на поверхні;
- 2) знайти кут між лініями в точці їхнього перетину;
- 3) обчислити площу області на поверхні.

Зауважимо, що для цього необов'язково знати параметричні рівняння поверхні. Ці задачі називаються *метричними* і тому перша квадратична форма інакше називається *метричною формою поверхні*.

Означення. Другою квадратичною формою регулярної параметризованої поверхні F в її точці P називається квадратична форма $(d^2\bar{r}, \bar{n})$, визначена в дотичному векторному просторі $T_P F$ до поверхні, $\bar{n}$ - одиничний вектор нормалі поверхні в точці P .

Оскільки векторні функції $\bar{r}$ та $\bar{n}$ залежать від параметрів u, v , то друга квадратична форма набуває вигляду

$$(\bar{n}, d^2\bar{r}) = (\bar{n}, \bar{r}_{uu})du^2 + 2(\bar{n}, \bar{r}_{uv})dudv + (\bar{n}, \bar{r}_{vv})dv^2,$$

а після позначення коефіцієнтів символами h_{11}, h_{12}, h_{22} відповідно, можемо записати другу квадратичну форму поверхні у вигляді

$$II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2, \quad (2.7)$$

Розгорнуті формули для обчислення коефіцієнтів набувають вигляду

$$h_{11} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \quad h_{12} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \quad h_{22} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}.$$

Розглянемо поверхню F , задану регулярною вектор-функцією $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ класу $C^n, n \geq 1$. Нехай точка $P_0 \in F, P_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$ й $T_{P_0} F$ - дотична площина в точці P_0 . Нехай P - довільна досить близька до P_0 точка поверхні F , $P = \bar{r}(u, v) = \bar{r}(u_0 + du, v_0 + dv)$ і $\bar{n}_0$ - одиничний вектор нормалі поверхні F в точці P_0 . Назвемо *відхиленням* точки P від дотичної площини $T_{P_0} F$ число $h = (\overline{PP_0}, \bar{n}_0)$. Очевидно, що $|h|$ є відстанню від точки P до $T_{P_0} F$, тому що $|h| = (\overline{PP_0}, \bar{n}_0) = |\overline{PP_0}| \cos \varphi$. Обчислимо значення h . Оскільки $\overline{P_0 P} = \bar{r}(u, v) - \bar{r}(u_0, v_0)$ й за формулою Тейлора

$$\bar{r}(u, v) = \bar{r}(u_0, v_0) + (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv) + \frac{1}{2}(\bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} dudv + \bar{r}_{vv} dv^2) + o(du^3, dv^3), \text{ то}$$

$$h = \left((\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv) + \frac{1}{2}(\bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} dudv + \bar{r}_{vv} dv^2) + o(du^3, dv^3), \bar{n}_0 \right) \approx \\ \approx \frac{1}{2}(h_{11} du^2 + 2h_{12} dudv + h_{22} dv^2).$$

Таким чином, одержуємо **геометричний зміст другої квадратичної форми**: половина другої квадратичної форми поверхні є головною частиною відхилення точки P поверхні від дотичної площини поверхні в точці P_0 . Знак «+» для h вказує на те, що кінець вектора $\bar{n}_0$ й точка P лежать по одну сторону від дотичної площини (кут φ - гострий), а знак «-» - що по різні (кут φ - тупий).

2.3 Нормальна кривина кривої на поверхні. Головні напрямки і головні кривини

Нехай крива γ лежить на поверхні $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ класу C^2 і має рівняння

$u = u(s), v = v(s)$, де s – натуральний параметр. Тоді $\bar{R}(s) = \bar{r}(u(s), v(s))$ – зовнішнє рівняння кривої γ і $\bar{R}'(s) = \bar{m}_1$, $\bar{R}''(s) = k\bar{m}_2$ – вектор кривини кривої.

Означення. Нормальною кривиною k_H кривої γ на поверхні F називається ортогональна скалярна проекція вектора кривини цієї кривої на нормаль поверхні: $k_H = np_{\bar{n}}\bar{R}''(s) = np_{\bar{n}}k\bar{m}_2$.

Теорема 2.5 Нормальна кривина кривої на поверхні обчислюється за формулою

$$k_H = \frac{\Pi}{I}, \quad (2.8)$$

де Π – друга квадратична форма поверхні, I – перша квадратична форма поверхні.

Доведення. У разі натуральної параметризації кривої

$$\gamma: \begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$$

маємо

$$\bar{R}'_s = \bar{r}_u u'_s + \bar{r}_v v'_s,$$

де u'_s, v'_s – координати вектора $\bar{R}'_s$ у базисі $\{\bar{r}_u, \bar{r}_v\}$,

$$\bar{R}''_{ss} = \bar{r}_{uu}(u'_s)^2 + 2\bar{r}_{uv}u'_s v'_s + \bar{r}_{vv}(v'_s)^2 + \bar{r}_u u''_{ss} + \bar{r}_v v''_{ss}.$$

Тоді, за означенням,

$$k_H = np_{\bar{n}}\bar{R}''_{ss} = \frac{(\bar{R}''_{ss}, \bar{n})}{|\bar{n}|} = h_{11}(u'_s)^2 + 2h_{12}u'_s v'_s + h_{22}(v'_s)^2 = S(\bar{R}'_s, \bar{R}'_s).$$

Якщо ж параметризація кривої довільна, тобто $\bar{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, то перейшовши до натуральної параметризації за формулою $t = t(s)$, одержимо $\bar{R}_1(s) = \bar{R}(t(s))$ і $\bar{R}'_1(s) = \bar{R}'_t t'_s$. Підставимо в одержану формулу і матимемо

$$k_H = S(\bar{R}'_1(s), \bar{R}'_1(s)) = S(\bar{R}'_t t'_s, \bar{R}'_t t'_s) = (t'_s)^2 S(\bar{R}'_t, \bar{R}'_t).$$

Але $t'_s = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\bar{R}'_t|}$. Тому

$$k_H = \frac{S(\bar{R}'_t, \bar{R}'_t)}{(\bar{R}'_t)^2} = \frac{h_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2h_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + h_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\bar{R}}{dt}\right)^2}.$$

Отже, в довільному напрямку (du, dv) на поверхні нормальна кривина може бути обчислена за формулою

$$k_H = \frac{h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2}{d\bar{R}^2},$$

тобто дорівнює відношенню другої квадратичної форми до першої. **Теорему доведено.**

Наслідок 1 (формула Менье). Нормальна кривина k_n кривої $\bar{R}(s) = \bar{r}(u(s), v(s))$ пов'язана з її кривиною k формулою

$$k_n = k \cos \Theta, \quad (2.9)$$

де Θ – кут між векторами $\bar{n}$ і $\bar{m}_2$. Дійсно, за означенням $k_n = np_{\bar{n}}k\bar{m}_2 = k(\bar{m}_2, \bar{n}) = k \cos \Theta$.

Наслідок 2. Нормальна кривина k_n кривої залежить тільки від вектора швидкості кривої. Всі криві поверхні F , що проходять через точку $M \in F$ і мають в ній спільну дотичну пряму, мають в цій точці одну і ту ж нормальну кривину.

Дійсно, цей факт випливає з формули $k_n = \frac{S(\bar{R}', \bar{R}')}{(\bar{R}')^2}$.

Означення. Нормальним перерізом поверхні F у точці M називається плоска крива, що є перерізом поверхні F з площиною, що проходить через нормаль поверхні в точці M .

Нехай γ – нормальний переріз, параметризація кривої γ натуральна, $\bar{m}_2$ – одиничний вектор головної нормалі, отже $\bar{n} = \pm \bar{m}_2$. Тоді $\cos \Theta = \cos(\bar{n}, \bar{m}_2) = \pm 1$. Тому $k_n = (\bar{n}, k\bar{m}_2) = \pm k$. Тобто кривина нормального перерізу поверхні в даній її точці M співпадає з точністю до знаку з нормальною кривиною нормального перерізу. Крім того, всі криві поверхні, що мають одну і ту ж дотичну в їх спільній точці M , мають в цій точці одну і ту ж нормальну кривину.

Отже, маємо ще одну властивість нормальної кривини кривої.

Наслідок 3. Нормальна кривина кривої на поверхні в даній точці є з точністю до знаку кривина нормального перерізу поверхні в цій точці, що має з даною кривою загальну дотичну пряму.

Ці властивості дозволяють спростити обчислення нормальної кривини і розглядати тільки кривини нормальних перерізів.

Означення. Головними кривинами поверхні в точці P називаються найменша та найбільша з усіх нормальних кривин поверхні в цій точці. Головними напрямками поверхні в точці P називаються напрямки нормальних перетинів, які мають головні кривини. Головні кривини позначаються k_1, k_2 .

Теорема 2.6 (існування головних кривин) У кожній точці поверхні існують головні кривини.

Доведення. За формулою (1.28) маємо неперервну функцію

$$k_n = \frac{h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2},$$

крім того, з наслідку 2 зрозуміло, що ця функція залежить від відношення $\frac{du}{dv}$, а значить визначена на сегменті $[0, \pi]$. Отже, за теоремою Вейєрштраса вона досягає на цьому сегменті свої найбільше та найменше значення, що й треба

було довести.

Означення. Точка поверхні називається *омбілічною*, якщо в ній головні кривини співпадають, або, що те ж саме, в цій точці будь-який напрямок є головним. Таким чином, в омбілічній точці нормальна кривина будь-якого нормального перерізу є головною і всі вони рівні між собою.

Теорема 2.7 (ознака омбілічної точки). Точка поверхні є омбілічною тоді і тільки тоді, коли в ній пропорційні коефіцієнти першої і другої квадратичних форм, тобто

$$\frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{h_{12}}{g_{12}} = \frac{h_{22}}{g_{22}}.$$

Доведення. Нехай $M \in F$ і M – омбілічна точка, тоді для будь-якого вектора $\bar{x} \in T_M F$, $k_H(\bar{x}) = \frac{h(\bar{x}, \bar{x})}{g(\bar{x}, \bar{x})} = k = \text{const}$. Це означає, що

$$h(\bar{x}, \bar{x}) = kg(\bar{x}, \bar{x}). \quad (2.10)$$

Так як $\bar{x} = x^i \bar{r}_i = (x_1, x_2)$, то рівність (2.10) в координатному вигляді запишеться так $h_{ij} x^i x^j = kg_{ij} x^i x^j$, або, $(h_{ij} - kg_{ij}) x^i x^j = 0$. Звідки маємо рівність $h_{ij} - kg_{ij} = 0$, а отже $h_{ij} = kg_{ij}$.

Обернене твердження очевидне. **Теорему доведено.**

Теорема 2.8 (характеристична властивість сфери). Регулярна поверхня класу C^3 є сферою тоді і тільки тоді, коли будь-яка її точка омбілічна.

Означення. Повною (гаусовою) кривиною поверхні в її регулярній точці називається добуток головних кривин в цій точці: $K = k_1 k_2$.

Означення. Середньою кривиною поверхні в її регулярній точці називається напівсума головних кривин в цій точці: $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Приклади. На площині нормальними перерізами є прямі, кривина яких дорівнює нулю. Отже $k_1 = k_2 = 0$, звідки $K = H = 0$.

Круговий циліндр, напрямною якого є коло радіуса R . Головними нормальними перерізами є пряма ($k_1 = 0$) і коло радіуса R ($k_2 = \frac{1}{R}$). В цьому випадку $K = 0, H = \frac{1}{2R}$.

Самостійно доведіть, що для сфери радіуса R мають місце співвідношення: $K = \frac{1}{R^2}, H = \frac{1}{R}$.

Теорема 2.9 Головні кривини k_1 і k_2 поверхні є коренями квадратного рівняння

$$\det(h_{ij} - kg_{ij}) = 0 \quad (2.11)$$

Повна кривина K і середня кривина H обчислюються за формулами

$$K = \frac{h}{g} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

$$2H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{g}. \quad (2.12)$$

Доведення. За означенням k_1, k_2 є екстремальними значеннями нормальної кривини. Перепишемо формулу $k_n = \frac{h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}$ у вигляді $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 - k_n(g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2) = 0$. Після диференціювання по du та по dv отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} h_{11}du + h_{12}dv - k(g_{11}du + g_{12}dv) = 0, \\ h_{12}du + h_{22}dv - k(g_{12}du + g_{22}dv) = 0, \end{cases}$$

яка справедлива лише при екстремальних значеннях k . Відносно du, dv ця система є лінійною однорідною, тому для існування ненульового розв'язку треба, щоб детермінант системи дорівнював нулю. Очевидно, що цей детермінант і є детермінантом з (2.11).

Перепишемо (2.11) у вигляді квадратного рівняння відносно k , отримаємо

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k^2 + (2h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22})k + (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0.$$

Наголосимо ще раз, що коренями цього рівняння є головні кривини і вони завжди дійсні. За теоремою Вієта

$$k_1k_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, k_1 + k_2 = \frac{2h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Отже, ми отримали формули (2.12) для обчислення повної та середньої кривин поверхні.

Теорема 2.10 Координати du, dv головних напрямків поверхні знаходяться з рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Доведення. Нехай k_1, k_2 – головні кривини. Знайдемо відповідні вектори $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2$. Оскільки k_1 і k_2 є коренями рівняння $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$, то

$$\begin{cases} (h_{11} - \lambda g_{11})du + (h_{12} - \lambda g_{12})dv = 0, \\ (h_{21} - \lambda g_{21})du + (h_{22} - \lambda g_{22})dv = 0. \end{cases}$$

Остання система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} h_{11}du + h_{12}dv - \lambda(g_{11}du + g_{12}dv) = 0, \\ h_{21}du + h_{22}dv - \lambda(g_{21}du + g_{22}dv) = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виразимо λ

$$\lambda = \frac{h_{11}du + h_{12}dv}{g_{11}du + g_{12}dv}$$

і підставимо в друге рівняння. Одержимо

$$h_{21}du + h_{22}dv - \frac{h_{11}du + h_{12}dv}{g_{11}du + g_{12}dv}(g_{21}du + g_{22}dv) = 0,$$

або

$$(g_{11}du + g_{12}dv)(h_{21}du + h_{22}dv) - (h_{11}du + h_{12}dv)(g_{21}du + g_{22}dv) = 0.$$

Останнє рівняння можна переписати у вигляді квадратного рівняння

$$(g_{11}h_{21} - h_{11}g_{21})du^2 + (g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22})dudv + (g_{21}h_{22} - h_{12}g_{22})dv^2 = 0,$$

яке рівносильне рівнянню (1.33).

Наслідок. Якщо задана поверхня F є поверхнею класу C^k , то k_1, k_2, K, H є функціями класу C^{k-2} .

Теорема 2.11 Головні напрямки поверхні в будь-якій не омбілічній точці ортогональні.

Доведення. Нехай вектори $d\bar{r}_1 = \bar{r}_u du_1 + \bar{r}_v dv_1$ та $d\bar{r}_2 = \bar{r}_u du_2 + \bar{r}_v dv_2$ визначають головні напрямки. Їх скалярний добуток має вигляд

$$(d\bar{r}_1, d\bar{r}_2) = (\bar{r}_u)^2 du_1 du_2 + (\bar{r}_u, \bar{r}_v)(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + (\bar{r}_v)^2 dv_1 dv_2.$$

Розділимо обидві частини на добуток $dv_1 dv_2$, отримаємо

$$\left(\frac{d\bar{r}_1}{dv_1}, \frac{d\bar{r}_2}{dv_2} \right) = g_{11} \frac{du_1}{dv_1} \cdot \frac{du_2}{dv_2} + g_{12} \left(\frac{du_1}{dv_1} + \frac{du_2}{dv_2} \right) + g_{22}.$$

Оскільки напрямки є головними, то з останнього рівняння в доведенні теореми (2.7) випливає, що

$$\frac{du_1}{dv_1} \cdot \frac{du_2}{dv_2} = \frac{g_{21}h_{22} - h_{12}g_{22}}{g_{11}h_{21} - h_{11}g_{21}}, \quad \frac{du_1}{dv_1} + \frac{du_2}{dv_2} = -\frac{g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22}}{g_{11}h_{21} - h_{11}g_{21}}.$$

Тоді $\left(\frac{d\bar{r}_1}{dv_1}, \frac{d\bar{r}_2}{dv_2} \right) = g_{11} \frac{g_{21}h_{22} - h_{12}g_{22}}{g_{11}h_{21} - h_{11}g_{21}} - g_{12} \frac{g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22}}{g_{11}h_{21} - h_{11}g_{21}} + g_{22} = 0$, що і потрібно довести.

2.4 Лінії кривини та асимптотичні лінії на поверхні

Означення. Крива на поверхні називається *лінією кривини*, якщо в кожній її точці дотична пряма має головний напрямок.

Теорема 2.12 Через кожну неомбілічну точку поверхні проходить дві і лише дві лінії кривини.

Доведення. Рівняння (2.13) є диференціальним рівнянням ліній кривини. Перепишемо у вигляді

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} dudv + \begin{vmatrix} h_{12} & h_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

У останньому рівнянні введемо позначення:

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} = B, \quad \begin{vmatrix} h_{12} & h_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = C$$

і поділимо його на dv^2 . Одержимо

$$A \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + B \left(\frac{du}{dv} \right) + C = 0.$$

Знайдемо дискримінант цього квадратного рівняння

$$D = B^2 - 4AC = \frac{1}{4} g^2 (H^2 - K) = \frac{1}{4} g^2 \left(\frac{1}{4} (k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 \right) = \frac{1}{4} g^2 \left(\frac{1}{4} (k_1 - k_2)^2 \right).$$

Тут $g = \det(g_{ij})$, H – середня кривина, K – повна кривина, k_1, k_2 – головні кривини. Оскільки точка неомбілічна, то $k_1 \neq k_2$ і значить, $D > 0$. Очевидно, що лінії кривини ортогональні.

Теорема 2.13 (про координатність ліній кривини). Для того, щоб координатна сітка поверхні була сіткою ліній кривини, необхідно і достатньо, щоб $g_{12} = h_{12} = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай координатна сітка є сіткою ліній кривини, тоді ця сітка ортогональна, тому $g_{12} = 0$. Крім того, дотичні до координатних ліній $v = \text{const}$ і $u = \text{const}$ вектори $\frac{d\bar{r}}{du}$ і $\frac{d\bar{r}}{dv}$ є векторами головних напрямків. З рівняння (1.33) для знаходження головних напрямків з урахуванням $g_{12} = 0$ і $dv = 0$ отримаємо $g_{11}h_{12} = 0$, а при $du = 0$ маємо $g_{22}h_{12} = 0$. Перші множники в останніх двох добутках завжди додатні, тому $h_{12} = 0$.

Достатність. Нехай тепер $g_{12} = h_{12} = 0$, тоді

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ h_{11} & 0 & h_{22} \\ g_{11} & 0 & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} dudv = 0.$$

Оскільки точка неомбілічна, то визначник в останній рівності не рівний нулю. Отже, $du = 0$ або $dv = 0$, звідки, відповідно, $u = \text{const}$ або $v = \text{const}$.

Теорема 2.14 (формула Ейлера). Нехай φ – кут, утворений напрямком вектора $\bar{x}$ у дотичній площині $T_M F$ з одним із головних напрямків, наприклад, із напрямком $\bar{e}_1$, і k_1, k_2 – головні кривини поверхні в точці M . Тоді

$$k_n(\bar{x}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Доведення. Вважатимемо, що поверхня параметризована так, що координатні лінії є лініями кривини. Нехай крива на поверхні, для якої вектор $\bar{x}$ є дотичним вектором, параметризована довжиною дуги. Тоді, з попередньої теореми $g_{12} = h_{12} = 0$, а значить формула для обчислення нормальної кривини цієї кривої спрощується наступним чином

$$k_n = \frac{h_{11} du^2 + h_{22} dv^2}{ds^2} = h_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + h_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Оскільки вектор $\bar{x}$ одиничний, то має місце розклад $\bar{x} = \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{e}_2$, де $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ – вектори головних напрямків. Крім того, маємо пари $\bar{r}_u, \bar{e}_1$ та $\bar{r}_v, \bar{e}_2$ колінеарних векторів, звідки $\bar{r}_u = |\bar{r}_u| \bar{e}_1 = \sqrt{g_{11}} \bar{e}_1$ та $\bar{r}_v = |\bar{r}_v| \bar{e}_2 = \sqrt{g_{22}} \bar{e}_2$. Тоді маємо ще один розклад $\bar{x} = \sqrt{g_{11}} \frac{du}{ds} \bar{e}_1 + \sqrt{g_{22}} \frac{dv}{ds} \bar{e}_2$. Порівнюючи ці розклади,

отримаємо $k_n = \frac{h_{11}}{g_{11}} \cos^2 \varphi + \frac{h_{22}}{g_{22}} \sin^2 \varphi$. Ця формула при $\varphi = 0$ дає $k_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}}$, а при

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ маємо $k_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}}$ (екстремальні значення). Отже, одержимо

$k_n(\bar{x}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$, що і треба було довести.

Означення. Напрямок на поверхні в даній її точці називається *асимптотичним*, якщо нормальна кривина в цьому напрямку в цій точці дорівнює нулю.

Оскільки нормальна кривина поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in U$ у напрямку $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ обчислюється за формулою (2.8), то вимога рівності її нулю рівносильна вимозі істинності співвідношення $h(d\bar{r}, d\bar{r}) = 0$, або, в розгорнутому вигляді

$$h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2 = 0. \quad (2.14)$$

Для дослідження цього рівняння розділимо обидві його частини на $(dv)^2$, одержимо квадратне відносно $\left(\frac{du}{dv} \right)^2$ рівняння, з якого і можуть бути знайдені асимптотичні напрямки поверхні у випадку, коли вони існують, за формулою

$$\left(\frac{du}{dv} \right)_{1,2} = \frac{-h_{12} \pm \sqrt{h_{12}^2 - h_{11}h_{22}}}{h_{11}}.$$

Отже, якщо в деякій точці поверхні дискримінант $h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ другої квадратичної форми поверхні від'ємний, то в цій точці існують два різні дійсні асимптотичні напрямки, якщо h додатне, то дійсних асимптотичних напрямків в точці немає, якщо h рівне нулю, то в точці поверхні існують два дійсних

асимптотичних напрямки, які співпадають. Якщо ж вимога (2.14) виконується тотожно, тобто якщо $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$, то в даній точці поверхні будь-який напрямок є асимптотичним.

Означення. Крива на поверхні називається *асимптотичною*, якщо в кожній її точці нормальна кривина дорівнює нулю.

Теорема 2.15 (критерій асимптотичної лінії). Крива на поверхні буде асимптотичною тоді і тільки тоді, коли вона або пряма, або в кожній її точці стична площина співпадає з дотичною площиною до поверхні в цій точці.

Доведення. Вважатимемо, що крива параметризована довжиною дуги. Тоді для обчислення її нормальної кривини можна користуватися формулою Менье $k_n = k \cos \Theta$. Рівність нулю нормальної кривини рівносильна сукупності вимог: $k = 0$ або $\cos \Theta = 0$. Перша з них виконується тоді і тільки тоді, коли крива є прямою або її частиною, а з другої випливає ортогональність вектора $\bar{n}$ нормалі поверхні і вектора $\bar{m}_2$ головної нормалі кривої. Але оскільки вектори $\bar{n}$ і $\bar{m}_1$ також ортогональні, то звідси і випливає, що вектор $\bar{n}$ перпендикулярний до стичної площини кривої. В протилежну сторону, якщо стична і дотична площини співпадають, то $\cos \Theta = 0$. **Теорему доведено.**

Означення. Точка поверхні називається *гіперболічною* або *параболічною*, якщо в ній існують відповідно два дійсних різних або однакових асимптотичних напрямки. Точка поверхні називається *еліптичною*, якщо в ній не існує дійсних асимптотичних напрямків. Якщо в точці поверхні будь-який напрямок є асимптотичним, то вона називається *планарною*.

Неважко дійти висновку, що через будь-яку гіперболічну точку поверхні проходить дві асимптотичні лінії, через будь-яку параболічну точку – одна асимптотична лінія, через планарну точку – нескінченно багато асимптотичних ліній.

Пригадаємо також, що повна кривина поверхні обчислюється за формулою $K = \frac{h}{g}$, тому в гіперболічній точці $K < 0$, в параболічній – $K = 0$, в еліптичній – $K > 0$. Звідси випливає, що в гіперболічній точці головні кривини мають різні знаки і будова поверхні нагадує гіперболічний параболоїд, в параболічній точці одна з головних кривин дорівнює нулю, і, значить в її околі поверхня нагадує циліндр, в еліптичній точці головні кривини поверхні одного знаку і в околі такої точки поверхня схожа на еліптичний параболоїд.

Теорема 2.16 (характеристична властивість площини). Регулярна поверхня, всі точки якої планарні, є площиною або її частиною.

Доведення. Нехай $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – регулярна поверхня. За умовою теореми в будь-якій точці M поверхні $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$. Оскільки $h_{ij} = (\bar{n}_i, \bar{r}_j)$, $i, j = 1, 2$, то пари векторів $\bar{n}_i$ і $\bar{r}_j$ ортогональні. З очевидної рівності $(\bar{n}, \bar{n}) = 1$ диференціюванням по u і по v одержимо що $(\bar{n}, \bar{n}_i) = 0$. Оскільки вектори $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$ лінійно незалежні, то $\bar{n}_i = \bar{0}$, $i, j = 1, 2$. Звідси випливає, що $\bar{n}$ –

постійний вектор, тобто в будь-якій точці поверхні дотична площина перпендикулярна постійному вектору $\bar{n}$. Запишемо векторне рівняння дотичної площини в деякій точці $M_0(u_0, v_0) \in F$, $M_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$ у вигляді $(\bar{R} - \bar{r}(u_0, v_0), \bar{n}) = 0$ і розглянемо функцію

$$f(u, v) = (\bar{r}(u, v) - \bar{r}(u_0, v_0), \bar{n}).$$

Продиференціювавши її по u і по v , одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (\bar{r}_1, \bar{n}) + (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{0}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (\bar{r}_2, \bar{n}) + (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{0}) = 0,$$

звідки випливає, що $f = \text{const}$. Враховуючи, що $f(u_0, v_0) = 0$, приходимо до висновку, що $f \equiv 0$. Таким чином,

$$(\bar{r}(u, v) - \bar{r}(u_0, v_0), \bar{n}) = 0,$$

тобто радіус-вектор $\bar{r}(u, v)$ будь-якої точки поверхні задовольняє рівнянню дотичної площини поверхні у фіксованій точці. **Теорему доведено.**

Питання для самоконтролю

1. Як означається поняття регулярності поверхонь, заданих різними способами?
2. Як пов'язані перші квадратичні форми ізометричних поверхонь?
3. Як знайти головні кривини поверхні?
4. Як повна кривина пов'язана з типом точок поверхні?
5. Як знайти головні напрямки поверхні? Які їх властивості?
6. Як знайти коефіцієнти зв'язності (символи Крістоффеля) поверхні?
7. Яким умовам повинні задовольняти 6 функцій, щоб існувала поверхня, для якої вони є коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм?
8. Чи на всіх поверхнях існують
 - а) асимптотичні лінії,
 - б) лінії кривини,
 - в) геодезичні лінії?
9. Як між собою пов'язані кривина, нормальна кривина та геодезична кривина кривої на поверхні?
10. Яка крива, що проходить через дві точки, має найменшу довжину?
11. Як знайти першу квадратичну форму поверхні в напівгеодезичній системі координат?
12. Як змінюються координати дотичного вектора при заміні параметризації поверхні?
13. Знайти границю векторної функції $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv)$ при $u \rightarrow 1, v \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Чи буде вона диференційовною? Чи є ця векторна функція регулярною? Знайти повний диференціал цієї векторної функції.
14. Чи є вектор $\bar{n}(1, 2, -1)$ напрямним вектором нормалі неявної поверхні $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ в точці $(1, 1, 1)$?

15. На поверхні $\vec{r}(u, v) = (u^2, 2uv, 1-v)$ задана крива $u = 2v$. Чи лежить точка $A(1, 2, 0)$ на цій кривій?
16. Чи обов'язково друга квадратична форма буде додатно-визначеною?
17. Чому дорівнює нормальна кривина великого кола на сфері радіуса R ?
18. Який знак має добуток головних кривин однопорожнинного гіперболоїда в точках його горлової лінії?
19. Відомо, що середня кривина сфери дорівнює середній кривині кругового циліндра. Знайти відношення радіусу сфери до радіусу циліндра.
20. Відомо, що середня кривина сфери дорівнює середній кривині кругового циліндра і циліндр описаний навколо цієї сфери. Знайти радіус сфери.
21. Чи можуть у кругового конуса в деяких точках співпадати повна і середня кривини?
22. Чи вірно, що кола на сфері будуть асимптотичними лініями?
23. Чи є гвинтові лінії на прямому гелікоїді лініями кривини?
24. Навести приклад поверхні, на якій є і еліптичні, і параболічні, і гіперболічні точки.
25. Яка властивість гіперболічного параболоїда та однопорожнинного гіперболоїда дозволяють одразу знайти на них деякі асимптотичні лінії.

Тема 3. Внутрішня геометрія поверхонь

3.1 Ізометричні відображення поверхонь

Лема (про локальну взаємну однозначність). Для будь-якої точки M_0 регулярної параметризованої поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in V$ існує окіл U_{M_0} такий, що обмеження $\bar{r}|_{U_{M_0}}$ відображення $\bar{r}$ на множину U_{M_0} є взаємно однозначним.

З леми випливає оберненість відображення $\bar{r}$ на множині U_{M_0} .

Нехай дано дві регулярні параметризовані поверхні $\bar{r}: U \rightarrow E^3$ і $\bar{r}^*: U^* \rightarrow E^3$, причому відображення $\bar{r}$ й $\bar{r}^*$ взаємно однозначні. Позначимо $S = \bar{r}(U)$, $S^* = \bar{r}^*(U^*)$. Нехай також дано відображення $\phi: S \rightarrow S^*$.

Означення. Відображення $\phi = (\bar{r}^*)^{-1} \circ \phi \circ \bar{r}$ називається *параметричним поданням відображення ϕ* або його записом у криволінійних координатах.

Означення. Відображення $\phi: S \rightarrow S^*$ називається *диференційованим у точці*, якщо його запис за допомогою криволінійних координат є диференційованою у цій точці функцією.

Зауваження. Можна довести, що при припустимій заміні параметрів на поверхнях S і S^* властивість диференційованості відображення ϕ зберігається.

Означення. Відображення $\phi: S \rightarrow S^*$ називається *ізометричним відображенням* (або *ізометрією*), якщо воно зберігає довжини кривих на цих поверхнях. Якщо образом довільної кривої γ є крива γ^* (при ізометричному відображенні поверхні S на поверхню S^*), то довжини кривих γ і γ^* рівні. Самі поверхні в цьому випадку називаються *ізометричними*.

Теорема 3.2 (критерій ізометричності поверхонь). Якщо регулярні поверхні можна параметризувати так, що їх перші квадратичні форми будуть однаковими, то поверхні ізометричні. Ізометричне відображення полягає в співставленні точок з однаковими координатами. Обернено, якщо дві поверхні ізометричні, то вони можуть бути параметризовані так, що їх перші квадратичні форми будуть однаковими.

Доведення. Нехай дано параметризовані поверхні

$$S: \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in V \text{ й } S^*: \bar{R} = \bar{R}(s, t), (s, t) \in W,$$

причому $d\bar{r}^2 = d\bar{R}^2$ з точністю до позначень. Тоді відображення $\phi: S \rightarrow S^*$, задане формулами $u = s, v = t$, є ізометрією.

Обернено, нехай відображення $\phi: S \rightarrow S^*$, задане формулами $s = s(u, v), t = t(u, v)$, є ізометрією. Розглянемо точку $P \in S$. Її образ $P^* = \phi(P)$

належить поверхні S^* й визначається радіусом-вектором $\bar{R}(u, v)$. Рівняння $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$ задає деяку параметризацію в околі точки P^* . Якщо крива $\gamma \in S$ проходить через точку P й має рівняння $u = u(\tau), v = v(\tau)$, то її образ γ^* проходить через точку P^* й має в околі цієї точки ті ж рівняння $u = u(\tau), v = v(\tau)$. Тому

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{g_{11} \frac{du^2}{d\tau^2} + 2g_{12} \frac{du}{d\tau} \frac{dv}{d\tau} + g_{22} \frac{dv^2}{d\tau^2}} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{g'_{11} \frac{du^2}{d\tau^2} + 2g'_{12} \frac{du}{d\tau} \frac{dv}{d\tau} + g'_{22} \frac{dv^2}{d\tau^2}} d\tau$$

Ця рівність вірна для кожного τ , оскільки відображення φ є ізометрією, а тому вірна для кожного τ й рівність

$$g_{11} \frac{du^2}{d\tau^2} + 2g_{12} \frac{du}{d\tau} \frac{dv}{d\tau} + g_{22} \frac{dv^2}{d\tau^2} = g'_{11} \frac{du^2}{d\tau^2} + 2g'_{12} \frac{du}{d\tau} \frac{dv}{d\tau} + g'_{22} \frac{dv^2}{d\tau^2},$$

звідки випливає $g_{11} = g'_{11}, g_{12} = g'_{12}, g_{22} = g'_{22}$, що й було потрібно довести.

3.2 Гаусове сферичне відображення поверхні

Нехай $\bar{r}: U \rightarrow R^3$ – параметризована поверхня S , $\bar{n} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}$ –

одиничний вектор нормалі, S^2 – сфера одиничного радіуса. Розглянемо відображення $G: S \rightarrow S^2$, що точці $M = \bar{r}(u, v)$ поверхні ставить у відповідність точку сфери, що відповідає радіус-вектору $\bar{n}(u, v)$, відкладеному від її центра.

Означення. Гаусовим сферичним відображенням поверхні називається відображення, що ставить у відповідність кожній точці поверхні кінець одиничного вектора нормалі до поверхні в цій точці, відкладеного від центра одиничної сфери.

Якщо поверхня S диференційована класу C^k , то гаусове відображення диференційоване класу C^{k-1} . Дійсно, функція $\bar{n} = \bar{n}(u, v)$ є параметризацією сферичного образу поверхні S класу C^k .

Приклад. Сферичним образом циліндра є велике коло сфери, конуса – коло сфери, центр якого не є центром сфери.

3.3 Дериваційні формули Вейнгартена гаусового рухомого репера поверхні

Нехай задана регулярна поверхня $F: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Нагадаємо, що гаусів репер має початок в точці поверхні, а базисними векторами є вектори $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$,

де $\bar{n}$ – одиничний вектор нормалі.

Дериваційні формули рухомого репера виражають похідні від векторів його базису у вигляді лінійних комбінацій векторів базису репера. Дериваційні формули гаусового репера називаються дериваційними формули *Вейнгартена*.

Теорема 3.3 Дериваційні формули Вейнгартена мають вигляд

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + h_{ij} \bar{n}, \quad \bar{n}_i = -h_{ik} g^{kj} \bar{r}_j. \quad (3.1)$$

Тут $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijm} g^{mk}$, $\Gamma_{ijm} = (\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m)$, h_{ij} – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, g^{kj} – елементи матриці, оберненої до матриці (g_{ij}) першої квадратичної форми, величини Γ_{ij}^k називаються *символами Крістоффеля II роду*, величини Γ_{ijm} – *символами Крістоффеля I роду*, причому

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}), \quad g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ij}).$$

Доведення. Формули $\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + a_{ij} \bar{n}$ помножимо скалярно на вектор $\bar{n}$. Одержимо $(\bar{r}_{ij}, \bar{n}) = \Gamma_{ij}^k (\bar{r}_k, \bar{n}) + a_{ij} (\bar{n}, \bar{n})$. Оскільки $(\bar{r}_{ij}, \bar{n}) = h_{ij}$ і $(\bar{n}, \bar{n}) = 1$, то $a_{ij} = h_{ij}$. Після множення тих же формул скалярно на вектор $\bar{r}_m$ одержимо

$$(\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m) = \Gamma_{ij}^k (\bar{r}_k, \bar{r}_m) = \Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Помножимо цю останню рівність на компоненти g^{ms} і позначимо скалярні добутки $(\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m)$ через Γ_{ijm} . Одержимо

$$(\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m) \cdot g^{ms} = \Gamma_{ij}^k g_{km} g^{ms} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^s = \Gamma_{ij}^s.$$

Значить, $\Gamma_{ijm} g^{ms} = \Gamma_{ij}^s$. Для знаходження Γ_{ijs} проведемо наступне диференціювання

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial u^k}(\bar{r}_i, \bar{r}_j) = \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial u^k}, \bar{r}_j \right) + \left(\bar{r}_i, \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial u^k} \right) = \\ &= (\bar{r}_{ik}, \bar{r}_j) + (\bar{r}_i, \bar{r}_{jk}) = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$-g_{ij,k} = -\Gamma_{ikj} - \Gamma_{jki}, \quad g_{jk,i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}, \quad g_{ki,j} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}.$$

Додавши ці рівності почленно і враховуючи симетрію символів Γ_{ijs} по перших двох індексах, одержимо

$$-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j} = 2\Gamma_{ijk}.$$

Аналогічно отримаємо

$$\bar{n}_i = -h_{ik} g^{kj} \bar{r}_j.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.4 Мають місце рівності

$$\Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) = (h_{ij} h_{kl} - h_{ik} h_{jl}) g^{lm},$$

$$\Gamma_{ij,k}^m h_{mk} - \Gamma_{ik,j}^m h_{mj} + h_{ij,k} - h_{ik,j} = 0.$$

Доведення. Оскільки поверхня регулярна, то $\bar{r}_{ijk} = \bar{r}_{ikj}$. Знайдемо ці похідні

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial u^k} (\bar{r}_{ij}) = \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^m \bar{r}_m + h_{ij} \bar{n}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^m) \bar{r}_m + \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial u^k} (\bar{r}_m) + \frac{\partial}{\partial u^k} (h_{ij}) \bar{n} + \\ &+ h_{ij} \frac{\partial \bar{n}}{\partial u^k} = \Gamma_{ij,k}^m \bar{r}_m + \Gamma_{ij}^m \bar{r}_{mk} + h_{ij,k} \bar{n} + h_{ij} \bar{n}_k = \Gamma_{ij,k}^m \bar{r}_m + \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{mk}^l \bar{r}_l + h_{mk} \bar{n}) + \\ &+ h_{ij,k} \bar{n} + h_{ij} (-h_{kl} g^{lm} \bar{r}_m) = (\Gamma_{ij,k}^m + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - h_{ij} h_{kl} g^{lm}) \bar{r}_m + (h_{ij,k} + \Gamma_{ij}^m h_{mk}) \bar{n} \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\bar{r}_{ikj} = (\Gamma_{ik,j}^m + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m - h_{ik} h_{jl} g^{lm}) \bar{r}_m + (h_{ik,j} + \Gamma_{ik}^m h_{mj}) \bar{n}.$$

Знайдемо різницю і скористаємося лінійною незалежністю векторів $\bar{r}_m$ і $\bar{n}$, одержимо

$$\Gamma_{ij,k}^m + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - h_{ij} h_{km} g^{ml} = \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ik}^m - h_{ik} h_{jm} g^{ml}, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_{ij}^m h_{mk} + h_{ij,k} = \Gamma_{ik}^m h_{mj} + h_{ik,j}. \quad (3.3)$$

У групі (3.2) маємо 16 рівнянь, а в групі (3.3) – 8.

Група (3.2) називається *рівняннями Гауса*, а (3.3) – *рівняннями Петерсона-Кодацці-Майнарді*. А їх сукупність називається *основними рівняннями теорії поверхонь*. Але серед рівнянь (3.2) тільки одне істотне, інші або є тотожностями, або співпадають з істотним, а в групі (3.3) тільки два істотних.

Теорема Гауса 3.5 (egregium) Гаусова (повна) кривина поверхні може бути виражена тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх частинні похідні.

Доведення. У рівняння Гауса підставимо $i=1, j=1, k=2$, одержимо

$$\Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + (\Gamma_{11}^s \Gamma_{s2}^m - \Gamma_{12}^s \Gamma_{s1}^m) = (h_{11} h_{2l} - h_{12} h_{l1}) g^{lm}.$$

Тепер покладемо $l=1,2$. При $l=1$ права частина рівності дорівнює нулю. Підставимо $l=2$, тоді

$$\Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + (\Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^m - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^m) = h g^{2m} = \frac{h}{g} g_{11}.$$

При $m=2$ остаточно маємо

$$K = \frac{h}{g} = \frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2 \right). \quad (3.4)$$

Теорему доведено.

Наслідок. Гаусова кривина поверхні є інваріантом ізометричного відображення поверхні.

Теорема 3.6 (Бонне) Нехай U – відкрита зв'язна область на R^2 і нехай на U задані дві квадратичні форми

$$g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

і

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2,$$

для яких виконані умови:

1. Перша квадратична форма додатно визначена;

2. Всі функції $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$, $h_{ij} = h_{ij}(u, v)$ та їх частинні похідні неперервні в області U ;

3. Функції g_{ij} і h_{ij} зв'язані рівняннями Гауса і Петерсона-Кодацці-Майнарді.

Тоді існує регулярна поверхня, для якої задані форми є відповідно першою і другою квадратичними формами. Крім того, ці форми визначають поверхню однозначно з точністю до положення в просторі.

3.4 Геодезична кривина кривої на поверхні

Нехай $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – регулярна поверхня, на якій задана регулярна крива, що параметризована довжиною дуги. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – векторне рівняння цієї кривої. Тоді вектор $\bar{m}_1 = \frac{d\bar{r}}{ds}$ є напрямним вектором дотичної прямої, а

вектор $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = k\bar{m}_2$ – вектором кривини цієї кривої.

Означення. Геодезичною кривиною k_g регулярної кривої на регулярній поверхні в даній точці називається скалярна проекція вектора кривини кривої в цій точці на дотичну площину поверхні в тій же точці.

Обчислимо, використовуючи означення, модуль геодезичної кривини кривої, одержимо

$$|k_g| = |np_{TF} k\bar{m}_2| = |np_{[\bar{m}_1, \bar{n}]} k\bar{m}_2| = k|(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n})|. \quad (3.5)$$

Очевидно, геодезична кривина додатна, якщо впорядкована трійка $\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n}\}$ права і від'ємна в протилежному випадку. Тому, обчислювальна формула для геодезичної кривини кривої у разі її натуральної параметризації має вигляд

$$k_g = k(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n}). \quad (3.6)$$

Помітимо, що вектори $\bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{n}$ компланарні, оскільки вони ортогональні ненульовому вектору $\bar{m}_1$. Перепишемо формулу (3.5) у вигляді $k_g = k \cos \omega$, $\omega = (\bar{m}_3, \bar{n})$. Окрім цього, пригадаємо формулу Мен'є $k_n = k \cos \Theta$, $\Theta = (\bar{m}_2, \bar{n})$ для обчислення нормальної кривини кривої. З компланарності векторів $\bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{n}$ випливає $\omega = \left| \frac{\pi}{2} \pm \Theta \right|$. Таким чином, $k_g = k \sin \Theta$. Отже, маємо наступну залежність між кривиною кривої, її нормальною і геодезичною кривинами

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2. \quad (3.7)$$

Теорема 3.7 Геодезична кривина k_g кривої $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$ на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ обчислюється за формулою

$$k_g = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{\left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{3}{2}}} \left| \frac{\frac{du^1}{dt}}{\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \quad \frac{\frac{du^2}{dt}}{\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \right|, \quad (3.8)$$

де по індексах $i, j = 1, 2$ виконується підсумовування.

Доведення. Відповідно до формули (3.6) для кривої $\bar{r} = \bar{r}(u^1(s), u^2(s))$ маємо $k_g = k(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n}) = (\bar{r}'_s, \bar{r}''_{ss}, \bar{n})$. Перейдемо в рівняннях $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$ кривої від довільного параметра t до натурального параметра s за формулою $t = t(s)$. Тоді

$$\bar{r}'_s = \bar{r}'_t t'_s = \frac{\bar{r}'_t}{|\bar{r}'_t|}, \quad \bar{r}''_{ss} = \bar{r}''_{tt} (t'_s)^2 + \bar{r}'_t t''_{ss} = \frac{\bar{r}''_{tt}}{|\bar{r}'_t|^2} + \bar{r}'_t t''_{ss}.$$

Тепер можна обчислити геодезичну кривину

$$k_g = (\bar{r}'_s, \bar{r}''_{ss}, \bar{n}) = \frac{1}{|\bar{r}'_t|^3} (\bar{r}'_t, \bar{r}''_{tt}, \bar{n}).$$

Врахуємо, що $\bar{r}(t)$ є радіус-вектором точки поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$, тому

$$\begin{aligned} \bar{r}'_t &= \bar{r}'_{u^1} \frac{du^1}{dt} + \bar{r}'_{u^2} \frac{du^2}{dt}, \\ \bar{r}''_{tt} &= \bar{r}''_{u^1 u^1} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\bar{r}''_{u^1 u^2} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \bar{r}''_{u^2 u^2} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + \bar{r}'_{u^1} \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \bar{r}'_{u^2} \frac{d^2 u^2}{dt^2}. \end{aligned}$$

Скористаємося дериваційними формулами Вейнгартена і одержимо

$$\begin{aligned}\bar{r}_{tt}'' = & \left(\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u^1}{dt^2} \right) \bar{r}'_{u^1} + \\ & + \left(\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u^2}{dt^2} \right) \bar{r}'_{u^2} + \\ & + \left(h_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2h_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + h_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 \right) \bar{n}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}k_g = & \left(\left(\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u^1}{dt^2} \right) \frac{du^1}{dt} - \right. \\ & \left. - \left(\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u^2}{dt^2} \right) \frac{du^2}{dt} \right) \times \\ & \times \frac{(\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}, \bar{n})}{\left(g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Але, оскільки

$$(\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}, \bar{n}) = \left(\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}, \left[\frac{\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}}{[\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}]} \right] \right) = [\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}] = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

то ми і одержуємо формулу (3.8).

Означення Лінія на поверхні називається *геодезичною*, якщо її геодезична кривина в кожній точці дорівнює нулю.

Відповідно до формули (3.8) диференціальне рівняння геодезичних ліній поверхні може бути записане у вигляді

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{array} \right| = 0. \quad (3.9)$$

Теорема 3.8 (критерій геодезичної лінії) Для того, щоб лінія на поверхні була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб вона була або прямою, або в

кожній її точці співпадали головна нормаль і нормаль до поверхні

Доведення. Вважатимемо, що крива параметризована довжиною дуги. Тоді для обчислення її геодезичної кривини можна користуватися формулою $k_g = k \sin \Theta$. Рівність нулю геодезичної кривини рівносильна сукупності вимог: $k = 0$ або $\sin \Theta = 0$. Перша з них виконується тоді і тільки тоді, коли крива є прямою або її частиною, а з другої випливає колінеарність вектора $\bar{n}$ нормалі поверхні і вектора $\bar{m}_2$ головної нормалі кривої. В інший бік, якщо нормаль поверхні і головна нормаль в кожній точці кривої співпадають, то $\sin \Theta = 0$. **Теорему доведено.**

Доведена теорема дозволяє навести наступні приклади геодезичних ліній: пряма на будь-якій поверхні є її геодезичною лінією, великі кола сфери є її геодезичними лініями, геодезичними лініями кругового циліндра є її направляючі (кола), твірні, а також гвинтові лінії.

Розглянемо деякі **властивості геодезичних ліній поверхні**.

1. При ізометричних відображеннях поверхні геодезичні лінії переходять в геодезичні.

Доведення цієї властивості випливає з того, що ізометричні відображення поверхні зберігають геодезичну кривину кривої.

2. Із всіх кривих поверхні, що проходять через дану точку і мають в цій точці спільну дотичну пряму, геодезична лінія має найменшу кривину.

Доведення. Для будь-якої кривої поверхні має місце формула (3.7). Оскільки криві мають в даній точці спільну дотичну пряму, то вони мають в цій точці одну і ту ж нормальну кривину k_n , але для геодезичної лінії, що проходить через цю точку, геодезична кривина k_g дорівнює нулю, тому для геодезичної лінії кривина k буде найменшою, **що і потрібно було довести.**

Завдяки цій властивості геодезичні лінії поверхні є «найпрямішими» в порівнянні з іншими лініями цієї поверхні.

3. Через кожну точку регулярної поверхні в будь-якому напрямку можна провести геодезичну лінію і лише одну.

Доведення. Дійсно, диференціальне рівняння геодезичних ліній можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Маємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку від невідомих функцій $u = u(t), v = v(t)$ з коефіцієнтами, що є неперервними функціями від змінних u, v . Оскільки на поверхні задані точка і напрямок, то

початкові умови мають вигляд:

$$u = u_0, v = v_0 \text{ і } \frac{du}{dt}(u_0, v_0) = a, \frac{dv}{dt}(u_0, v_0) = 0.$$

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що така система має єдиний розв'язок, **що і потрібно було довести.**

З доведеної властивості виходить, що на площині геодезичними є прямі і лише вони, на сфері геодезичними є великі кола і лише вони.

4. Достатньо мала дуга геодезичної лінії, що сполучає дві точки поверхні, коротша за дуги всіх інших ліній, що сполучають ті ж точки і є достатньо близькими до даної геодезичної (екстремальна властивість геодезичних).

Цю властивість буде доведено в наступній лекції.

3.5 Напівгеодезична параметризація поверхні

Координатна сітка на поверхні називається напівгеодезичною, якщо одна із сімей складається з геодезичних ліній, а друга – з їх ортогональних траєкторій. Ортогональні траєкторії – це криві, які перетинають геодезичні під прямими кутами.

Лема (Гауса) Нехай M – точка регулярної кривої γ , яка лежить на поверхні F , тоді в деякому околі точки M існує напівгеодезична параметризація поверхні F , в якій крива γ є ортогональною траєкторією до сім'ї геодезичних.

Така параметризація поверхні називається напівгеодезичною, побудованою на лінії γ .

Теорема 3.9 На регулярній поверхні існує така напівгеодезична параметризація, що перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2. \quad (3.10)$$

Доведення. Оскільки u -лінії та v -лінії перпендикулярні, то $g_{12} = 0$. Нехай u -лінія (тобто лінія $u = t, v = \text{const}$) – геодезична, тоді її геодезична кривина

$$k_g = \left| \begin{array}{cc} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \\ A^1 & A^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ A^1 & A^2 \end{array} \right| = A^2 = 0.$$

$$\text{Тут } A^2 = \frac{d^2 v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \Gamma_{11}^2.$$

Звідси випливає, що $\Gamma_{11}^2 = 0$. Далі нагадаємо, що

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11,1} g^{12} + \Gamma_{11,2} g^{22} = \Gamma_{11,2} g^{22} = 0.$$

Тоді

$$\Gamma_{11,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0,$$

звідки $g_{11} = g_{11}(u)$. Таким чином,

$$I = g_{11}(u)(du)^2 + g_{22}(u, v)(dv)^2.$$

Введемо нову напівгеодезичну параметризацію: $u^* = \int \sqrt{g_{11}(u)} du, v^* = v$. Тоді $du^* = \sqrt{g_{11}(u)} du$, $(du^*)^2 = g_{11}(u)(du)^2$, $dv^* = dv$. А отже, в цій параметризації $I = (du^*)^2 + G(u^*, v^*)(dv^*)^2$. **Теорему доведено.**

Обчислимо повну кривину поверхні в напівгеодезичній параметризації за формулою (3.4).

Згідно з теоремою 3.9 матриця першої квадратичної форми має вигляд $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u, v) \end{pmatrix}$, а її обернена матриця $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G(u, v)} \end{pmatrix}$. Ненульові символи

Крістоффеля першого роду дорівнюють:

$$\Gamma_{12,1} = \frac{1}{2} G_u, \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2} G_u, \Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2} G_u, \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2} G_v.$$

Ненульові символи Крістоффеля другого роду дорівнюють:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}.$$

Тепер ми можемо підрахувати повну кривину:

$$K = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{G} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{G_u}{G} \right)^2 = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Таким чином, має місце

Теорема 3.10 В околі будь-якої регулярної точки поверхні можна побудувати напівгеодезичну систему координат, в якій перша квадратична форма має вигляд $I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$. В цьому випадку повна кривина поверхні в цій точці обчислюється за формулою $K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$.

Означення. *Геодезичним трикутником* називається фігура на поверхні F , яка складається з трьох точок і трьох відрізків геодезичних ліній, які їх сполучають.

Теорема Гауса 3.11 (elegantissimus) Сума кутів геодезичного трикутника обчислюється за формулою: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Delta} K d\sigma$.

Наслідок. Якщо повна кривина поверхні буде додатною (від'ємною, рівною нулю), то сума кутів геодезичного трикутника буде більшою π (меншою π , рівною π) відповідно.

Наслідок Якщо маємо поверхню постійної гаусової кривини K , то сума

кутів обчислюється за формулою $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot S(\Delta)$, де $S(\Delta)$ - площа трикутника Δ .

Для сфери величина $K \cdot S(\Delta)$ називається *сферичним надлишком*.

Теорема 3.12 Достатньо мала дуга геодезичної лінії, що сполучає дві точки поверхні, коротша за дуги всіх інших ліній, що сполучають ті ж точки і є достатньо близькими до даної геодезичної (екстремальна властивість геодезичних).

Доведення. Розглянемо всі криві регулярної поверхні, які сполучають дві її достатньо близькі точки A і B . Серед них є і геодезична лінія, позначимо її символом γ . Побудуємо на лінії γ напівгеодезичну параметризацію поверхні. Можна вважати, що рівняння геодезичної γ відносно цієї параметризації має вигляд $v=0$. Позначимо $A(a,0)$, $B(b,0)$. Внутрішнє рівняння довільної кривої, що сполучає точки A і B , має вигляд $v=v(u)$. Згідно з формулою (2.3), враховуючи вид (3.10) першої квадратичної форми відносно напівгеодезичної параметризації, для довжини дуги AB кожної з розглянутих кривих матимемо формулу

$$s = \int_a^b \sqrt{du^2 + Gdv^2} = \int_a^b \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du.$$

Оскільки $G > 0$, $\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \geq 0$, то мінімум функції $s(v)$ досягається при $\frac{dv}{du} = 0$. Розв'язком останнього рівняння є сім'я кривих $v = \text{const}$, а з урахуванням початкових умов отримаємо $v = 0$. **Теорему доведено.**

3.6 Поверхні постійної гаусової кривини

На минулій лекції ми довели той факт, що в околі будь-якої регулярної точки поверхні можна побудувати напівгеодезичну систему координат, в якій перша квадратична форма має вигляд

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2.$$

Формула для повної кривини поверхні в цій точці:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Останню формулу можна переписати у вигляді рівняння відносно G :

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0.$$

Розв'язавши його, ми зможемо відновити першу квадратичну форму поверхні за відомою кривиною (правда, поки тільки в спеціальній системі координат – напівгеодезичній). Цю лекцію ми присвяtimo відновленню поверхонь постійної гаусової кривини. Це простий випадок, коли дане рівняння аналітично розв'язуване.

Нехай S – регулярна поверхня постійної гаусової кривини K і M – довільна точка цієї поверхні. На поверхні S у деякому околі точки M введемо напівгеодезичну систему координат з початком в точці M . В якості лінії $u = 0$ виберемо яку-небудь геодезичну, що проходить через точку M . Перша квадратична форма поверхні у вказаній системі координат має вигляд $I = du^2 + Gdv^2$, причому $G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$.

Як було вказано вище, коефіцієнт G задовольняє рівнянню

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0 \quad (3.11)$$

з початковими умовами

$$\sqrt{G(0, v)} = 1, (\sqrt{G(0, v)})_u = 0. \quad (3.12)$$

Запишемо розв'язання задачі Коші (3.11), (3.12) для різних випадків і відповідні квадратичні форми:

У випадку $K > 0$: $G = \cos(u\sqrt{K})$, $I = du^2 + \cos^2(u\sqrt{K})dv^2$.

У випадку $K = 0$: $G = 1$, $I = du^2 + dv^2$.

У випадку $K < 0$: $G = \cosh(u\sqrt{-K})$, $I = du^2 + \cosh^2(u\sqrt{-K})dv^2$.

Наведемо приклади поверхонь постійної гаусової кривини.

Прикладом поверхні постійної додатної гаусової кривини є сфера. Її повна кривина $K = R^{-2}$, де R – радіус сфери.

Прикладом поверхні постійної нульової гаусової кривини є площина.

Перейдемо до побудови поверхні постійної від'ємної гаусової кривини.

Розглянемо криву, що має таку властивість: довжина L відрізка дотичної від точки дотику до деякої прямої l суть величина постійна (рівна a), тобто вона (довжина) не залежить від вибору точки кривої, в якій будується дотична. Ця крива називається *трактрисою*. При цьому згадана вище пряма буде асимптотою цієї трактриси.

Виберемо систему координат так, щоб пряма l співпадала з віссю абсцис, а найвіддаленіша від осі Ox точка M трактриси лежала у верхній напівплощині на осі Oy . Рівняння трактриси шукатимемо у вигляді $y = y(x)$. Рівняння дотичної прямої, побудованої в точці $M(x_0, y_0)$ трактриси, має вигляд: $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, де $y'_0 = y'(x_0)$. Позначимо точку перетину цієї прямої з віссю абсцис через N . Тоді $N\left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0\right)$. Із означення трактриси

$MN^2 = a^2$. Переходячи до координат, одержуємо рівність $\frac{y_0^2}{y'^2_0} + y_0^2 = a^2$. Через

довільність вибору точки на трактрисі одержимо, що функція $y(x)$ повинна задовольняти диференціальному рівнянню $\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = a^2$.

Оскільки це диференціальне рівняння не містить явно змінну x , то

простіше всього його розв'язати, ввівши параметр. Якщо покласти, що $y = a \sin u$, а $\frac{y}{y'} = a \cos u$, то рівняння перетворюється на тотожність. Другу з цих рівностей перепишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{a \cos u} = \frac{a \sin u}{a \cos u} = \operatorname{tg} u.$$

Звідси

$$dx = \operatorname{ctgu} dy = \operatorname{ctgu} (a \sin u)' du = a \frac{\cos^2 u}{\sin u} du.$$

Інтегруючи, одержимо $x = a \left(\cos u + \ln \frac{1 - \cos u}{\sin u} \right)$. Таким чином, параметричні рівняння трактиси:

$$x = a \left(\cos u + \ln \frac{1 - \cos u}{\sin u} \right), \quad y = a \sin u, \quad u \in (0, \pi) \quad (3.13)$$

Помітимо, що $\max_{u \in (0, \pi)} y(u) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Тобто та умова, що

найвіддаленіша від осі Ox точка M трактиси лежить у верхній напівплощині на осі Oy виконується.

Псевдосфера – це поверхня, одержана обертанням трактиси навколо її асимптоти. Параметричні рівняння псевдосфери можна записати у вигляді

$$x = a \left(\cos u + \ln \frac{1 - \cos u}{\sin u} \right), \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \sin u \cos v.$$

Далі, знайшовши коефіцієнти першої і другої квадратичних форм, ми можемо обчислити гаусову кривину. Опускаючи проміжні викладення, наведемо остаточний результат: $K = -a^{-2} = \operatorname{const}$.

Таким чином, псевдосфера є прикладом поверхні постійної від'ємної гаусової кривини. Бельтрамі довів важливий результат, що псевдосфера в тривимірному просторі завжди має край, а також той факт, що внутрішня геометрія псевдосфери є двовимірною геометрією Лобачевського. Саме псевдосфера відіграла роль першої моделі планіметрії Лобачевського, що свідчило про несуперечливість цієї геометрії. В якості прямих на псевдосфері розглядають її геодезичні лінії. За такої домовленості можна довести основні факти геометрії Лобачевського. Зокрема, сума внутрішніх кутів трикутника, сторонами якого є відрізки геодезичних ліній псевдосфери, менша за π .

Питання для самоконтролю

1. Що називається відображенням поверхонь?
2. Чи може гаусовим образом деякої поверхні бути пряма лінія?
3. Відомо, що гаусовим образом поверхні є точка. Що це за поверхня?
4. Для яких поверхонь другого порядку гаусовим образом буде одинична сфера? півсфера одиничної сфери? коло?

5. При яких значеннях параметра u матриця $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & u^2 - 1 \end{pmatrix}$ може бути матрицею першої квадратичної форми деякої поверхні?
6. Серед наступних поверхонь оберіть ті, які мають постійну гаусову кривину і вкажіть знак цієї кривини:
 - а) параболічний циліндр,
 - б) конус,
 - в) прямий гелікоїд,
 - г) еліпсоїд,
 - д) гіперболічний параболоїд,
 - е) півсфера.
7. Скільки існує символів Крістоффеля першого (другого) роду?
8. Скільки символів Крістоффеля першого (другого) роду потрібно задати для того, щоб можна було відновити їх усі?
9. Наведіть декілька диференціальних співвідношень, які пов'язують символи Крістоффеля першого роду та коефіцієнти першої квадратичної форми.
10. Які символи Крістоффеля визначаються спочатку: першого або другого роду?
11. Одна й та ж лінія лежить на двох поверхнях. Відомо, що вона є геодезичною для однієї з поверхонь. Чи можна стверджувати, що вона обов'язково буде геодезичною і для другої поверхні?
12. Чи може геодезична кривина кривої дорівнювати подвоєній кривині кривої в цій же точці?
13. В якому випадку геодезична кривина кривої не залежить від поверхні, на якій вона лежить.
14. Сфера і циліндр однакового радіусу R перетинаються по колу. Знайти геодезичну кривину цього кола як кривої на кожній з цих поверхонь.
15. Чи можна визначити геодезичну кривину кривої на поверхні, якщо відома тільки перша квадратична форма поверхні і рівняння кривої?
16. Які переваги має напівгеодезична система координат?
17. Чому напівгеодезична система координат має таку назву?
18. Навести приклад напівгеодезичної системи координат на сфері, на циліндрі, на конусі.
19. Що можна сказати про поверхню, якщо для деякого геодезичного трикутника сума кутів виявилася рівною 3π ?
20. Задано напівгеодезичну параметризацію. Чи потрібно для визначення гаусової кривини знати всі три коефіцієнти першої квадратичної форми, чи можна обмежитися деякою функцією від них?
21. Задано 6 диференційовних функцій $f_i(u, v)$. Скільком рівностям та нерівностям вони повинні задовольняти, щоб існувала поверхня, для якої вони будуть відповідно коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм?

II МЕТРИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ

Тема 4. Метричні та топологічні простори.

4.1 Означення та приклади метричних просторів.

Означення. Нехай множина $M \neq \emptyset$. Говорять, що на ній задана *метрика* ρ , якщо будь-якій парі елементів $x, y \in M$ відповідає невід'ємне дійсне число $\rho(x, y)$ таке що виконуються аксіоми:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ - аксіома тотожності,
2. $(\forall x, y \in M) \rho(x, y) = \rho(y, x)$ - аксіома симетрії,
3. $(\forall x, y, z \in M) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - аксіома трикутника.

Пара (M, ρ) називається *метричним простором*, елементи множини M – точками, ρ – відстанню між точками x та y .

Наведемо **приклади** метрик.

Приклад 4.1 *Тривіальна метрика.*

На множині $M \neq \emptyset$ розглянемо функцію $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \neq y, \\ 0, & \text{якщо } x = y. \end{cases}$

Покажемо, що ця функція є метрикою на цій множині. Для цього перевіримо, чи виконуються аксіоми метрики. Очевидно, що перша та друга аксіоми виконуються, для перевірки третьої аксіоми розглянемо всі можливі варіанти для елементів з M , їх чотири:

- 1) $x = y = z$. Тоді $\rho(x, y) = 0 = 0 + 0 = \rho(x, z) + \rho(z, y)$,
- 2) $x = y \neq z$. Тоді $\rho(x, y) = 0 < 1 + 1 = \rho(x, z) + \rho(z, y)$,
- 3) $x \neq y = z$. Тоді $\rho(x, y) = 1 = 1 + 0 = \rho(x, z) + \rho(z, y)$,
- 4) $x \neq y \neq z$. Тоді $\rho(x, y) = 1 < 1 + 1 = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Третя аксіома теж виконується. Отже, функція ρ є метрикою на множині M , а пара (M, ρ) утворює метричний простір.

Зауваження. Цей простий приклад насправді має велике значення, оскільки з нього випливає той факт, що структуру метричного простору можна ввести на будь-якій непустій множині.

Приклад 4.2 *Евклідова метрика.*

На множині дійсних чисел $M = \mathbb{R}$ розглянемо функцію $\rho(x, y) = |x - y|$. Очевидно, що вона завжди приймає невід'ємні значення. Використовуючи властивості модуля (додаток А), перевіряємо аксіоми. Отже, функція ρ є метрикою, яку називають *евклідовою*.

Узагальнення. Якщо у якості множини M розглядати n -вимірний евклідів арифметичний простір $\mathbb{R}^n$, то узагальненням розглянутої метрики буде

метрика $\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Зауваження. В розглянутих вище прикладах той факт, що функція $\rho(x, y)$ набуває дійсних невід'ємних значень був очевидним з вигляду формули, що задавала функцію. Але це не завжди так, і в таких випадках необхідно це питання досліджувати або обґрунтовувати відомими теоремами. Інакше, підтверджувати або спростовувати коректність задання функції $\rho(x, y)$. Наведемо приклад такої ситуації.

Приклад 4.3 *Метрика на множині неперервних функцій.*

На множині $M = C_{[a,b]}$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій задамо функцію $\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$, де $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$. Згідно з теоремою Вейерштрасса ця функція на заданому відрізку набуває своє найбільше значення, яке за властивістю модуля буде невід'ємним. Отже, функція ρ задана коректно.

Перевіримо аксіоми.

$$1) \rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow \max_x |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x) |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall x) f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g.$$

$$2) \rho(f, g) = \max_x |f(x) - g(x)| = \max_x |g(x) - f(x)| = \rho(g, f).$$

$$3) \text{ Для будь-яких трьох функцій } f, g, h \text{ виконується нерівність} \\ |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Візьмемо максимальне значення лівої та правої частин:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|).$$

Далі маємо

$$\max_{x \in [a,b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|,$$

тобто

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

і нерівність трикутника доведено.

Таким чином, множина $M = C_{[a,b]}$ є метричним простором з вказаною метрикою.

4.2 Відриті й замкнені множини в метричному просторі та їх властивості

Означення. Нехай (M, ρ) – метричний простір. Відкритою кулею $B_r(x_0)$ із центром у точці $x_0 \in M$ й радіусом r називається множина таких точок цього простору, що $\rho(x, x_0) < r$. Множина $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in M : \rho(x, x_0) \leq r\}$

називається *замкненою кулею*. Відкрита куля із центром x_0 і радіусом ε називається ε -околом $B_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 .

Означення. Нехай A непуста множина метричного простору (M, ρ) . Точка $x_0 \in A$ називається *внутрішньою точкою* цієї множини, якщо існує такий ε -окіл цієї точки, який цілком належить множині A , тобто $x_0 \in A$ – внутрішня $\Leftrightarrow (\exists B_\varepsilon(x_0)) B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається її *внутрішністю* й позначається $\text{int } A$. Множина A метричного простору (M, ρ) називається *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні.

Приклад 4.4 В метричному просторі (R, ρ) з евклідовою метрикою $\rho = |x - y|$ розглянемо множини $A = (a, b)$ і $B = [a, b)$ та дослідимо їх на відкритість.

а) $A = (a, b) \subset R$. Опишемо ε -окіл точки $x_0 \in R$. За Означенням $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in R : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$. У даній метриці маємо нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$. Отже, $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ або $B_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Якщо для будь-якої точки $x \in A$ у якості радіуса відкритої кулі вибрати число $\varepsilon = \min\{\rho(x, a), \rho(x, b)\}$, то одержимо $B_\varepsilon(x) \subset A$, тобто ця точка внутрішня. Отже, $\text{int } A = (a, b)$, а значить A – відкрита в евклідовій метриці множина.

б) Для множини $B = [a, b)$ всі точки $x \neq a$ мають відкриті кулі, що цілком належать B , тобто ці точки є внутрішніми. Будь-яка відкрита куля точки $x = a$ має хоча б одну таку точку y , що $y \notin B$. Отже, $\text{int } B = B \setminus \{a\}$ і множина B не є відкритою.

Приклад 4.5 Розглянемо метрику $\rho = |x - y|$ на множині R^2 . Тоді, якщо $x = (x_1, x_2)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, то нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$ з означення ε -околу точки x_0 набуває вигляду $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < \varepsilon$, тобто є відкритим кругом на площині. Підмножина $C = \{(x, y) \in R^2 : y \geq x\}$ в цьому метричному просторі не є відкритою, оскільки, наприклад, точка $P(1, 1)$ не є внутрішньою. Внутрішністю цієї множини є множина $\text{int } C = \{(x, y) \in R^2 : y > x\}$.

Лема (властивість відкритої кулі). Відкрита куля у метричному просторі є відкритою множиною.[8]

Теорема 4.1 Нехай (M, ρ) – метричний простір, тоді об'єднання будь-якої сукупності відкритих множин є відкритою множиною й перетин будь-якого скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною.

Означення. Множина A в метричному просторі (M, ρ) називається *замкненою*, якщо її доповнення є відкритою множиною.

Приклади. В метричному просторі (R, ρ) , $\rho = |x - y|$ множина $A = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не є замкненою. Дійсно, у попередньому прикладі було

показано, що множина $B = [a, b)$, яка є доповненням до A , не відкрита. В цьому ж метричному просторі множина $B = [a, b]$ є замкненою.

Теорема 4.2 Перетин будь-якого числа замкнених у метричному просторі множин є замкненою множиною і об'єднання будь-якого скінченного числа замкнених множин – замкнена множина.

Зауваження. У будь-якому метричному просторі (M, ρ) множина M – відкрита. Будемо вважати, що порожня множина так само відкрита, тоді $M = C\emptyset$ за Означенням замкнена і $\emptyset = CM$ теж замкнена. Треба запам'ятати, що в метричному просторі інших множин, які б були одночасно і відкритими і замкненими не існує.

Лема. У метричному просторі (M, ρ) будь-яка одноточкова множина є замкненою. [8]

Зауваження (про зв'язок між різними метриками на одній множині) З означення метричного простору випливає, що на одній і тій самій множині можна розглядати різні метрики. Зрозуміло, що певний інтерес представляє питання про існування зв'язків між ними.

На множині точок площини розглянемо метрику $\rho_0(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, у якій відстань дорівнює найбільшій з довжин проєкцій відрізка M_1M_2 на осі координат. На тій же множині часто розглядають метрики $\rho_1(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (відстань – сума довжин проєкцій відрізка M_1M_2 на осі координат) і $\rho_2(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (відстань – довжина відрізка M_1M_2 або евклідова метрика). Усі ці метрики є окремими випадками класу метрик на площині R^2 , що задаються формулою $\rho_p(M_1, M_2) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p}$. Очевидно, $\rho_2(M_1, M_2) \leq \rho_1(M_1, M_2)$ (довжина гіпотенузи не перевершує суми довжин катетів). При $x_1 = y_1 = 0$ остання нерівність рівносильна алгебраїчній нерівності $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$. Зауважимо також, що $\rho_0(M_1, M_2) \leq \rho_2(M_1, M_2)$. Із цієї нерівності при $x_1 = y_1 = 0$ одержимо рівносильну нерівність $\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.3 Означення та приклади топологічних просторів

Означення. Нехай на непустій множині T задана сім'я τ її підмножин. Говорять що сім'я τ утворює *топологію* на T , якщо вона має наступні властивості:

- 1) $\emptyset \in \tau$ і $T \in \tau$
- 2) Об'єднання будь-якого числа множин із сім'ї τ знову дає множину з τ .

3) Перетин будь-якого скінченного числа множин із τ знову належить τ .

Пару (T, τ) називають *топологічним простором*, елементи множини T - *точками простору*, множини із сім'ї τ - *відкритими*, а властивості 1) – 3) - *аксіомами топологічного простору*.

Приклад 4.6 *Дискретний топологічний простір.*

Розглянемо непусту множину $T \neq \emptyset$, а у якості τ розглянемо сукупність усіх її підмножин, тоді за властивістю підмножин

$$1) \quad \emptyset \in \tau, T \in \tau,$$

$$2) \quad (\forall \alpha) U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau,$$

$$3) \quad (\forall \alpha = \overline{1, n}) U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha \in \tau.$$

Отже, (T, τ) є топологічним простором, який і називається дискретним. Наприклад, на двоелементній множині $T = \{a, b\}$ дискретна топологія τ має вигляд

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, T\}.$$

Приклад 4.7 *Антидискретний топологічний простір.*

Нехай T – непуста множина, $\tau = \{\emptyset, T\}$. Очевидно, всі аксіоми виконуються, тобто пара (T, τ) утворює топологічний простір.

Приклад 4.8 *Метричний топологічний простір.*

Нехай (T, ρ) - будь-який метричний простір, τ - сукупність усіх відкритих відносно метрики множин цього простору. З теореми про властивості відкритих множин метричного простору випливає виконання аксіом 1) – 3), тобто (T, τ) є топологічним простором, а топологія τ називається *метричною*. Говорять також, що топологія τ породжена метрикою.

Зокрема, простір $T = \mathbb{R}^n$ з метрикою $\rho = |x - y|$, що породжує топологію τ , називається простором з *природною* (або *евклідовою*) *топологією*.

Зауважимо, що метрика на множині однозначно визначається топологією на цій множині, але не навпаки, оскільки одну й ту саму топологію на множині можна одержати, задаючи на ній різні метрики.

Наприклад, метрики $\rho_0(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $\rho_1(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ та $\rho_2(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ задають одну й ту саму евклідову топологію на площині.

Означення. Множина F топологічного простору (T, τ) називається *замкнутою*, якщо її доповнення $CF = T \setminus F$ є відкритою множиною, тобто $CF \in \tau$.

Теорема 4.3 У топологічному просторі (T, τ)

- 1) Порожня множина й уся множина T замкнені,
- 2) Перетин будь-якого числа замкнених множин замкнений.

3) Об'єднання будь-якого скінченного числа замкнених множин замкнений [3].

Зауваження. Із цієї теореми ясно, що коли на непустій множині задати систему підмножин, що задовольняє властивості замкнених множин, то їх доповнення утворюють топологію на цій непустій множині. Про цю топологію говорять, що вона задана за допомогою системи замкнених множин.

Означення. Околом точки a топологічного простору (T, τ) називається будь-яка множина U_a з τ , що містить цю точку.

Теорема Множина топологічного простору відкрита тоді й тільки тоді, коли вона кожен свою точку містить разом з деяким околом цієї точки.

Теорема (властивість системи околів точки) Система $\sigma(x)$ околів точки x топологічного простору задовольняє умови:

- 1) для кожної точки x система $\sigma(x)$ не порожня;
- 2) для будь-якого околу $U_x \in \sigma(x)$ і будь-якої точки $y \in U_x$ існує такий окіл $U_y \in \sigma(y)$, що $U_y \subseteq U_x$;
- 3) для будь-яких околів $U_1, U_2 \in \sigma(x)$ існує такий окіл $U \in \sigma(x)$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Наведемо ще один приклад топології.

Приклад 4.9 Топологія Зариського (або топологія скінченних доповнень).

Розглянемо непусту множину $T \neq \emptyset$ та сім'ю всіляких скінченних підмножин множини T . Оголосимо їх замкненими і саму множину T будемо вважати замкненою.

Перевіримо виконання властивостей замкнених множин.

- 1) $\emptyset$ - замкнена, T - замкнена.
- 2) Перетин будь-якого числа скінченних множин скінченний, тобто цей перетин є замкненою множиною.
- 3) Об'єднання будь-якого скінченного числа скінченних множин скінченне, тобто це об'єднання є замкненою множиною.

Топологію τ одержимо, перейшовши до доповнень замкнених множин.

Зокрема, розглянемо топологію Зариського на R . Цікавим є питання про околиці точки в цій топології. Наприклад, знайдемо який-небудь окіл точки $5 \in R$. Це повинна бути відкрита множина, що містить точку 5, наприклад, $U_5 = R \setminus \{4, 6, -12\}$ або $U_5 = R$.

З наведених прикладів ясно, що на одній і тій самій множині можна задати різні топології, тому виникає задача порівняння їх між собою.

Нехай τ_1 і τ_2 – дві топології на множині T . Топологія τ_1 називається *слабшою* за топологію τ_2 , якщо будь-який елемент із топології τ_1 є елементом з топології τ_2 . Топологія τ_2 при цьому називається *сильнішою* за топологію τ_1 .

Якщо будь-який елемент із τ_1 є елементом з τ_2 і, навпаки, будь-який елемент із τ_2 є елементом з τ_1 , тоді τ_1 й τ_2 називаються *рівносильними*.

Множина всіх топологій на T частково впорядкована, тому що існують топології, які не можна порівняти між собою. Найслабшою топологією є антидискретна топологія, а найсильнішою – дискретна.

4.4 Індуковані топології

Означення. Нехай (T, τ) – топологічний простір, $A \subset T$. Слідом множини $U \in \tau$ на множині A називається перетин $U \cap A$.

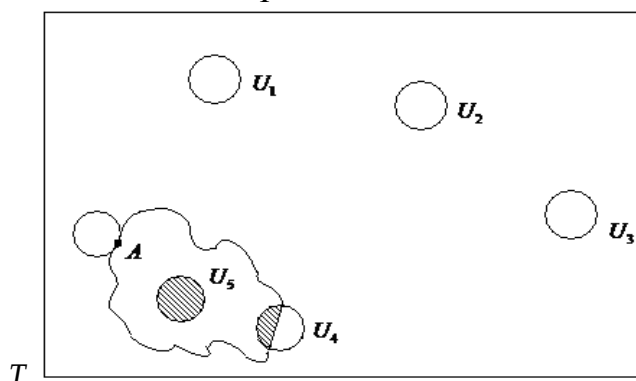


Рисунок 4.1 – Індукована топологія

Теорема 4.4 Сукупність τ_A слідів усіх відкритих множин топологічного простору (T, τ) на множині A утворює топологію на цій множині, яка називається **індукованою топологією**.

Доведення. В топологічному просторі (T, τ) розглянемо підмножину $A \subset T$. Розглянемо τ_A - сукупність усіляких слідів $A_\alpha = U_\alpha \cap A$, $U_\alpha \in \tau$. Доведемо, що τ_A утворює топологію. Перевіримо аксіоми.

1) $\emptyset \in \tau_A$, оскільки $\emptyset = \emptyset \cap A$; $A \in \tau_A$, оскільки $A = T \cap A$.

2) Нехай $\forall \alpha \in I$, де I - довільна множина індексів, $A_\alpha \in \tau_A$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha \right) \cap A \in \tau_A, \text{ оскільки } \left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha \right) \cap A \text{ є слідом.}$$

3) Нехай $\forall \alpha = \overline{1, n}$ $A_\alpha \in \tau_A$. Тоді

$$\bigcap_{\alpha=1}^n A_\alpha = \bigcap_{\alpha=1}^n (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha \right) \cap A \in \tau_A.$$

Таким чином, (A, τ_A) – топологічний простір. Він називається **топологічним підпростором** топологічного простору (T, τ) . Теорема доведена.

Означення. Топологічний підпростір (A, τ_A) простору (T, τ) називається відкритим (замкненим), якщо множина A відносно топології τ відкрита (замкнена).

Приклад 4.10 Розглянемо топологічний простір (R, τ) , де R – множина дійсних чисел, τ – евклідова топологія. Знайдемо індуковану топологію τ_N на множині $N \subset R$, тобто на множині натуральних чисел.

В евклідовій топології на множині дійсних чисел відкритими множинами є будь-які відкриті інтервали та всілякі їх об'єднання. На малюнку показано, як вибрати відкриті інтервали, щоб їх перетином з множиною N була лише одна точка. Такими, наприклад є інтервали виду $U_n = \left(n - \frac{1}{3}; n + \frac{1}{3}\right), n \in N$. Тоді $U_n \cap N = \{n\}$.

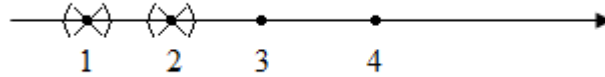


Рисунок 4.2 – Індукована дискретна топологія

Отже, в індукованій топології τ_N відкритою буде будь-яка одноточкова множина, а значить і будь-яка підмножина множини N . Це означає, що індукована топологія τ_N є дискретною.

Зауваження. В подальшому ми часто будемо зустрічатися із ситуацією, коли у топологічному просторі задано деякі множини. Будемо вважати, що ці множини наділені індукованою топологією.

4.5 База топології

Означення. Нехай (T, τ) – топологічний простір. Сім'я B відкритих множин називається *базою топології τ* , якщо для будь-якого $x \in T$ й будь-якої відкритої множини $U \in \tau$, для якої $x \in U$, існує $V_x \in B$ така, що $x \in V_x \subset U$.

Теорема 4.5 (критерій бази). Для того, щоб сім'я B відкритих множин топологічного простору (T, τ) була базою топології τ , необхідно й достатньо, щоб будь-який елемент із τ був об'єднанням деяких елементів з B .

Приклад 4.11

1) В будь-якому дискретному топологічному просторі (T, τ) сім'я B одноточкових множин є базою.

2) В евклідовій топології на прямій R сім'я $B_1 = \{(a, b) : a, b \in R\}$ усіляких відкритих інтервалів з дійсними кінцями є базою топології τ , яка як було показано породжена метрикою $\rho = |x - y|$. У цьому ж топологічному просторі сім'я $B_2 = \{(a, b) : a, b \in Q\}$ усіляких відкритих інтервалів з раціональними кінцями теж є базою.

Теорема 4.6 (про базу індукованої топології). Базою індукованої топології τ_A топологічного простору (T, τ) є сукупність слідів відкритих множин, що утворюють базу топології τ .

Теорема 4.7 (ознака бази) Нехай (T, τ) - топологічний простір. Сім'я B підмножин є базою топології τ , якщо вона задовольняє наступні умови:

B_1 . $(\forall x \in T)(\exists G \in B): x \in G$, тобто сім'я B є покриттям множини T .

B_2 . $(\forall G_1, G_2 \in B)(\forall u \in G_1 \cap G_2)(\exists G_3 \in B): u \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Означення. Нехай (T, τ) – топологічний простір. Розглянемо сукупність σ_x усіляких околів точки $x \in T$. Говорять, що сукупність σ_x утворює фундаментальну систему околів точки x , якщо для будь-якої відкритої множини $U: x \in U$ знайдеться елемент $W \in \sigma_x: W \subset U$. Позначають $\mathcal{F}CO_x$.

Приклад 4.12 Нехай (R, τ) - евклідов топологічний простір, точка $x \in R$, σ_x – сукупність інтервалів $(x - \varepsilon, x + \varepsilon), \varepsilon \in Q$. Тоді, згідно Означення, σ_x – фундаментальна система околів точки x .

Теорема Сім'я B відкритих підмножин топологічного простору (T, τ) є базою топології τ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки x сім'я $\sigma_x = \{\beta \in B: x \in \beta\}$ є фундаментальною системою околів точки x .

Зауваження Доведення цієї теореми ґрунтується на теоремі 4.7. Отже, маємо ще один спосіб задання топології на не порожній множині T – за допомогою фундаментальних систем околів всіх точок множини T . Для цього потрібно перевірити, що сукупність $\mathcal{F}CO$ всіх точок множини задовольняє умови B_1 та B_2 з теореми 4.7.

Приклад 4.13 Розглянемо множину $T = R$. Для кожної точки x задамо фундаментальну систему околів $\mathcal{F}CO_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon), \varepsilon \in Q\}$. Позначимо сукупність $\mathcal{F}CO$ для всіх точок множини символом B і перевіримо виконання умов попередньої теореми. Очевидно, умова B_1 виконується. Далі, якщо інтервали G_1 та G_2 перетинаються, то їх перетин $G_1 \cap G_2$ теж є інтервалом, причому для будь-якої його точки u в якості G_3 можна взяти інтервал з центром в u і радіусом, що дорівнює мінімальній з евклідових відстаней від цієї точки до кінців інтервалу $G_1 \cap G_2$. отже, умова B_2 теж виконується. Ми отримали топологію на R , базою якої є сім'я усіляких відкритих інтервалів з раціональними кінцями, тобто евклідову топологію.

4.6 Операції над множинами в топологічному просторі

Означення. Нехай (T, τ) – топологічний простір, $A \subset T$. Точка $x \in T$ називається *точкою дотику* для множини A , якщо будь-який окіл точки x перетинається із множиною A .

Теорема 4.8 (критерій замкненої множини). Множина A топологічного простору (T, τ) замкнена тоді й тільки тоді, коли містить усі свої точки дотику.

Доведення. Якщо A замкнена, то вона містить усі свої точки дотику. Дійсно, якщо припустити, що існує точка дотику x , яка не належить множині A , тоді буде виконуватись $x \in CA$. Але CA відкрита множина, отже

$\exists U_x : U_x \subset CA$, звідки $U_x \cap A = \emptyset$, що суперечить визначенню точки дотику. Ця суперечність доводить пряму теорему.

Нехай тепер виконується, що до множини A належать всі її точки дотику. Припустимо, що вона не замкнена, тоді CA не є відкритою множиною, тобто існує $x \in CA$, яка не є внутрішньою. Тоді $(\forall U_x) U_x \cap A \neq \emptyset$, звідки випливає, що x є точкою дотику до A і $x \notin A$, що неможливо.

Теорема доведена.

Означення. Замиканням множини A топологічного простору (T, τ) називається сукупність усіх її точок дотику. Позначається $\bar{A}$ або $[A]$.

Приклад 4.14 В топологічному просторі (R, τ) з природньою топологією τ розглянемо множину $A = [0, 1)$. Будь-яка точка цієї множини є, очевидно, точкою дотику, оскільки вона належить кожному своєму околу. З точок, які не належать множині A , лише точка $x = 1$ є точкою дотику. Множина $A = [0, 1)$ не є замкнутою. Замиканням множини $A = [0, 1)$ є множина $\bar{A} = [0, 1]$.

Теорема 4.9 Замикання множини A є найменшою замкнутою множиною, що містить A . Інакше кажучи, замикання множини A є перетином усіх замкнених множин, що містять A .

Перехід від множини до його замикання, називається операцією замикання.

Теорема 4.10 (властивості операції замикання). Нехай (T, τ) - топологічний простір, $A \subset T$, $B \subset T$. Тоді

- 1) $A \subseteq \bar{A}$,
- 2) $\bar{\emptyset} = \emptyset$,
- 3) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$,
- 4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- 5) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$,
- 6) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$,
- 7) A - замкнена тоді й тільки тоді, коли $A = \bar{A}$,
- 8) $\overline{A \setminus B} \supseteq \bar{A} \setminus \bar{B}$.

Доведення.

1) Випливає з попередньої теореми. 2) Множина $\emptyset$ є замкнутою, як доповнення до T . 7) Є критерієм замкнених множин. 5) З очевидного включення $A \subset B \subseteq \bar{B}$ випливає $A \subseteq \bar{B}$. Завжди $A \subseteq \bar{A}$. Тому що $\bar{A}$ – найменша замкнена множина, що містить A , то $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. 4) Так як $A \subseteq \bar{A}$ і $B \subseteq \bar{B}$, то $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, але $\overline{A \cup B}$ - найменша, що містить $A \cup B$, отже $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. З іншого боку, $A \subseteq A \cup B$ і $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Так само $B \subseteq A \cup B$ і $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Таким чином, $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Два доведені включення дають рівність $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. 6) і 8) пропонується довести самостійно.

Означення Точка a топологічного простору T називається *внутрішньою точкою* множини $A \subset T$, якщо $(\exists U_a) U_a \subset A$. Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається його *внутрішністю* й позначаються $\text{int } A$.

Теорема 4.11 Внутрішність множини A в топологічному просторі є найбільшою відкритою множиною, що міститься в A .

Теорема 4.12 (двоїстості). Операції замикання множини й знаходження внутрішності взаємодвоїсті, тобто одну із цих операцій можна замінити іншою, переходячи від множини до її доповнення:

$$C\bar{A} = \text{int } CA,$$

$$C\text{int } A = \overline{CA}.$$

Теорема 4.13 (Властивості операції знаходження внутрішності).

- 1) $\text{int } A \subseteq A$,
- 2) $\text{int } T = T$,
- 3) $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$,
- 4) $A \subseteq B \Rightarrow \text{int } A \subseteq \text{int } B$,
- 5) $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$,
- 6) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int } A \cup \text{int } B$,
- 7) A – відкрита $\Leftrightarrow \text{int } A = A$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 4.10, його можна знайти в [3]

Підведемо підсумок про різні **способи задання топології**. Прямий спосіб полягає в тому, що треба вказати ті множини, які ми вважаємо відкритими. Набір цих множин повинен задовольняти аксіоми топології (означення на с.63). Але не завжди легко дати безпосереднє описання усіх відкритих множин. Рівносильний цьому двоїстий спосіб – вказати набір замкнених множин, що мають властивості замкнених множин (теорема 4.3).

Більш поширений спосіб задання топології полягає у виборі деякої її бази. Фактично саме так вводиться топологія в метричних просторах, де, спираючись на метрику, задається база – сукупність відкритих куль та всіляких їх об'єднань.

Задання метрики – один з найважливіших способів введення топології, хоча й не універсальний. Ще один спосіб задати топологію на множині – це ввести на ній поняття збіжності. Однак за межами метричних просторів це неприйнятно, оскільки не завжди перехід від множини до її замикання можна описати в термінах збіжних послідовностей.

Ще один спосіб задання топології пов'язаний з дослідженнями Куратовського [3]. Визначимо на множині операцію замикання аксіоматично. А саме, говорять, що в множині X задана *операція замикання*, якщо кожній множині $A \subset X$ поставлена у відповідність деяка множина $[A] \subset X$, що називається *замиканням* A , причому операція переходу від A до $[A]$ має властивості 1) – 4) з теореми 4.10. Визначивши далі замкнені множини як ті,

для яких $[A] = A$, можна показати, що цей клас множин має властивості з теореми 4.3, тобто дійсно визначає в X топологію.

Питання для самоконтролю.

1. На якій множині можна ввести структуру метричного простору?
2. Яка відстань між точками 1 і 5 прямої в евклідовій метриці? В тривіальній метриці?
3. На прямій задано дві метрики – евклідова та тривіальна. Який вигляд має відкрита куля з центром у точці 0 радіусу 1 в кожній метриці? А замкнута куля з центром у точці 0 радіусу 1?
4. Навести приклад множини, яка буде відкритою на прямій і в евклідовій і в тривіальній метриках.
5. Навести приклад околу точки 1 прямої в наступних топологіях: евклідовій, дискретній, топології Зариського.
6. Чи є множина всіх топологій на заданій множині впорядкованою? Якщо так, то яке відношення порядку можна задати?
7. Яка топологія є найсильнішою (найслабшою)?
8. Як пов'язані між собою операції замикання, знаходження внутрішності, знаходження межі?
9. Опишіть базу індукованої топології на множині цілих чисел у евклідовому топологічному просторі на прямій.
10. Чи кожна відкрита (замкнена) в індукованій топології множина є відкритою (замкненою) в топології простору?
11. Наведіть п'ять способів задання топології на множині.
12. (R_2, τ) – антидискретний топологічний простір. A – півплощина без границі. Чи є ця множина відкритою або замкненою?
13. (R_2, τ) – дискретний топологічний простір, A – відкритий круг. Знайти замикання та внутрішність цієї множини.
14. (R, τ) – евклідов топологічний простір, A – множина раціональних чисел. Знайти границю цієї множини.
15. Чи однакові замикання множини N у евклідовій та дискретній топологіях на прямій?
16. Чи однакові замикання множини $R \setminus N$ у евклідовій та дискретній топологіях на прямій?

Тема 5. Неперервні відображення топологічних просторів.

5.1 Неперервні відображення

Означення. Нехай X і Y – два топологічні простори. Відображення $f : X \rightarrow Y$ простору X в простір Y називається *неперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу V_{y_0} точки $f(x_0) = y_0 \in Y$ знайдеться такий окіл U_{x_0} точки x_0 , що $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$. Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *неперервним (всюди в X)*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

Зауважимо, що включення $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$ еквівалентне включенню $U_{x_0} \subset f^{-1}(V_{y_0})$. Цей факт буде корисним при перевірці відображення на неперервність.

В частинному випадку, коли $Y = \mathbb{R}$ і топологія на ньому євклідова, то неперервне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *неперервною функцією*.

Дане означення неперервності відображень носить «локальний» характер, тобто неперервність відображення f на всьому просторі X визначається через неперервність f у кожній точці. Виявляється, що поняття неперервності відображення одного топологічного простору в інший можна сформулювати в термінах відкритих множин, тобто в термінах топологій цих просторів.

Теорема 5.1 (критерій неперервності) *Для того, щоб відображення $f : X \rightarrow Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y було неперервним, необхідно й достатньо, щоб прообраз $U = f^{-1}(V)$ будь-якої відкритої множини $V \subset Y$ був відкритий в X .*

Доведення. Необхідність. Нехай відображення f неперервне всюди в X і нехай V – відкрита множина в Y . Доведемо, що множина $U = f^{-1}(V)$ відкрита в X . Нехай x – довільна точка множини U й $y = f(x)$. Тоді V служить околом точки y , оскільки $y \in V$ й V відкрита. За Означенням знайдеться окіл U_x точки x такий, що $f(U_x) \subset V$, причому $U_x \subset U$. Інакше кажучи, для будь-якої точки $x \in U$ існує окіл U_x цієї точки, що міститься в U . Але це й означає, що U відкрита. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай прообраз будь-якої відкритої множини з Y відкритий в X . Доведемо, що тоді відображення f неперервне в сенсі Означення. Розглянемо довільну точку $x \in X$. Нехай $y = f(x)$ і V_y – довільний окіл точки y . Тоді прообраз $U = f^{-1}(V_y)$ відкритої множини $V_y \subset Y$ відкритий у X й $x \in U$. Таким чином, для будь-якої $x \in X$ і для кожного околу точки $y = f(x)$ ми вказали окіл точки x такий, що її образ лежить в околі точки y . Теорема доведена.

Твердження. Нехай ϵ відображення довільних множин $f : X \rightarrow Y$, і нехай V – довільна підмножина множини Y , тобто $V \subset Y$. Тоді має місце рівність $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$.

Доведення. Нехай $x \in f^{-1}(Y \setminus V)$. Маємо наступний ланцюжок еквівалентних тверджень:

$x \in f^{-1}(Y \setminus V) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus V \Leftrightarrow f(x) \notin V \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(V)$ Таким чином, $f^{-1}(Y \setminus V) \subseteq X \setminus f^{-1}(V)$ і $X \setminus f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus V)$, звідки й випливає, що $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Твердження доведене.

Як наслідок, одержуємо теорему, двоїсту до теореми 1.

Теорема 5.2 Для того щоб відображення $f : X \rightarrow Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y було неперервним, необхідно й достатньо, щоб прообраз будь-якої замкненої множини з Y був замкнений в X .

Для неперервних відображень має місце теорема, аналогічна добре відомій з аналізу теоремі про неперервність складної функції.

Теорема 5.3 (про композицію неперервних перетворень) Нехай X , Y і Z – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow Z$ – неперервні відображення X в Y та Y в Z відповідно. Тоді відображення $\varphi : X \rightarrow Z$ є неперервним відображенням простору X в простір Z .

Доведення випливає з теореми 5.1.

Згідно з теоремою 5.1 для неперервності відображення необхідно і достатньо, щоб прообразами відкритих множин були відкриті множини, але неперервне відображення не обов'язково переводить відкриті множини у відкриті й замкнені в замкнені.

Наприклад, відображення $f : R \rightarrow R$ топологічних просторів з природною топологією, яке задається формулою $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ неперервне, але образом відкритої множини R є невідкрита множина $(0;1]$.

Означення. Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *відкритим* (замкненим), якщо воно переводить будь-яку відкриту множину у відкриту (будь-яку замкнену в замкнену).

Зауважимо, що відкрите або замкнене відображення може і не бути неперервним. Наприклад, тотожне відображення $f : X \rightarrow X$ деякої множини X , наділеної топологіями τ_1 – антидискретною – та τ_2 – дискретною, є і відкритим і замкненим, але не є неперервним.

5.2 Гомеоморфізми топологічних просторів

Означення. Неперервне бієктивне відображення $f : T \rightarrow T'$ топологічних просторів (T, τ) і (T', τ') називається *гомеоморфізмом*, якщо відображення

$f^{-1}:T' \rightarrow T$ також неперервне (Інакше, гомеоморфізм є взаємно однозначним та взаємно неперервним відображенням).

Означення. Два топологічні простори називаються *гомеоморфними*, якщо існує хоча б один гомеоморфізм, що відображає один з них на інший. Позначають $T \sim T'$.

Відношення гомеоморфності на множині всіх топологічних просторів є відношенням еквівалентності, тобто має властивості:

- 1) рефлексивне $T \sim T$,
- 2) симетричне $T_1 \sim T_2 \Rightarrow T_2 \sim T_1$,
- 3) транзитивне $T_1 \sim T_2 \wedge T_2 \sim T_3 \Rightarrow T_1 \sim T_3$.

Доведемо, наприклад, симетричність. З $T_1 \sim T_2$ випливає $\exists f:T_1 \rightarrow T_2$ і f – гомеоморфізм. Тоді обернене відображення $f^{-1}:T_2 \rightarrow T_1$ неперервне і бієктивне, тобто f^{-1} – гомеоморфізм, звідки випливає $T_2 \sim T_1$.

Отже, множина M всіх топологічних просторів розбивається на класи еквівалентності. Будь-які два топологічні простори з одного класу гомеоморфні, будь-які два топологічні простори з різних класів – не гомеоморфні. Сукупність всіх класів еквівалентності по відношенню гомеоморфності утворює фактор-множину $M/\sim$. Гомеоморфні простори мають однакові топологічні властивості й з топологічної точки зору їх можна розглядати просто як два екземпляри одного і того самого простору. Про такі простори говорять, що вони топологічно еквівалентні.

Приклад 5.1 Розглянемо два топологічних простора – $((AB), \tau)$ і $(\gamma(AB), \tau')$, де (AB) – відрізок без кінців, $\gamma(AB)$ – півколо без кінців з діаметром (AB) , τ – топологія на (AB) , яка індукується евклідовою топологією площини, τ' – топологія на $\gamma(AB)$, яка індукується евклідовою і топологією площини. Розглянемо ортогональне проектування $f:\gamma(AB) \rightarrow (AB)$ (рис.5.1).

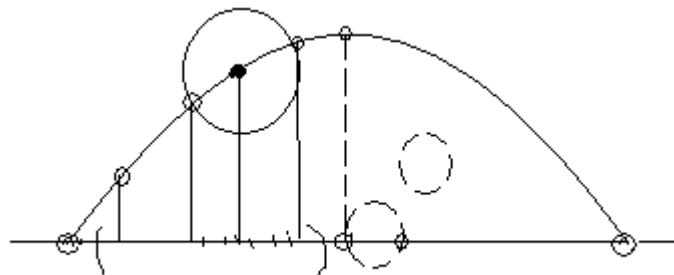


Рисунок 5.1 – Гомеоморфне відображення півкола на його діаметр

Очевидно, f є бієкцією і неперервне разом з f^{-1} , тобто f є гомеоморфізмом. Інакше, дуга без кінців гомеоморфна відрізку без кінців.

Приклад 5.2 Розглянемо (R, τ) – пряму з евклідовою топологією – і $(\gamma(AB), \tau')$ – топологічний простір з прикладу 1. розташуємо їх так, щоб $AB \parallel R$

(рис. 2.4) і задамо центральне проектування $g : \gamma(AB) \rightarrow R$, тобто $g(M) = M' = OH \cap R$.

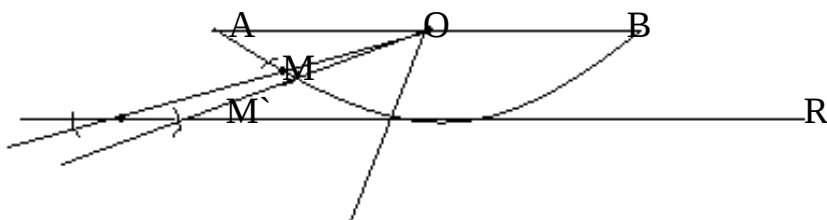


Рисунок 5.2 – Гомеоморфне відображення півкола на його діаметр

Легко дійти висновку, що g є гомеоморфізмом і отже півколо без кінців гомеоморфне всій прямій.

Приклад 5.3 Відрізок без кінців гомеоморфний усій прямій. Це випливає з того, що композиція відображення з прикладу 5.2 та оберненого до відображення з прикладу 5.1 є гомеоморфізмом, який переводить відрізок у пряму, тобто відображення $g \circ f^{-1} : (AB) \rightarrow R$ є гомеоморфізмом.

Аналогічно можна довести, що:

1. Відрізок з кінцями гомеоморфний півколу з кінцями.
2. Диск (відкритий круг) гомеоморфний усій площині.
3. Будь-який опуклий багатокутник гомеоморфний колу.
4. Промінь без початку гомеоморфний усій прямій (і відрізку без кінців).
5. Сфера без точки гомеоморфна всій площині (а значить і диску).

Зауваження. Нехай X і Y – довільні множини, і $f : X \rightarrow Y$ – неперервне відображення X в Y . Якщо в множині Y задана деяка топологія τ , то прообраз топології τ (тобто сукупність усіх множин виду $f^{-1}(G)$, де $G \in \tau$) буде топологією в X . Для доведення досить згадати теореми про прообраз об'єднання й перетину множин. Позначатимемо цю топологію через $f^{-1}(\tau)$.

Зауважимо, що метричні властивості двох гомеоморфних між собою метричних просторів можуть бути різні; так один з них може бути повним, а інший – ні. Наприклад, інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ гомеоморфний числовій прямій, відповідний гомеоморфізм можна задати функцією $x \leftrightarrow \tan(x)$. Але при цьому пряма – це повний простір, а інтервал – ні.

Означення. Властивості топологічних просторів, які зберігаються при гомеоморфізмах, називаються *топологічними властивостями* або *топологічними інваріантами*.

Топологічними інваріантами є зв'язність, лінійна зв'язність, компактність топологічних просторів та ін.. Далі розглянемо деякі з топологічних інваріантів.

5.3 Зв'язність топологічних просторів

Означення. Топологічний простір називається *незв'язним*, якщо його можна представити у вигляді об'єднання двох непорожніх відкритих множин, перетином яких є пуста множина. В протилежному випадку топологічний простір називається *зв'язним*.

Зауваження. Нехай (T, τ) – незв'язний топологічний простір. Тоді, за означенням, $T = A \cup B$ й $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A$ і B – відкриті. Але, з іншого боку, множина $B = T \setminus A = CA$ – замкнена. Аналогічно, $A = T \setminus B = CB$ – замкнена. Отже, можна дати ще одне означення.

Означення. Топологічний простір (T, τ) називається *незв'язним*, якщо в ньому існують нетривіальні відкрито-замкнені множини. Якщо ж відкрито-замкнутими множинами є лише T та $\emptyset$, то топологічний простір називається *зв'язним*.

Приклади

1. Антидискретний топологічний простір (T, τ) – зв'язний.
2. Дискретний топологічний простір (T, τ) , потужність якого більша за одиницю – незв'язний. Наприклад, якщо $T = \{a, b\}$, то дискретна топологія має вигляд $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, T\}$ і розбиття $T = U \cup V$, де $U = \{a\}, V = \{b\}$, доводить незв'язність цього простору.
3. Топологічний простір (T, τ) , де $T = \{a, b\}, \tau = \{\emptyset, a, T\}$, є зв'язним. Його прийнято називати зв'язною «двоточковістю».
4. Евклідов топологічний простір (R, τ) є зв'язним.

Для вирішення питання про зв'язність підмножини топологічного простору потрібно розглянути топологію, індуковану на цій множині топологією самого простору.

Теорема 5.4 Відрізок $[a, b]$ в евклідовому топологічному просторі (R, τ) є зв'язним топологічним підпростором (в індукованій топології).

Доведення. Припустимо, що $[a, b]$ незв'язний підпростір, тоді $[a, b] = A \cup B$, де A, B – непусті відкриті множини, що не перетинаються. Відмітимо, що A, B є одночасно і замкненими в $[a, b]$, а отже і на всій прямій. Будемо вважати, що точка $a \in A$. Розглянемо множину $A_* = \{u \in A : u < v \text{ для всіх } v \in B\}$. Очевидно, $A_* \neq \emptyset$, оскільки $a \in A_*$. Нехай h – точна верхня грань множини A_* . Оскільки A – замкнена, то $h \in A$. Будь-який окіл $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ точки h перетинає множину B , бо у протилежному випадку h не була б точною верхньою гранню. Отже h є точкою дотику до множини B , тобто $h \in \bar{B}$, а із замкнутості B випливає, що $h \in B$. Отримали $h \in A \cap B$, тобто перетин непустий, що є суперечністю.

Таким чином, $[a, b]$ не можна представити у вигляді об'єднання непустих відкритих множин, що не перетинаються, а значить $[a, b]$ – зв'язний.

Наслідок. $(a,b), [a,b), (a,b]$ – зв'язні множини в евклідовій топології на R .

Для доведення наступної теореми розглянемо поняття відокремлених множин та ще одне визначення незв'язного топологічного простору.

Означення. Нехай (T, τ) – топологічний простір, $A \subset T$, $B \subset T$. Множини A й B називаються відокремленими, якщо $\bar{A} \cap B = \emptyset$ і $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Приклад. В топологічному просторі (R, τ) , де τ – евклідова топологія, множини $A = (0,1)$ та $B = (3,4]$, A та $C = (1,2)$ відокремлені, множини A та $D = [1,2)$ – не відокремлені.

Поняття відокремленості множин у топологічному просторі пов'язане з поняттям його зв'язності.

Означення. Топологічний простір (T, τ) називається *незв'язним*, якщо його можна представити у вигляді об'єднання двох непустих відокремлених одна від одної множин. В протилежному випадку, топологічний простір називається *зв'язним*.

Доведемо, що перше з наведених означень незв'язного топологічного простору та останнє означення еквівалентні. Нехай (T, τ) – незв'язний в сенсі останнього означення, тоді $(\exists A, B) \quad T = A \cup B$ і $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \bar{A} \cap B = \emptyset, A \cap \bar{B} = \emptyset$. З $\bar{A} \cap B = \emptyset$ випливає $\bar{A} \subseteq X \setminus B = A$. З іншого боку $A \subseteq \bar{A}$, отже $A = \bar{A}$, а значить A замкнута. Аналогічно, B замкнута. Але з $T = A \cup B$ випливає, що кожна з цих множин є відкритою і тим самим (T, τ) незв'язне в сенсі першого означення.

Обернено, нехай $T = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B – непорожні відкриті, а отже і замкнені. Тоді $\bar{A} = A$, $\bar{B} = B$, а значить $A \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ і $A \cap B = \bar{A} \cap B = \emptyset$ і ми приходимо до останнього означення.

Теорема 5.5 Будь-яка опукла множина X евклідова топологічного простору (R^n, τ) – зв'язна, зокрема сам топологічний простір (R^n, τ) – зв'язний.

Доведення. Нагадаємо, що множина X називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох її різних точок існує відрізок, усі точки якого належать множині X .

Нехай (X, τ_X) – незв'язний топологічний простір. Тоді представимо X у вигляді об'єднання $X = U \cup V$, де U й V непусті відкриті множини, що не перетинаються. Розглянемо $u \in U$, $v \in V$.

Відрізок $[u, v] \subset X$, оскільки X – опукла множина. Розглянемо перетини $U_U = U \cap [u, v] \neq \emptyset$ й $V_V = V \cap [u, v] \neq \emptyset$. Очевидно, $[u, v] = U_U \cup V_V$, причому $U_U \cap V_V = \emptyset$ й легко зрозуміти, що U_U й V_V віддільні одна від одної. Значить $[u, v]$ – незв'язний. Отримали протиріччя з теоремою 5.4, отже (X, τ_X) – зв'язний, що і треба було довести.

З цієї теореми випливає, що в евклідовому топологічному просторі (R, τ) зв'язними є лише вся пряма R та різні обмежені та необмежені інтервали: замкнуті, відкриті, напіввідкриті.

Теорема 5.6 Неперервним образом зв'язного топологічного простору є зв'язний топологічний простір.

Доведення. Нехай $f: T \rightarrow T'$ – неперервне відображення із топологічного простору T в топологічний простір T' і T – зв'язний. Доведемо, що T' теж зв'язний.

Припустимо, що T' – незв'язний. Отже, T' можна представити у вигляді об'єднання $T' = A' \cup B'$ двох непустих відкритих множин, які не перетинаються. Тоді має місце і наступна рівність $f^{-1}(T') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$, або $T = A \cup B$, де A, B – непусті, відкриті множини (за критерієм неперервності відображення), що не перетинаються, а значить T – незв'язний. Отримали протиріччя. Теорема доведена.

Наслідок. Зв'язність – топологічний інваріант.

Дійсно, оскільки гомеоморфні відображення є частинними випадками неперервних відображень, то вони також зберігають зв'язність топологічних просторів.

Приклад 5.4 Розглянемо множини $T = [0,1]$ і $T' = S^1$ у евклідовій площині R^2 . Топології на цих множинах індуковані природною топологією площини. Неперервне відображення із T в R^2 можна задати неперервними функціями $f_1(t) = \cos 2\pi t$ та $f_2(t) = \sin 2\pi t$. Оскільки $[0,1]$ – зв'язний топологічний простір, то його образ S^1 – також зв'язний за теоремою 5.6.

Означення. У просторі R^n відрізком, що сполучає точки x та y , називається множина $\{a \in R^n : a = (1-t)x + ty, t \in [0,1]\}$ точок цього простору. Позначається символом $[x, y]$.

Теорема. Будь-який відрізок є зв'язним у R^n .

Для доведення треба розглянути неперервне відображення $f: [0,1] \rightarrow R^n$

Означення. Компонентою зв'язності у топологічному просторі називається зв'язна підмножина, яка не є підмножиною жодної іншої зв'язної множини.

Приклад 5.5 Гіпербола в евклідовому топологічному просторі з індукованою топологією є незв'язним топологічним підпростором. Кожна гілка гіперболи є компонентою зв'язності.

Властивості компонент зв'язності:

1. Кожна компонента зв'язності є відкритою множиною.
2. Дві компоненти зв'язності або не перетинаються, або збігаються.
3. Гомеоморфні топологічні простори мають однакове число компонент зв'язності.

Зауваження. Остання властивість ефективно використовується при доведенні негомеоморфності топологічних просторів. Важливу роль тут також відіграє наступна

Теорема 5.7 Якщо X й Y – гомеоморфні топологічні простори і $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфізм із X в Y , то для будь-якого $A \subset X$ гомеоморфними будуть простори $X \setminus A$ й $Y \setminus f(A)$ [3].

З теореми випливає, що коли $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфізм, то для довільної підмножини $A \subset X$ обмеження $f|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow f(X \setminus A)$ – теж гомеоморфізм і, отже, простори $X \setminus A$, $f(X \setminus A)$ мають однакове число компонент зв'язності.

Приклад 5.6 Нехай X – пара прямих, що перетинаються в точці A , Y – пряма. Топології на X й Y індуковані природною топологією площини.

Припустимо, що існує гомеоморфізм $f : X \rightarrow Y$. Нехай $f(A) = B \in Y$. Згідно попередньої теореми $X \setminus \{A\}$ й $Y \setminus \{B\}$ теж гомеоморфні, але це неможливо, оскільки $X \setminus \{A\}$ має чотири компоненти зв'язності, а $Y \setminus \{B\}$ – дві.

5.4 Лінійна зв'язність

Означення. *Шляхом* у топологічному просторі (T, τ) називається неперервне відображення $f : [0, 1] \rightarrow T$ з відрізка $[0, 1]$ в T таке, що $x(0) = x$, $f(1) = y$, x – початок шляху, y – кінець шляху. Топологічний простір (T, τ) називається *лінійно зв'язним*, якщо будь-які його дві точки можна з'єднати шляхом.

Прикладом лінійно зв'язного топологічного простору є будь-яка опукла множина в R^n , що безпосередньо випливає з означення опуклої множини.

Теорема 5.8 Неперервний образ лінійно зв'язного топологічного простору є лінійно зв'язним топологічним простором.

Доведення. Нехай $g : T \rightarrow T'$ – неперервне відображення і T – лінійно зв'язний. Тоді, за означенням, $(\forall x, y \in T)(\exists c : [0, 1] \rightarrow T) c(0) = x, c(1) = y$. Розглянемо композицію $f = g \circ c : [0, 1] \rightarrow T'$, в ній $f(0) = g(x)$, $f(1) = g(y)$. Оскільки f – неперервне відображення (як композиція неперервних відображень), то f – шлях в T' , що з'єднує точки $g(x)$ й $g(y)$. Значить T' лінійно зв'язний топологічний простір.

Наслідок. *Лінійна зв'язність топологічного простору є топологічним інваріантом.*

Теорема 5.9 Лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним. Обернене твердження не завжди вірне.

Приклад 5.7 Топологічний простір (T, τ) , де $T = \{(0, x) \in R^2 : |x| \leq 1\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\} = A \cup B$, τ – топологія, індукована

природною на R^2 топологією, є зв'язним, але не лінійно зв'язним. Дійсно, будь-яка точка відрізка $A = \{(0, x) \in R^2 : |x| \leq 1\}$ є точкою дотику множини B , тобто $A \subset \bar{B}$. За властивістю 5) з теореми 4.10 отримаємо імплікацію $A \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$. Тоді, очевидно $T = \bar{T} = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B}$. Оскільки B лінійно зв'язне, а тому і зв'язне, то зв'язним буде і його замикання. Отже, T зв'язний топологічний простір.

Але, наприклад, з точки $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ множини A до будь-якої точки множини B не існує шляху. Отже, означення лінійної зв'язності не виконується.

5.5 Аксиоми віддільності. Означення та приклади T_k -просторів.

Незважаючи на те, що багато понять теорії метричних просторів легко переносяться на довільні топологічні простори, вони все ж є більш загальним об'єктом і мають властивості, які суттєво відрізняються від властивостей метричних просторів. Наприклад, у топологічному просторі (T, τ) , де $T = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, a, T\}$, який називають зв'язною «двоточковістю», одноточкова множина $\{a\}$ не є замкненою, чого не може бути у метричному просторі. Аксиоми віддільності теж підкреслюють різницю між метричними та топологічними просторами.

Означення. Топологічний простір (T, τ) називається T_k - простором ($k = 0, 1, 2$), якщо він задовольняє аксіомі віддільності T_k .

Аксіома T_0 . З будь-яких двох різних точок принаймні одна має окіл, який не містить іншої точки.

Аксіома T_1 . З будь-яких двох різних точок кожна має окіл, який не містить іншої точки.

Аксіома T_2 . Будь-які дві різні точки мають околи, які не перетинаються.

T_0 -простори називаються колмогорівськими, T_1 -простори називаються просторами Френе, T_2 -простори називаються хаусдорфовими.

Очевидно, що T_2 -простори є T_1 -просторами і T_0 -просторами, T_1 -простори є T_0 -просторами.

Приклади. Будь-який метричний простір, зв'язна «двоточковість», є T_0 -просторами, антидискретний простір не є T_0 -простором.

Теорема 5.10 Топологічний простір є T_1 -простором тоді і тільки тоді, коли кожна його одноелементна множина є замкненою.

Доведення. Для будь-яких двох різних точок x і y у T_1 -просторі існує окіл O_x точки x , що не містить точку y , і окіл O_y точки y , що не містить точку x . Отже, якщо зафіксувати точку x , то для будь-якої точки $y \neq x$ виконується

$y \notin [x]$. Тому $[x] = x$ тобто множина $\{x\}$ замкнена. Звідси випливає, що в T_1 -просторі замкнена будь-яка множина, що складається зі скінченного числа точок.

Обернено, якщо кожна одноточкова множина замкнена, то її доповненням буде відкрита множина. Тоді будь-яка точка x має окіл $O_x = T \setminus \{y\}$, що не містить точку $y \neq x$, і точка y має окіл $O_y = T \setminus \{x\}$, що не містить x . Отже простір є T_1 -простором.

Прикладом топологічного простору, що не задовольняє аксіомі T_1 віддільності, є зв'язна «двоточковість».

5.6 Компактні топологічні простори.

Означення. Сукупність множин U_α називається *покриттям* топологічного простору (T, τ) , якщо $T = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. Якщо всі U_α – відкриті множини, то покриття називається *відкритим*.

Наприклад, база будь-якого топологічного простору є його відкритим покриттям. Фундаментальна роль в аналізі належить наступному факту, відомому як лема Гейне-Бореля:

З будь-якого покриття відрізка $[a, b]$ числової прямої інтервалами можна вибрати скінченне підпокриття.

Означення. Топологічний простір називається *компактним*, якщо будь-яке його покриття містить скінченне підпокриття. Компактний метричний простір називається *компактом*.

Приклад 5.8 Топологічний простір (R, τ) з евклідовою топологією не є компактним. Дійсно, наприклад, для покриття $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ прямої R не існує скінченного підпокриття.

Означення. Назвемо деяку систему підмножин $\{A_i\}$ множини T *центрованою*, якщо будь-який скінченний перетин $\bigcap_{i=1}^n A_i$ елементів цієї системи не порожній.

Теорема 5.11 Для того, щоб топологічний простір T був компактним, необхідно й достатньо, щоб він задовольняв наступній умові:

(R) *Кожна центрована система його замкнених множин має непустий перетин.*

Доведення. Спочатку з'ясуємо, що означає виконання умови (R). Нехай $\{F_\alpha\}$ – центрована система замкнених підмножин топологічного простору T . За означенням це означає, що будь-яка скінченна підсистема $\{F_{\alpha_i}\}$ системи

$\{F_\alpha\}$ має непустий перетин, тобто $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Умова (R) означає, що тоді й $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$.

Необхідність. Нехай T – компактний топологічний простір, $\{F_\alpha\}$ – центрована система замкнених підмножин з T . Множини $G_\alpha = T \setminus F_\alpha$ відкриті. Тоді, ніяка скінченна підсистема із системи $\{G_\alpha\}$ не утворює покриття T . Дійсно, для будь-якої скінченної підсистеми $\{G_{\alpha_i}\}$ системи $\{G_\alpha\}$ маємо:

$$\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n (T \setminus F_{\alpha_i}) = T \setminus \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i},$$

і, оскільки, $\{F_\alpha\}$ центрована, то $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Тому $\{G_{\alpha_i}\}$ не утворює покриття

T . Але тоді й $\{G_\alpha\}$ не утворює покриття простору T , тому що інакше за означенням компактності T ми могли б із цього відкритого покриття виділити скінченне підпокриття. Але тоді $T \setminus (\bigcup_{\alpha} G_\alpha) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$, тобто умова (R)

виконана.

Достатність. Нехай у топологічному просторі T виконана умова (R) й нехай $\{G_\alpha\}$ – відкрите покриття простору T . Покладемо $F_\alpha = T \setminus G_\alpha$. Тоді $\bigcap_{\alpha} F_\alpha = \emptyset$, тому що $\bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcap_{\alpha} (T \setminus G_\alpha) = T \setminus (\bigcup_{\alpha} G_\alpha) = \emptyset$ ($T \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha$). Звідси робимо висновок, що $\{F_\alpha\}$ – не центрована, тому що за умовою (R) було б

$\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$. Тоді існують такі $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_n}$, що $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Але тоді

відповідні $G_{\alpha_i} = T \setminus F_{\alpha_i}$ утворюють скінченне підпокриття покриття $\{G_\alpha\}$, тобто, якщо в топологічному просторі T виконана умова (R), то з довільного покриття його відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, а це значить, що умова (R) рівносильна компактності простору T . Теорема доведена.

Теорема 5.12 *Замкнена підмножина компактного простору компактна.*

Доведення. Нехай F – замкнена підмножина компактного простору T і $\{F_\alpha\}$ – довільна центрована система замкнених підмножин підпростору $F \subset T$. Тоді кожна F_α замкнена й в T , тобто $\{F_\alpha\}$ – центрована система замкнених множин і в T . Отже $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$. За попередньою теоремою звідси випливає компактність F . Теорема доведена.

Наслідок. *Замкнена підмножина компакта є компактом.*

Теорема 5.13 *Підмножина евклідового топологічного простору є компактом тоді й тільки тоді, коли вона обмежена й замкнена.*

Доведення. Нехай підмножина A евклідового простору R^n є компактом. Тоді будь-яке відкрите покриття цієї множини містить скінченне підпокриття. Розглянемо покриття множини A відкритими множинами виду $B_r(0) \cap A$, де $B_r(0)$ - відкрита куля радіусу r з центром у точці O простору R^n , тобто $A = \bigcup_r (B_r(0) \cap A)$. З нього можна виділити скінченне підпокриття. Тоді, очевидно, множина A належить відкритій кулі максимального радіусу з цього скінченного підпокриття. Таким чином, множина A є обмеженою.

Доведемо, що множина $R^n \setminus A$ є відкритою. Розглянемо довільну точку x цієї множини і покриття множини A відкритими множинами виду $\left(R^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{r}}(x)} \right) \cap A$. З нього можна вибрати скінченне покриття. Тоді відкрита куля $\overline{B_{\frac{1}{r}}(x)}$ при максимальному r не перетинається з множиною A . Отже, точка x є внутрішньою точкою множини $R^n \setminus A$, що і доводить замкненість множини A .

Обернена теорема випливає з теореми 5.12 та факту, що n -вимірний куб є компактом [4].

Приклади. В (R, τ) відрізок $[a, b]$ є компактом, інтервал (a, b) – не компакт, тому що не замкнений, $[a, \infty)$ – не є компактом, тому що необмежений.

Компактними топологічними просторами є $B_r(x), \overline{B_r(x)}, S^{n-1}$ з топологією, індукованою на них евклідовою топологією простору (R^n, τ) .

Теорема 5.14 Компакт є замкненим у будь-якому хаусдорфовому просторі, що його містить.

Доведення. Нехай простір X – хаусдорфовий, A – компактна підмножина в X . Тоді для $x \in A, y \notin A$ існують околи, що не перетинаються. Фіксуємо точку $y \notin A$ і розглянемо такі околи всіх точок з A , які не перетинаються з деяким окомом точки y . Тоді $\{U_x : x \in A\}$ – відкрите покриття A . З компактності A випливає, що існує скінченне підпокриття $\{U_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$.

Перетин $U(y) = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ є очевидно окомом точки y , для якого виконується включення $U(y) \subset X \setminus A$. Отже, множина $X \setminus A$ – відкрита, а тоді A – замкнена. Теорема доведена.

З цієї теореми випливає, що в класі хаусдорфових просторів компактність є внутрішньою властивістю, тобто всякий компакт залишається компактом, у який би більш широкий хаусдорфовий простір ми його не включали.

Теорема 5.15 Неперервний образ компактного простору є компактным простором.

Доведення. Нехай $(T, \tau), (T', \tau')$ – топологічні простори, причому перший є компактним топологічним простором і $f: T \rightarrow T'$ – їх неперервне відображення. Розглянемо відкрите покриття $\{V_\alpha\}$ образа T' . Оскільки відображення f неперервне, то $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha) \in \tau$. Ясно, що $T = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. За

умовою (T, τ) компактний, тому існують $U_1, \dots, U_n$ такі, що $T = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Але тоді

$$T' = \bigcup_{i=1}^n f(U_i) = \bigcup_{i=1}^n V_i, \text{ тобто довільне відкрите покриття простору } T' \text{ містить}$$

скінченне підпокриття. Отже, (T', τ') є компактним топологічним простором, що і треба було довести.

Наслідок. Компактність топологічного простору є топологічним інваріантом, тобто зберігається при гомеоморфізмах.

Приклади.

- 1) $[a, b]$ і (a, b) – не гомеоморфні.
- 2) $B_\varepsilon(x)$ і $\overline{B_\varepsilon(x)}$ – не гомеоморфні.
- 3) сфера й площина не гомеоморфні.

Теорема 5.16 Якщо T – компактний топологічний простір, то кожна його нескінченна підмножина має хоча б одну граничну точку.

Доведення. Якщо деяка множина $X \subset T$ не має ні однієї граничної точки, то будь-яка її підмножина $Y \subset X$ також не має ні однієї граничної точки, тому що в протилежному випадку гранична точка множини $Y \subset X$ була б граничною й для X .

Тоді, якщо топологічний простір T містить нескінченну множину X , яка не має ні однієї граничної точки, то в ньому можна обрати зліченну множину $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, що також не має ні однієї граничної точки. Множини $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, по-перше, замкнені, тому що не мають ні однієї граничної точки, по-друге, утворюють центровану систему. Але їх перетин $\bigcap_n X_n$ порожній, тобто простір T не компактний. Протиріччя доводить теорему.

Теорема 5.17 Будь-який компакт є нормальним простором.

Доведення. Нехай X і Y – дві замкнені підмножини компакта K , що не перетинаються. Легко переконатися в тому, що $\forall y \in Y$ існує такий окіл U_y точки y й така відкрита множина $O_y \supset X$, що $U_y \cap O_y = \emptyset$. Тим самим доведено, що компакт регулярний.

Нехай тепер y пробігає множину Y . Виберемо з покриття $\{U_y\}$ множини Y скінченне підпокриття $U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}$. Тоді відкриті множини

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cup \dots \cup O_{y_n} \text{ і } O^{(2)} = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$$

будуть задовольняти умови

$$O^{(1)} \supset X, O^{(2)} \supset Y \text{ і } O^{(1)} \cap O^{(2)} = \emptyset,$$

що означає нормальність даного топологічного простору. Теорема доведена.

Теорема 5.18 Неперервне і взаємно однозначне відображення f компактного простору X в хаусдорфовий простір Y є гомеоморфізмом.

Третя аксіома віддільності (аксіома T_3). Будь-яка точка й замкнена множина, що не містить цієї точки, мають околи, що не перетинаються.

При цьому околом множини M в топологічному просторі T називають будь-яку відкриту множину U таку, що $M \subset U$.

Теорема 5.19 В топологічному просторі T аксіома T_3 виконана тоді і тільки тоді, коли будь-який окіл U довільної точки x містить менший окіл тієї ж точки, що входить у U разом зі своїм замиканням.

На відміну від метричних просторів, у довільному топологічному просторі точка може бути не замкненою множиною. Але в просторах з аксіомою 1 віддільності точка – завжди замкнена множина. Тому аксіома T_3 цікава тільки для просторів з аксіомою T_1 . Топологічні простори, що задовольняють обом аксіомам T_1 і T_3 , називаються *регулярними*. Будь-який регулярний простір, безумовно є хаусдорфовим.

Приклад 5.9 Розглянемо відрізок $[0,1]$, у якому околи всіх точок, крім точки 0, є відкритими інтервалами, а околами нуля вважаються всілякі півінтервали $[0, \alpha)$, з яких викинуті точки виду $1/n$, $n=1,2,\dots$. Отримуємо хаусдорфів простір, у якому точка 0 й послідовність $\{1/n\}$ – замкнені множини, що не перетинаються, але вони невіддільні.

Четверта аксіома віддільності (аксіома T_4) Будь-які дві замкнені множини, що не перетинаються, мають околи, що не перетинаються.

Аксіома T_4 цікава тільки для просторів з аксіомою T_1 . Топологічний T_1 – простір, який задовольняє аксіомі T_4 , називається *нормальним*.

Теорема 5.20 Будь-який метричний простір є нормальним.

Доведення. Не викликає сумніву той факт, що в метричному просторі виконана аксіома T_1 . Нехай тепер X і Y – дві замкнені множини, що не перетинаються. Кожна точка $x \in X$ має окіл O_x , що не перетинається з Y і, отже, знаходиться від Y на деякій додатній відстані ρ_x . Аналогічно, відстань кожної точки $y \in Y$ від X є додатна величина ρ_y . Розглянемо відкриті множини

$$U = \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{\rho_x}{2}) \quad \text{і} \quad V = \bigcup_{y \in Y} B(y, \frac{\rho_y}{2}),$$

що містять X й Y відповідно, і покажемо, що їх перетин порожній. Припустимо, що $z \in U \cap V$. Тоді в X існує така точка x_0 , що $\rho(x_0, z) < \rho_{x_0}/2$,

а в Y – така точка y_0 , що $\rho(z, y_0) < \rho_{y_0}/2$. Нехай для визначеності $\rho_{x_0} \leq \rho_{y_0}$.
Тоді

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < \frac{\rho_{x_0}}{2} + \frac{\rho_{y_0}}{2} < \rho_{y_0},$$

тобто $x_0 \in B(y_0, \rho_{y_0})$, але це суперечить визначенню ρ_{y_0} . Теорема доведена.

Будь-який підпростір метричного простору сам є метричним простором і тому завжди має властивість нормальності. У топологічних просторах це не завжди так: підпростір нормального простору не обов'язково буде нормальним.

Означення. Точка $x \in T$ називається *граничною точкою* множини $M \subset T$, якщо для будь-якого околу U точки x перетин $U \cap (M \setminus \{x\})$ не порожній.

У просторах, що не задовольняють аксіомі 1 віддільності, граничні точки можуть бути навіть у множин, що складаються тільки зі скінченного числа точок. У просторах з першою аксіомою віддільності такого не може бути.

Приклад 5.10 Нехай (T, τ) – зв'язна «двоточковість», тобто $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$. Тоді точка a є граничною для множини $M = \{b\}$. Дійсно, околom точки a в цій топології є лише множина $\{a, b\}$. Тоді $\{a, b\} \cap (M \setminus \{a\}) = \{a, b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$, тобто точка a є граничною точкою множини $M = \{b\}$. Нагадаємо, що цей топологічний простір не задовольняє аксіомі 1 віддільності.

Теорема 5.21 Для того, щоб точка x була граничною для множини M в топологічному просторі T з аксіомою 1 віддільності, необхідно й достатньо, щоб будь-який окіл U цієї точки містив нескінченно багато точок з M .

Доведення. *Достатність* цієї умови очевидна. Дійсно, якщо будь-який окіл U точки x містить нескінченне число точок з M , то множина $U \cap (M \setminus \{x\})$ не порожня. *Необхідність.* Нехай x – гранична точка для M . Припустимо, що існує такий окіл, який містить тільки скінченне число точок із множини M . Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – усі ці точки, крім самої x (якщо вона належить M). Тоді $V = U \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ є околom точки x (V відкрита множина й $V \cap (M \setminus \{x\}) \neq \emptyset$), а це суперечить тому, що x – гранична точка для M . Теорема доведена.

Будь-який метричний простір обов'язково задовольняє аксіомі 1 віддільності. Тому, за Означення, граничної точки множини в метричному просторі можна прийняти властивість, зазначену у попередній теоремі.

5.7 Аксіоми зліченності та сепарабельні топологічні простори

Означення. Говорять, що топологічний простір є *топологічним простором з 1-ю аксіомою зліченності*, якщо кожна його точка має зліченну фундаментальну систему околів.

Приклади

1) Будь-який метричний простір є простором з 1-ю аксіомою зліченності. Зокрема, в топологічному просторі (R, τ) , де τ – евклідова топологія, має місце 1-а аксіома зліченності, оскільки для кожної точки x в якості ФСО x можна взяти зліченну множину $\text{ФСО}_x = \{B_r(x) : r \in Q\}$.

2) Будь-який дискретний топологічний простір (T, τ) є простором з 1-ю аксіомою зліченності, тому що $\text{ФСО } x = \{x\}$.

Означення. Топологічний простір задовольняє 2-й аксіомі зліченності, якщо він має зліченну базу.

Зауваження. Очевидно, що топологічний простір, що задовольняє 2-й аксіомі зліченності обов'язково задовольняє 1-й аксіомі зліченності. Обернене не завжди вірне.

Приклад 5.11 Дискретний топологічний простір (T, τ) при умові, що T не більше ніж зліченна множина, задовольняє 2-й аксіомі зліченності, у випадку континуальної множини T - не задовольняє.

Евклідів топологічний простір (R, τ) задовольняє 2-й аксіомі зліченності, оскільки одна з його баз має вигляд $B = \{B_{r_i}(x_i) : x_i \in Q, r_i \in Q\}$.

$B = \{B_{r_i}(x) \mid x_i \in Q, r_i \in Q\}$ – база.

Теорема 5.22 (Линделефа) Якщо топологічний простір задовольняє 2-й аксіомі зліченності, то довільне його відкрите покриття містить злічене підпокриття.

Означення. Множина A в топологічному просторі (T, τ) називається *всюди щільною*, якщо $\bar{A} = T$.

Приклади:

1) множини Q всіх раціональних чисел та I всіх ірраціональних чисел в (R, τ) , де τ – евклідова топологія, всюди щільні, оскільки $\bar{Q} = R, \bar{I} = R$.

2) кожна множина A всюди щільна у своєму замиканні $\bar{A}$.

Означення. Топологічний простір називається *сепарабельним*, якщо в ньому існує злічена всюди щільна множина.

Приклад. Евклідів топологічний простір (R, τ) є сепарабельним, оскільки в ньому множина N натуральних чисел є всюди щільною.

Теорема 5.23 Усякий топологічний простір з 2-ю аксіомою зліченності є сепарабельним.

Доведення. Нехай (T, τ) – топологічний простір, який задовольняє 2-й аксіомі зліченності, і $B = \{B_\alpha : \alpha \in N\}$ – зліченна база топології τ . Тоді за аксіомою Цермело можна утворити множину $A = \{x_1, x_2, \dots \mid x_i \in B_i, B_i \in B\}$.

Оскільки $(\forall x \in T)(\forall U_x): U_x = \bigcup_{B_\alpha \in B} B_\alpha$, то будь-який окіл U_x точки x має

непустий перетин з множиною A , звідки випливає, що будь-яка точка x є точка дотику до множини A . Отже, $\overline{A} = T$ і простір є сепарабельним. Зауважимо, що обернене твердження не завжди вірне.

5.8 Конструювання топологічних просторів

Незв'язне об'єднання

Нехай (X, τ_1) і (Y, τ_2) – топологічні простори і $X \cap Y = \emptyset$. Незв'язним об'єднанням або топологічною сумою $X \amalg Y$ просторів X і Y називається їх об'єднання $X \cup Y$ з топологією τ , яка задається так: $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X \in \tau_1$ і $U \cap Y \in \tau_2$. Якщо $X \neq \emptyset$ і $Y \neq \emptyset$, то пара $\{X, Y\}$ є розбиттям $X \amalg Y$. Незв'язне об'єднання $\amalg X_i$ довільного числа топологічних просторів (X_i, τ_i) , що не перетинаються, визначається аналогічно: $\amalg X_i = (\cup X_i, \tau)$, $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X_i \in \tau_i$.

Добуток топологічних просторів

Нехай (X, τ) та (Y, σ) – два топологічних простори. Сукупність множин виду $\{\tau_i, \sigma_j\}$, де $\tau_i \in \tau$, $\sigma_j \in \sigma$, утворює базу топології на декартовому добутку $X \times Y$. Цю топологію називають топологією добутку.

Означення. Топологічним добутком топологічних просторів (X, τ) та (Y, σ) називається множина $X \times Y$ з топологією добутку на ній. Самі простори X та Y називаються координатними, а відображення $p_1: X \times Y \rightarrow X$ та $p_2: X \times Y \rightarrow Y$, при яких $p_1(x, y) = x$ та $p_2(x, y) = y$, називаються проєктуваннями по координатні простори.

Можна довести, що відображення проєктування неперервні та відкриті.

Теорема. Топологічний добуток зв'язних просторів є зв'язним простором.

Приклади.

1) Тор можна розглядати як топологічний добуток $S^1 \times S^1$ двох кіл. Коло є зв'язною множиною, отже тор теж зв'язний.

2) На декартовому добутку $R^2 = R \times R$ топологія складається з відкритих прямокутників та всіляких їх об'єднань. Вона співпадає з природною топологією на площині, оскільки прямокутники та кола гомеоморфні.

3) Циліндр можна розглядати як декартовий добуток $S^1 \times R$ кола на пряму, а топологія цього добутку співпадає з топологією, що індукована на циліндрі природною топологією простору R^3 .

Теорема 5.24 (Тихонова). Топологічний добуток довільного числа компактних просторів є компактным простором.

Властивості:

топологічний добуток хаусдорфових просторів є хаусдорфовим простором;

топологічний добуток зв'язних просторів є зв'язним простором;

топологічний добуток сепарабельних просторів є сепарабельним простором;

топологічний добуток регулярних просторів є регулярним простором;

але топологічний добуток нормальних просторів не завжди є нормальним простором.

Фактор-топологія

Нехай (X, τ) - топологічний простір, Y - довільна множина і f - деяке відображення з X на Y . Треба на Y задати топологію так, щоб відображення f було неперервним.

Лема. Нехай (X, τ) - топологічний простір, Y - довільна множина і f - деяке відображення з X на Y . Сім'я σ підмножин множини Y , прообрази яких належать до τ , утворює топологію на Y .

Доведення. Перевіримо виконання аксіом топологічного простору. Очевидно, що $\emptyset \in \sigma$, оскільки $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. Так само $Y \in \sigma$, оскільки $f^{-1}(Y) = X \in \tau$. Отже, перша аксіома виконується. Нехай тепер $U_\alpha \in \sigma$, тобто $f^{-1}(U_\alpha) \in \tau$. Тоді $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha) \in \tau$, а значить $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \sigma$. Аналогічно, з $f^{-1}\left(\bigcap_\alpha^n U_\alpha\right) = \bigcap_\alpha^n f^{-1}(U_\alpha) \in \tau$ випливає $\bigcap_\alpha^n U_\alpha \in \sigma$. Отже, друга і третя аксіоми теж виконуються. Значить σ є топологією на Y .

Означення. Нехай (X, τ) - топологічний простір, Y - довільна множина і f - деяке відображення з X на Y . Сім'я підмножин множини Y , прообрази яких належать топології τ , називається фактор-топологією, породженою відображенням f .

Приклад 5.12 Нехай (S^1, τ) - топологічний простір, топологія τ є індукованою. У якості Y оберемо границю квадрата, центр якого співпадає з центром кола. Розглянемо центральне проектування f з центру кола. Фактор-топологія на квадраті, породжена відображенням f , складається з множин, прообразами яких є дуги на колі та всілякі їх об'єднання.

Приклад 5.13 Розглянемо відображення $h: R^4 \rightarrow R_{2 \times 2}$, при якому $h((a, b, c, d)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Множина $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : d > 0 \right\}$ є прикладом відкритої в $R_{2 \times 2}$ множини. Дійсно, її прообраз $h^{-1}(U) = \{(a, b, c, d) : d > 0\}$ є відкритим тривимірним підпростором у топологічному просторі R^4 . Сукупність таких

відкритих множин є фактор-топологією на $R_{2 \times 2}$, породженою відображенням h .

Задамо на множині X відношення еквівалентності ρ і побудуємо фактор-множину X/ρ .

Означення. Відображення $g: X \rightarrow X/\rho$, при якому кожному елементу з X ставиться у відповідність клас еквівалентності з X/ρ , якому цей елемент належить, називається фактор-відображенням або відображенням ототожнювання або канонічним відображенням.

Означення. Нехай (X, τ) - топологічний простір, ρ - відношення еквівалентності на X , $g: X \rightarrow X/\rho$ - фактор-відображення. Фактор-простором простору X по відношенню еквівалентності ρ називається фактор-множина X/ρ , наділена фактор-топологією, породженою відображенням g .

Теорема Фактор-простір зв'язного топологічного простору є зв'язним топологічним простором.

Приклад 5.14 Розглянемо на множині $X = [0, 2\pi]$ топологію, індуковану природною топологією на R . Відображення $f: X \rightarrow Y$, де $Y = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ - множина точок одиничного кола, можна задати функціями $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Природна топологія σ на Y є такою, що відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне, і таким чином σ є фактор-топологією на Y , породженою відображенням f .

Далі, визначимо на X відношення еквівалентності наступним чином: для будь-яких $t \in (0, 2\pi)$ вважатимемо $t \sim t$, і $0 \sim 2\pi$. Отже, фактор-множина $X/\sim$ складається з одного двоелементного класу еквівалентності, і всі інші класи одноелементні. Отримали фактор-простір простору X по відображенню f , який очевидно гомеоморфний простору Y , наділеному фактор-топологією.

Приклад 5.15 Прямокутник $X = \{(x, y) \in R^2 : x \in [-1, 1], y \in [0, 1]\}$ розглядаємо разом з топологією, індукованою на ньому природною топологією простору R^2 . Задамо на X відношення еквівалентності:

$$\begin{cases} (1, y) \sim (-1, y), & \text{для } y \in (-1, 1), \\ (x, y) \sim (x, y), & \text{для } y \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Отриманий фактор-простір, гомеоморфний листу Мьобіуса.

Склеювання просторів по неперервному відображенню

Нехай (X, τ_1) і (Y, τ_2) - топологічні простори і $X \cap Y = \emptyset$. Розглянемо неперервне відображення $f: A \rightarrow B$, де $A \subset X$, $B \subset Y$. На множині $X \cup Y$ введемо відношення еквівалентності $\sim$ наступним чином: якщо $u \in B$, $u \sim f^{-1}(u)$; якщо точка не приймає участь у відображенні, то вона еквівалентна сама собі. Про фактор-простір $(X \cup Y)/\sim$ говорять, що він отриманий

приклеюванням топологічного простору X до топологічного простору Y по неперервному відображенню f . Позначають $X \bigcup_f Y$.

Приклад 5.16 Зауважимо, що всі топології, що будуть розглядатись, індуковані природною топологією охопного простору.

1) (X, τ_1) та (Y, τ_2) - два кола, які можна вважати рівними, $A \subset X$, $B \subset Y$ - кола, що є границями цих кіл, $f : A \rightarrow B$ - неперервне відображення, яке можна розглядати, наприклад, як ортогональне проектування одного кола на інше. Будь-яка внутрішня точка кожного з кіл не приймає участі у відображенні, тому еквівалентна сама собі; пари відповідних щодо відображення f точок граничних кіл еквівалентні. Простір $X \bigcup_f Y$ є двовимірною сферою, він отриманий приклеюванням одного кола до іншого за допомогою неперервного відображення граничних кіл цих кіл.

2) Нехай (X, τ_1) - сфера, з якої вирізано два кола (сфера з двома дірками), A - об'єднання границь цих кіл, (Y, τ_2) - циліндр, границя B якого є об'єднанням двох кіл (ручка), $f : A \rightarrow B$ - неперервне відображення. Результатом склеювання цих просторів по відображенню f є топологічний простір, який називають сферою з однією ручкою або тором.

Питання для самоконтролю

1. Яке з понять «неперервне відображення топологічних просторів» і «гомеоморфне відображення топологічних просторів» більш загальне? Обґрунтуйте наведенням прикладів.
2. Довести, що двовимірна сфера, лист Мьобіуса, пляшка Клейна є зв'язними.
3. Чи може незв'язна множина мати зв'язне замикання?
4. Навести приклад незв'язного підпростору зв'язного топологічного простору.
5. Як називаються елементи фактор-множини множини всіх топологічних просторів по відношенню гомеоморфності?
6. Пояснити, чому сукупність двох інтервалів не гомеоморфна всій прямій, а один інтервал і пряма гомеоморфні.
7. Назвіть п'ять топологічних інваріантів.
8. Чи є пучок прямих лінійно зв'язним простором і в якій топології?
9. Навести приклади компактних і не компактних підмножин евклідового топологічного простору R^3 .
10. Які аксіоми віддільності виконуються у топології Зариського на прямій?
11. Як пов'язані між собою поняття зв'язності та лінійної зв'язності?
12. Як пов'язані між собою різні аксіоми віддільності?

13. Які дискретні топологічні простори задовольняють першу аксіому зліченності? А які задовольняють другу?
14. Чи можуть у топологічному просторі дві різні підмножини бути всюди щільними? Навести приклад.
15. Описати відношення еквівалентності на множині X точок квадрата так, щоб фактор-множина була циліндром, пляшкою Клейна, тором [2].

Тема 6. Топологічні многовиди

6.1 Топологічні многовиди. Двовимірні топологічні многовиди (поверхні)

Означення. Нехай (X, τ) – топологічний простір. В цьому просторі k -мірною координатною системою називається гомеоморфізм φ деякої відкритої множини $U \subset X$ на відкриту множину арифметичного простору R^k . При цьому пару (U, φ) називають k -мірною картою, а множину U – координатним оком цієї карти. Якщо $x \in U$, то $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^k) \in R^k$. Дійсні числа x^i називаються координатами точки x в даній карті або *локальними координатами точки x* . Хаусдорфів топологічний простір (X, τ) зі зліченною базою називають k -мірним топологічним *многовидом* (або просто k -мірним *многовидом*), якщо цей простір можна покрити координатними околами k -мірних карт [1].

Найпростішим **прикладом** k -мірного топологічного многовиду є арифметичний простір R^k . Дійсно, розглянемо пару (R^k, id) , де id – тотожне відображення простору R^k . Оскільки тотожне відображення є гомеоморфізмом, то ця пара є k -мірною картою.

Число k (розмірність многовиду) є топологічним інваріантом, тобто не змінюється при будь-яких гомеоморфізмах.

В геометрії часто зустрічаються так звані многовиди з краєм. Позначимо через R_+^k множину тих точок з R^k , у яких координата x^k задовольняє умові $x^k \geq 0$. Звідси, R_+^k – це замкнений півпростір в R^k .

Означення. Многовид називається k -мірним *многовидом з краєм*, якщо він хаусдорфів, має зчислену базу та його точки можна розбити на два непустих класи так, що кожна з точок одного класу (внутрішні точки) має окіл, гомеоморфний простору R^k , а кожна з точок другого класу (краєві точки) має окіл, гомеоморфний R_+^k , і не має околу, гомеоморфного R^k . Множина усіх крайових точок називається *краєм многовида*.

Означення. Компактний многовид без края (з пустим краєм) називається замкнутим.

В частинному випадку, коли $k=2$, маємо *двовимірний многовид*, який ще називають *поверхнею*. Прикладами поверхонь є сфера, циліндр, параболоїд, тор та ін.

Приклади 6.1 1) Замкнутою поверхнею є сфера. 2) Диск є компактною поверхнею з краєм.

3) Розглянемо прямокутник $ABCD$ відносно декартової системи координат. Кожну точку $M(a, y)$ сторони BC ототожнюємо з точкою $M'(-a, -y)$ сторони DA , яка симетрична точці M відносно точки O (рис. 6.1).

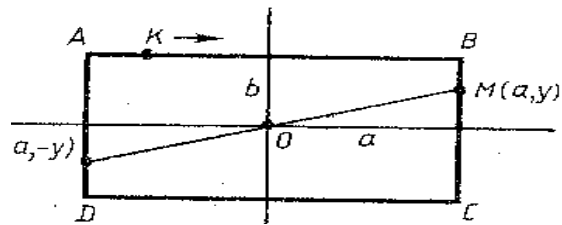


Рисунок 6.1 – Модель листа Мьобіуса

На отриманій фігурі Φ евклідова топологія в R^3 індукує деяку топологію τ . Простір (Φ, τ) є листом Мьобіуса і являє собою двовимірний многовид із краєм. Щоб визначити будову краю листа Мьобіуса, прослідкуємо за рухом точки K , яка описує край листа Мьобіуса. Виходячи з точки A , описавши відрізок AB , точка K з'явиться у точці D (тому що точки B та D ототожнені). Далі описуючи відрізок DC , точка K знову з'явиться у точці A (тому що точки C та A ототожнені). Ми приходимо до висновку, що край листа Мьобіуса являє собою одновимірний компактний многовид, який гомеоморфний колу (рис. 6.2). Кажуть, що лист Мьобіуса отриманий внаслідок склеювання прямокутника $ABCD$ по напрямленим відрізкам $\overline{BC}$ та $\overline{DA}$.

4) Розглянемо сферу, з якої видалено диск, а отже і те, що залишилось, гомеоморфне диску. Приклеїмо до краю цього диску край листа Мьобіуса. Отримана поверхня є компактною поверхнею без краю. За означенням вона є замкнутою поверхнею, її називають проективною площиною [9].

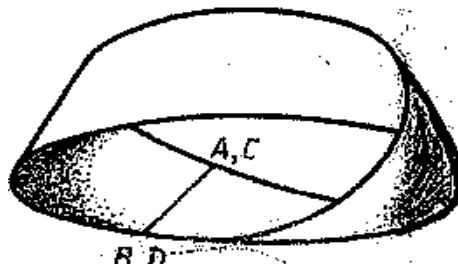


Рисунок 6.2 – Лист Мьобіуса

6.2 Клітинне розбиття поверхні. Ейлерова характеристика

Назвемо клітиною будь-який многовид з краєм, гомеоморфний опуклому многокутнику. При цьому вважається, що для даної клітини цей гомеоморфізм є фіксованим. Образ вершини многокутника при цьому гомеоморфізмі називається вершиною клітини, образ сторони многокутника – стороною клітини [1].

Вважається, що двовимірний многовид F розкладений на скінченну кількість клітин $F_1, F_2, \dots, F_n$, якщо виконується дві умови:

- а) ці клітини утворюють покриття многовида F ;
- б) перетин будь-яких двох клітин F_i та F_j ($i \neq j$) або пустий, або є вершиною цих клітин, або стороною кожної із них.

Означення. Нехай K - клітинне розбиття двовимірного многовиду F (компактного або компактного з краєм). Точка $x \in F$ називається вершиною клітинного розбиття K , якщо x - вершина хоча б однієї з клітин K . Фігура $\gamma \subset F$ називається стороною розбиття K і вона є стороною хоча б однієї з клітин K . Введемо позначення: α_0 - кількість вершин, α_1 - кількість сторін, α_2 - кількість клітин розбиття K . Число $\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ називається *ейлеровою характеристикою многовида F* .

Можна довести, що ейлерова характеристика многовида не залежить від вибору його клітинного розбиття.

Означення. Нехай Φ - двовимірний компактний многовид (або двовимірний компактний многовид з краєм) та K - деяке клітинне розбиття цього многовида. Розглянемо будь-яку клітину $ABCD$ (рис. 6.3). Назвемо *сторону* клітини *орієнтованою*, якщо ми візьмемо до уваги той порядок, в якому вказані її кінці: перший з вказаних кінців – початок, а другий – кінець орієнтованої сторони. При цьому кажуть, що сторони AB та BA орієнтовані протилежно.

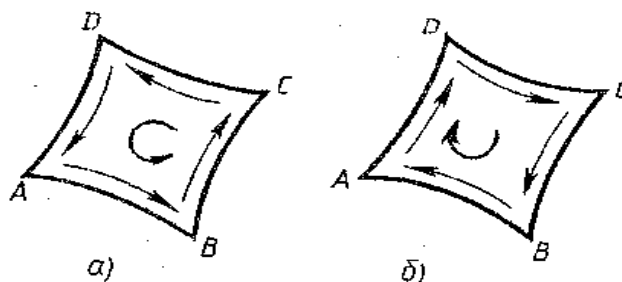


Рисунок 6.3 – Орієнтація клітин

Якщо одна зі сторін клітини $ABCD$, наприклад сторона AB , орієнтована, тоді можна ввести домовлену орієнтацію усієї границі клітини, як показано стрілками на рисунку 6.3 (тобто кінець B сторони AB будемо вважати початком сторони BC , а т очку C - кінцем; сторона BC виявляється орієнтованою і так далі).

Кажуть, що клітина орієнтована, якщо орієнтована її границя описаним тут способом. Кожну клітину можна орієнтувати двома способами (другий спосіб отримаємо, рухаючись не від сторони AB , а від сторони BC , рис. 6.3,б). Розглянемо клітинне розбиття K многовида Φ . Візьмемо дві клітини Φ_1, Φ_2 зі спільною стороною та кожну з них орієнтуємо будь-яким з двох можливих способів (рис. 6.4). Якщо при цьому виявиться, що цих орієнтаціях клітин Φ_1, Φ_2 їх спільна сторона отримала протилежні орієнтації, тоді будемо говорити, що клітини Φ_1, Φ_2 однаково орієнтовані. Якщо спільна сторона отримала одну і ту саму орієнтацію, тоді будемо говорити, що ці клітини протилежно орієнтовані. На рис. 6.4 клітини Φ_1, Φ_2 однаково орієнтовані.

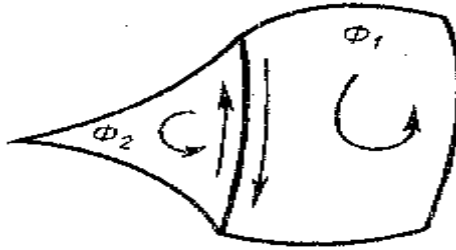


Рисунок 6.4 – Однаково орієнтовані клітини

Означення. Якщо в деякому клітинному розбитті K многовиду Φ клітини можна орієнтувати так, що кожні дві клітини, маючи спільну сторону, будуть однаково орієнтовані, тоді многовид Φ називається *орієнтовним*. Якщо такого клітинного розбиття не існує, тоді многовид Φ називається *неорієнтовним*.

Поняття орієнтовності многовиду не залежить від вибору його клітинного розбиття. Таким чином, при перевірці многовиду на орієнтованість можна використовувати будь-яке клітинне розбиття. Покажемо, що орієнтовність многовиду є його топологічним інваріантом.

Нехай Φ - орієнтований многовид, Φ' - гомеоморфний йому многовид: $\Phi' = f(\Phi)$, де f - гомеоморфізм. На многовиді Φ існує клітинне розбиття K , клітини якого можна так орієнтувати, як це вказано в визначенні орієнтованого многовиду. Гомеоморфізм f переводить клітинне розбиття многовиду Φ в певне клітинне розбиття K' многовиду Φ' . При цьому орієнтація кожної клітини з K переходить на відповідну клітину з K' . Звідси, кожні дві клітини з K' , маючи спільну сторону, будуть однаково орієнтовані (тому що такими властивостями володіють клітини – їх прообрази з K). А це означає, що многовид Φ' орієнтовний.

Таким чином, властивість многовиду бути орієнтовним (або неорієнтовним) зберігається при гомеоморфізмах.

Лист М'юбіуса є неорієнтовним компактним многовидом з краєм. Дійсно, візьмемо розбиття листа М'юбіуса на дві клітини $AEFD$ та $EBCF$, де E - точка відрізка AB та F - точка відрізка CD . Орієнтуючи ці клітини згідно вказаному вище правилу (починаючи з відрізка EF), помітимо, що їх спільна сторона $BC = DA$ отримала одну й ту саму орієнтацію.

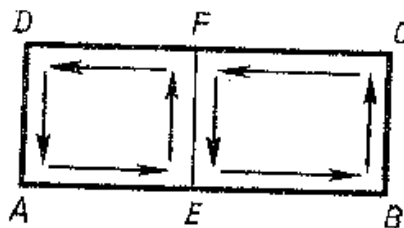


Рисунок 6.5 – Неорієнтовний многовид

Можна показати, що орієнтовні двовимірні многовиди є двосторонніми, а неорієнтовні – односторонніми. Якщо взяти орієнтовний двовимірний многовид, наприклад сферу, циліндр, та намагатись розфарбувати цей многовид,

не переходячи через його край (якщо він є), то зафарбованою виявиться лише одна сторона многовиду (наприклад, зовнішня сторона сфери), а інша сторона виявиться не зафарбованою. Якщо подібний процес провести з неорієнтовним двовимірним многовидом (наприклад, з листом Мьобіуса), то виявиться зафарбованим весь многовид. Отже, у цього многовида одна сторона.

Розглянемо прямокутник $ABCD$, зображений на рис. 6.6, а). Нехай E – середина відрізка AD , F – середина відрізка BC . При склеюванні цього прямокутника за напрямленими відрізками $\overline{BC}$ та $\overline{AD}$ ми отримаємо циліндр (ручку) (рис. 6.6, б). При цьому точки E та F виявляються ототожненими, а відрізок EF перейде в одновимірний многовид γ_0 , гомеоморфний колу. Якщо ручку розрізати по цьому многовиду γ_0 , то ручка розпадеться на дві окремі ручки.

У випадку ж листа Мьобіуса, отриманого з прямокутника $ABCD$ склеюванням по напрямленим відрізкам $\overline{BC}$ та $\overline{DA}$, точки E та F будуть знову ототожненими та відрізок EF перейде в одновимірний многовид, гомеоморфний колу (середню лінію листа Мьобіуса). Але якщо лист Мьобіуса розрізати по середній лінії, то він залишається зв'язним двовимірним многовидом.

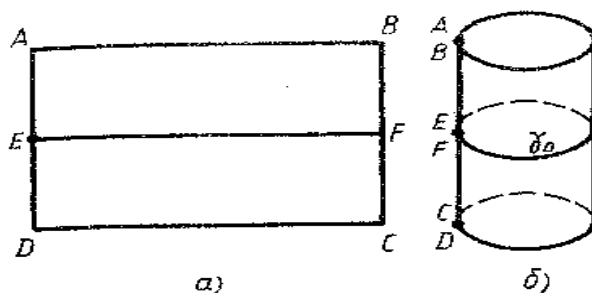


Рисунок 6.6 – Модель циліндра

6.3 Класифікаційні теореми

Нехай S – сфера з центром в точці O радіусу r в евклідовому топологічному просторі R^3 та π – площина, віддалена від точки O на відстань h , де $0 < h < r$. Позначимо через F множину усіх тих точок сфери, кожна з яких і точка O лежать по різні сторони від площини π . Фігура $Q_1 = S \setminus F$ є многовидом з краєм; він гомеоморфний замкненому колу. Але замкнений круг гомеоморфний трикутнику, тому ейлерова характеристика цих трьох многовидів – одна й та сама, вона дорівнює одиниці. Многовид Q_1 називається сферою з однією діркою. Для нього $\chi(Q_1) = 1$.

Так само можна отримати многовид Q_r – сферу з r дірками. Ми будемо ці дірки вирізати так, щоб ніякі два кола, що утворюють край многовиду, не мали спільних точок.

Многовид Q_2 (сфера з двома дірками) гомеоморфний замкненому кругові з однією діркою (рис. 6.7). На цьому ж рисунку зображено розбиття, в якому $\alpha_0 = 6, \alpha_1 = 9, \alpha_2 = 3$. Отже, ейлерова характеристика многовиду дорівнює $\chi(Q_2) = 6 - 9 + 3 = 0$.

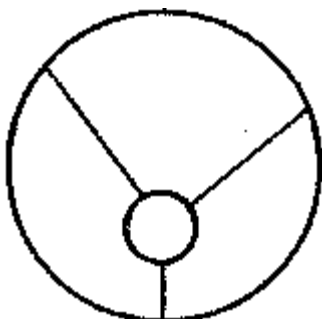


Рисунок 6.7 – Клітинне розбиття сфери з двома дірками

Маємо гіпотезу, що кожна дірка зменшує ейлерову характеристику на одиницю. Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести, що для сфери Q_r з r дірками справедлива формула

$$\chi(Q_r) = 2 - r. \quad (6.1)$$

Край сфери Q_2 з двома дірками складається з двох кіл γ'_1, γ'_2 . Ручка (рис. 6.8) також є многовидом з краєм, який складається з двох одновірних многовидів γ_1, γ_2 , кожен з яких гомеоморфний колу.

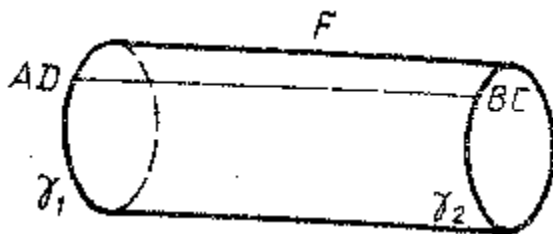


Рисунок 6.8 – Клітинне розбиття ручки

Отже, існують гомеоморфізми $f_1: \gamma_1 \rightarrow \gamma'_1, f_2: \gamma_2 \rightarrow \gamma'_2$, за допомогою яких ототожнюються γ_1 з γ'_1 та γ_2 з γ'_2 (говорять, що відбувається приклеювання ручки до сфери Q_2). Отриманий многовид називається сферою з однією ручкою (рис. 6.9). Він гомеоморфний тору (тором називається поверхня, отримана обертанням деякого кола γ навколо прямої a , що лежить з цим колом в одній площині, але не перетинає його) (рис. 6.10).

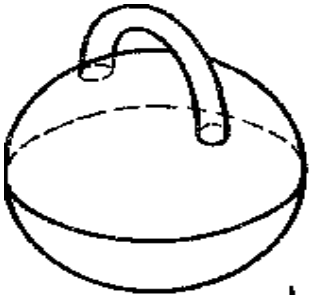


Рисунок 6.9 – Сфера з ручкою



Рисунок 6.10 – Тор

Візьмемо тепер многовид Q_{2p+r} – сферу з $2p+r$ дірками і p пар цих дірок заклеїмо ручками, а r дірок залишимо. Отримаємо многовид $Q_{p,r}$, який називається сферою з p ручками та r дірками. Тут p та r – цілі не від’ємні числа. Справедлива наступна теорема, яку ми наведемо без доведення [1]

Теорема 6.1 Будь-який орієнтовний компактний двовимірний многовид гомеоморфний деякому многовиду $Q_{p,o}$; будь-який орієнтовний компактний двовимірний многовид з краєм гомеоморфний деякому многовиду $Q_{p,r}$. Число p називається родом даного многовиду, а число r – числом його контурів.

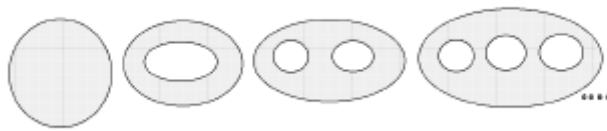


Рисунок 6.11 – Класифікаційний ряд многовидів $Q_{p,o}$

Справедлива формула

$$\chi(Q_{p,r}) = 2 - 2p - r, \quad (6.2)$$

яка є узагальненням формули (6.1). З формули (6.2) випливає, що ейлерова характеристика тору дорівнює нулю, тобто $\chi(Q_{1,0}) = 0$.

Має місце наступний критерій гомеоморфності двох орієнтованих компактних многовидів:

Теорема 6.2 Два орієнтовних компактних многовида гомеоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають один і той же рід (або одну й ту ж саму ейлерову характеристику). Два орієнтовних компактних многовиди з краєм гомеоморфні тоді й тільки тоді, коли вони мають один і той же рід та одне й те саме число контурів.

Кажуть, що сфера з p ручками представляє собою нормальну форму двовимірного орієнтовного компактного многовиду роду p , а сфера з p ручками та r дірками є нормальною формою двовимірного орієнтовного компактного многовида роду p , край якого складається з r контурів.

Розглянемо неорієнтовні компактні многовиди. Ми знаємо, що край листа Мьобіуса гомеоморфний колу. Тому можна взяти сферу Q_{p+1} з $p+1$ дірками та усі дірки заклеїти листами Мьобіуса. Ми отримаємо компактний неорієнтовний

многовид ψ_p . Можна підрахувати, що $\chi(\psi_p) = \chi(Q_{p+1})$. За формулою (6.1) отримуємо

$$\chi(\psi_p) = 1 - p. \quad (6.3)$$

Многовид ψ_0 є проєктивною площиною, яку ми вже розглядали, вона отримується зі сфери з однією діркою, що заклеєна листом Мьобіуса. За формулою (6.3) отримаємо $\chi(\psi_0) = 1$.

Теорема 6.3 Будь-який компактний неорієнтовний двовимірний многовид гомеоморфний деякому многовиду ψ_p . Число p називається родом даного многовида.

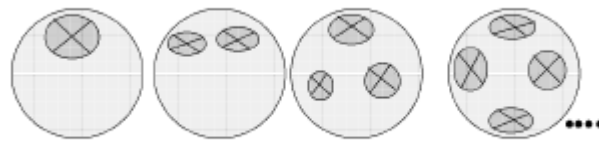


Рисунок 6.12 – Класифікаційний ряд многовидів ψ_p

Теорема 6.4 Два компактних неорієнтовних двовимірних многовида гомеоморфні тоді та тільки тоді, коли вони мають один і той же рід (одну й ту ж саму ейлерову характеристику).

Питання для самоконтролю

1. Які з наступних поверхонь є многовидами з краєм: ручка; тор; сфера; півплощина; лист Мьобіуса; сфера з діркою; сфера з діркою, заклеєною листом Мьобіуса; сфера з ручкою?
2. Чому дорівнює ейлерова характеристика сфери, сфери з діркою, сфери з трьома дірками?
3. Навести приклад орієнтовної та неорієнтовної поверхонь. Відповідь обґрунтувати.
4. Що називається родом поверхні?
5. Навести приклад поверхні роду 1, роду 2.
6. Навести приклад поверхні роду 1, що має 3 контури.
7. Серед наступних поверхонь знайдіть пари гомеоморфних: ручка; тор; сфера; півплощина; лист Мьобіуса; сфера з діркою; сфера з діркою, заклеєною листом Мьобіуса; сфера з ручкою.

РОЗДІЛ III ГЛАДКІ МНОГОВИДИ

Тема 7. Означення та способи задання гладких многовидів. Приклади побудови гладкої структури

7.1 Означення та приклади топологічних многовидів

Означення. Зв'язний хаусдорфів топологічний простір називається n -вимірним топологічним многовидом M_n , якщо для будь-якої його точки P існує окіл, гомеоморфний відкритій множині евклідового простору R^n , причому сукупність таких околів не більша за зліченну.

Означення. Нехай задано n -вимірний топологічний многовид M_n . Пара (U, f) , де U – відкрита множина, а f – гомеоморфізм із U в $V \subset R^n$, називається *локальною картою* цього многовиду (або *координатним околom* многовиду). Якщо пари $(U_i, f_i), i \in I$ є картами на M_n і $\bigcup_{i \in I} U_i = M_n$, то сукупність $A = \{(U_i, f_i)\}$ таких карт називається *атласом* многовиду.

Очевидно, на многовиді може існувати не лише один атлас.

Означення. Нехай задано точку P на n -вимірному многовиді M_n , її окіл U і гомеоморфізм $f: U \rightarrow V$, де $V \subset R^n$. Якщо в R^n зафіксована декартова система координат, відносно якої точка $f(P)$ має координати $(x^1, \dots, x^n)$, то ці числа називаються *локальними координатами точки P* многовиду, а гомеоморфізм f називається *координатним гомеоморфізмом*.

Зауваження. Точка P може належати різним картам і тому вона може мати декілька наборів локальних координат.

Приклад 7.1 Розглянемо на R^n природну топологію τ . Очевидно, пара (R^n, τ) є зв'язним хаусдорфовим топологічним простором. Для будь-якої точки P простору R^n візьмемо окіл $U = R^n$ і розглянемо тотожне відображення $e: R^n \rightarrow R^n$. Очевидно, e – гомеоморфізм. Тоді (R^n, e) – карта на R^n . Оскільки $U = R^n$, то ця карта утворює атлас. Ми показали, що R^n є n -вимірним топологічним многовидом.

Приклад 7.2 Розглянемо в E_3 криву як гомеоморфне відображення $\gamma: (a, b) \rightarrow L \subset E_3$. На множині L виникає топологія, яка є індукованою на цій множині природною топологією простору E_3 . Тоді пара (L, γ^{-1}) є картою на L і множина L перетворюється в одновимірний топологічний многовид.

Аналогічно доводиться, що поверхня в E_3 як гомеоморфне відображення $f: G \rightarrow E_3$, де G – область в R^2 , є двовимірним топологічним многовидом, атлас якого складається з однієї карти.

Приклад 7.3 Розглянемо на евклідовій площині E_2 одиничне коло, тобто множину $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ точок площини. Природна топологія площини E_2 індукує на S^1 хаусдорфову топологію, в якій множини $U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$, $U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}$, $U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}$ є відкритими. Розглянемо точку на півколі U_1 . Для неї $y = \sqrt{1 - x^2}$, тому вона однозначно визначається значенням координати x . Таким чином, координату x можна вважати координатою точки кола, але лише локальною, тому що вона визначає точки лише у відкритій підмножині U_1 кола. Далі розглянемо ортогональне проектування h_1 півкола U_1 на відкриту множину $(-1, 1)$. Воно переводить точку (x, y) кола в точку $(x, 0)$ осі абсцис. Очевидно, h_1 є гомеоморфізмом. Тому, в якості локальної координати точки кола ми фактично використовуємо координату її образа при цьому гомеоморфізмі. Все коло можна покрити півколами U_1, U_2, U_3, U_4 . За допомогою ортогональних проектувань h_1, h_2 на вісь абсцис множини U_1, U_2 відображаються на відкриту множину $(-1, 1)$ простору $\mathbb{R}^1$. Оскільки h_1, h_2 є гомеоморфізмами, то пари $(U_1, h_1), (U_2, h_2)$ є картами на S^1 . Аналогічно, пари $(U_3, h_3), (U_4, h_4)$ є картами на S^1 тому, що ортогональні проектування h_3, h_4 на вісь ординат є гомеоморфізмами множин U_3, U_4 на $(-1, 1)$. Так як $S^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$, то $A = \{(U_i, h_i)\}, i = \overline{1, 4}$ – атлас на S^1 . Таким чином, коло є одновимірним топологічним многовидом.

Розглянемо точку $Q \in S^1$ таку, що промінь OQ утворює з додатним напрямом вісі абсцис кут $\frac{\pi}{6}$, тобто її декартові координати $-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ця точка належить двом картам: (U_1, h_1) і (U_3, h_3) . В карті (U_1, h_1) локальна координата точки Q дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, в карті (U_3, h_3) локальна координата точки Q дорівнює $\frac{1}{2}$.

Означення. Топологічний многовид називається *елементарним*, якщо на ньому існує атлас, який складається з однієї карти, в протилежному випадку топологічний многовид називається *неелементарним*.

Орієнтовні та неорієнтовні многовиди

Нехай дано n -вимірний топологічний многовид M_n і на ньому дві карти: (U, h) з локальними координатами $x^1, \dots, x^n$ і (V, g) з локальними координатами $y^1, \dots, y^n$. Якщо $U \cap V \neq \emptyset$, то розглянемо відображення $g \circ h^{-1}: h(U \cap V) \rightarrow g(U \cap V)$ (рис. 7.1).

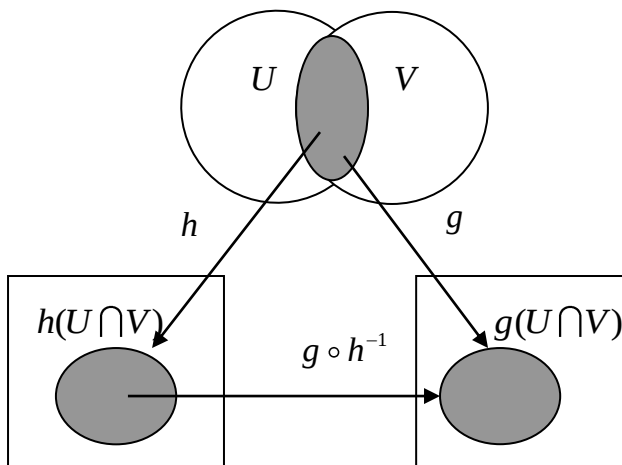


Рисунок 7.1 – Відображення переходу

Оскільки h і g – гомеоморфізми, то $g \circ h^{-1}$ теж є гомеоморфізмом, який відображає одну область евклідового простору R^n на іншу, тому може бути записаний за допомогою системи функцій

[illegible]

Функції (7.1) називаються *функціями переходу*. Інакше кажуть, що за допомогою функцій (7.1) відбувається *перетворення локальних координат*. Відображення $q \circ h^{-1}$ називаються *відображеннями переходу*.

Приклад 7.4 Розглянемо одиничне коло, на якому в прикладі 7.3 ми побудували структуру одновимірного топологічного многовиду. Знайдемо функції переходу для карт $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ з атласу. Перетином цих карт є множина $U \cap V = \{(x, y) \in S^1 : x > 0 \wedge y > 0\}$. Нагадаємо, що відображення h_1 парі (x, y) ставить у відповідність першу компоненту x , а відображення h_3 парі

(x, y) ставить у відповідність другу компоненту y . Обернене відображення h_1^{-1} числу x ставить у відповідність пару $(x, \sqrt{1-x^2})$. Нарешті, в результаті композиції $h_3 \circ h_1^{-1}$, яку слід розглядати лише на множині $h_1(U \cap V) = (0, 1)$, кожному x з цієї множини відповідає $\sqrt{1-x^2}$. Отже, маємо функцію переходу $y(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Означення. Нехай дано топологічний многовид M_n і дві карти (U, h) і (V, g) на ньому. Гомеоморфізм $g \circ h^{-1}$ називається C^k -гладким, якщо функції (3.1), які його задають, є C^k -гладкими в області $h(U \cap V)$. Карти (U, h) та (V, g) на многовиді M_n називаються узгодженими, якщо гомеоморфізми $g \circ h^{-1}$ та $h \circ g^{-1}$ є C^k -гладкими.

Зауважимо, що при перевірці узгодженості карт достатньо перевірити виконання гладкості одного з вказаних відображень і умови $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ для нього.

Приклад 7.5. Розглянемо атлас на одиничному колі, побудований в прикладі 7.3. Карти $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ на одиничному колі є узгодженими. Дійсно, в прикладі 7.4 ми знайшли функцію $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ переходу в області $h_1(U \cap V) = (0, 1)$, яка задає гомеоморфізм $h_3 \circ h_1^{-1}$. Легко переконатись, що ця функція є C^∞ -гладкою, причому в кожній точці області $\det\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$. Отже, карти узгоджені. Аналогічно доводиться, що будь-які дві карти на колі, перетин яких непорожній, є узгодженими.

Означення. Говорять, що топологічний многовид M_n має гладку структуру або є гладким многовидом, якщо на ньому існує атлас, в якому будь-які дві карти узгоджені.

Очевидно, що елементарний топологічний многовид автоматично є гладким. Гладку структуру на R^n , яка визначається картою (R^n, e) , прийнято називати стандартною гладкою структурою. Із попереднього прикладу 7.5 випливає, що одиничне коло є гладким многовидом.

Означення. Два атласи A_1 та A_2 на одному і тому ж гладкому многовиді M_n називаються еквівалентними, якщо топологічний простір M_n є одновимірним гладким многовидом відносно об'єднання $A_1 \cup A_2$.

Означення. Нехай M – гладкий многовид і (U_1, h_1) і (U_2, h_2) – дві карти цього многовиду. Говорять, що ці карти однаково орієнтовані, якщо для будь-

якої точки з $h_1(U_1 \cap U_2)$ якобіан відображення $h_2 \circ h_1^{-1}$ додатний. В противному випадку, карти називаються *протилежно орієнтованими*.

Зауваження. Якщо образ $h_1(U_1 \cap U_2)$ складається із однієї зв'язної компоненти, то знак якобіана достатньо визначити в одній будь-якій точці.

Означення. Атлас многовиду називається *орієнтовним*, якщо будь-які дві його карти однаково орієнтовані. Якщо такий атлас на многовиді існує, то многовид називається *орієнтовним*, а якщо не існує – *неорієнтовним*.

Приклад 7.6 Карти $(U_1, h_1), (U_3, h_3)$ на многовиді S^1 , які ми розглядали вище, протилежно орієнтовані, тому що відображення $h_3 \circ h_1^{-1} : (0,1) \rightarrow (0,1)$ задається функцією $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, для якої маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ при будь-якому $x \in (0,1)$. Тому побудований вище атлас $A = \{(U_i, h_i), i = \overline{1,4}\}$ неорієнтований. Але це не означає, що S^1 – неорієнтовний многовид.

7.3 Індуковані гладкі структури

Теорема 7.1 Якщо M – гладкий многовид та $f : M \rightarrow N$ – гомеоморфізм топологічних просторів, то N також гладкий многовид.

Доведення. За умовою M – гладкий многовид. Нехай $A = \{(U_i, h_i), i \in I\}$ – атлас на M . Доведемо, що $A' = \{(f(U_i), f \circ h_i^{-1}), i \in I\}$ – атлас на N . Дійсно, по-перше $\bigcup_i f(U_i) = f\left(\bigcup_i U_i\right) = f(M) = N$, тобто множини $f(U_i)$ утворюють покриття простору N . По-друге, всі $f(U_i)$ відкриті у топологічному просторі N , як образи відкритих множин U_i при гомеоморфізмі f . Відображення $f \circ h_i^{-1}$ є гомеоморфізмом як композиція двох гомеоморфізмів: f і h_i^{-1} . Отже, пари $(f(U_i), f \circ h_i^{-1}), i \in I$ є картами на топологічному просторі N , а їх об'єднання утворює на цьому просторі атлас (рис. 7.2).

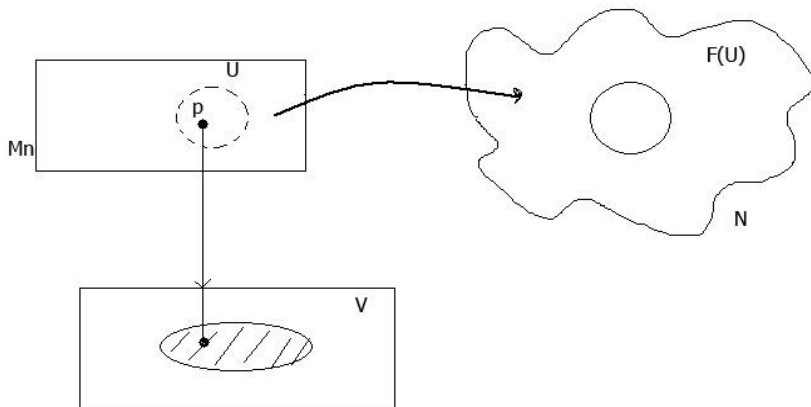


Рисунок 7.2 – Індуковані карти

Перенесення гладкої структури на топологічний простір є ефективним способом побудови гладкого многовиду. Адже, можна спочатку побудувати гладку структуру на «більш простому» топологічному просторі (або використати раніше побудовану структуру), а потім індукувати її на потрібному топологічному просторі, при умові гомеоморфності цих просторів.

Приклад 7.7 Розглянемо на площині коло S^1 і квадрат, як фігуру, що складається із відрізків. Ці фігури є топологічними просторами відносно топології, яка індукована на них природною топологією площини. Ми вже знаємо, що S^1 – одновимірний гладкий многовид. Перенесемо гладку структуру на квадрат. Для цього розташуємо коло і квадрат так, щоб їх центри співпадали і розглянемо центральне проектування f із центра кола (рис. 7.3). Очевидно, f – гомеоморфізм, тому за теоремою 7.1 квадрат теж є гладким многовидом.

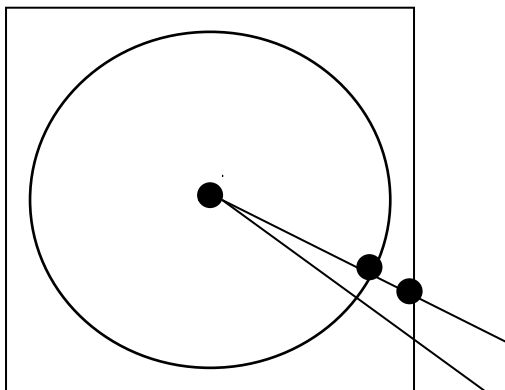


Рисунок 7.3 – Перенесення гладкої структури з кола на квадрат

7.4 Задання многовидів рівняннями

Теорема 7.2 Нехай задано функцію $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ класу C^∞ в просторі E_n . Позначимо символом M_c множину точок простору E_n , координати яких задовольняють рівняння $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = c$. Якщо $\overline{\text{grad } f}$ є ненульовим вектором в будь-якій точці множини M_c , то ця множина є $(n-1)$ - вимірним гладким многовидом класу C^∞ . При цьому в околі кожної його точки в якості локальних координат можна вибрати деякі (не завжди будь-які) $(n-1)$ декартових координат.

Доведення. Зауважимо, що аналогічна теорема доводилась в курсі диференціальної геометрії та топології і тому, теж за аналогією, такий спосіб завдання многовиду можна називати неявним.

Нехай точка $P_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ належить множині M_c . За умовою $\overline{\text{grad } f}(P_0) \neq 0$, тобто в цій точці існує відмінна від нуля частинна похідна принаймні по одній змінній від функції $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Можемо вважати, що

$\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \neq 0$. Нехай $Q_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1})$ – точка в просторі E_{n-1} , яка є образом точки P_0 при проектуванні вздовж координатної прямої x^n . За теоремою про неявну функцію [9] існує такий окіл U_{Q_0} точки Q_0 , інтервал $(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ і така визначена в околі U_{Q_0} C^∞ -гладка функція $y = y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$, що виконуються вимоги:

а) $f(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})) \equiv c$ в околі U_{Q_0} ,

б) $x_0^n = y(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1})$,

в) $|x_0^n - y(x^1, x^2, \dots, x^n)| < \delta$ в околі U_{Q_0} ,

г) будь-який розв'язок $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in U_{Q_0} \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ рівняння $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = c$ має вигляд $x^n = y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$.

Тоді через U_{P_0} позначимо окіл точки $P_0 \in M_c$ такий, що $U_{P_0} = M_c \cap U_{Q_0} \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$. Відображення $\varphi_0 : U_{P_0} \rightarrow R_{n-1}$ за правилом $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) \in U_{Q_0}$ є неперервним. Обернене до нього відображення діє за правилом: $\varphi_0^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}))$. За вимогою в) образом точки при оберненому відображенні є точка, що належить множині $U_{Q_0} \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$, а за вимогою А) він належить множині M_c . Отже, $\varphi_0^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) \in U_{P_0}$. Це означає, що обернене відображення теж неперервне. Отримали карту (U_{P_0}, φ_0) на множині M_c . Сукупність подібних карт, об'єднанням яких є вся множина M_c утворює на ній структуру $(n-1)$ -вимірному топологічного многовиду. Припустимо, що точка P_0 належить ще одній карті (U_i, φ_i) з локальними координатами $(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$. Тоді на перетині карт одні локальні координати виражаються через інші за формулами:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1, \\ &\dots \\ x^{i-1} &= x^{i-1}, \\ x^{i+1} &= x^{i+1}, \\ &\dots \\ x^n &= y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}). \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x^3} & \frac{\partial f_1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1} & \frac{\partial f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x^3} & \frac{\partial f_2}{\partial x^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}. \text{ Легко переконатись, що ранг}$$

цієї матриці в кожній точці множини $M_{\bar{c}}$ дорівнює 2, тому система рівнянь задає гладкий двовимірний многовид.

Питання для самоконтролю

1. Чи є два трикутники зі спільною вершиною топологічним многовидом?
2. Довести, що сфера S^n евклідового простору E_{n+1} є гладким многовидом. Знайти розмірність цього многовиду.
3. Навести приклади неелементарних многовидів.
4. На множині побудовано атлас, що складається з чотирьох карт. Чи є вірним, що побудований топологічний многовид є неелементарним?
5. Яке з понять «топологічний многовид» і «гладкий многовид» вужче?
6. Які з точок на гладкому многовиді можуть мати різні набори локальних координат?
7. Наведіть приклад функції $f : R \rightarrow R$, яка є функцією класу C^0 , але не є функцією класу C^1 .

Тема 8. Гладкі відображення гладких многовидів та їх диференціали

8.1 Означення та приклади гладких відображень гладких многовидів

Нехай M_m та N_n – гладкі многовиди і $f : M_m \rightarrow N_n$ – неперервне відображення. Розглянемо точку $P \in M_m$ і позначимо $Q = f(P)$. Виберемо карту (V, g) на N_n таку, що $Q \in V$. Оскільки відображення f є неперервним, то існує окіл U_P такий, що $f(U_P) \subset V$. Очевидно, що на M_m існує карта (U, h) така, що $U_P \subset U$. Розглянемо відображення $F = g \circ f \circ h^{-1} : h(U_P) \rightarrow g(V)$. Воно є відображенням областей евклідових просторів і називається *координатним представленням відображення f* . Якщо локальними координатами в картах (U, h) і (V, g) є відповідно $x^1, x^2, \dots, x^m$ і $y^1, y^2, \dots, y^n$, то координатне представлення відображення f задається системою функцій

$$y^1 = f^1(x^1, x^2, \dots, x^m), y^2 = f^2(x^1, x^2, \dots, x^m), \dots, y^n = f^n(x^1, x^2, \dots, x^m). \quad (8.1)$$

Означення. Неперервне відображення $f : M_m \rightarrow N_n$ гладких многовидів M_m і N_n називається C^k -гладким в точці $P \in M_m$, якщо система функцій, яка задає координатне представлення цього відображення, є системою C^k -гладких функцій.

Якщо відображення f є C^k -гладким в кожній точці, то воно називається C^k -гладким. Можна довести, що гладкість відображення не залежить від вибору атласів на многовидах [12].

Приклад 8.1 Розглянемо неперервне відображення $f : S^1 \rightarrow S^2$ кола $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ у сферу $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, при якому образом кола є множина точок сфери, які належать площині $y = 0$. Зафіксуємо на колі точку P в першій чверті, знайдемо її образ $Q \in S^2$. Виберемо на сфері карту (V, g) , якій належить точка Q . Нехай $V = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$, g – ортогональне проектування на площину $z = 0$. Отже, локальними координатами в цій карті є координати x, y . Розглянемо на колі відкриту підмножину $U_P = \{(u, v) \in S^1 : u \in (0, 1)\}$, яка містить точку P . Тоді, $f(U_P) \subset V$ і, крім того, $U_P \subset U$, де (U, h) – карта на колі, $U = \{(u, v) \in S^1 : v > 0\}$, h – ортогональне проектування на вісь абсцис, $h(U_P) = (0, 1)$. Отже, в цій карті локальною координатою є координата u .

Залишилось записати координатне представлення за допомогою функцій. Маємо $u \xrightarrow{h^{-1}} (u, \sqrt{1-u^2}) \xrightarrow{f} (u, 0, \sqrt{1-u^2}) \xrightarrow{g} (u, 0)$. Таким чином, $f^1(u) = u$, $f^2(u) = 0$. Ці функції є C^∞ -гладкими функціями, тому задане відображення кола у сферу є C^∞ -гладким.

Означення. Гладкою функцією на многовиді M називається C^k -гладке відображення $f : M \rightarrow R$ (це частинний випадок гладкого відображення многовидів, коли $N = R$ і на R розглядається стандартна гладка структура).

Приклад 8.2 Побудуємо відображення $f : S^1 \rightarrow R$ одновимірного гладкого многовиду S^1 у R за таким правилом: кожній точці P кола, яка отримується поворотом на кут φ проти годинникової стрілки фіксованої точки P_0 цього кола, поставимо у відповідність дійсне число $\cos \varphi$. Це відображення задається функцією $f(\varphi) = \cos \varphi$ класу C^∞ , а тому є C^∞ -гладким. За означенням відображення f є гладкою функцією на колі S^1 .

Нагадаємо, що відношення гомеоморфізму на множині топологічних просторів є відношенням еквівалентності [1]. Достатньо очевидно, що при гомеоморфізмі гладка структура може не зберегтись. Тому природно посилити вимоги і розглядати відображення, які зберігають гладку структуру.

Означення. Нехай M та N – гладкі многовиди, $f : M \rightarrow N$ – гомеоморфізм. Це відображення називається C^k -дифеоморфізмом многовидів, якщо f та f^{-1} є C^k -гладкими відображеннями. Якщо такий C^k -дифеоморфізм існує, то многовиди називаються C^k -дифеоморфними.

Відношення дифеоморфності на множині гладких многовидів є відношенням еквівалентності. Тому множина всіх гладких многовидів розбивається на класи еквівалентності. Два гладких многовиди з одного класу дифеоморфні, а з різних класів – недифеоморфні. Властивості многовидів, які зберігаються при дифеоморфізмах, називаються *диференціальними інваріантами*. Дифеоморфні многовиди мають однакову розмірність, тому розмірність многовиду є диференціальним інваріантом.

Приклад 8.3 Сфера та еліпсоїд дифеоморфні.

Дійсно, центральне проектування f сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ є гомеоморфізмом, який задається системою функцій $f_1(x, y, z) = ax$, $f_2(x, y, z) = by$, $f_3(x, y, z) = cz$. Ці функції лінійні, а, отже, вони самі та обернені до них є C^k -гладкими.

Теорема 8.1 Якщо M – гладкий многовид і N – гладкий многовид зі структурою, що індукована гомеоморфізмом $f : M \rightarrow N$, то ці многовиди дифеоморфні. Очевидно, сам гомеоморфізм f є дифеоморфізмом цих многовидів [3].

Приклад 8.4 1) Коло і квадрат дифеоморфні. Це випливає з існування гомеоморфізму, який переносить гладку структуру з кола на квадрат (див. приклад 7.7 і теорему 8.1).

2) Гладкі многовиди $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і R зі стандартною гладкою структурою дифеоморфні, оскільки існує гомеоморфізм $f(x) = \tan x$, який переносить структуру.

8.2 Дотичні вектори та дотичний простір гладкого многовиду

Одним із важливих прикладів гладкого многовиду є поверхня евклідового простору. Розглянемо спочатку двовимірну поверхню в тривимірному евклідовому просторі як гомеоморфізм $f: G \rightarrow E_3$, де G – область в R^2 . Одним із способів задання поверхні є її задання за допомогою векторної функції, тобто векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(U, V)$, де параметри U, V пробігають множину G . Задамо на поверхні криву γ внутрішніми рівняннями $U = U(t), V = V(t)$. Вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ швидкості цієї кривої має вигляд

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'_U \frac{dU}{dt} + \bar{r}'_V \frac{dV}{dt}$ і є дотичним вектором до поверхні. В прикладі 7.2 було доведено, що поверхня в евклідовому просторі є гладким многовидом, що покривається однією картою $(f(G), f^{-1})$. Тоді коефіцієнти $\frac{dU}{dt}$ і $\frac{dV}{dt}$ є

координатами дотичного вектора в цій карті. Після заміни параметрів на поверхні за формулами $U = U(u, v), V = V(u, v)$ координати дотичного вектора перетворюються за законом $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, де

матриця $\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix}$ є матрицею Якобі функцій заміни параметрів. Вид закону

перетворення координат дотичного вектору дозволяє зробити висновок, що координати цього вектору не залежать від способу задання поверхні в евклідовому просторі, а залежать лише від вибору локальних координат. Цю властивість дотичного вектора можна покласти в основу означення дотичного вектора до гладкого многовиду.

Означення. Дотичним вектором в точці P до гладкого многовиду M_n називається відповідність, при якій кожній локальній системі координат в цій точці відповідає набір чисел, заданий в точці P , причому набори $u^1, u^2, \dots, u^n$ і

$v^1, v^2, \dots, v^n$, які відповідають локальним системам координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ і $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ відповідно, пов'язані законом

$$v^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} u^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.2)$$

Тут $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$, $i, j = \overline{1, n}$ є матрицею Якобі заміни координат. Закон (8.2)

перетворення координат дотичного вектора є тензорним законом типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 8.2 Сукупність всіх дотичних векторів до гладкого многовиду M_n в його точці P утворює n -вимірний векторний простір, який називається *дотичним простором* цього многовиду в точці P і позначається $T_P M_n$.

Доведення теореми зводиться до введення звичних операцій додавання векторів та множення векторів на число на множині всіх дотичних векторів до многовиду в точці P . Перевірка виконання аксіом векторного простору не містить ніяких ускладнень. Завершує доведення перевірка незалежності результатів введених операцій від вибору локальних систем координат на многовиді [9].

Якщо в дотичному просторі в точці P розглянути репер і для базису цього репера знайти взаємний, то можемо розглядати векторний простір, натягнутий на цей базис, який називають *кодотичним простором* до гладкого многовиду в точці P . Оскільки вектори взаємного базису є лінійними комбінаціями векторів вихідного базису, то кодотичний простір називають ще векторним простором лінійних форм або спряженим до дотичного векторного простору [5].

Означення. Нехай M_n – n -вимірний гладкий многовид. Розглянемо інтервал (a, b) на прямій R як гладкий многовид із стандартною гладкою структурою. *Кривою* на гладкому многовиді M_n називається неперервне відображення $f : (a, b) \rightarrow M_n$, при якому кожному $t \in (a, b)$ відповідає $f(t) \in M_n$.

Якщо крива проходить через точку P многовиду і $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – локальні координати в околі цієї точки, то $f(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$, $t \in (a, b)$ – рівняння кривої в локальних координатах. Якщо функції $x^i(t) \in C^k$ -гладкими, то крива на многовиді називається C^k -гладкою.

Теорема 8.3 (геометричний зміст дотичного вектора) Нехай на гладкому многовиді M_n задано гладку криву f і точку P на ній, яка належить карті (U, h) з локальною системою координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Відображення $\tilde{f} = h \circ f : (a, b) \rightarrow E_n$ є звичайною кривою в евклідовому просторі з рівнянням

$\tilde{f}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$. Вектор $\tilde{f}'(t)$ швидкості цієї кривої є дотичним вектором гладкого многовиду в точці P [9].

Приклад 8.5 Відображення $f: (-\pi, \pi) \rightarrow E_3$, яке задається рівнянням $f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, є кривою на гладкому многовиді E_3 зі стандартною структурою. Ця крива називається гвинтовою лінією. Очевидно, вона є C^∞ -гладкою. Згідно з теоремою 3.6 дотичний вектор до цієї кривої має вигляд $\tilde{f}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$.

8.3 Диференціал гладкого відображення гладких многовидів

Поняття диференціалу гладкого відображення гладких многовидів є узагальненням поняття диференціала функції. Нехай $F: M_m \rightarrow N_n$ – гладке відображення гладких многовидів M_m і N_n . Розглянемо на M_m гладку криву $\gamma: (-1; 1) \rightarrow M_m$, яка проходить через точку P многовиду M_m , причому нехай $\gamma(0) = P$ і $\gamma'(0) = V = (V^1, \dots, V^m)$ – вектор швидкості кривої в точці P . Нехай $F(P) = Q$. Очевидно, образ $\tilde{\gamma} = F(\gamma) = F \circ \gamma$ заданої кривої у відображенні F проходить через точку $Q \in N_n$. Нехай $W = (W^1, \dots, W^n)$ є вектором швидкості кривої $\tilde{\gamma}$ в точці Q (рис. 3.4).

Означення. Диференціалом dF_P гладкого відображення $F: M_m \rightarrow N_n$ гладких многовидів M_m і N_n в точці $P \in M_m$ називається відображення дотичних просторів $T_P M_m$ і $T_Q N_n$ у точці $P \in M_m$ та її образі $Q \in N_n$, при якому вектор $V = (V^1, \dots, V^m)$ швидкості кривої $\gamma \subset M_m$, яка проходить через точку P , відображається на вектор $W = (W^1, \dots, W^n)$ швидкості кривої $\tilde{\gamma} = F(\gamma)$ в точці Q .

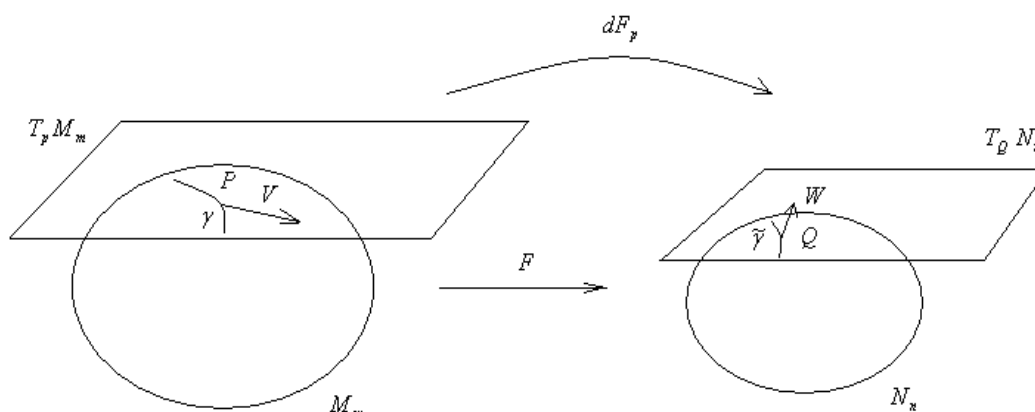


Рисунок 8.1 – Диференціал гладкого відображення

Запишемо диференціал гладкого відображення гладких многовидів у локальних координатах. Виберемо карту (U, φ) на M_m з локальними координатами $x^1, x^2, \dots, x^n$ таку, що $P \in U$. Нехай (V, ψ) – карта на N_n з локальними координатами $y^1, y^2, \dots, y^n$ така, що $Q \in V$. Якщо координатне представлення відображення $F : M_m \rightarrow N_n$ задається системою функцій (8.1), а координатні представлення кривої γ та її образа $\tilde{\gamma} = F(\gamma) = F \circ \gamma$ мають вигляд $(x^1(t), \dots, x^m(t))$ та $(y^1(x^i(t)), \dots, y^n(x^i(t)))$ відповідно, то диференціал $dF_P : V \rightarrow W$ відображення F має в локальних координатах вигляд $W^k = \frac{dy^k}{dt} = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt}, \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} V^i, i, k = \overline{1, m}$, або у матричному вигляді $W = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt} = V \cdot I_{x \rightarrow y}$, де $I_{x \rightarrow y}$ – матриця Якобі відображення F .

З вигляду отриманих формул випливає, що диференціал гладкого відображення гладких многовидів є лінійним відображенням векторних просторів $T_P M_m$ і $T_Q N_n$ [11].

Теорема 8.4 Диференціал гладкого відображення не залежить від вибору локальної системи координат.

Доведення. Нехай $F : M_m \rightarrow N_n$ – гладке відображення гладких многовидів і dF_P – його диференціал в точці $P \in M_m$. Нехай в системах координат (x^i) і $(x^{i'})$ на першому многовиді координатами дотичного вектора є набори (ξ^i) і $(\xi^{i'})$ відповідно, а в системах координат (y^i) і $(y^{i'})$ на другому многовиді координатами образа дотичного вектора є набори (η^i) і $(\eta^{i'})$ відповідно. Тоді в «старих» і «нових» локальних координатах записи диференціала мають вигляд

$$dF_P : \eta^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P) \xi^i \quad (8.3)$$

і

$$dF'_P : \eta^{j'} = \frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}(P) \xi^{i'} \quad (8.4)$$

відповідно, де f – координатне представлення відображення F і воно задається системою функцій (8.1). Використовуючи ланцюжок очевидних рівностей

$$y^{j'} = f^{j'}(x^{i'}), \quad y^{j'} = y^{j'}(y^k) = y^{j'}(f^k(x^i)), \quad x^i = x^i(x^{i'}),$$

отримаємо

$$\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}(P_0) = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0) \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(P_0).$$

Скористаємось тим, що набір (ξ^i) координат дотичного вектора утворює тензор типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та формулами (8.3) і (8.4), тоді

$$\eta^{j'} = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0) \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(P_0) \xi^{i'} = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}(Q_0) \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(P_0) \xi^i = \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^{i'}}(Q_0) \eta^j,$$

тобто η^j і $\eta^{j'}$ – координати одного і того самого тензора, тому $dF'_P = dF_P$.

Теорема доведена.

8.4 Занурення та вкладення многовидів. Вкладення многовидів у евклідові простір

Розглянемо узагальнення регулярної точки на випадок довільних гладких многовидів.

Означення. Нехай M_m та N_n – гладкі многовиди і f – їх гладке відображення. Розглянемо на M_m карту (U, φ) і точку $x_0 \in U$. Точка x_0 називається *регулярною точкою відображення* f , якщо для деякого координатного представлення цього відображення точка $\varphi(x_0)$ є регулярною [11].

Приклад 8.6 У прикладі 8.1 було розглянуто гладке відображення $f : S^1 \rightarrow S^2$ кола $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ у сферу $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, при якому образом кола є множина точок сфери, які належать площині $y = 0$. Координатне представлення $F = g \circ f \circ h^{-1}$ відображення f задається функціями $y^1(u, v) = u$, $y^2(u, v) = 0$.

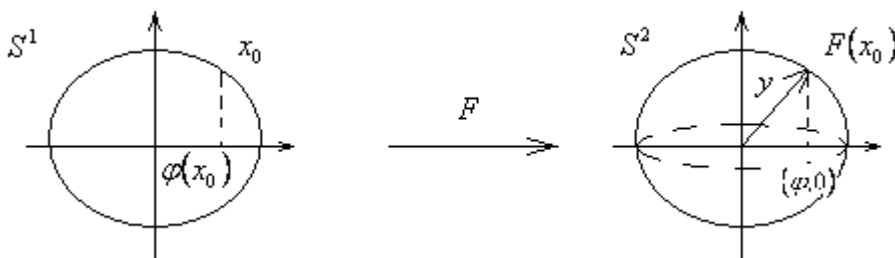


Рисунок 8.2 – Гладке відображення кола у сферу

Для кожної точки x_0 з карти (U, φ) на колі, де $U = \{(u, v) \in S^1 : v > 0\}$, φ – ортогональне проектування на вісь абсцис, знайдемо точку $\varphi(x_0)$ і матрицю Якобі відображення F в цій точці, отримаємо $\left(\frac{\partial y^i}{\partial u}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оскільки

$\text{rang}\left(\frac{\partial y^i}{\partial u}\right)\bigg|_{\varphi(x_0)} = 1 = \min\{1, 2\}$ є максимальним, то $\varphi(x_0)$ – регулярна точка

відображення F , звідки випливає, що x_0 – регулярна точка відображення f .

Означення. Нехай $f : M_m \rightarrow N_n$ – гладке відображення і будь-яка точка $x_0 \in M_m$ є регулярною. Тоді, відображення f називається

- гладкою іммерсією (або зануренням), якщо $m \leq n$,
- гладкою субіммерсією (або накладанням), якщо $m \geq n$,
- гладким вкладенням, якщо f – гладка іммерсія і f – гомеоморфізм M_m та $f(M_m)$ (топология на $f(M_m)$ індукована топологією на N_n).

Теорема 8.5 Якщо многовид M_m є компактним і $f : M_m \rightarrow N_n$ – ін’єктивна іммерсія, то f є вкладенням [3].

Приклад 8.7 Відображення $f : R^2 \rightarrow R^1$, при якому $f(x, y) = x$ є гладкою субіммерсією.

Приклад 8.8 Відображення $f : R^1 \rightarrow R^2$, при якому $f(x) = (\sin x, \sin 2x) = F$ (співпадає з координатним представленням) є гладкою іммерсією, але не є вкладенням, оскільки $f(0) = f(\pi) = (0, 0)$, тобто відображення не бієктивне.

Розглянемо відображення $f|_{(0, 2\pi)} : (0, 2\pi) \rightarrow R^2$ і $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$. Воно бієктивне, але не гомеоморфізм, тому що f^{-1} не є неперервним.

Нарешті, відображення $f : (0, \pi) \rightarrow R^2$ і $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$ є вкладенням.

Означення. Підмножина M гладкого многовиду N_n називається його підмноговидом, якщо M є образом деякого гладкого вкладення $f : M_m \rightarrow N_n$ (гладка структура на M індукується гомеоморфізмом f).

Приклад 8.9 Сфера S^2 – гладкий двовимірний многовид. Меридіан $N = \{(x, y, z) \in S^2 : x = 0, y^2 + z^2 = 1\}$ є підмноговидом (рис. 8.3).

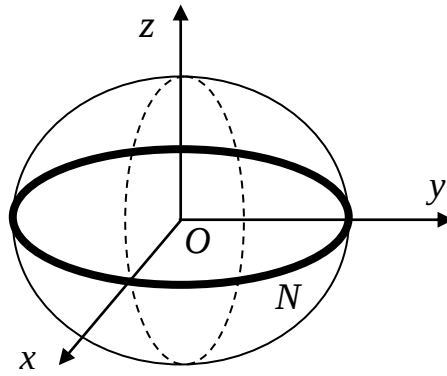


Рисунок 8.3 – Приклад підмноговида

Дійсно, існує гомеоморфізм $f : S^1 \rightarrow S^2$, який переводить S^1 в N . Отже, N є підмноговидом многовиду S^2 .

Американським математиком Х.Уїтні була доведена наступна

Теорема 8.6 (Уїтні). Будь-який компактний гладкий n -вимірний многовид можна вкласти в евклідов простір E_{2n+1} [9].

Питання для самоконтролю

1. Наведіть означення регулярної точки гладкого відображення.
2. Чи є відображення $f(x) = x^3$ дифеоморфізмом із R в R ?
3. Наведіть означення занурення та вкладення многовиду у евклідов простір.
4. Чи є графік функції арктангенса вкладенням дійсної прямої в R^2 ?
5. Наведіть означення дотичного простору до гладкого многовиду.
6. Доведіть, що відображення $F : R^2 \rightarrow R$, яке задається функцією $F(x, y) = x$, тобто є ортогональною проекцією на вісь абсцис, є прикладом гладкої субмерсії.
7. Які з наступних гладких многовидів задовольняють умовам теореми Уїтні: півплощина, сфера S^2 , еліптичний параболоїд?

IV ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА КУРСУ

Тема 1. Диференціальна геометрія кривої у тривимірному евклідовому просторі

Приклади розв'язання задач

Задача 1.1 Довести, що годографом лінійної векторної функції $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$, де $\vec{a}$ й $\vec{b}$ деякі постійні вектори, $\vec{a} \neq \vec{0}$, є пряма лінія.

Розв'язання. Нехай координатами векторної функції $\vec{r}(t)$ є скалярні функції $x(t), y(t), z(t)$, а координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні відповідно (a_1, a_2, a_3) й (b_1, b_2, b_3) . Тоді

$$x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})t + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

З лінійної незалежності векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ випливає

$$x(t) = a_1t + b_1, \quad y(t) = a_2t + b_2, \quad z(t) = a_3t + b_3.$$

Ця система є параметричними рівняннями прямої і вона є годографом заданої векторної функції.

Задача 1.2 Довести, що якщо скалярна функція $\varphi(t)$ і вектор-функція $\vec{a}(t)$ неперервні при $t = t_0$, то неперервною при $t = t_0$ буде і вектор-функція $\varphi(t)\vec{a}(t)$.

Розв'язання. Позначимо $M_1 = |\varphi(t_0)|, M_2 = |\vec{a}(t_0)|$. Візьмемо будь-яке додатне $\varepsilon > 0$. Із неперервності заданих функцій випливає:

$$(\exists \delta > 0) \quad (\forall t) \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2M_2} \wedge |\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}.$$

Складемо різницю $\varphi(t)\vec{a}(t) - \varphi(t_0)\vec{a}(t_0)$ і перетворимо її до вигляду $\varphi(t)(\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)) + \vec{a}(t_0)(\varphi(t) - \varphi(t_0))$.

Оцінимо модуль отриманого вектора

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\vec{a}(t) - \varphi(t_0)\vec{a}(t_0)| &\leq |\varphi(t)| |\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)| + |\vec{a}(t_0)| |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \\ &< M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\varepsilon}{2M_2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Це означає, що вектор-функція $\varphi(t)\vec{a}(t)$ неперервна при $t = t_0$.

Задача 1.3 Знайти довжину кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання. Векторне рівняння кола $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), t \in [0, 2\pi)$.

Знайдемо $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$, $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = |a|$. Довжина кола

$$s = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |a| dt = 2\pi |a|.$$

Задача 1.4 Перейти до натуральної параметризації прямої, заданої

векторним рівнянням $\vec{r}(t) = (t+1, 2t-3, 3t)$.

Розв'язання. Знайдемо $\vec{r}'(t) = (1, 2, 3)$, $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{14} dt = \sqrt{14}t. \text{ Звідси } t = s/\sqrt{14}. \text{ Підставивши знайдене}$$

$t = t(s)$ в рівняння прямої, одержимо шукану натуральну параметризацію

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{14}} + 1, \frac{2s}{\sqrt{14}} - 3, \frac{3s}{\sqrt{14}} \right).$$

Задача 1.5 Нехай дана крива $\vec{r}(t) = (t+1, t^2-t+3, \sin(2t))$. Знайти рівняння дотичної прямої, нормальної й стичної площин при $t = 0$.

Розв'язання. Знаходимо $\vec{r}(0) = (1, 3, 0)$, $\vec{r}'(t) = (1, 2t-1, 2\cos(2t))$, $\vec{r}'(0) = (1, -1, 2)$.

Канонічні рівняння дотичної прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{2}$.

Рівняння нормальної площини $1(x-1) + (-1)(y-3) + 2(z-0) = 0$, або після зведення подібних доданків $x - y + 2z + 2 = 0$.

Далі знаходимо $\vec{r}''(t) = (0, 2, -4\sin(2t))$, $\vec{r}''(0) = (0, 2, 0)$,

$$\begin{aligned} [\vec{r}'(0), \vec{r}''(0)] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -4\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, 0, 2). \end{aligned}$$

Рівняння стичної площини $-4(x-1) + 0(y-3) + 2(z-0) = 0$, або після зведення подібних доданків $2x - z + 2 = 0$.

Задача 1.6 Знайти рівняння дотичної прямої та нормальної площини до неявно заданої кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \\ x^2 - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ в точці $M(1, 2, 3)$.

Розв'язання. Для функції $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$ координати градієнта $\overline{\nabla F}$ мають вигляд $F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z$. Підставивши координати точки M , одержимо $\overline{\nabla F}|_M = (2, 4, 6)$. Аналогічно $\Phi(x, y, z) = x^2 - y + 3z - 8$, $\Phi'_x = 2x, \Phi'_y = -1, \Phi'_z = 3$, $\overline{\nabla \Phi}|_M = (2, -1, 3)$. Тоді

$$[\overline{\nabla F}, \overline{\nabla \Phi}]|_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 18\bar{i} + 6\bar{j} - 10\bar{k} = (18, 6, -10).$$

Рівняння дотичної прямої $\frac{x-1}{18} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-10}$. Рівняння нормальної площини $18(x-1) + 6(y-2) - 10(z-3) = 0$ або $9x + 3y - 5z = 0$.

Задача 1.7 Знайти координати векторів базису Френе кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$ у точці M , що відповідає значенню параметра $t = 0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}'(t) = (2t, 1, 2\cos(2t))$,
 $\bar{r}''(t) = (2, 0, -4\sin(2t))$. Підставивши значення параметра, одержимо
 $\bar{r}'(0) = (0, 1, 2)$, $\bar{r}''(0) = (2, 0, 0)$. Далі обчислимо

$$[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k} = (0, 4, -2),$$

$$[[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)], \bar{r}'(0)] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} = (10, 0, 0).$$

Знаходимо координати векторів базису Френе

$$\bar{m}_1 = \frac{\bar{r}'(0)}{|\bar{r}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}}(0, 1, 2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\bar{m}_3 = \frac{[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)]}{|[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)]|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}}(0, 4, -2) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\bar{m}_2 = [\bar{m}_3, \bar{m}_1] = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} = (1, 0, 0).$$

Задача 1.8 Знайти рівняння елементів тригранника Френе, побудованого в точці M (при $t=1$) кривої $\bar{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

Розв'язання. Підставивши значення параметра в рівняння кривої, одержимо декартові координати заданої точки: $M(2, 3, 4)$. Всі елементи шуканого тригранника проходять через точку M . Вектор $\bar{r}'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2)$ є напрямним вектором дотичної прямої та нормальним вектором нормальної площини до кривої. Підставивши значення параметра, одержимо $\bar{r}'(1) = (0, 6, 6)$. Тоді рівняння дотичної прямої та нормальної площини запишуться у вигляді

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{6},$$

i

$$0(x-2)+6(y-3)+6(z-4)=0 \text{ або } y+z-3=0$$

відповідно.

$$\text{Рівняння стичної площини має вигляд} \begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

тобто її напрямними векторами є вектори $\bar{r}'(1)$ і $\bar{r}''(1)=(-6,6,6)$. Тоді рівняння

$$\text{стичної площини в точці } M \text{ має вигляд} \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } y-z+1=0.$$

Зауважимо, що нормальним вектором стичної площини є вектор $(0,1,-1)$, колінеарний бінормалі. Значить рівняння бінормалі має вигляд

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-1}.$$

У якості напрямного вектора головної нормалі можна розглядати векторний добуток напрямних векторів дотичної прямої та

$$\text{бінормалі: } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-12, 0, 0).$$

Візьмемо колінеарний йому вектор $(-1, 0, 0)$, тоді рівняння головної нормалі та спрямляючої площини запишуться у вигляді

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{0} \quad \text{і} \quad -1(x-2) + 0(y-3) + 0(z-4) = 0$$

відповідно.

Задача 1.9 Знайти кривину й скрут кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$ в точці M , що відповідає значенню параметра $t = 0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}'(t) = (2t, 1, 2\cos(2t))$, $\bar{r}''(t) = (2, 0, -4\sin(2t))$, $\bar{r}'''(t) = (0, 0, -8\cos(2t))$. Підставивши значення параметра, одержимо

$$\bar{r}'(0) = (0, 1, 2), \quad \bar{r}''(0) = (2, 0, 0), \quad \bar{r}'''(0) = (0, 0, -8).$$

Далі послідовно обчислимо $|\bar{r}'(0)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$

$$[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k} = (0, 4, -2),$$

$$[[\bar{r}'(0), \bar{r}''(0)]] = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}, \quad (\bar{r}'(0), \bar{r}''(0), \bar{r}'''(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 16.$$

Використовуючи формули (1.18) і (1.19), одержимо

$$k = \frac{[\bar{r}', \bar{r}'']}{|\bar{r}'|^3} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5}, \quad \kappa = \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{[\bar{r}', \bar{r}'']^2} = \frac{16}{(2\sqrt{5})^2} = \frac{4}{5}.$$

Задача 1.10 Записати натуральні рівняння кривої $\bar{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$.

Розв'язання. Знаходимо $\bar{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, $\bar{r}''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$,
 $\bar{r}'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$,

$$[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} e^t & \sqrt{2} \\ e^t & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} =$$

$$= (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2),$$

$$(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = [\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]\bar{r}'''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}) \cdot e^t + \sqrt{2}e^t \cdot (-e^{-t}) + 2 \cdot 0 =$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2},$$

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t},$$

$$[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)] = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t}).$$

Далі знаходимо кривину й скрут кривої в довільній точці, що відповідає параметру t

$$k = \frac{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]}{|\bar{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t - e^{-t})^2 + 4},$$

$$\kappa = \frac{(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))}{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2}.$$

Перейдемо до натурального параметра

$$s = \int_0^t |\bar{r}'(p)| dp = \int_0^t (e^p + e^{-p}) dp = (e^p - e^{-p}) \Big|_0^t = e^t - e^{-t}.$$

З отриманого рівняння $e^t - e^{-t} = s$ знаходимо $e^t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$, звідки

$$t = \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}.$$

Натуральні рівняння даної кривої будуть мати вигляд

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}, \kappa = -\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}. \end{cases}$$

Задача 1.11 Відновити параметризацію кривої за її натуральними рівняннями $\begin{cases} k(s) = 2s \\ \kappa(s) = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. Оскільки скрут дорівнює нулю, то крива лежить у деякій площині. Прийнемо цю площину за OXY . Рівняння будемо шукати у вигляді

$\bar{r}(s) = (x(s), y(s), 0)$. Оскільки параметр натуральний, то $|\bar{r}'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \equiv 1$. Звідси одержимо, що існує така функція $\alpha(s)$, що $x' = \cos \alpha(s)$, $y' = \sin \alpha(s)$.

Тобто $\bar{r}'(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s), 0)$, $\bar{r}''(s) = (-\alpha'(s) \sin \alpha(s), \alpha'(s) \cos \alpha(s), 0)$. Для обчислення кривини використаємо формулу (1.16)

$$k = |\bar{r}''(s)| = \sqrt{(-\alpha' \sin \alpha)^2 + (\alpha' \cos \alpha)^2} = \alpha'(s)$$

За умовою $\alpha'(s) = 2s$, звідки одержимо, що $\alpha(s) = \int 2s ds = s^2$. Таким чином

$$\bar{r}'(s) = (\cos s^2, \sin s^2, 0), \text{ а звідси } \bar{r}(s) = \left(\int_0^s \cos s^2 ds, \int_0^s \sin s^2 ds, 0 \right).$$

Помітимо, що при знаходженні кореня ми взяли знак «плюс» і при обчисленні невизначеного інтеграла ми двічі відкидали константи. Нагадаємо, що крива за її натуральними рівняннями відновлюється з точністю до руху. А ми, виконуючи зазначені вище спрощення, просто взяли одну з таких кривих.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що замкнена лінія $\bar{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ має довжину $s = 10$.
(Вказівка. Крива замкнена, тому $t \in [0, 2\pi]$).
2. Знайти натуральну параметризацію кривої $y = 5x - 1$, якщо $x \in [1, 2]$.
3. Знайти кут, між віссю OZ та дотичним вектором до кривої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \frac{t}{2}$.
4. Знайти кути, під якими перетинаються наступні криві: $y^2 = 4x$ і $x^2 = 4y$.
(Вказівка. Знайти точки перетину кривих, параметризувати криві).
5. Знайти параметричні рівняння головної нормалі та бінормалі лінії $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$ в точці $M(1, 1, 1)$.
6. Довести, що головна нормаль гвинтової лінії $\bar{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$ перетинає її вісь під прямим кутом.
7. Знайти рівняння елементів тригранника Френе, побудованого в точці $M = \bar{r}(0)$ кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$.
8. Довести $(\bar{m}_3', \bar{m}_3'', \bar{m}_3''') = \kappa^5 \left(\frac{k}{\kappa} \right)'$. (Вказівка. Скористатися формулами Серре-Френе. Ліву і праву частину звести до одного і того ж виду).
9. Знайти кривину й скрут кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$ в точці M , що відповідає значенню параметра $t = 0$.
10. Знайти кривину кривої $y = \sin x$.

Тема 2. Диференціальна геометрія двовимірної поверхні у тривимірному евклідовому просторі

Приклади розв'язання задач

Задача 2.1 Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до поверхні $\vec{r}(u, v) = (uv, u^2 - v^2, 2u^3v)$ в точці $M(u=1, v=2)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M , підставивши значення параметрів у рівняння поверхні: $M(2, -3, 4)$. Обчислимо частинні похідні $\vec{r}_u = (v, 2u, 6u^2v)$, $\vec{r}_v = (u, -2v, 2u^3)$ і знайдемо їх у точці M : $\vec{r}_u(M) = (2, 2, 6)$, $\vec{r}_v(M) = (1, -4, 2)$. Вектор нормалі у цій точці має вигляд

$$\vec{n}(M) = [\vec{r}_u(M), \vec{r}_v(M)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (28, 2, -10).$$

Тоді рівняннями нормалі є $\frac{x-2}{28} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-10}$, а рівняння дотичної площини $28(x-2) + 2(y+3) - 10(z-4) = 0$.

Задача 2.2 Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до неявно заданої поверхні $4x^2 - y^2 + z^3 = 8$ в точці $M(2, 3, 1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $F(x, y, z) = 0$, тобто $4x^2 - y^2 + z^3 - 8 = 0$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (8x, -2y, 3z^2)$. У точці M маємо $\vec{n} = (16, -6, 3)$.

Рівняння нормалі $\frac{x-2}{16} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{3}$, а рівняння дотичної площини $16(x-2) - 6(y-3) + 3(z-1) = 0$.

Задача 2.3 Знайти першу квадратичну форму поверхні

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v).$$

Розв'язання. Знайдемо похідні $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 2)$. Коефіцієнти першої квадратичної форми знайдемо за формулами

$$g_{11} = (\vec{r}_u, \vec{r}_u) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \quad g_{12} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v = 0, \\ g_{22} = (\vec{r}_v, \vec{r}_v) = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 4 = 4 + u^2.$$

Перша квадратична форма має вигляд

$$I = ds^2 = 1 du^2 + 2 \cdot 0 \cdot du dv + (4 + u^2) dv^2 = du^2 + (4 + u^2) dv^2.$$

Задача 2.4 Знайти другу квадратичну форму поверхні $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$.

Розв'язання. Із задачі 2.3 нам відомо, що перша квадратична форма цієї

поверхні має вигляд

$$I = ds^2 = du^2 + (4 + u^2)dv^2.$$

Тоді $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{4 + u^2}$. Перші похідні мають вигляд

$$\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \bar{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 2).$$

Знайдемо другі похідні

$$\bar{r}_{uu} = (0, 0, 0), \bar{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \bar{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Обчислимо мішані добутки похідних

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 2 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{vmatrix} = -2,$$

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 2 \\ -u \cos v & -u \sin v & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми

$$h_{11} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0, \quad h_{12} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = -\frac{2}{\sqrt{4 + u^2}},$$

$$h_{22} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0.$$

Таким чином, друга квадратична форма має вигляд

$$II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = -\frac{4}{\sqrt{4 + u^2}}dudv.$$

Задача 2.5 На поверхні $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ знайти нормальну кривину кривої $u = v^2$ в точці $(u = 4, v = 2)$.

Розв'язання. Скористаємося результатами задач 2.3 та 2.4:

$$I = du^2 + (4 + u^2)dv^2, \quad II = -\frac{4}{\sqrt{4 + u^2}}dudv.$$

Узявши диференціали від обох частин рівняння кривої, одержимо $du = 2vdv$. Підставимо у формулу для нормальної кривини

$$k_H = \frac{II}{I} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{4+u^2}} du dv}{du^2 + (4+u^2) dv^2} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{4+u^2}} 2v dv dv}{4v^2 dv^2 + (4+u^2) dv^2} = \frac{-\frac{8v}{\sqrt{4+u^2}}}{4v^2 + 4 + u^2}.$$

В заданій точці маємо:

$$k_H = \frac{-\left(\frac{16}{\sqrt{4+16}}\right)}{16 + 4 + 16} = -\frac{16}{36\sqrt{20}} = -\frac{2}{9\sqrt{5}}.$$

Задача 2.6 На поверхні $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ в точці $A(u=4, v=2)$ знайти головні напрямки, головні кривини, повну і середню кривини.

Розв'язання. Скористаємося результатами задач 2.3 та 2.4. Матимемо в довільній точці

$$g_{11}=1, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=u^2+4, h_{11}=h_{22}=0, h_{12}=h_{21}=-2/\sqrt{u^2+4}.$$

В точці A знаходимо

$$g_{11}=1, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=20, h_{11}=h_{22}=0, h_{12}=h_{21}=-1/\sqrt{5}.$$

Для обчислення головних кривин скористаємося рівнянням (2.11)

$$\begin{vmatrix} h_{11}-kg_{11} & h_{12}-kg_{12} \\ h_{12}-kg_{12} & h_{22}-kg_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -20k \end{vmatrix} = 20k^2 - \frac{1}{5} = 0.$$

Звідси $k_{1,2} = \pm 0,1$.

Отже, головні кривини дорівнюють 0,1 і -0,1. Для знаходження головних напрямків використовуємо рівняння (2.13)

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} dv^2 & du^2 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Звідси } 20dv^2 - du^2 = 0, \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 20, \frac{du}{dv} = \pm 2\sqrt{5}.$$

Таким чином, головні напрямки визначаються співвідношеннями

$$\frac{du}{dv} = 2\sqrt{5} \text{ і } \frac{du}{dv} = -2\sqrt{5}.$$

Для знаходження повної і середньої кривин скористаємося формулами (2.12):

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{0 - 1/5}{20 - 0} = -0,01, H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{0}{20} = 0.$$

Примітка. Оскільки ми вже знайшли головні кривини, простіше було б скористатися формулами, наведеними в означеннях повної та середньої кривин.

Задача 2.7 На поверхні $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ знайти лінії кривини.

Розв'язання. Із розв'язання задач 2.3 та 2.4:

$g_{11}=1, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=u^2+4, h_{11}=h_{22}=0, h_{12}=h_{21}=-2/\sqrt{u^2+4}$.
Підставимо ці вирази в рівняння (2.13):

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2+4 \\ 0 & -2/\sqrt{u^2+4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $(u^2+4)dv^2 - du^2 = 0$, а отже диференціальні рівняння для знаходження ліній кривини мають вигляд $\frac{dv}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2+4}}, dv = \pm \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$. Після інтегрування

отримуємо $v = C \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2+4}\right)$ – рівняння ліній кривини.

Задача 2.8 На поверхні $\bar{r}(u,v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ знайти асимптотичні лінії.

Розв’язання. В задачі 2.4 було знайдено другу квадратичну форму поверхні:

$$II = -4dudv/\sqrt{u^2+4}.$$

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд (1.34), тобто $II = 0$. У нашому випадку $-4dudv/\sqrt{u^2+4} = 0$. Звідси $du = 0$ або $dv = 0$. Тобто асимптотичні лінії – це координатні лінії $u = \text{const}$ і $v = \text{const}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної головними нормальними даної кривої $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$, де s - натуральний параметр.
2. Записати рівняння однопорожнинного гіперболоїда у вигляді $\bar{r}(u,v) = \bar{\rho}(u) + v\bar{l}(u)$, де $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$ - крива, що є перетином поверхні і площини OXY , $\bar{l} = \bar{l}(u)$ - напрямний вектор прямолінійної твірної гіперболоїда в точці кривої $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$, що відповідає параметру u .
3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $xu^2 + z^2 = 8$ в точці $M(1,2,2)$. Визначити орт нормалі в цій точці.
4. Дана поверхня $xuz = 1$. Скласти рівняння дотичної площини, яка буде паралельною до площини $x + y + z = 0$.
5. Знайти коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $x^2y + xz^2 - xuz = 6$ в точці $M(2,2,1)$, вибравши в якості параметрів деякі дві з декартових координат.
6. Знайти нормальну кривину гіперболічного параболоїда $z = ax^2 - by^2$ в точці $P(0,0)$ у напрямку $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

7. Записати рівняння кривих, які мають головні напрямки в вершинах еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
8. Знайти гаусову та середню кривини гіперболічного параболоїда $z = axu$ в точці $(0,0,0)$
9. Знайти асимптотичні лінії катеноїда $\vec{r}(u, v) = (chu \cos v, chu \sin v, u)$.
10. Знайти тип точки $O(0,0,0)$ на поверхнях $z = x^2 - y^2$ і $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.
11. Визначити тип точок конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
12. Поверхня, задана рівнянням $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{l}(u)$ називається *розгортною*, якщо вона задовольняє умову $(\vec{\rho}'(u), \vec{l}'(u), \vec{l}(u)) = 0$. Довести, що якщо поверхня розгортна, то її повна кривина дорівнює 0.

Тема 3. Внутрішня геометрія поверхонь

Приклади розв'язання задач

Задача 3.1 Знайти довжину дуги AB лінії $u = v^2$, що лежить на поверхні $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$, якщо $A(u=0, v=0), B(u=4, v=2)$.

Розв'язання. Нехай $v = t$. Тоді $u = t^2$, $du = 2t dt$, $dv = dt$. Використовуючи результати задачі 2.3, знайдемо $ds^2 = 4t^2 dt^2 + (4 + t^4) dt^2 = (t^2 + 2)^2 dt^2$. Точка A відповідає значенню параметра $t=0$, а точка B відповідає значенню параметра $t=2$. Знайдемо довжину дуги AB , використовуючи формулу (2.3):

$$s = \int_0^2 \sqrt{ds^2} = \int_0^2 \sqrt{(t^2 + 2)^2} dt = \int_0^2 (t^2 + 2) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 2t \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}.$$

Задача 3.2 Знайти кут між кривими $l_1: u=0$ й $l_2: u=2v$, що лежать на поверхні $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$.

Розв'язання. Точка перетину цих кривих $M(u=0, v=0)$. Для кривої l_1 будемо мати $du=0$, а для кривої l_2 : $\delta u = 2\delta v$. Використовуючи результати задачі 2.3, запишемо першу квадратичну форму в точці M : $ds^2 = du^2 + 4dv^2$. Далі скористаємося формулою (2.4):

$$\cos \phi = \frac{du \delta u + 4dv \delta v}{\sqrt{du^2 + 4dv^2} \sqrt{\delta u^2 + 4\delta v^2}} = \frac{4dv \delta v}{\sqrt{4dv^2} \sqrt{4\delta v^2 + 4\delta v^2}} = \frac{4du \delta v}{2du \sqrt{2} \delta v} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Звідси знаходимо, що $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 3.3 Знайти площу фігури, що лежить на поверхні

$\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ і обмежена лініями $u = 0, v = 0, u = 1, v = 2$.

Розв'язання. Скористаємося результатом задачі 2.3

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1(4+u^2) - 0^2} = \sqrt{4+u^2}.$$

За формулою (2.6) одержимо

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{4+u^2} du dv = 2 \int_0^1 \sqrt{4+u^2} du = 2 \left(\frac{1}{2} u \sqrt{4+u^2} + 2 \arcsin \frac{u}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \sqrt{5} + 4 \arcsin(1/2) = \sqrt{5} + 4\pi/6 = 2\pi/3 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Задача 3.4 Знайти символи Крістоффеля поверхні $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$.

Розв'язання. Скористаємося результатами $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = u^2 + 4$ з задачі 5.14 для знаходження матриці, оберненої до матриці першої квадратичної форми. Отримаємо

$$(g^{ij}) = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2 + 4) \end{pmatrix},$$

звідки маємо $g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{1}{u^2 + 4}$.

Далі обчислюємо символи Крістоффеля першого роду за формулою

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}).$$

Обчислення показують, що всі $g_{ij,2} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v} = 0$, а з $g_{ij,1} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}$ відмінна від нуля тільки одна похідна, а саме $g_{22,1} = 2u$.

Обчислимо символи Крістоффеля першого роду

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2} (-g_{11,1} + g_{11,1} + g_{11,1}) = 0, \quad \Gamma_{112} = \frac{1}{2} (-g_{11,2} + g_{12,1} + g_{21,1}) = 0, \\ \Gamma_{121} &= \frac{1}{2} (-g_{12,1} + g_{21,1} + g_{11,2}) = 0, \quad \Gamma_{122} = \frac{1}{2} (-g_{12,2} + g_{22,1} + g_{21,2}) = u, \\ \Gamma_{211} &= \frac{1}{2} (-g_{21,1} + g_{12,1} + g_{11,2}) = 0, \quad \Gamma_{212} = \frac{1}{2} (-g_{21,2} + g_{12,2} + g_{22,1}) = u, \\ \Gamma_{221} &= \frac{1}{2} (-g_{22,1} + g_{21,2} + g_{12,2}) = -u, \quad \Gamma_{222} = \frac{1}{2} (-g_{22,2} + g_{22,2} + g_{22,2}) = 0. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо символи Крістоффеля другого роду за формулою

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijm} g^{mk}:$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11m} g^{m1} = \Gamma_{111} g^{11} + \Gamma_{112} g^{21} = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12m} g^{m1} = \Gamma_{121} g^{11} + \Gamma_{122} g^{21} = 0, \\ \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{21m} g^{m1} = \Gamma_{211} g^{11} + \Gamma_{212} g^{21} = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22m} g^{m1} = \Gamma_{221} g^{11} + \Gamma_{222} g^{21} = -u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{11m} g^{m2} = \Gamma_{111} g^{12} + \Gamma_{112} g^{22} = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{12m} g^{m2} = \Gamma_{121} g^{12} + \Gamma_{122} g^{22} = \frac{u}{u^2 + 4}, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{21m} g^{m2} = \Gamma_{211} g^{12} + \Gamma_{212} g^{22} = \frac{u}{u^2 + 4}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{22m} g^{m2} = \Gamma_{221} g^{12} + \Gamma_{222} g^{22} = 0.\end{aligned}$$

Задача 3.5 На поверхні $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ знайти диференціальні рівняння геодезичних ліній.

Розв'язання. З попередньої задачі

$$\Gamma_{22}^1 = -u, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{u^2 + 4}.$$

Всі інші символи Крістоффеля другого роду дорівнюють нулю. Рівняння

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{array} \right| = 0$$

з урахуванням того, що

$$\Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = \Gamma_{11}^1 u' u' + \Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{21}^1 v' u' + \Gamma_{22}^1 v' v' = -u(v')^2,$$

$$\Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = \Gamma_{11}^2 u' u' + \Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{21}^2 v' u' + \Gamma_{22}^2 v' v' = 2 \frac{u u' v'}{u^2 + 4},$$

набуває вигляду
$$\left| \begin{array}{cc} u' & v' \\ u'' - u(v')^2 & v'' + 2 \frac{u u' v'}{u^2 + 4} \end{array} \right| = 0.$$

Якщо за параметр виберемо змінну u , тобто рівняння геодезичної шукатимемо у вигляді $v = v(u)$, то $u' = 1$, $u'' = 0$, і шукане рівняння запишеться у вигляді

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & v' \\ -u(v')^2 & v'' + 2 \frac{u v'}{u^2 + 4} \end{array} \right| = 0.$$

Отже, шукане рівняння

$$v'' + 2 \frac{u v'}{u^2 + 4} + u(v')^3 = 0.$$

Задача 3.6 Довести, що конус і площина локально ізометричні.

Розв'язання. Рівняння площини в декартових координатах має, наприклад, вигляд $\bar{r}(x, y) = (x, y, 0)$, тому перша квадратична форма запишеться у вигляді $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Розглянемо неявне рівняння конуса: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Одна з параметризацій конуса має вигляд $\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$. Знаходимо перші похідні $\vec{r}_u = (-v \sin u, v \cos u, 0)$ і $\vec{r}_v = (\cos u, \sin u, 1)$ і коефіцієнти першої квадратичної

форми, отримаємо $ds^2 = v^2 du^2 + 2dv^2$. Покажемо, що заміна
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}v \cos \frac{u}{\sqrt{2}}, \\ y = \sqrt{2}v \sin \frac{u}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

локальних параметрів є ізометричним відображенням. Дійсно, диференціали параметрів площини мають вигляд $dx = \sqrt{2} \cos \frac{u}{\sqrt{2}} dv - v \sin \frac{u}{\sqrt{2}} du$ і

$dy = \sqrt{2} \sin \frac{u}{\sqrt{2}} dv + v \cos \frac{u}{\sqrt{2}} du$. Підставляючи їх у першу квадратичну форму площини, отримаємо першу квадратичну форму конуса, що і треба було довести.

Задачі для самостійної роботи

1. Знати кут між лініями $u + v = 0$ та $u - v = 0$, що належать поверхні $\vec{r}(u, v) = (4(u + v), 3(u - v), 2uv)$.

2. Знайти площу, яку обмежує крива $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ на сфері радіуса 2.

3. Знайти векторне рівняння гаусового образу конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

4. Перша квадратична форма деякої поверхні має вигляд $ds^2 = (4u^2 + 1)du^2 + 5dv^2$. Знайти кут між координатними лініями цієї поверхні.

5. Показати, що конус і циліндр локально ізометричні.

6. Показати, що поверхня $\vec{r}(u, v) = (u, \sin u, v)$ ізометрична площині,

причому відображення ізометрії мають вигляд
$$\begin{cases} x = \int \sqrt{1 + \cos^2 \xi} d\xi, \\ y = v. \end{cases}$$

7. Показати, що гелікоїд $\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ та катеноїд $\vec{r}(z, t) = (chz \cos t, chz \sin t, z)$ є ізометричними поверхнями.

Тема 4. Метричні та топологічні простори

Приклади розв'язання задач

Задача 4.1 Чи є функція $\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ метрикою на множині точок площини?

Розв'язання. Функція задана коректно, оскільки максимум невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом.

Перевірка аксіоми 1 полягає у наступних еквіваленціях:

$$\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - x_2| = 0, \\ |y_1 - y_2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

Симетричність функції випливає з властивостей модуля.

Наведемо 3 способи перевірки нерівності трикутника.

1) Треба скористатися властивістю (2) модуля (додаток А) та визначенням найбільшого значення двох дійсних чисел. Тоді

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}.$$

Аналогічно,

$$|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}.$$

Тому, відповідно до властивості (9) додатку А, для найбільшого з двох чисел $|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ маємо

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2).$$

2) При другому способі перевірки нерівності трикутника припустимо, що $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$. Тоді отримаємо

$$\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2|.$$

Відповідно, враховуючи властивість (2) додатку А модуля, $\rho(M_1, M_2) \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$. Очевидно також, що

$$|x_1 - x_3| \leq \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} = \rho(M_1, M_3),$$

$$|x_3 - x_2| \leq \max\{|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|\} = \rho(M_3, M_2).$$

Залишилось додати нерівності однакового змісту.

3) Ще один спосіб доведення аксіоми трикутника можна отримати, використовуючи властивість (11) модуля (додаток А).

Задача 4.2 Чи є функція $\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ метрикою на множині $C_{[a, b]}$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій.

Розв'язання. Функція задана коректно, оскільки максимум невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом і за теоремою Вейєрштраса неперервна функція, задана на відрізку, досягає свого найбільшого значення.

Перевірка аксіоми 1 полягає у наступних еквіваленціях:

$$\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a, b]) |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Симетричність функції впливає з властивостей модуля.

Для перевірки аксіоми трикутника скористаємося тим, що для будь-якої функції $\omega(x) \in C_{[a, b]}$ за визначенням найбільшого значення функції виконується $\omega(x) \leq \max_{x \in [a, b]} \omega(x)$. За правилом додавання нерівностей однакового змісту

отримуємо, що на відрізку $[a, b]$ для будь-яких функцій $\omega_1(x), \omega_2(x) \in C_{[a, b]}$ має місце нерівність $\omega_1(x) + \omega_2(x) \leq \max_{x \in [a, b]} \omega_1(x) + \max_{x \in [a, b]} \omega_2(x)$. Тоді за властивістю

(9) максимуму (додаток А) маємо

$$\max_{x \in [a, b]} (\omega_1(x) + \omega_2(x)) \leq \max_{x \in [a, b]} \omega_1(x) + \max_{x \in [a, b]} \omega_2(x).$$

Далі, для будь-яких трьох функцій f, g, h виконується нерівність

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Візьмемо максимальне значення лівої та правої частин:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|).$$

Відповідно отриманій раніше нерівності маємо

$$\max_{x \in [a, b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|,$$

тобто

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

і нерівність трикутника доведена.

Задача 4.3 Чи є функція $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ метрикою на

множині обмежених на відрізку $[a, b]$ функцій.

Розв'язання. Функція задана коректно, оскільки супремум невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом і той факт, що ρ є дійсним числом (не дорівнює ∞) впливає з обмеженості функцій на відрізку.

Перевірка аксіоми 1 полягає у наступних еквіваленціях:

$$\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a, b]) |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Симетричність функції впливає з властивостей модуля.

При перевірці нерівності трикутника скористаємося тим, що для будь-яких трьох обмежених функцій f, g, h і будь-якого $x \in [a, b]$ виконується властивість (2) супремума (додаток А) і тому за властивістю (15) супремум суми функцій дорівнює сумі супремумів:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|.$$

Таким чином, число $\rho(f, h) + \rho(h, g)$ є верхньою гранню для функції $|f(x) - g(x)|$. Супремум – це за визначенням найменша з верхніх граней. Тому підсилюючи останню нерівність, отримаємо $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$, тобто нерівність трикутника виконується.

Задача 4.4 Розглянемо множину R^2 , елементи якої будемо позначати буквами $A, B, C, \dots$. За елементом $(0, 0) \in R^2$ закріпимо позначення O . Розглянемо також сукупність τ підмножин з R^2 , що складається з: порожньої множини; відкритих куль $B_\varepsilon(O)$ радіуса ε з центром у точці O ; множин виду $\{(A, B) \subset OA : (A, B) \cap O = \emptyset\}$, де OA - пряма, що проходить через точки O й A ; і всіляких їх об'єднань. Покажемо, що сім'я τ задає топологію на R^2 .

Розв'язання. Перевіримо аксіоми топології.

Аксіома 1 виконується. Дійсно, $\emptyset \in \tau$ за умовою задачі, $R^2 \in \tau$, тому що для будь-якої точки з R^2 можна вказати деяку підмножину із сім'ї τ , що містить цю точку, тобто R^2 є об'єднанням елементів з τ .

Аксіома 2. Перетинами елементів із сім'ї τ є або $\emptyset$, або $B_\varepsilon(O)$, або $(A, B) \subset OA$. Таким чином, аксіома 2 виконується

Виконання аксіоми 3 випливає з описання сукупності τ .

Оскільки усі аксіоми виконані, то сукупність τ є топологією на R^2 .

Задача 4.5 Чи утворює топологію на прямій R

а) множина променів виду (a, ∞) ?

б) множина променів виду $[a; \infty)$?

Розв'язання.

а) множина променів виду (a, ∞) утворює топологію на R . Ця топологія називається «топологією стрілки».

б) множина променів виду $[a; \infty)$ не є топологією, оскільки не завжди виконується друга аксіома. Наприклад, об'єднання $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \infty \right) = (0, \infty)$ не належить заданій множині.

Задача 4.6 Нехай ρ - звичайна евклідова метрика на площині (тобто $\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), де $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Уведемо нову функцію відстані на площині за формулою

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} \rho(z_1, z_2), & \text{якщо пряма } z_1 z_2 \text{ проходить через початок координат,} \\ \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2), & \text{якщо пряма } z_1 z_2 \text{ не проходить через початок координат,} \\ 0, & \text{якщо } z_1 = z_2. \end{cases}$$

Показати, що $d(z_1, z_2)$ є метрикою на R^2 . Знайти вигляд відкритих куль.

Розв'язання. Переконаємось, що функція $d(z_1, z_2)$ задана коректно і перевіримо аксіоми метрики.

Оскільки $\rho(z_1, z_2)$ - невід'ємна функція, то $d(z_1, z_2) \geq 0$, тобто функція $d(z_1, z_2)$ задана коректно. Перевіримо виконання аксіом.

1. Нехай $d(z_1, z_2) = 0$. Тоді $z_1 = z_2$, оскільки в протилежному випадку $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) > 0$, якщо пряма $z_1 z_2$ проходить через початок координат і $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) > 0$, якщо пряма $z_1 z_2$ не проходить через початок координат. Це суперечить умові, що ρ – метрика. Обернено, нехай $z_1 = z_2$, тоді очевидно, що $d(z_1, z_2) = 0$.

2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, оскільки $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ й $\rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) = \rho(z_2, 0) + \rho(0, z_1)$.

3. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. Тут потрібно розглянути всі можливі випадки розташування точок z_1, z_2, z_3 на площині.

Випадок 1. Нехай $0 \in z_1 z_2$, $z_3 \in z_1 z_2$. Тоді

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

Випадок 2. Нехай $0 \in z_1 z_2$, $z_3 \notin z_1 z_2$. Одержуємо

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) &\leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \leq \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) = \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2). \end{aligned}$$

Випадок 3. Нехай $0 \notin z_1 z_2$, $0 \notin z_1 z_2$, $z_3 \in 0 z_1$.

Будемо мати

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) &\leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) = \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2). \end{aligned}$$

Випадок 4. Нарешті, якщо $0 \notin z_1 z_2$, $z_3 \notin 0 z_1$, $z_3 \notin 0 z_2$, то

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) &\leq \rho(z_1, 0) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) + \rho(z_3, 0) = \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2). \end{aligned}$$

Отже, d - метрика на R^2 .

Розглянемо вид відкритих щодо метрики d куль. Нехай $B_\varepsilon(z_0)$ – куля в (R^2, d) , тоді, за означенням відкритої кулі, $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in R^2 : d(z, z_0) < \varepsilon\}$. Тут треба розглянути два випадки:

1) Нехай $z_0 = 0$. Тоді $\forall z \quad d(z, z_0) = d(z, 0) = \rho(z, 0)$ й означення відкритої кулі переписеться у вигляді $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in R^2 : \rho(z, 0) < \varepsilon\}$. Значить у випадку, коли центр кулі збігається з початком координат, куля являє собою відкрити

кулю радіуса ε із центром у точці $z_0 = 0$, тобто звичайну відкриту кулю на площині R^2 .

2) Якщо ж $z_0 \neq 0$, то покладемо $h = \rho(z_0, 0)$. Тут теж можливі два випадки: $\varepsilon \leq h$ і $\varepsilon > h$. Якщо $\varepsilon \leq h$, то всі елементи кулі $B_\varepsilon(z_0)$ лежать на прямій $0z_0$. Дійсно, якщо $z \notin 0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, 0) + \rho(0, z_0) > \rho(0, z_0) = h$. З умови $z \in 0z_0$ випливає, що $d(z, z_0) = \rho(z, z_0)$. Таким чином, куля $B_\varepsilon(z_0)$ в цьому випадку буде множиною точок площини, що лежать на прямій $0z_0$ і знаходяться від точки z_0 на відстані, меншій ε . Інакше кажучи, це буде інтервал на прямій $0z_0$ із центром у точці z_0 й довжиною 2ε .

Нехай тепер $\varepsilon > h$. Якщо точка z належить кулі $B_\varepsilon(z_0)$, але не належить прямій $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, 0) + \rho(0, z_0) = \rho(z, 0) + h < \varepsilon$, звідки $\rho(z, 0) < \varepsilon - h$. Це означає, що кулі $B_\varepsilon(z_0)$ належать ті точки, які знаходяться від точки 0 на відстані, меншій ніж $\varepsilon - h$. Якщо точка z належить кулі $B_\varepsilon(z_0)$ й належить прямій $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, z_0) < \varepsilon$, тобто кулі $B_\varepsilon(z_0)$ належать ті точки, що лежать на прямій $0z_0$, які знаходяться від точки z_0 на відстані, меншій ε . Таким чином, якщо $\varepsilon > h$, то відкрита куля $B_\varepsilon(z_0)$ являє собою об'єднання інтервалу прямої $0z_0$ із центром у точці z_0 й відкритої кулі із центром у точці 0 й радіусом $\varepsilon - h$.

Задача 4.7 Довести, що коли ρ_1, ρ_2 - метрики на M , то $\max(\rho_1, \rho_2)$ - теж є метрикою на множині M .

Розв'язання. Обмежимося перевіркою нерівності трикутника. Так як $(\forall x, y, z \in M)$

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \leq \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\},$$

$$\rho_2(x, y) \leq \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y) \leq \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\},$$

то $\max\{\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)\} \leq \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(z, y), \rho_2(z, y)\}$, що й треба довести.

Задачі для самостійної роботи

1. На множині точок кола з центром O задано функцію $\rho(x, y) = \angle xOy$, яка парі точок x, y кола ставить у відповідність величину центрального кута, сторони якого проходять через ці точки. Довести, що ρ є метрикою.

2. Чи будуть метриками на числовій прямій наступні функції

а) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$,

б) $\rho(x, y) = x^3 - y^3$,

в) $\rho(x, y) = \|x\| - \|y\|$,

г) $\rho(x, y) = |\cos x - \cos y|$.

3. Знайти відстань між функціями $x(t) = t^3$ і $y(t) = 3t + 4$ в просторі $C_{[0,2]}$.

4. Знайти відстань між функціями $x(t) = t^2$ і $y(t) = 2t + 3$ в просторі $C\left[0, \frac{7}{2}\right]$.

5. Знайти пари гомеоморфних серед наступних множин: пряма, коло, відкритий круг, границя квадрату, площа, відрізок, інтервал, коло з виколотою точкою.

6. (R_2, τ) – антидискретний топологічний простір. A – півплощина без границі. Чи є ця множина відкритою або замкненою?

7. (R_2, τ) – дискретний топологічний простір. A – відкритий круг. Знайти замикання та внутрішність цієї множини.

8. (R, τ) – евклідов топологічний простір. A – множина раціональних чисел. Знайти границю цієї множини.

Тема 5. Неперервні та гомеоморфні відображення топологічних просторів

Приклади розв'язання задач

Задача 5.1 Задати формулою деяке гомеоморфне відображення топологічного простору (R, τ) , де τ - евклідова топологія, і інтервалу в цьому просторі з індукованою топологією.

Розв'язання. В якості шуканого відображення можна взяти відображення, що задається формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Воно є взаємно однозначним і взаємно неперервним та переводить інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ у пряму R .

Зауважимо, що коли задано будь-який інший інтервал (a, b) , то спочатку лінійним перетворенням c (яке, очевидно, буде гомеоморфізмом) його треба перевести в інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а потім розглянути композицію $f \circ c$, яка і буде шуканим гомеоморфізмом.

Задача 5.2 Чи гомеоморфні топологічні простори (T_1, τ_1) - квадрат та (T_2, τ_2) - хрест, топології на яких індуковані евклідовою топологією площини.

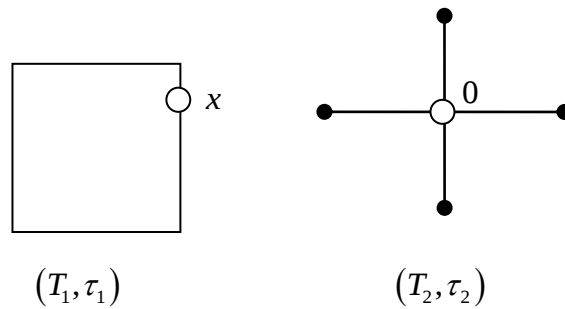


Рисунок 5.1 – Простори $T_1 \setminus \{x\}$ і $T_2 \setminus \{0\}$

Розв’язання. Припустимо, що існує відображення $f: T_1 \rightarrow T_2$, яке є гомеоморфізмом. За теоремою 5.7 топологічні простори $T_1 \setminus \{x\}$, $x \in T_1$ та $T_2 \setminus \{f(x)\}$ теж гомеоморфні. На рисунку 5.1 $f(x) = 0$. Але це не можливо, оскільки $T_1 \setminus \{x\}$ зв’язна множина, а $T_2 \setminus \{f(x)\}$ має або дві, або чотири компоненти зв’язності (на рисунку їх чотири). Значить наше припущення невірне і ці простори негомеоморфні.

Задача 5.3 Чи буде відображення $f(x) = \sin x: R_3^+ \rightarrow R$ топологічних просторів неперервним і в яких точках? Топологія τ на R евклідова, а топологія τ_1 на R_3^+ задається за допомогою ФСО $x_0 = \{x_0\} \cup (a, +\infty)$, $a \in R$.

Розв’язання. На рисунку 5.2 на горизонтальній прямій об’єднання інтервалів є прообразом деякого околу точки $f(x_0)$. Очевидно, цей прообраз не може мати підмножиною жодний з променів типу $(a, +\infty)$, тобто не існує околу точки x_0 , образ якого включається в $U_{f(x_0)}$. Таким чином, це відображення є розривним в кожній точці.

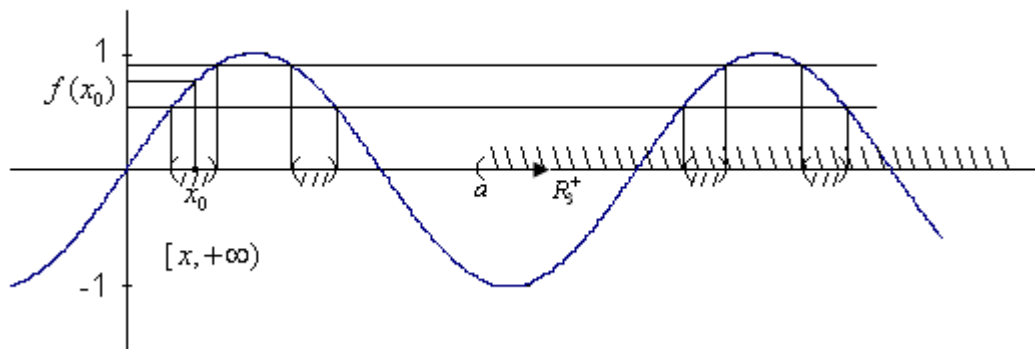


Рисунок 5.2 – Графік відображення

Задача 5.4 Чи буде відображення $f: R_3^0 \rightarrow R_5^0$, яке задається формулою
$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
 неперервним і в яких точках? Тут символом R_3^0 позначено топологічний простір (R, τ) з ФСО $x_0 = \{x_0\} \cup (-\infty, -|a|) \cup (|a|, +\infty)$, а символом R_5^0 - топологічний простір (R, τ_1) з ФСО $x_0 = \{x_0\} \cup (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

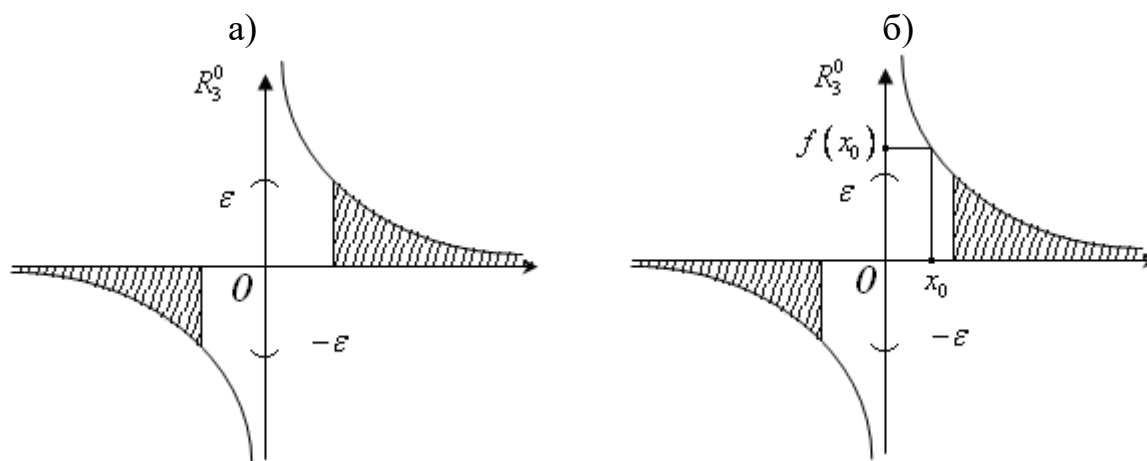


Рисунок 5.3 – Графік відображення

а) перевіримо неперервність у точці 0.

Довільний окіл її образу має вигляд $U_{f(0)} = (-\varepsilon, +\varepsilon)$, а його прообраз є множиною $f^{-1}(U_0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \cup \{0\}$. Оскільки $\left(\forall a \geq \frac{1}{\varepsilon}\right)(U_0 \subset f^{-1}(0))$, то f неперервне в точці 0.

б) перевіримо неперервність в довільній точці, відмінній від 0.

Нехай це буде точка x_0 , тоді $U_{f(x_0)} = (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \cup \left\{\frac{1}{x_0}\right\}$, а

$$f^{-1}(U_{f(x_0)}) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) \cup \{x_0\}. \text{ Знову отримали, що } \left(\forall a \geq \frac{1}{\varepsilon}\right)(U_{f(x_0)} \subset f^{-1}(U_{x_0})).$$

Робимо загальний висновок про неперервність відображення f в будь-якій точці.

Задача 5.5 Чи є зв'язні топологічні простори: (R, τ) з евклідовою топологією, (Q, τ_0) з індукованою топологією?

Розв'язання. Очевидно (R, τ) є зв'язним, що відомо ще з курсу математичного аналізу. Але множину раціональних чисел можна розбити на дві непорожні відкриті множини, наприклад, $Q = \{(-\infty, \sqrt{2}) \cap Q\} \cup \{(\sqrt{2}, +\infty) \cap Q\}$. Отже, (Q, τ_0) – незв'язний топологічний простір.

Задача 5.6 Розглянемо відрізок $[0,1]$ і будемо вважати в ньому відкритими порожню множину й усі множини, що утворюються викиданням із відрізка не більше ніж зліченного числа точок. Довести, що сім'я відкритих множин утворює топологію, яка задовольняє аксіому T_1 віддільності, але не задовольняє аксіому T_2 .

Розв'язання. Зупинимось лише на перевірці аксіом віддільності. Нехай x і y – дві різні точки відрізка $[0,1]$. Тоді окіл $O_x = [0,1] \setminus \{y\}$ точки x не містить

точку y , і окіл $O_y = [0,1] \setminus \{x\}$ точки y не містить точку x . Аксиома T_1 віддільності виконана. Але для цих точок не можна вказати такі околи O_x й O_y , що $O_x \cap O_y = \emptyset$. Дійсно, околи отримуються з відрізка викиданням не більше ніж зліченної множини точок, а відрізок має потужність континууму.

Задача 5.7 Довести, що круг з виколотою точкою і кільце гомеоморфні.

Розв'язання. Можна вважати, що круг з виколотою точкою складається з таких точок X , що $0 < AX < 1$, а кільце складається із таких точок Y , що $1 < AY < 2$ (A – виколота точка). Гомеоморфізм круга і кільця можна задати наступним чином. Відобразимо точку X в точку Y , яка лежить на промені AX , причому $AY = 1 + AX$. Відзначимо, що якщо би точка A не виколювалась із кола, то такого відображення кола на кільце не існувало б.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай (X, τ) – топологічний простір, Y – довільна множина і f – деяке відображення з X в Y . Показати, що задання на Y тривіальної топології забезпечує неперервність відображення f .

2. Розглянемо на множині $X = [0, 2\pi]$ топологію, індуковану природною топологією на R . Описати таку топологію на множині $Y = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, щоб відображення $f : X \rightarrow Y$, яке задається формулами $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, було неперервним. Як називається така топологія?

3. Визначити чи є перелічені нижче функції неперервними і в яких точках?

а) $f_1(x) = \sin x : R_3^+ \rightarrow R$

б) $f_2(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} : R_3^- \rightarrow R,$

в) $f_3(x) = x^2 : R_5^- \rightarrow R,$

г) $f_4(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{раціональне} \\ 1, & \text{якщо } x - \text{іраціональне} \end{cases} : R_1 \rightarrow R,$

д) $f_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} : R_3^\circ \rightarrow R_5^\circ,$

е) $f_6(x) = \arctg x : R \rightarrow R_6^-.$

Тема 6. Топологічні многовиди

Приклади розв'язання задач

Задача 6.1 Обчислити ейлерову характеристику сфери з ручкою та однією діркою.

Розв'язання. Заданий многовид позначається символом $Q_{1,1}$. Його ейлерова характеристика за формулою (6.2) дорівнює $\chi(Q_{1,1}) = 2 - 2 - 1 = -1$.

Задача 6.2 Обчислити ейлерову характеристику сфери з двома дірками, заклеєними листами Мьобіуса.

Розв'язання. За формулою (6.3) отримаємо $\chi(\psi_1) = 0$. Цей многовид називається пляшкою Клейна.

Задачі для самостійної роботи

- 1) Описати край кожного з наступних многовидів: відрізок, круг, сфера S^2 , сфера S^n , лист Мьобіуса.
- 2) Користуючись клітинним розбиттям, знайти ейлерову характеристику
 - тетраедру і використати результат для знаходження ейлерової характеристики сфери,
 - ручки,
 - сфери з трьома дірками.
- 3) Знайти ейлерову характеристику
 - сфери з однією ручкою та двома дірками,
 - сфери з трьома дірками, кожна з яких заклеєна листом Мьобіуса.

Тема 7. Означення та способи задання гладких многовидів.

Приклади побудови гладкої структури

Приклади розв'язання задач

Задача 7.1 Довести, що графік неперервної функції n змінних в просторі E_{n+1} , для якої $D(f)$ є областю в просторі R^n , є топологічним многовидом. Знайти його розмірність.

Розв'язання. Графіком функції $f = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ є множина $\Gamma_f = \{(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) : x^{n+1} = f(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$. Топологічна структура на Γ_f визначається природною топологією простору E_{n+1} . Розглянемо відображення $h : \Gamma_f \rightarrow R^n$ за правилом: $M(x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}) \in \Gamma_f \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n) \in D(f)$. За умовою, область визначення $D(f)$ цієї функції є відкритою в R^n множиною.

Отже, пара (Γ_f, h) є картою на множині точок графіку і задає на цій множині структуру елементарного топологічного многовиду розмірності n .

Задача 7.2 Довести, що будь-який компактний n -вимірний топологічний многовид M є неелементарним.

Розв'язання. Припустимо, що M покривається однією картою, тоді існує гомеоморфізм $\varphi: M \rightarrow \varphi(M) \subset R^n$, а це означає, що $\varphi(M)$ теж компактна множина в R^n , а тому вона замкнена. З іншого боку, ця множина як образ відкритої множини при гомеоморфізмі повинна бути відкритою, тобто вона є одночасно відкритою і замкненою в R^n . Оскільки простір R^n є зв'язним, то $\varphi(M)$ є порожньою множиною або всім R^n . Якщо $\varphi(M)$ є порожньою, то M теж є порожньою, якщо ж $\varphi(M) = R^n$, то це також дає протиріччя, тому що R^n не компактний.

Задача 7.3 Довести, що пара перпендикулярних прямих не є многовидом.

Розв'язання. Очевидно, що множина точок заданої пари перпендикулярних прямих є топологічним підпростором евклідового топологічного простору E_2 . При будь-якому його розбитті на відкриті множини, відкрита множина, що містить точку перетину даних прямих, обов'язково містить окіл цієї точки перетину, який має вигляд хреста. Оскільки не існує гомеоморфізму хреста та інтервалу, то можна зробити висновок про неможливість побудови на множині точок пари перпендикулярних прямих структури топологічного многовиду.

Задача 7.4 На площині E_2 задано множину $M = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x} \wedge y > 0 \right\}$.

Показати, що вона є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

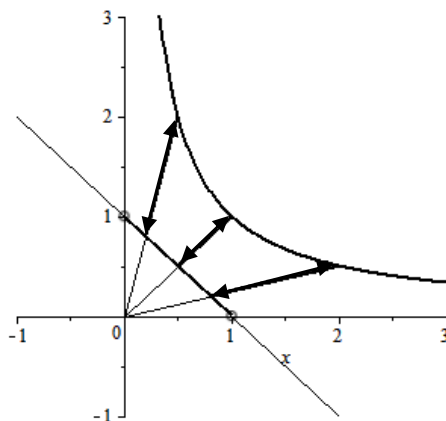


Рисунок 7.1 – Центральне проектування гіперболи на пряму

Розв'язання. Задана множина є множиною точок гіперболи, розташованих в першій координатній чверті. Доведемо, що ця множина покривається однією картою. Розглянемо пряму $x + y = 1$ і центральне проектування f з центром в початку координат O (рис. 7.1). Образом множини

M в цьому відображенні буде інтервал на прямій $x + y = 1$ з кінцями в точках $(0,1)$ і $(1,0)$. Щоб переконатись в тому, що відображення f є гомеоморфізмом, задамо його за допомогою функцій. Точка $P(x, y)$ гіперболи переходить в точку $P'(x', y')$ прямої $x + y = 1$, яка лежить на прямій OP . Можна отримати формули $x' = \frac{x}{x+y}, y' = \frac{y}{x+y}$ центрального проектування. Легко переконатись, що ці формули задають гомеоморфне відображення множини M на відкриту множину на прямій R , тому пара (M, f) є картою, яка покриває цю множину. Таким чином, множина M є елементарним одновимірним топологічним многовидом, а, отже, і гладким многовидом.

Задача 7.5 Побудувати гладку структуру на колі за допомогою атласу, який складається з двох карт.

Розв'язання. Задамо коло рівнянням $S^1 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Розглянемо дві точки $P_0(-1, 0), Q_0(1, 0)$ на колі та дві відкриті множини $U_1 = S^1 \setminus \{P_0\}, U_2 = S^1 \setminus \{Q_0\}$.

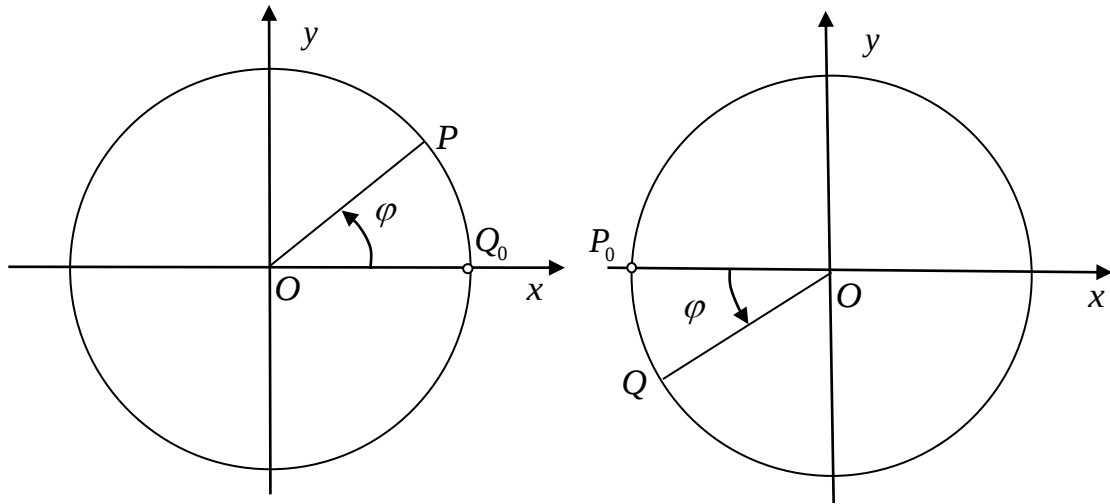


Рисунок 7.2 – Карти на колі

Введемо відображення $h_1: U_1 \rightarrow R$, при якому кожній точці P із U_1 ставиться у відповідність орієнтований кут Q_0OP , який слід відраховувати від додатного напрямку вісі абсцис (рис. 7.2). Аналогічно, розглянемо відображення $h_2: U_2 \rightarrow R$, при якому кожній точці Q із U_2 ставиться у відповідність орієнтований кут P_0OQ , що відраховується від від'ємного напрямку вісі абсцис. Очевидно, ці відображення є гомеоморфізмами, образами яких є відкрита множина $(-\pi, \pi)$ простору R , тому пари $(U_1, h_1), (U_2, h_2)$ є картами на колі. З'ясуємо, чи є ці карти узгодженими. Оскільки $U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{P_0, Q_0\}$, то $h_1(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, $h_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ і відображення $h_2 \circ h_1^{-1}: h_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow h_2(U_1 \cap U_2)$

переходу задається формулою $f(t) = \begin{cases} t - \pi, t \in (0, \pi) \\ t + \pi, t \in (-\pi, 0) \end{cases}$. Ці функції є C^∞ -гладкими, тому що вони лінійні. Отже, ми побудували на колі структуру гладкого многовиду за допомогою атласу із двох карт.

Задача 7.6 Довести, що сфера S^2 в просторі E_3 є двовимірним гладким многовидом.

Розв'язання. Задамо сферу S^2 рівнянням $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Відмітимо, по-перше, що сфера є топологічним простором з топологією τ , яка індукована природною топологією простору E_3 . Розглянемо 2 відкриті підмножини множини точок сфери: $U = S^2 \setminus \{P_0\}, P_0(0,0,1)$, $V = S^2 \setminus \{Q_0\}, Q_0(0,0,-1)$. За допомогою центрального проектування h множини U із точки P_0 спроєкуємо цю множину на екваторіальну площину α . Аналогічно, за допомогою центрального проектування k із точки Q_0 множину V спроєкуємо на площину α . Доведемо, що вказані центральні проектування є гомеоморфізмами. Спочатку розглянемо h . Нехай $M(x^1, x^2, x^3)$ – довільна точка сфери, а $M'(y^1, y^2)$ – її образ в цьому відображенні. Рівняння площини α має вигляд $\tilde{x}^3 = 0$, а рівняння прямої P_0M запишемо за двома точками $\frac{\tilde{x}^1 - 0}{x^1 - 0} = \frac{\tilde{x}^2 - 0}{x^2 - 0} = \frac{\tilde{x}^3 - 1}{x^3 - 1}$. Тоді для координат точки M' отримаємо $\tilde{x}^1 = -\frac{x^1}{x^3 - 1}; \tilde{x}^2 = -\frac{x^2}{x^3 - 1}$. Таким чином, відображення h задається системою функцій $y_1 = -\frac{x^1}{x^3 - 1}, y_2 = -\frac{x^2}{x^3 - 1}$. Знаменник $x^3 - 1 \neq 0$, тому що точка P_0 не належить U . Отже, відображення h всюди визначене і неперервне. Обернене до нього відображення h^{-1} точці $N(y^1, y^2)$ площини ставить у відповідність таку точку $N'(x^1, x^2, x^3)$ сфери, що точки P_0, N і N' належать одній прямій. Тепер нам потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\tilde{x}^1 - 0}{y_1 - 0} = \frac{\tilde{x}^2 - 0}{y_2 - 0} = \frac{\tilde{x}^3 - 1}{0 - 1}, \\ (\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2 = 1, \end{cases}$$

в якій перше рівняння є рівнянням прямої NP_0 , а друге – рівнянням сфери. Остаточного отримаємо

$$h^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{2y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}; \frac{2y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}; \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2 - 1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1} \right),$$

звідки можемо зробити висновок про неперервність відображення h^{-1} .

Таким чином, відображення h взаємно однозначне та взаємно неперервне, тобто є гомеоморфізмом між відкритою множиною U і площиною R^2 . Ми побудували карту (U, h) на сфері S^2 .

Аналогічно будується карта (V, k) . Гомеоморфізм k задається формулами: $z^1 = \frac{x^1}{x^3 + 1}; z^2 = \frac{x^2}{x^3 + 1}$. Побудовані карти утворюють атлас на сфері і наділяють її структурою двовимірного топологічного многовиду.

Доведемо, що ці карти задають гладку структуру на сфері. Для цього знайдемо функції переходу. Перетин карт є множиною $U \cap V = S^2 \setminus \{P_0, Q_0\}$. Відображення переходу $k \circ h^{-1} : h(U \cap V) \rightarrow k(U \cap V) = R^2 \setminus \{0, 0\}$ задаються функціями виду $z^1 = z^1(y^1, y^2)$, $z^2 = z^2(y^1, y^2)$. Неважко знайти явний вигляд цих функцій: $z^1 = \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}, z^2 = \frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}$. Вони є C^∞ -гладкими

функціями. Аналогічно доводиться, що відображення $h \circ k^{-1}$ задаються C^∞ -гладкими функціями, тобто за означенням карти є узгодженими.

Висновок. Сфера є двовимірним гладким многовидом. Зауважимо, що розглянуті в доведенні центральні проектування називаються стереографічними проектуваннями.

Задача 7.7 Довести, що множина M точок границі трикутника є гладким многовидом.

Розв'язання. Очевидно, що форма і розміри трикутника не важливі, тому розташуємо трикутник так, як показано на рисунку 7.3. Будемо користуватися прямокутною системою координат.

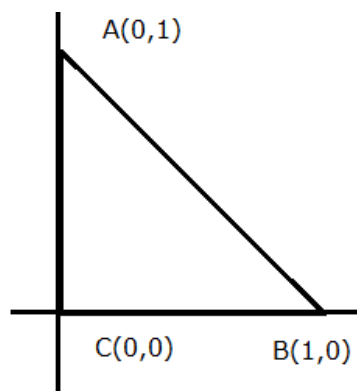


Рисунок 7.3 – Відкриті множини в трикутнику

Розглянемо три відкриті підмножини множини M :

$$\begin{aligned}U_1 &= (CA] \cup [AB), \\U_2 &= (CB] \cup [BA), \\U_3 &= (AC] \cup [CB).\end{aligned}$$

Побудуємо гомеоморфне відображення φ_1 множини U_1 у відкриту підмножину в R наступним чином:

Якщо точка P належить $(CA]$, то вона має координати $(0, y)$, $y \in (0, 1]$. Будемо вважати, що $\varphi_1(P) = y$. Якщо ж $P \in [AB)$, то оскільки рівняння прямої AB має вигляд $x + y = 1$, то точка P має координати $(x, 1 - x)$, $x \in [0, 1)$. Покладемо $\varphi_1(P) = 1 + x$. Таким чином, $\varphi_1(U_1) = (0, 1] \cup [1, 2] = (0, 2)$.

Аналогічно, для відображення $\varphi_2 : U_2 \rightarrow R$ маємо

$$\varphi_2(U_2) = \begin{cases} \varphi_2((x, 0)) = x, & x \in (0, 1) \\ \varphi_2((x, 1 - x)) = 2 - x, & x \in (0, 1] \end{cases} = (0, 2).$$

І, нарешті, для відображення $\varphi_3 : U_3 \rightarrow R$ отримаємо

$$\varphi_3(U_3) = \begin{cases} \varphi_3((0, y)) = -y, & y \in [0, 1) \\ \varphi_3((x, 0)) = x, & x \in [0, 1] \end{cases} = (-1, 1).$$

Ці відображення задаються лінійними функціями, тому є гомеоморфізмами. Отримали 3 карти (U_i, φ_i) , $i = \overline{1, 3}$, які утворюють атлас на множині M . Таким чином, на цій множині побудовано структуру одновимірного топологічного многовиду.

Щоб показати, що ця структура є гладкою, доведемо, що будь-які дві карти узгоджені. Розглянемо перші дві карти. Оскільки вони перетинаються: $U_1 \cap U_2 = (AB)$, то треба будувати відображення переходу $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ і $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ на перетині карт.

Помітимо, що $\varphi_1(AB) = (1, 2)$ і $\varphi_2(AB) = (1, 2)$. Відображення φ_1^{-1} числу $\xi \in (1, 2)$ ставить у відповідність точку $P \in (AB)$ з координатами $(\xi - 1, -\xi + 2)$, а відображення φ_2 цій парі ставить у відповідність число $2 - (\xi - 1) = 3 - \xi$. Тому, $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\xi) = 3 - \xi$, $\xi \in (1, 2)$. Функція $f(\xi) = 3 - \xi$ є лінійною, а тому і гладкою. Аналогічно отримаємо, що відображення $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ задається тією ж функцією $f(\xi) = 3 - \xi$. Таким чином, карти (U_1, φ_1) і (U_2, φ_2) узгоджені.

Так само доводиться, що карти (U_1, φ_1) і (U_3, φ_3) , а також (U_2, φ_2) і (U_3, φ_3) узгоджені.

Висновок. Множина M є одновимірним гладким многовидом.

Задача 7.8 Побудувати гладку структуру на проективній площині.

Проективною площиною RP_2 називається множина класів пропорційних ненульових трійок (x^1, x^2, x^3) дійсних чисел.

Розглянемо підмножини $U_i = \{(x^1 : x^2 : x^3) : x^i \neq 0\}, i=1,2,3$. Очевидно, $RP_2 = \bigcup_{i=1}^3 U_i$. Розглянемо такі відображення цих підмножин у площину R^2 :

$$\begin{aligned} h_1 : (x^1 : x^2 : x^3) &\rightarrow \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right), \quad h_2 : (x^1 : x^2 : x^3) \rightarrow \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2} \right), \\ h_3 : (x^1 : x^2 : x^3) &\rightarrow \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3} \right). \end{aligned}$$

Легко показати, що h_i є гомеоморфізмами. Отже, (U_i, h_i) є картами на множині RP_2 . Структуру топологічного многовиду розмірності 2 на RP_2 ми вже побудували. Дослідимо узгодженість карт. Розглянемо, для прикладу, карти (U_1, h_1) і (U_2, h_2) . Для їх перетину $U_1 \cap U_2 = \{(x^1 : x^2 : x^3) : x^1 \neq 0, x^2 \neq 0\}$ знайдемо образи при відображеннях h_1 і h_2 :

$$\begin{aligned} h_1(U_1 \cap U_2) &= \left\{ \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right) : x^2 \neq 0 \right\} = R^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\}, \\ h_2(U_1 \cap U_2) &= \left\{ \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2} \right) : x^1 \neq 0 \right\} = R^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\}. \end{aligned}$$

Позначимо $\frac{x^2}{x^1} = p, \frac{x^3}{x^1} = q$, тоді $h_1^{-1}(p, q) = (1 : p : q)$. Аналогічно, $h_2^{-1}(p, q) = (p : 1 : q)$, $h_3^{-1}(p, q) = (p : q : 1)$. На множині $U_1 \cap U_2$ виконується $p \neq 0$, оскільки $x^1 \neq 0$ і $x^2 \neq 0$. Відображення переходу на цій множині діють наступним чином: $h_2 \circ h_1^{-1}(p, q) = h_2(1 : p : q) = \left(\frac{1}{p}, \frac{q}{p} \right)$. Очевидно, що

відображення переходу задаються функціями класу C^∞ . Таким чином, карти (U_1, h_1) і (U_2, h_2) є узгодженими. Аналогічно доводиться узгодженість решти пар карт. Приходимо до висновку, що побудований атлас наділяє множину RP_2 гладкою структурою.

Задача 7.9 Довести, що коло S^1 – орієнтовний гладкий одновимірний многовид.

Розв'язання. Доведемо, що на S^1 існує орієнтований атлас, тобто S^1 – орієнтовний многовид. Дійсно, такий атлас ми побудували в задачі 7.5.

Відображення переходу задаються функціями $f(t) = t - \pi, t \in (0, \pi)$ і $f(t) = t + \pi, t \in (-\pi, 0)$. Тому $\frac{df}{dt} = 1 > 0$ в обох випадках.

Задача 7.10 Довести еквівалентність двох гладких структур на колі (атлас з чотирьох карт і атлас з двох карт).

Розв'язання. Розглянемо карти (U, h) і (U^+, h^+) з різних атласів. Оскільки вони перетинаються: $U \cap U^+ = U^+$, то треба досліджувати відображення переходу на області перетину цих карт. Маємо $h(U^+) = (0, \pi)$, $h^+(U^+) = (-1, 1)$. Композиції цих відображень діють наступним чином: $h^+ \circ h^{-1} : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$, тобто функція переходу має вигляд $h^+ \circ h^{-1}(t) = \cos t$, а обернена до неї - $h \circ (h^+)^{-1}(t) = \arccos t$. Обидва відображення переходу є C^∞ -гладкими, тобто карти узгоджені. Аналогічно, для решти пар карт об'єднаного атласу. Дійшли висновку про еквівалентність двох гладких структур на колі.

Задача 7.11 На множині $R_{2 \times 2}$ матриць другого порядку з дійсними елементами ввести гладку структуру.

Розв'язання. Розглянемо відображення $h: R^4 \rightarrow R_{2 \times 2}$, при якому $h((a, b, c, d)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Топологія на $R_{2 \times 2}$ є фактор-топологією, породженою відображенням h . Саме відображення h по суті можна розглядати як тотожне, тобто воно є гомеоморфізмом. Оскільки R^4 є гладким чотиривимірним многовидом, то за теоремою 7.1 $R_{2 \times 2}$ теж є гладким чотиривимірним многовидом.

Розглянемо підмножину $GL(2, R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc \neq 0 \right\}$ множини $R_{2 \times 2}$.

Доведемо її відкритість у топологічному просторі $R_{2 \times 2}$. Розглянемо відображення $\det: R_{2 \times 2} \rightarrow R$ таке, що матриці $A \in R_{2 \times 2}$ відповідає її детермінант $\det A$. Це відображення є неперервним, оскільки $\det A$ є многочленом. Очевидно, $GL(2, R) = (\det)^{-1}(R \setminus \{0\})$, тобто є прообразом відкритої множини при неперервному відображенні, а значить у відповідності до критерію неперервності відображення $GL(2, R)$ є відкритою множиною.

Далі, прообраз $h^{-1}(GL(2, R))$ є множиною точок простору R^4 , крім точок, координати (a, b, c, d) яких задовольняють рівняння $ad - bc = 0$. Це рівняння визначає двовимірний конус простору R^4 , який треба вилучити. Отже, прообраз є відкритою множиною в R^4 . Тоді і сама множина $GL(2, R)$ належить фактор-топології. Таким чином, пара $(GL(2, R), h^{-1})$ є картою, а множина

$GL(2, R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc \neq 0 \right\}$ є гладким многовидом розмірності 4.

Задача 7.12 Перенести гладку структуру проективної площини на зв'язку прямих тривимірного простору.

Розв'язання. Кожну з цих прямих зв'язки можна задати будь-яким її напрямним вектором, тобто поставити їй у відповідність клас пропорційних ненульових трійок (x^1, x^2, x^3) дійсних чисел. Зв'язка є топологічним простором. Топологію введемо за допомогою метрики: $\rho(l, m) = \varphi$, тобто відстань між прямими дорівнює куту між ними. Вказана відповідність є гомеоморфізмом, тому зв'язка наділяється структурою двовимірного гладкого многовиду.

Задача 7.13 Довести, що спеціальна лінійна група $SL(n, R)$ є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

Розв'язання. Позначимо $A = (a_{ij}) \in SL(n, R)$. За означенням $SL(n, R) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in R, \det(a_{ij}) = 1\}$. Множина всіх матриць n -го порядку з дійсними елементами ототожнюється з лінійним векторним простором R^{n^2} за допомогою відповідності $(a_{ij}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n-1, n})$. Розглянемо в цьому векторному просторі функцію $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n-1, n}) = \det(a_{ij})$. Оскільки вона є многочленом, то відноситься до класу C^∞ . Знайдемо $\overline{\text{grad } f}$. Для цього розкладемо визначник за елементами деякого рядка чи стовпця. Зазначимо, що

$$\frac{\partial \det(a_{ij})}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} A_{ij},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} . Це безпосередньо випливає з формули розкладу визначника за елементами рядка. Перші n координат вектора $\overline{\text{grad } f}$ отримаємо з рівності $\det(a_{ij}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$.

Наприклад, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial}{\partial a_{11}}(a_{11}A_{11}) = A_{11}$, оскільки A_{ij} в попередній рівності не залежать від елементів першого рядка. Для матриць з $SL(n, R)$ всі алгебраїчні доповнення не можуть бути рівними нулю, тому що матриці не вироджені. Отже, $\overline{\text{grad } f} \neq \bar{0}$. Згідно з теоремою 7.1 множина $SL(n, R) \in (n^2 - 1)$ -вимірним гладким многовидом.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що поверхня евклідового простору є топологічним многовидом. Яка його розмірність?

2. Побудувати гомеоморфізм, який переносить гладку структуру з трикутника на квадрат.

3. Розглянути на колі S^1 атлас з 4 карт. Побудувати гомеоморфізм, який переносить гладку структуру з кола на квадрат. Знайти карти на квадраті, які індукуються цим гомеоморфізмом.

4. Довести, що спеціальна ортогональна група $SO(n, R)$ є гладким многовидом. Знайти його розмірність.

5. Побудувати структуру гладкого многовиду, атлас якого містить принаймні дві карти, на множині точок, координати яких задовольняють рівняння $M = \{(x, y) \in R^3 : y^2 + x^2 = 2z\}$. Знайти локальні координати точки $M(1,1,1)$ в локальних картах, яким вона належить.

6. Побудувати гомеоморфізм f , який переносить гладку структуру многовиду M на топологічний простір N , де M – відкритий круг, N – одна порожнина двопорожнинного гіперboloїду.

7. Знайдіть композицію відображень $f : x \rightarrow x^3$ та $g : x \rightarrow 2\sqrt{x}$.

8. Знайдіть якобіан відображення f , заданого системою функцій

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 x^2, \\ y^2 = (x^1)^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 \end{cases} \text{ в точці } (2,0).$$

9. Дано множину $M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ і підмножини $U_1 = \{(x, y) \in M : y > 1\}$, $U_2 = \{(x, y) \in M : x < \sqrt{2}\}$, $U_3 = \{(x, y) \in M : x < \sqrt{3}\}$, $U_4 = \{(x, y) \in M : y < 0\}$. Якими підмножинами покривається множина M ?

10. Знайдіть образ множини R при відображенні $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} x$.

Тема 8. Гладкі відображення гладких многовидів та їх диференціали

Приклади розв'язання задач

Задача 8.1 Побудувати диференціал гладкого відображення F півкола радіусу 1 в півколо радіусу 2, якщо центри півкіл співпадають і F центральне проектування із центра півкола (рис.8.2).

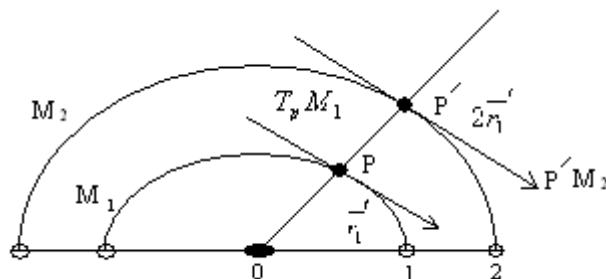


Рисунок 8.2 – Диференціал гладкого відображення півкіл

Розв'язання. Позначимо півкола відповідно M_1 і M_2 . Вони є елементарними многовидами. Дійсно, пара (M_1, h_1) , де $h_1 : \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \rightarrow x$, є картою на M_1 , а пара (M_2, h_2) , де $h_2 : \left(x, \sqrt{4-x^2}\right) \rightarrow x$ - карта на M_2 .

За умовою образом будь-якої точки $P \in M_1$ є точка $P' = F(P) = OP \cap M_2$. Знайдемо декартові координати образу точки $P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$. Оскільки P' належить прямій OP , рівняння якої має вигляд $y = kx$, де $k = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, то

розв'язавши систему
$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \tilde{x}, \\ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 4, \end{cases}$$
 отримаємо $P'\left(2x, 2\sqrt{1-x^2}\right)$. Можемо

знайти координатне представлення f відображення F . За означенням координатного представлення відображення маємо $f = h_2 \circ F \circ h_1^{-1} : x \rightarrow 2x$, тобто воно задається функцією $f(x) = 2x$.

Дотичні простори до M_1 і M_2 в точках P і P' є прямими, які ми позначимо символами $T_P M_1$ і $T_{P'} M_2$. Якщо M_1 задати рівнянням $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(x)$, то вектор $\bar{r}_1'$ буде базисним в $T_P M_1$. Тому $\forall \bar{a} \in T_P M_1 : \bar{a} = \xi \bar{r}_1'$ і, отже, ξ – локальна координата дотичного вектора $\bar{a}$. Якщо позначити через $\bar{b}$ образ вектора $\bar{a}$ при відображенні dF_P і через η – локальну координату вектора $\bar{b}$, то отримаємо координатне представлення диференціала відображення F у вигляді

$$\eta = \frac{\partial f}{\partial x} \xi. \quad (8.1)$$

Отже, $\bar{r}_1(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, тоді $\bar{r}_1' = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Виберемо в $T_P M_1$ вектор

$\bar{a}$ з локальною координатою $\xi = 1$, тобто $\bar{a} = \bar{r}_1'$. Наприклад, в точці $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

вектор $\bar{a}$ має координати $\bar{a}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. За формулою (8.1) знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ і

$\eta = 2 \cdot 1 = 2$. Для знаходження координат вектора $\bar{b}$ скористаємось рівнянням $\bar{r}_2(x) = \left(x, \sqrt{4-x^2}\right)$ півкола M_2 . Базис простору $T_{P'} M_2$ утворює вектор

$$\bar{r}'_2 = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right). \quad \text{Оскільки } \bar{b} = 2\bar{r}'_2, \quad \text{то в точці } P'(1, \sqrt{3}) \quad \text{отримаємо}$$

$$\bar{b} = 2\bar{r}'_2(1) = 2 \cdot \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Задача 8.2 Чи є півкубічна парабола зануреною кривою?

Розв'язання. Півкубічна парабола – це відображення $f: R \rightarrow E_2$, яке задається формулами $y^1 = x^2, y^2 = x^3$. Тоді $\left(\frac{\partial y^1}{\partial x}, \frac{\partial y^2}{\partial x}\right) = (2x, 3x^2)$. В точці $x = 0$ ранг диференціала відображення дорівнює нулю. Значить, це відображення не є зануренням.

Задача 8.3 Чи є відображення $f: S^1 \rightarrow R^2$ за правилом $f(\varphi) = (\cos \varphi, \sin 2\varphi)$ вкладенням?

Розв'язання. $(\forall \varphi) \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, 2\cos 2\varphi) \neq \bar{0}$, тобто $\text{rang}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 1$. З цього випливає, що f – занурення. Оскільки $f(0) = f(2\pi)$, то f не є бієкцією, а тому не є вкладенням.

Задача 8.4 Знайти регулярні точки відображення $F: R_2 \rightarrow R_3$,

$$\text{координатне представлення якого має вигляд } \begin{cases} F_1(U, V) = U, \\ F_2(U, V) = V, \\ F_3(U, V) = U^2 + V^2 \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця Якобі відображення наступна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2U \\ 0 & 1 & 2V \end{pmatrix}$, а її ранг дорівнює 2, тобто є максимальним в будь-якій точці із R_2 . Це означає, що всі точки відображення регулярні. Зауважимо, що цей факт відомий з диференціальної геометрії, оскільки це відображення задає еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2$, а функції $\begin{cases} F_1(U, V) = U, \\ F_2(U, V) = V, \\ F_3(U, V) = U^2 + V^2 \end{cases}$ дають одне із

параметричних представлень цієї поверхні, яке в диференціальній геометрії ми записували у вигляді $F(U, V) = (U, V, U^2 + V^2)$.

Задача 8.5 Довести, що відображення $F: R^2 \rightarrow R$, яке задається функцією $F(x, y) = x$, тобто є ортогональною проекцією на вісь абсцис, є гладкою субмерсією.

Розв'язання. Матриця Якобі заданого відображення в будь-якій точці має вигляд $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = (1 \quad 0)$, а отже її ранг дорівнює 1. За означенням маємо гладку субмерсію.

Задача 8.6 Показати, що гладке відображення $f : S^1 \rightarrow S^2$ кола $S^1 = \{(u, v) \in R^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ у сферу $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, при якому образом кола є множина точок сфери, які належать площині $y = 0$, є гладким вкладенням.

Розв'язання. Всі точки кола є регулярними точками гладкого відображення $f : S^1 \rightarrow S^2$ (приклад 8.6). Крім того, коло є одновимірним многовидом, а сфера двовимірним. За означенням, це відображення є гладкою іммерсією. Далі, в цьому відображенні $f(S^1) = \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0\}$, а тому існує гомеоморфізм, який відображає S^1 в $f(S^1)$. Таким чином, f є гладким вкладенням.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що проективна площина і зв'язка прямих тривимірного афінного простору дифеоморфні.

2. Довести, що лінійний простір R^{n^2} і множина квадратних матриць порядку n дифеоморфні.

3. Довести, що відображення $f : R \rightarrow R^2$, задане формулами $y^1 = x^2, y^2 = x(x^2 - 1)$, є зануренням. Чи буде це відображення вкладенням?

4. Довести, що еліпс є вкладенням кола в R^2 .

5. Довести, що відображення $f : (x, y) \rightarrow (y \sin \pi x \cdot \cos \pi x, y \sin^2 \pi x)$ є гладким відображенням $f : R^2 \rightarrow R^2$, яке переводить границю квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в коло $x^2 + y^2 - y = 0$.

6. Довести, що група $O(n)$ ортогональних $n \times n$ - матриць може бути вложена у простір R^{n^2} .

7. Чи є відображення $f : R_+ \rightarrow R^2$ за правилом $f(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$ вкладенням?

8. Побудувати диференціал dF_P гладкого відображення F параболи $y = x^2$ на параболу $y = x^2 - 1$, якщо F – центральне проектування із точки $C(0, 1)$, а P – точка перетину першої параболи і прямої, яка містить точку C і

паралельна вісі абсцис. Знайти образ у відображенні dF_P дотичного до першої параболи вектора $\overline{PQ}$, де Q належить вісі абсцис.

ЛІТЕРАТУРА

Використана література

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2 ч. Ч. 2: учебное пособие. Москва : Просвещение, 2007, 352с
2. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків: Основа, 1995. 304 с.
3. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М. Введение в топологию. Москва : Наука, 1995. 416 с.
4. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология: Москва : МЦНМО, 2008. 354 с.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Москва : Наука, 1985. 759с.
6. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. Москва : Логос, Университетская книга, 2008. 233с.
7. Кованцов Н.И. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: Сб. задач. Киев : Вища школа, 1989. 398с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.
9. Мищенко А.С, Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Москва : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. 448 с.
10. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. Москва : Наука, 1974. 276с.
11. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. Москва: Изд-во МГУ, 1990. 383с.
12. Постников М.М. Гладкие многообразия. Москва : Наука, 1987, 478с.
13. Стеганцева П.Г., Величко І.Г. Диференціальна геометрія курс лекцій. Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 144с.
14. Стеганцева П.Г. Гладкі многовиди: навчальний посібник. Запоріжжя : ЗНУ, 2015

Рекомендована література

1. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. Москва : Наука, 1987. 160с.
2. Болтянский В.Г., Ёфремович В.А. Наглядная топология: Москва : Наука, 1982. 149 с.
3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Москва : Наука, 1978. 576 с.
4. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 68 с.
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва : Наука, 1967. 664 с.

6. Смирнов С.Г. Прогулки по замкнутым поверхностям. Москва : МЦНМО, 2003. 28 с.
7. Шашкин Ю.А. Эйлерова характеристика. Москва : Наука, 1984. 96с.

ДОДАТОК А

ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ ОПЕРАЦІЙ НАД ЧИСЛАМИ ТА МНОЖИНАМИ

МОДУЛЬ ЧИСЛА

Означення. Модулем дійсного числа x називається саме число x , якщо воно невід'ємне та число $-x$ в протилежному випадку.

Властивості

$$|x| = \max\{-x, x\}; \quad (1)$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|; \quad (2)$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|; \quad (3)$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||. \quad (4)$$

Рівність (1) вірна лише для дійсних чисел, а нерівності (2)-(4) мають місце як для дійсних, так і для комплексних чисел.

ОПЕРАЦІЇ ЗНАХОДЖЕННЯ МІНІМУМУ Й МАКСИМУМУ

Означення. Мінімумом (максимумом) двох різних чисел називається менше (більше) з цих чисел.

Властивості

$$\min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, \min\{b, c\}\}; \quad (5)$$

$$\max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\}; \quad (6)$$

$$\max\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, c\}\}; \quad (7)$$

$$\min\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{\min\{a, c\}, \min\{b, c\}\}; \quad (8)$$

$$a \leq c, b \leq c \Rightarrow \max\{a, b\} \leq c; \quad (9)$$

$$\max\{a, b\} + c = \max\{a + c, b + c\}; \quad (10)$$

$$\forall a, b \geq 0 \quad (a \leq d + c, b \leq e + f) \Rightarrow \max\{a, b\} \leq \max\{d + c, e + f\}; \quad (11)$$

$$\forall a, b, c \geq 0 \quad \max\{a + b, c\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, c\}. \quad (12)$$

ТОЧНА ГРАНЬ МНОЖИНИ

Означення. Точною верхньою (точною нижньою) гранню непустої підмножини X впорядкованої множини Y називається такий елемент $y \in Y$, що для будь-якого елемента $x \in X$ виконується нерівність $x \leq y$ ($x \geq y$).

Точну верхню та точну нижню грані позначають $\sup X$ та $\inf X$ відповідно.

Властивості.

Якщо $A + B$ – множина чисел виду $a + b$, де $a \in A \subset R$ й $b \in B \subset R$, то

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad (15)$$

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B \quad (16)$$

Якщо $A \cdot B$ – множина чисел виду $a \cdot b$, де $a \in A \subset R$ й $b \in B \subset R$, то

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \quad (17)$$

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B \quad (18)$$

Якщо $A - B$ – множина чисел виду $a - b$, де $a \in A \subset R$ й $b \in B \subset R$, то

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B \quad (19)$$

ДОДАТОК Б

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Загальне рівняння площини

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

$\bar{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – нормальний вектор.

Канонічні рівняння прямої у просторі, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Пряма в просторі, що задається як перетин площин

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \end{cases}$$

має напрямний вектор $\bar{l} = [\bar{a}, \bar{a}_1] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}.$

Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна вектору $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Детермінантне рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямні вектори $\bar{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ та $\bar{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Косинус кута φ між векторами $\bar{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ та $\bar{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ у декартових координатах:

$$\cos \varphi = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Зв'язок між декартовими x, y та полярними ρ, φ координатами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Вектор $\overline{\nabla F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ – градієнт функції $F(x, y, z)$.

Кососиметрична матриця третього порядку має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний вигляд квадратичної форми від двох змінних u, v :

$$\varphi = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2.$$

Чудові границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - первісна для $f(x)$.