

Міністерство освіти і науки України

О.І.Бобик, І.О.Бобик, В.В.Литвин

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ (практикум)

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

СЕРІЯ «КОМП'ЮТИНГ»

За науковою редакцією д.т.н., професора В.В. Пасічника

Затверджено Міністерством освіти і науки України

«Новий Світ – 2000»

Львів – 2020

УДК 517.958(076)
ББК 22.161.68я7
Б 72

Відтворення цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Рецензенти:

Г.Г.Цегелик – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів Львівського Національного університету імені Івана Франка;

В.С.Ільків – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики і програмування Національного університету «Львівська політехніка»;

Б.П.Русин – доктор технічних наук, професор, завідувач відділу фізико-механічного інституту імені В.Г. Карпенка НАН України.

Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В.

К29 Рівняння математичної фізики: навчальний посібник. – Львів: «Новий Світ – 2000», 2020. – 256 с.

ISBN 978-966-418-122-5

У навчальному посібнику викладені основні поняття математичної фізики і методи розв'язування типових задач: метод характеристик, метод Фур'є, а також методи функції точкового джерела, потенціалів та інтегральних перетворень. Названі методи розв'язування ілюструються на прикладах, які у переважній більшості мають конкретний практичний зміст. Після кожного параграфу наведено завдання для самостійної роботи студентів.

Пропонований навчальний посібник рекомендується студентам вищих навчальних закладів, що навчаються за програмами, які передбачають поглиблене вивчення вищої математики, де дисципліна „Рівняння математичної фізики” вивчається окремим курсом або входить в інші її розділи.

УДК 517.958.(076)
ББК 22.161.68я7
К29 72

© Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В., 2020
© «Новий Світ – 2000», 2020

ISBN 978-966-418-122-5

Зміст

ПЕРЕДМОВА НАУКОВОГО РЕДАКТОРА СЕРІЇ ПІДРУЧНИКІВ ТА НАВЧАЛЬНИХ ПОСІБНИКІВ «КОМП'ЮТИНГ»	5
ВСТУП	10
ГЛАВА 1.	
ВСТУП ДО РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ	11
§1. Основні поняття та означення.....	11
Розв'язування типових прикладів.....	12
Завдання для самостійної роботи	13
§2. Класифікація і зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних	14
Розв'язування типових прикладів.....	19
Завдання для самостійної роботи	24
§3. Класифікація і зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку від n незалежних змінних.....	26
Розв'язування типових прикладів.....	28
Завдання для самостійної роботи	30
§4. Знаходження загального розв'язку ДРЧП гіперболічного типу.....	31
Розв'язування типових прикладів.....	32
Завдання для самостійної роботи	35
§5. Основні рівняння математичної фізики і крайові задачі для них.....	36
Розв'язування типових прикладів.....	47
Завдання для самостійної роботи	53
ГЛАВА 2.	
ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ТА ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ.....	55
§6. Задача Коші і метод характеристик для рівнянь гіперболічного типу.....	55
Випадок двох змінних	55
Розв'язування типових прикладів.....	61
Завдання для самостійної роботи	68
Випадок трьох і чотирьох змінних	70
Розв'язування типових прикладів.....	73
Завдання для самостійної роботи	79
§7. Задача Коші для параболічних рівнянь	82
Розв'язування типових прикладів.....	86
Завдання для самостійної роботи	88
ГЛАВА 3.	
МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ.....	91

§8. Задача Штурма-Ліувілля	91
Класична задача Штурма-Ліувілля	91
Розв'язування типових прикладів	92
Завдання для самостійної роботи	96
Спеціальні задачі Штурма-Ліувілля	97
Розв'язування типових прикладів	101
Завдання для самостійної роботи	103
§9. Мішана задача для рівнянь гіперболічного типу	103
Розв'язування типових прикладів	108
Завдання для самостійної роботи	129
§10. Мішана задача для рівнянь параболічного типу	136
Розв'язування типових прикладів	137
Завдання для самостійної роботи	144
ГЛАВА 4.	
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ	148
§11. Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона	149
§12. Гармонічні функції та їхні властивості	153
Розв'язування типових прикладів	156
Завдання для самостійної роботи	161
§13. Метод Фур'є для еліптичних рівнянь	164
Розв'язування типових прикладів	166
Завдання для самостійної роботи	184
§14. Метод функції точкового джерела	190
Розв'язування типових прикладів	195
Завдання для самостійної роботи	207
§15. Метод потенціалів	209
Розв'язування типових прикладів	213
Завдання для самостійної роботи	219
ГЛАВА 5.	
МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ	222
§16. Поняття інтегрального перетворення. Основні типи інтегральних перетворень	222
Розв'язування типових прикладів	226
Завдання для самостійної роботи	228
§17. Застосування інтегрального перетворення до розв'язування крайових задач для рівнянь математичної фізики	228
Розв'язування типових прикладів	232
Завдання для самостійної роботи	249
ЛІТЕРАТУРА	252

Передмова наукового редактора серії підручників та навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ»

Шановний читачу!

Започатковуючи масштабний освітньо-науковий проект підготовки і видання серії сучасних підручників і навчальних посібників під загальною назвою «КОМП'ЮТИНГ» та із загальним методичним патронуванням його Інститутом інноваційних технологій та змісту освіти МОН України, мені як ініціатору та науковому керівнику неодноразово доводилось прискіпливо аналізувати загальну ситуацію в царині сучасного українського підручника комп'ютерно-інформатичного профілю. Загалом, позитивна тенденція останніх років ще не співмірна з надзвичайно динамічним розвитком як освітньо-наукової та виробничої сфери комп'ютерингу, так і стрімким розширенням потенційної цільової читачької аудиторії цього профілю. Іншими словами, попередній аналіз засвідчує наявність значного соціального замовлення під реалізацію пропонованого вашій увазі проекту.

Ще одним фактором формування освітньо-наукової ініціативи, пропонованої групою відомих вітчизняних науковців-педагогів та практиків, які організують наукові дослідження, готують фахівців та провадять бізнес в галузі комп'ютерингу, постало завдання широкомасштабного включення Української вищої школи до загальноєвропейських і всесвітніх об'єднань, структур і асоціацій. Виконуючи функцію науково-технічного локомотиву суспільства, галузь комп'ютерингу невідворотно зобов'язана зіграти роль активного творця загальної освітньо-наукової платформи, яка має бути методологічно-об'єднаною та професійно-інтеграційною основою для багатьох сфер людської діяльності.

Третім суттєвим фактором, який спонукав започаткувати пропоновану серію підручників і навчальних посібників, є об'єктивно визріла ситуація, коли фахівцям та науковцям треба подати чіткий сигнал щодо науково-методологічного осмислення та викладення базових знань галузі комп'ютерингу як освітньо-наукової, виробничо-економічної та сервісно-обслуговувальної сфери.

Читач, безсумнівно, зверне увагу на нашу послідовну промоцію нового терміну «КОМП'ЮТИНГ» (computing, англ.), який є вдалим та комплексно узагальнювальним для означення галузі знань, науки, виробництва, надання відповідних послуг та сервісів, видається доречним подати ретроспективу як самого терміну комп'ютеринг, так і широкої освітньої, наукової, бізнесової та виробничої сфери діяльності, що іменується комп'ютерингом.

Уперше термін «комп'ютеринг» уведений 1998 р. *Яном Фостером* з Арагонської національної лабораторії Чиказького університету та *Карлом Кесельманом* з Інституту інформатики штату каліфорнія (США) та запропонований для означення комплексної галузі знань, яка включає проектування та побудову апаратних і програмних систем для широкого кола застосувань: вивчення процесів, структур і керування інформацією різних видів; виконання наукових досліджень із застосування комп'ютерів та їх інтелектуальності; створення і використання комунікаційних та демонстраційних засобів, пошуку та збирання інформації для конкретної мети і т. ін.

У подальшому сфера використання терміну суттєво розширилась, зокрема, в освітньо-науковій царині його почали використовувати для означення відповідної галузі знань, для якої періодично (орієнтовно щодесять років) провідними університетами та професійними асоціаціями фахівців розробляються та імплементуються навчальні плани і програми, котрі в подальшому набувають статусу міжнародно визнаних освітньо-професійних стандартів. Зокрема, варто акцентувати увагу на версіях підсумкового документу «Computing CURRICULA» 2001 р. За окремими повідомленнями можна стверджувати, що черговий збірник стандартів «Computing CURRICULA» буде поданий професійному загалу до 2011 р. Перше організаційне засідання відповідних фахових робочих груп відбулось у Чиказькому університеті влітку 2007 р.

Для формування цілісного однорідного подання суті «КОМП'ЮТИНГУ» ми базуємось на сучасних наукових уявленнях з максимально можливим строгим покомпонентним викладенням основних базових означень та понять, які склались історично і є загально визнаними в професійних колах. Водночас для побудови цілісної зваженої картини ми використали певні узагальнення та загальносистемні класифікаційні підходи.

Безсумнівно, що базовим та фундаментальним поняттям було, є і залишається поняття ІНФОРМАТИКИ (informatique – франц.) як фундаментальної науки, котра вивчає найбільш загальні закони та закономірності процесів відбору, реєстрації, збереження, передавання, захисту, опрацювання та подання інформації. Як фундаментальна наука інформатика була подана в 70-х рр. ХХ ст. При цьому хочу відразу ж застерегти від примітивного ототожнення, яке часто є наївно вживаним щодо еквівалентності понять «інформатика» (informatique – франц.) та «комп'ютерні науки» (computer science – англ.). Такі ототожнення, з певною мірою наближення, можливі щодо розширеного сучасного трактування інформатики як загалом прикладної науки про обчислення, збереження, опрацювання інформації та побудову прикладних інформаційних технологій і систем на їх базі. Таке трактування є характерним в ряді європейських країн. Строге ж означення та подання предмету досліджень інформатики, а саме – інформації, має справу з фундаментальним не редукованим поняттям і фіксується у словниках як «informatio» (лат.) – відомості, повідомлення. Вивченням та всестороннім аналізом сутності інформації опікується наука, що називається «теорія інформації». На нашу думку, основною принциповою відмінністю між інформатикою та комп'ютерними науками є те, що перша в своєму первинному поданні відноситься до категорії фундаментальних наук, як то фізика, математика, хімія і т. ін. У той же час комп'ютерні науки загалом за своєю сутнісною природою та всіма наявними ознаками належать до категорії прикладних наук, які базуються на фундаментальних законах та закономірностях інформаційних процесів, котрі вивчаються в рамках фундаментальної науки інформатики.

Особливо наголосимо на тому, що фундаментальна наука та її результати не призначені для безпосереднього промислового використання.

Для комп'ютерних наук характерною ознакою виділення їх у спектрі прикладних наук є об'єкт прикладення знань, умінь та навичок у контексті конкретного об'єкту

– обчислювача (комп'ютера). Іншою відокремленою прикладною науковою галуззю, що базується на підвалинах інформатики, є розділ прикладних наук, основним об'єктом яких є сам процес обчислень. Це науки, які іменуються обчислювальними науками – «computationally science» (англ.). Традиційно сюди відносять обчислювальну та комп'ютерну математику.

Третьою прикладною науковою галуззю, яка ґрунтується на фундаментальних законах інформатики, є розділ прикладних наук, основним об'єктом яких є інформаційний ресурс (у сучасній літературі часто вживається поняття «контент» (content, англ.). У розумінні інформаційного наповнення. Ці прикладні науки одержали назву «інформаційні науки» (information science, англ.).

У галузі прикладних інформаційних наук базовий об'єкт досліджень, а саме інформаційний ресурс, подається, як правило, у формі даних та знань. За спрощеною формулою означатимемо дані як матеріалізовану інформацію, тобто інформацію, яку подано на матеріальних носіях, знання як суб'єктивізовану інформацію, тобто інформацію, яка природно належить суб'єкту, і в традиційному розумінні перебуває в людській пам'яті.

Узагальнюючи класифікаційно-ознакову схему, стверджуємо, що на базі фундаментальної науки ІНФОРМАТИКИ формуються три прикладні наукові галузі, а саме: комп'ютерні науки, обчислювальні науки та інформаційні науки з відповідними об'єктами досліджень у своїх сферах.

Ще раз підкреслимо, що результати фундаментальних наукових досліджень не призначені для безпосереднього промислового використання, у той же час результати прикладних наукових досліджень, як правило, призначені для створення та удосконалення нових технологій.

ґносеологічний аналіз подальшого формування інженерного рівня сфери КОМП'ЮТИНГУ невідворотно веде до структурного подання базових типів інженерій, які трактуються у класичному розумінні. ІНЖЕНЕРІЯ (майстерний – від лат. ingeniosus) – це наука про проектування та побудову (чит. створення) об'єктів певної природи. У цьому контексті природними для сфери «КОМП'ЮТИНГУ» є декілька видів інженерії. Мова йтиме про:

- КОМП'ЮТЕРНУ ІНЖЕНЕРІЮ (computer engineering, англ.), яка охоплює проблематику проектування та створення об'єктів комп'ютерної техніки;
- ПРОГРАМНУ (software engineering, англ.), яка опікується проблематикою проектування та створення об'єктів, що іменуються програмними продуктами;
- ІНЖЕНЕРІЮ ДАНИХ ТА ЗНАНЬ (data & knowledge engineering, англ.), інженерію, яка опікується проектуванням та створенням інформаційних продуктів;
- інженерію, яка опікується проектуванням та створенням міжкомпонентних (інтерфейсних) взаємозв'язків та формуванням цілісних системних об'єктів, усе частіше іменують СИСТЕМНОЮ ІНЖЕНЕРІЄЮ (systems engineering, англ.).

У разі такого структурно-класифікаційного подання видів інженерій сфери комп'ютингу, зазначимо, що кожен з них у цьому трактуванні є «відповідальним» за певний тип забезпечення, а саме: апаратного (hardware, англ.), програмного (software, англ.), інформаційного (dataware, англ.) та міжкомпонентного (middleware, англ.).

Інформаційну технологію (ІТ) можна трактувати як певну точку в чотиривимірному просторі зазначених інженерій. При цьому необхідно обов'язково зважити на певну частку наближення та інтерпретації цього простору як дискретного та неметричного.

У зв'язку з поширеним різночитанням та трактуванням поняття інформаційної технології (ІТ), видається необхідним детальніше подати сутнісну структуру цього терміну, використовуючи при цьому термінологічні статті популярного інформаційного ресурсу, яким є Wikipedia – [<http://www.wikipedia.org/>].

Технологія (від грецького *techne* – мистецтво, майстерність, вміння та грецького *logos* – знання) – сукупність методів та інструментів для досягнення бажаного результату, спосіб перетворення чогось заданого в необхідне. Технологія – це наукова дисципліна, в рамках якої розробляються та удосконалюються способи й інструменти виробництва.

У широкому розумінні – це знання, які можна використати для виробництва продуктів (товарів та послуг) з економічних ресурсів. У вузькому розумінні – технологія подається як спосіб перетворення речовини, енергії, інформації в процесі виготовлення продукції, обробки та переробки матеріалів, складання готових виробів, контроль якості та керування.

Технологія включає в себе методи, прийоми, режими роботи, послідовість операцій та процедур. Вона тісно взаємопов'язана із засобами, що застосовуються, обладнанням, інструментами, використовуваними матеріалами. За методологією ООН – технологія в чистому вигляді охоплює методи та техніку виробництва товарів і послуг (*dissembled technology*, англ.). Втілена технологія охоплює машини, обладнання, споруди, виробничі системи та продукцію з високими техніко-економічними параметрами (*embodied technology*, англ.). Матеріальна технологія (МТ) створює матеріальний продукт. Інформаційна технологія (ІТ) створює інформаційний продукт на основі інформаційних ресурсів.

Інформаційні технології використовують комп'ютерні та програмні засоби для реалізації процесів відбору, реєстрації, подання, збереження, опрацювання, захисту та передавання інформації – інформаційного ресурсу у формі даних та знань – з метою створення інформаційних продуктів.

Аналітична картина видаватиметься незавершеною, якщо не означити ще одну базову сутність сфери комп'ютингу, якою є інформаційна система. Не претендуючи на абсолютну точність пропонованого твердження, розглядатимемо інформаційну систему як множину координат у чотиривимірному просторі інженерій сфери комп'ютингу. Тобто інформаційну систему (ІС) подаємо як певний набір інформаційних технологій, що в комплексі зорієнтовані на досягнення певної системної мети, виконуючи задані функції та пропонуючи при цьому споживачам якісні інформаційні продукти та сервіси.

У свою чергу, для всіх штучних інформаційних систем притаманними є чотири життєві фази їхнього формування та функціонування. Йдеться про фази системного аналізу, системного проектування, системної інтеграції та системного адміністрування, які генерують відповідні вимоги до професійної підготовки та практичної орієнтації

фахівців у царині інформаційних систем. Ринок потребує системних аналітиків, системних проєктувальників, системних інтеграторів та системних адміністраторів.

Комплексний виклад структурованого подання галузі «КОМП'ЮТИНГУ» дозволяє, загалом, чіткіше уявити проблематику та тематику підручників та навчальних посібників, котрі будуть виходити в світ у однойменній освітньо-науковій серії в 50-ти книгах. Для кращого розуміння в майбутньому ще раз наведемо означення сфери «КОМП'ЮТИНГУ» як галузі знань (науки, виробництва, бізнесу та надання послуг), предметом якої є комплексні дослідження, розроблення, впровадження та використання інформаційних систем, складовими елементами яких є інформаційні технології, що реалізовані на основі сучасних інженерних досягнень комп'ютерної інженерії, інженерії програмного забезпечення, інженерії даних та знань, системної інженерії, котрі базуються на фундаментальних законах та закономірностях інформатики.

Автори підручників і навчальних посібників серії «КОМП'ЮТИНГ» пропонують значний перелік навчальних дисциплін, котрі, з одного боку, включаються до сфери комп'ютингу за означенням, а, з іншого боку, їх предмет ще не знайшов якісного висвітлення у вітчизняній навчальній літературі для вищої школи. Перший крок ми робимо у 2008–2009 рр., виданням принаймні десяти книг серії з подальшим її п'ятикратним розширенням до 2011 р. Структурно серія подається узагальненими профілями як то:

- *фундаментальні проблеми комп'ютингу;*
- *комп'ютерні науки;*
- *комп'ютерна інженерія;*
- *програмна інженерія;*
- *інженерія даних та знань;*
- *системна інженерія;*
- *інформаційні технології та системи.*

При цьому зауважу, що наведені укрупнені профілі серії підручників і навчальних посібників загалом співпадають з профілями бакалавратів, зафіксованих у підсумковому звіті «Computing CURRICULA» редакції 2006 року. Ми розуміємо, що чітка завершена будівля комп'ютингу з'явиться лише в перспективі, а наша праця буде подаватись як активний труд будівничих з якнайшвидшого втілення в життя проєкту цієї, без перебільшення, грандіозної будівлі сучасного інформаційного суспільства. Я запрошую потенційних авторів долучитись до цього освітньо-наукового проєкту, а шановних читачів виступити в ролі творчих критиків та опонентів. Буду вдячний за Ваші побажання, зауваження та пропозиції.

З глибокою повагою науковий редактор серії підручників і навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ», д.т.н., професор Володимир ПАСІЧНИК

Вступ

Рівняння математичної фізики – одна з основних дисциплін, які формують фундаментальну підготовку студентів, що опановують спеціальності: математика, прикладна математика, системний аналіз, інформатика, фізика, радіофізика та електроніка.

Предметом дисципліни „Рівняння математичної фізики” є дослідження математичних моделей, які містять диференціальні рівняння з частинними похідними та описують різні процеси природознавства, техніки, зокрема процеси коливань, теплопровідності, дифузії і т.д.

Для студентів спеціальностей, які використовують такі математичні моделі у своїй майбутній професійній діяльності, найважливішим є глибоке розуміння основних понять і методів дисципліни та належні навички практичного розв’язування задач. Саме на цьому автори найбільше акцентують увагу.

Навчальний посібник складається з 5-ти глав і мотивацією поділу на них є основні методи розв’язування крайових задач для рівнянь математичної фізики. Кожна глава поділена на відповідне число параграфів, що відповідають конкретним темам.

Кожний параграф поділяється на три частини: основні поняття і методи теоретичного матеріалу; приклади розв’язування типових задач; завдання для самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник рекомендується студентам вищих навчальних закладів, які вивчають окремі курси рівнянь математичної фізики, диференціальних рівнянь з частинними похідними або математичні дисципліни, у які входять ці курси у вигляді складових частин.