МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В.Г.Бондаренко

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як навчальний посібник для студентів,

які навчаються за спеціальністю 124 – «системний аналіз»

Київ

КПІ ім.Ігоря Сікорського

2018

Рецензент *Дудкін М.Є.,* доктор ф.-.м.н., професор

Відповідальний редактор *Богданський Ю.В.,* доктор ф.-.м.н., професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.Ігоря Сікорського

(протокол № 9 від 24.05. 2018 р.)

за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу

(протокол № 4 від23.04. 2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Бондаренко Віктор Григорович, д-р фіз.-мат.наук, проф.

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рівняння математичної фізики: [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «системний аналіз» /

В.Г.Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського,—Електронні текстові данні

{1 файл : }.—Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.—100 с.

Даний навчальний посібник призначено для студентів, що вивчають дисципліну «Рівняння математичної фізики». Зміст посібника відповідає навчальній програмі згаданої дисципліни для спеціальності 124 «системний аналіз». Традиційний для дисципліни матеріал—лінійні рівняння з частинними похідними—доповнено оглядом сучасних методів математичної фізики. Поряд з теоретичним матеріалом посібник містить приклади задач із наведеними розв’язками і вправи для самостійного розв’язування.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Рівняння математичної фізики» передбачена учбовим планом спеціальності 124 – системний аналіз як професійно-орієнтована і базується на таких фундаментальних дисциплінах, як «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння» та «Теорія ймовірностей». В свою чергу, дана дисципліна є базовою для курсів «Основи системного аналізу» та «Синергетичні методи аналізу», та тісно пов'язана з дисциплінами «Функціональний аналіз» та «Випадкові процеси», які викладаються паралельно.В рамках даної дисципліни вивчаються математичні моделі фізичних процесів, що являють собою деякий клас диференціальних рівнянь з частинними похідними; ці рівняння поділяються на підкласи—еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь.

Зміст посібника відповідає учбовому плану та програмі даної дисципліни. Поряд з традиційними темами конспективно розглянуто сучасні математичні моделі фізичних процесів у вигляді нелінійних рівнянь та рівнянь з похідними дробового порядку.

В посібнику наведено вправи для самостійної роботи.Текст посібника складається з п'яти розділів. Нумерація формул і вправ наскрізна в межах кожного розділу.

ПОЗНАЧЕННЯ

R^n −евклідів простір розмірності n

$\theta(t)$ − одинична функція Хевісайда; $\theta(t) = 0, t < 0$; $\theta(t) = 1, t \geq 0$

$C^k(\Omega)$—лінійний простір функцій, що мають k неперервних похідних на множині $\Omega \subset R^n$

$L_2(\Omega, \mu)$ − лінійний простір функцій, квадратично інтегровних на множині Ω за мірою μ

$\mathfrak{D}$ —простір основних функцій

$\partial\Omega, \Pi$—межа області $\Omega \subset R^3$ (Π −поверхня)

$\partial\Omega, \gamma$—межа області $\Omega \subset R^2$ (γ—крива)

E—символ математичного сподівання випадкового вектора (випадкової величини)

$\aleph(\boldsymbol{m}, A)$ —символ гауссівського випадкового вектора, $\boldsymbol{m}$ −математичне сподівання, A −кореляційна матриця

$\aleph(m, \sigma^2)$ − символ гауссівської випадкової величини, m −математичне сподівання, σ^2 −дисперсія

ρ, φ − полярні координати точки в R^2

r, φ, θ − сферичні координати точки в R^3

$\Delta_n = div\boldsymbol{grad} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ − оператор Лапласа; якщо розмірність n обумовлена, індекс n не пишеться.

$\Gamma(z)$ − Г –функція Ейлера

$E_{p,q}(z)$ − узагальнена функція Міттаг-Леффлера;
$E_p(z) = E_{p,1}(z)$— функція Міттаг-Леффлера

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

1.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ПРИКЛАДИ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.

Об'єктом дослідження є деякий клас лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Загальний вигляд таких рівнянь задається формулою:

$$\sum_{j,k} a_{jk}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_k(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1.1)$$

де $\boldsymbol{x} = (x_1 \dots x_n) \in R^n, u(\boldsymbol{x}) -$ шукана функція, а коефіцієнти рівняння $a_{jk}(\boldsymbol{x}), b_k(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{x})$ та права частина $f(\boldsymbol{x})$ – відомі функції. Опис власне рівнянь математичної фізики (РМФ), що утворюють деякий клас рівнянь (1.1), буде подано нижче. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. *Поперечні малі коливання струни.*

Нехай струна, вздовж якої направлена вісь ОХ, коливається під дією деяких збурень. Позначимо через $u(t,x)$ відхилення струни від положення рівноваги в момент часу t і в точці x. Доводиться, що $u(t,x)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \qquad (1.2)$$

де коефіцієнт a^2 визначається матеріалом, з якого виготовлено струну, $f(t,x)$ – інтенсивність зовнішніх сил, що діють на струну.

Узагальненням рівняння (1.2) є рівняння коливань плоскої мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + f(t,x,y)$$

де $u(t,x,y)$ – відхилення мембрани від положення рівноваги, а також рівняння розповсюдження акустичних хвиль

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$$

де $u(t,x,y,z)$ – тиск газу в момент часу в точці $M(x,y,z)$.

Приклад 2. *Рівняння теплопровідності (дифузії).*

Позначимо через $u(t,x,y,z)$ температуру тіла. Тоді ця функція задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z) \qquad (1.3),$$

де коефіцієнт a характеризує теплопровідність тіла, а функція f – підігрів. Рівняння (1.3) очевидним чином трансформується для дво- та одновимірного випадків (температура плоскої області на площині *XOY* та стрижня). Це ж саме рівняння описує процес дифузії в однорідному середовищі: в цьому випадку $u(t,x,y,z)$ є концентрацією, a^2 є коефіцієнтом дифузії середовища.

Приклад 3. *Рівняння для потенціалу електростатичного поля.*

Нехай в просторі або на площині маємо електростатичне поле, що створене зарядами, розподіленими в просторі з деякою щільністю. Тоді потенціал $u(x,y,z)$ цього поля задовольняє рівнянню

$$\Delta u = f(x,y,z),$$

де функція $f(x,y,z)$ пропорційна заданої щільності. Останнє рівняння описує також стаціонарний розподіл температури в деякому тілі або в плоскій області (гранична поведінка при $t \to +\infty$ рівняння (1.3))

Виведення рівнянь, що наведені в цих прикладах викладено у відомих підручниках [2, 7, 9, 10].

Зауваження. Звичайно, багато фізичних задач не може бути описано рівнянням (1.1). Так, рух рідини описується системою рівнянь гідромеханіки

(Нав'є-Стокса), електромагнітне поле – системою рівнянь Максвелла, функція стану в квантовій механіці – рівняння Шредінгера і т.д. В данному курсі лекцій РМФ означає деяке спеціальне лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку.

Класифікація РМФ в точці визначається його старшими коефіцієнтами, тобто матрицею $a_{jk}(\boldsymbol{x})$. Оскільки ця матриця симетрична, її власні числа $\lambda_1(\boldsymbol{x}), \dots, \lambda_n(\boldsymbol{x})$ дійсні, а власні вектори утворюють базис.

Визначення 1.1. Рівняння (1.1) називається в точці $\boldsymbol{x}$:

—еліптичним, якщо всі власні числа $\lambda_k(\boldsymbol{x})$ мають один знак;

—гіперболічним, якщо одне з власних чисел відрізняється знаком від інших;

—параболічним, якщо одне з власних чисел нульове, а всі інші – одного знаку;

Очевидно, така термінологія походить від класифікації поверхонь другого порядку.

Так, в прикладах 1, 2, 3 наведені відповідно рівняння гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.

Вправа 1.1. Довести, що тип рівняння не зміниться, якщо виконати диференційовану заміну незалежної змінної $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$, тобто $y_k = y_k(x_1, \dots, x_n)$

На відміну від еліптичних рівнянь, всі змінні в яких «рівноправні», гіперболічні та параболічні рівнянь мають «особливу» змінну, якій відповідає «особливе» власне число. Як і в прикладах 1 і 2, цією зміною буде час *t*, а інші змінні вважаються просторовими. Таким чином, гіперболічні та параболічні рівняння є еволюційними, еліптичні – стаціонарними.

Вправа 1.2. Визначити типи рівнянь $\left(u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ і т. д.}\right)$

1. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} = f$
2. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$
3. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0$

Як і звичайне диференціальне рівняння, рівняння (1.1) потребує для єдиності розв'язку деякі додаткові умови. Ці умови поділяються на початкові (задача Коші) та граничні. Наведемо постановку задач для рівнянь математичної фізики.

Параболічні рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k} a_{jk}(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_k(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(t, \boldsymbol{x})u + f(t, \boldsymbol{x})$$

де матриця $a_{jk}(t, \boldsymbol{x})$ додатня, тобто її власні числа $\lambda_k(t, x) \geq \mu_k > 0$.

1.Задача Коші: знайти такий розв'язок $u(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \epsilon R^n$, що задовольняє умові $u(t_0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$.

2.Змішана гранична задача: $\boldsymbol{x} \epsilon D \subset R^n, u(t_0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$, і відома $u(t, \boldsymbol{x})$ або $\frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x})$, коли $\boldsymbol{x}$ належить межі ∂D області D.

Гіперболічні рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j,k} a_{jk}(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_k(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(t, \boldsymbol{x})u + f(t, \boldsymbol{x})$$

матриця $a_{jk}(t, \boldsymbol{x})$ також додатньо визначена..

1.Задача Коші: $\boldsymbol{x} \epsilon R^n$, шукана функція $u(t, \boldsymbol{x})$ задовольняє двом початковим умовам:

$$u(t_0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, \boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}).$$

2.Змішана гранична задача в області D – до двох початкових умов додається значення функції або її нормальної похідної на межі ∂D

Еліптичні рівняння

$$\sum_{j,k} a_{jk}(\boldsymbol{x}) + \sum_k b_k(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x})$$

є стаціонарними і для них ставляться лише граничні задачі:

1.Задача Діріхлє: знайти $u(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \epsilon D$, якщо відомі значення $u(\boldsymbol{x})$ на межі ∂D.

2.Задача Неймана: відомі значення нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial n}$ на межі області.

Зауваження. Частковим випадком еліптичного рівняння є рівняння Пуассона $\Delta u = f$ і Лапласа $\Delta u = 0$. Будь-який розв'язок останнього назвемо гармонічною функцією. Інколи ставиться задача: знайти функцію, гармонічну в усьому просторі, що має задану асимптотику на нескінченності.

Вправа 1.3. Знайти розв'язки граничних задач.

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \epsilon R, u(0,x) = x$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \epsilon R, u(0,x) = x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \epsilon D, u(x,y)|_{\partial D} = x^2 - y^2$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \epsilon D, u(x,y)|_{\partial D} = xy$

Вказівка: в зв'язку з відсутністю формул ці розв'язки треба просто вгадати.

1.2.РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо два вже згадані рівняння математичної фізики— одновимірне рівняння теплопровідності та рівняння коливань струни.

1.**Рівняння теплопровідності**. Знайти функцію $u(t,x), t > 0, x \epsilon R,$ що задовольняє однорідному рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

та початковій умові $u(0,x) = \varphi(x)$.

Теорема 1.1. Якщо $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \infty$, то розв'язок задачі Коші дається формулою:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(y) dy \qquad (1.4)$$

Доведення. Припускаючи, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x)|\, dx < \infty$ для всіх t, застосовуємо до обох частин рівняння перетворення Фур'є по змінній x. Функція

$$\tilde{u}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-i\omega x}\, dx$$

задовольняє задачі Коші

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -a^2\omega^2\tilde{u},\ \ \tilde{u}(0,\omega) = \tilde{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

розв'язок якої має вигляд

$$\tilde{u}(t,\omega) = \tilde{\varphi}(\omega) exp\{-ta^2\omega^2\}$$

За теоремою про згортку для перетворення Фур'є функція

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x-y)\varphi(y) dy$$

де $\quad p(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-ta^2\omega^2 + i\omega x\} d\omega$

є оберненим перетворенням Фур'є від $exp\{-ta^2\omega^2\}$. Останній інтеграл обчислюється в курсі математичного аналізу (зведення до інтегралу Пуассона) і

$$p(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\}$$

Апріорне припущення про інтегровність $u(t,x)$ виконується.

Зауваження. Твердження теореми має місце для більш широкого класу початкових умов $\varphi(x)$ (так званий клас коректності задачі Коші). Так, до цього класу входять і зростаючі функції, що задовольняють нерівності:

$$\varphi(x) < a exp\{b|x|\}$$

Для доведення досить підставити праву частину (1.4) в рівняння, диференціюючи інтеграл по параметрах t та x.

Вправа 1.4.. Перевірити, що для наведеного вище прикладу $\varphi(x)$права частина (1.4) задовольняє умові

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = \varphi(x)$$

Зауваження 1. Формулу (1.4) можна записати у вигляді

$$u(t,x) = \mathrm{E}\varphi(\xi), \qquad \text{де } \xi \sim \aleph(x, 2a^2t),$$

Е – символ математичного сподівання, $\aleph$ – символ гауссівської випадкової величини. При обчисленні математичних сподівань, пов'язаних з гауссівською випадковою величиною з параметрами x та σ^2 інколи зручно користуватися характеристичною функцією:

$$\chi(z) = \mathrm{E}exp\{iz\xi\} = \exp\left\{ixz - z^2\frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Термінологія. Функція $p(t, x-y)$, де

$$p(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\},$$

носить назву «фундаментальний розв'язок задачі Коші».

Вправа 1.5. Знайти $u(t,x)$, якщо:

$$\varphi(x) = x^2;\ \varphi(x) = sin\alpha x.$$

2.**Рівняння коливань струни.** Знайти функцію $u(t,x), t > 0, x\epsilon R$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

та початковим умовам $u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$.

Метод Даламбера розв'язку даної задачі Коші пропонує заміну змінних (t,x) на (ξ,η), де

$$\xi = x + at, \eta = x - at, \text{ звідки } x = \frac{\xi+\eta}{2}, t = \frac{\xi-\eta}{2a}$$

Позначимо

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi-\eta}{2a}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

та обчислимо другу мішану похідну $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2a}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\xi-\eta}{2a}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\xi-\eta}{2a}, \frac{\xi+\eta}{2}\right),$$

звідки

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4a^2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

тобто для нових змінних рівняння коливань струни перетворюється в наступне: $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, і його загальний розв'язок має вигляд

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

F,G – довільні диференційовані функції.

Визначимо F та G через початкові умови φ та ψ. Продиференціюємо рівність

$$u(t, x) = F(x + at) + G(x - at)$$

по змінній t:

$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = aF'(x + at) - aG'(x - at)$ та покладемо $t = 0$. Отримуємо систему:

$$F(x) + G(x) = \varphi(x)\ , \quad F'(x) - G'(x) = \frac{1}{a}\ \psi(x).$$

Розв'язуємо систему, отримуємо:

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) + \frac{1}{a}\psi(x)\right),\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) - \frac{1}{a}\psi(x)\right)$$

і подальше інтегрування приводить до формул

$$F(x) - F(b) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_b^x \psi(y)dy - \frac{1}{2}\varphi(b)$$

$$G(x) - G(b) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_b^x \psi(y)dy - \frac{1}{2}\varphi(b), \quad b\ -\ \text{довільне},$$

звідки

$$u(t, x) = F(x + at) + G(x - at) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy \quad (1.5)$$

Формула (1.5) і дає розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння коливань струни.

Зауваження. Загальний розв'язок рівнянь коливань струни

$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at)$$

є сума двох хвиль, які розповсюджуються ліворуч і праворуч із швидкістю a. Розв'язок неоднорідних рівнянь буде розглянуто далі.

1.3. ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ОПЕРАТОР АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

1.Нехай X- нормований простір, t – дійсний параметр, $v(t)\epsilon X$ для кожного $t.$ Визначимо похідну $v'(t)$ рівністю

$$v^{'}(t) = \lim_{dt\to 0}\frac{v(t+dt)-v(t)}{dt},$$

де границя розуміється у нормі простору X, тобто

$$\lim_{dt\to 0}\left\|\frac{v(t+dt)-v(t)}{dt} - v'(t)\right\| = 0$$

Нехай $A(t)$ для кожного t є лінійним оператором в X.

Визначення 1.2. Рівняння відносно функції $v(t)$

$$v^{'}(t) = A(t)v(t) \qquad (1.6)$$

називається абстрактним лінійним однорідним диференціальним рівнянням в X.

Приклад 1. Якщо $X = R^n, A(t) = \left\|a_{jk}(t)\right\| -$ матриця, то (1.6) є системою звичайних диференціальних рівнянь

$$v_k^{'}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)v_j(t)$$

Приклад 2. $X = C^1(-\infty;+\infty)$ $A = a\frac{d}{dx}$. Рівняння (1.6) є диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

Приклад 3. $X = C^2(-\infty;+\infty)$, $A = a^2\frac{d^2}{dx^2}$.

Тоді (1.6) є рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Приклад 4. X є простором двічі диференційованих векторних функцій $(u_1(x), u_2(x))$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2\frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Рівняння (1.6) приймає вигляд системи

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix}$$

яка еквівалентна рівнянню коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\ ,\ u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

Визначення 1.3. Рівняння (1.6) разом з початковою умовою $v(t_0)=v_0$ назвемо абстрактною задачею Коші (АЗК).

Нехай

$$v'(t) = A(t)v(t),\ v(t_0) = v_0\,,\qquad w'(t) = A(t)w(t),\ w(t_0) = w_0\,.$$

Тоді

$$(\alpha v+\beta w)' = A(t)\,(\alpha v(t)+\beta w(t)),\qquad (\alpha v+\beta w)'(t_0) = (\alpha v_0+\beta w_0)$$

тобто розв’язок АЗК лінійно залежить від початкової умови. Останнє означає, що

$$v(t) = H(t,t_0)v(t_0) \qquad (1.7)$$

де $H(t,t_0)$ назвемо еволюційним оператором рівняння (1.6).

Обчислимо еволюційний оператор для наведених вище прикладів

Приклад 1. Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, для системи звичайних лінійних диффенціальних рівнянь

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)u_k$$

$H(t,t_0)$ є матрицею, k-й стовпчик $h_k(t,t_0)$ є розв'язком системи з початковою умовою $h_{jk}(t_0,t_0) = \delta_{jk}$. .

Приклад 2. Задача Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x},\ u(t_0,x) = \varphi(x)$$

має розв'язок

$$u(t,x) = \varphi(x+(t-t_0)a),$$

тобто $H(t,t_0)$ є оператором зсуву незалежної змінної.

Приклад 3. Розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(t_0,x) = \varphi(x)$$

вже обчислено ; еволюційний оператор є інтегральним з ядром

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t0)}}exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-t0)}\right\}$$

(формула(1.4)).

Приклад 4. Для системи з початковими умовами $u_1(t_0,x) = \varphi(x)$, $u_2(t_0,x) = \psi(x)$ розв'язок

$$u_1(t,x) = \frac{\varphi(x+a(t-t0))+\varphi(x-a(t-t0))}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-t0)}^{x+a(t-t0)}\psi(y)dy,$$

$$u_2(t,x) = \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}$$

отримано в попередньому викладенні, тобто

$$H(t,t_0)\binom{\varphi}{\psi} = \binom{u_1(t,x)}{u_2(t,x)}.$$

Відзначимо властивості еволюційного оператора, що випливають безпосередньо з визначення (1.7)

1. $H(t,t) = I$

2. $H(t_0,t) = H^{-1}(t,t_0)$

3. $H(t,\tau)\,H(\tau,s) = H(t,s)$

4. $\frac{d}{dt}H(t,t_0) = A(t)H(t,t_0)$

Вправа 1.6. Нехай оператор A не залежить від t. Довести, що $H(t,t_0) = H(t-t_0)$.

Твердження. Нехай $\| A(t) \| < c$. Тоді $H(t,t_0)$ є сумою ряду, що збігається за операторною нормою.

Доведення. Запишемо АЗК в інтегральній формі

$$v_k(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)v(s)ds$$

і розв'яжемо це рівняння методом ітерацій

$$v_k(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)v_{k-1}(s)ds .$$

Тоді

$$v_k(t) = \left(I + \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ldots + \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{tn-1} A(t_1)\ldots A(t_n)dt_n \ldots\ dt_1 \right)v_0$$

є частковою сумою ряду, k-й член якого задовольняє оцінку:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} A(t_1)\ldots A(t_k)dt_k \ldots\ dt_1 \right\| < c^k\,\frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

а тому сума ряду за нормою не перевищує $exp\{c(t-t_0)\}$.

Наслідок. Якщо A не залежить від t, то

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n = exp\{tA\}$$

2. Розглянемо АЗК для неоднорідного рівняння

$$v'(t) = A(t)v(t) + f(t), \;\; v(t_0) = v_0 \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. Розв'язок задачі (1.8) має вигляд

$$v(t) = H(t,t_0)v_0 + \int_{t_0}^{t} H(t,s)f(s)ds \tag{1.9}$$

Доведення. Використовуючи метод варіації, шукаємо розв'язок задачі (1.8) у вигляді

$$v(t) = H(t,t_0)c(t)$$

де $c(t)$ – шукана функція, $c(t_0) = v_0$. Підставимо таке $v(t)$ в рівняння. Отримаємо рівняння для $c(t)$:

$$H(t,t_0)\, c'(t) = f(t), \quad c(t_0) = v_0$$

звідки $c(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} H(t_0,s)f(s)ds$, що і приводить до формули (1.9).

Застосуємо даний результат для розв'язку задачі Коші для неоднорідних рівнянь теплопровідності та коливань струни.

Приклад 3А.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad u(0,x) = \varphi(x)$$

Розв'язок:

$u(t,x) =$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\}\varphi(y)dy + \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\} f(\tau,y)dyd\tau.$$

Приклад 4А.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \; u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$$

Розв'язок рівняння *u(t,x)* співпадає з першою координатою u_1*(t,x)* неоднорідної системи

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0,x) \\ u_2(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$$

і дається формулою:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)dyd\tau$$

Вправа 1.7. Знайти розв'язки задачі Коші:

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx, \quad u(0,x) = \sin x$

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, \quad u(0,x) = \cos x$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x, \; u(0,x) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \; u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1$

РОЗДІЛ 2. ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ

2.1.КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ. ОБЧИСЛЕННЯ ДИВЕРГЕНЦІЇ ТА ЛАПЛАСІАНА В КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ.

Нехай $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$– ортобазис в R^n, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum f_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$ —векторне поле. Відома формула для дивергенції

$$div\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})$$

має місце лише в декартових координатах. Розглянемо інші координатні системи та обчислюється дивергенція поля.

Нехай M – точка в просторі R^n. Її координатами назвемо довільний набір чисел $q_1,\dots,q_n$, що однозначно визначають положення цієї точки.

Визначення 2. 1. Координатною q_j – лінією назвемо криву, вздовж якої змінюється тільки координата q_j, а всі інші є сталими.

Зауваження. В декартовій системі координат всі координатні лінії є прямими. Якщо хоча б одна з q_j – ліній крива, координати носять назву криволінійних.

Приклади:

1. Циліндрична система координат в R^3 має координати ρ, φ, z, де ρ – відстань від початку координат O до проекції M_1 точки M на площину XOY, φ – кут між OX та OM_1 (азимут).

Координатні лінії, що проходять через точку M:

ρ – лінія – промінь з початком на осі OZ, паралельний OM_1;

φ – лінія – коло, що лежить в площині, паралельній XOY з центром на осі OZ;

z – лінія – пряма, паралельна осі OZ.

Якщо $z = 0$, отримаємо полярні координати.

2. Сферичні координати точки M в R^3:

r – довжина відрізку OM; φ – азимут точки*;* θ – кут між віссю OZ та OM*;*

r – лінія – промінь OM;

φ – лінія – те ж саме коло, що в прикладі 1*;*

θ – лінія – коло з діаметром на осі OZ радіуса $|OM| = r$ (меридіан).

Визначення 2.2. Система координат $q_1,\ldots,q_n$ називається ортогональною, якщо в кожній точці координатні лінії перетинаються під прямим кутом.

Вправа 2.1. Довести ортогональність циліндричної та сферичної системи координат.

Для ортогональної системи координат в кожній точці M можна побудувати ортогональний базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ з векторів, дотичних до координатних ліній.

Визначення 2.3. Нехай задана q_j – координатна лінія. Коефіцієнт Ламе H_j визначимо формулою

$$H_j = \lim_{dq_j \to 0} \frac{l(q_j\,;\, q_j + dq_j\,)}{|dq_j|}$$

де l – довжина дуги кривої між точками з координатами q_j та $q_j + dq_j$.

Приклади:

Для циліндричних координат $H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho,\ H_z = 1.$

Для сферичних: $H_r = 1,\ H_\varphi = r\sin\varphi,\ H_\theta = r.$

Твердження. Нехай γ – крива в R^n, задана параметричними рівняннями $q_j = q_j(t),\ t_1 \le t \le t_2$. Тоді довжина кривої

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum \left(H_j\left(\boldsymbol{q}(t)\right)\dot{q}_j\,(t)\right)^2}\, dt$$

Вправа 2.2. Довести твердження.

Будемо вважати ортогональний базис $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ в кожній точці, що побудований з дотичних векторів, ортонормованим. Тоді довільне векторне поле $\boldsymbol{f}$ можна розкласти по цьому ортобазису:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \sum f_j(\boldsymbol{q})\boldsymbol{e}_j \ , \ f_j = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_j)$$

Знайдемо формулу для дівергенції векторного поля в ортогональній системі криволінійних координат в R^3. Скористаємося формулою Гаусса-Остроградського для довільної області D

$$\iiint_D div\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})dq_1dq_2dq_3 = \oiint_{\partial D}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})\partial\sigma,$$

звідки отримаємо формулу

$$div\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \lim_{D\downarrow\boldsymbol{q}} \frac{1}{V(D)} \oiint_{\partial D}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})\partial\sigma$$

де $V(D)$ – об’єм області D. Область D виберемо таким чином: проведемо з точки M три координатні лінії $q_j(t)$, $\boldsymbol{q}(0) = M$; кінцями цих ліній будуть точки з координатами $q_j\left(dt_j\right)$. Вважаючи отримані три відрізки ребрами прямокутного криволінійного паралелепіпеда, добудуємо це тіло; для цього треба провести поверхні, ортогональні ребрам.

Таких поверхонь буде шість. Нехай, наприклад,

Π_1: $q_3 = q_3\ (0)$, $\quad$ Π_2: $q_3 = q_3(dt_3)$.

Одиничні зовнішні нормальні вектори до них:

$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{e}_3(q_1,q_2,q_3(0))$; $\quad$ $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{e}_3(q_1,q_2,q_3(dt_3))$

Потік векторного поля через ці поверхні дорівнює

$$-\int_{q_2(0)}^{q_2(dt_2)}\int_{q_1(0)}^{q_1(dt_1)} f_3\big(q_1,q_2,q_3(0)\big)H_1\big(q_1,q_2,q_3(0)\big)H_2\big(q_1,q_2,q_3(0)\big)dq_1dq_2 +$$

$$+\int_{q_2(0)}^{q_2(dt_2)}\int_{q_1(0)}^{q_1(dt_1)} f_3\big(q_1,q_2,q_3(dt_3)\big)H_1\big(q_1,q_2,q_3(dt_3)\big)H_2\big(q_1,q_2,q_3(dt_3)\big)dq_1dq_2$$

Якщо записати різницю інтегралів як інтеграл від різниці та скористатися формулою Лагранжа для підінтегральної функції, отримаємо вираз

$$\big(q_3(dt_3)-q_3(0)\big)\int_{q_2(0)}^{q_2(dt_2)}\int_{q_1(0)}^{q_1(dt_1)}\frac{\partial}{\partial q_3}(f_3H_1H_2)\big(q_1,q_2,q_3(s)\big)dq_1dq_2\ ,$$

де $0 < s < dt_3$.

Якщо поділити цей вираз на об'єм *V(D),* який з точністю до малих вищого порядку дорівнює

$$\prod_{k=1}^{3}\big(q_k(dt_k)-q_k(0)\big)\,H_k(q_1,q_2,q_3),\ \ q_k(0) < q_k < q_k(dt_k)$$

і скористатися теоремою про середнє, то після граничного переходу $dt_j \to 0$ отримаємо вираз

$$\frac{1}{H_1H_2H_3(M)}\frac{\partial}{\partial q_3}(f_3H_1H_2)(M)\ ,\ \ M = M(q_1,q_2,q_3)\ .$$

Аналогічно обчислюється потік через пару поверхонь

Π_3 , Π_4 $(q_2 = q_2(0),\ \ q_2 = q_2(dt_2))$ та Π_5, Π_6 $(q_1 = q_1(0),\ q_1 = q_1(dt_1))$.

Додавши ці значення, отримаємо формулу для дивергенції векторного поля:

$$div\boldsymbol{f} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q1}(f_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q2}(f_2H_1H_3)+\frac{\partial}{\partial q3}(f_3H_1H_2)\right) \qquad (2.1)$$

де всі вирази обчислено в точці $M(q_1,q_2,q_3)$.

Вправа 2.3. Обчислити дивергенцію для циліндричних та сферичних координат.

При розгляді граничних задач для рівнянь математичної фізики координати треба вибрати так, щоб вони відповідали області, в якій задано рівняння. Так, задача Діріхлє в кулі

$$\Delta u(x,y,z) = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 < R^2; \quad u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = f(x,y,z)$$

вимагає переходу до сферичних координат. Побудуємо вираз для оператора Лапласа в довільній ортогональній системі координат. Оскільки за визначенням

$$\Delta u = div\, grad\, u$$

а вираз (2.1) для дивергенції отримано вище, залишилось знайти вираз для градієнта.

Твердження. Нехай $u(q_1,\ldots,q_n)$ – диференційована функція, $q_1,\ldots,q_n$ – ортогональні криволінійні координати. Тоді

$$\boldsymbol{grad}\, u = \sum_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial q_k}\boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n \text{ - ортобазис.} \qquad (2.2)$$

Доведення. Визначимо градієнт через похідну вздовж кривої. Нехай γ – крива, $q_k = q_k(t)$. Назвемо похідною вздовж γ вираз

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(\boldsymbol{q}(t)) = \lim_{dt\to 0}\frac{u(\boldsymbol{q}(t+dt)) - u(\boldsymbol{q}(t))}{l(\boldsymbol{q}(t);\boldsymbol{q}(t+dt))}$$

Знаменник дорівнює

$$\int_t^{t+dt}\sqrt{\sum(\dot{q}_k(s)H_k(\boldsymbol{q}(s)))^2}\,ds$$

Чисельник запишемо у вигляді

$$\sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j}(\boldsymbol{q}(t))\dot{q}_j(t)dt + o(dt)$$

Перехід до границі дає вираз

$$\sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\dot{q}_j}{\sqrt{\sum_k(\dot{q}_k H_k)^2}}$$

який можна трактувати як скалярний добуток вектора $\sum_j \frac{1}{H_j}\frac{\partial u}{\partial q_j}\boldsymbol{e}_j$ на вектор одиничної довжини

$\boldsymbol{h} = \sum_j \frac{\dot{q}_j\ H_j}{\sqrt{\sum_k (\dot{q}_k H_k)^2}}\ \boldsymbol{e}_j$, тобто $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ = (***grad****u* , ***h***), звідки і випливає (2.2).

Наслідок. В тривимірному просторі в криволінійних координатах лапласіан має вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right) \qquad (2.3)$$

Для доведення в формулу (2.1) для дивергенції треба замість ***f*** підставити вираз (2.2) для ***grad*** *u*.

Приклади.

1. В циліндричних координатах:

$$\Delta u(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (2.4)$$

Якщо $z \equiv 0$, отримуємо формулу для лапласіана в полярних координатах

2. В сферичних координатах:

$$\Delta u(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2 sin\theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\right)\right) \qquad (2.5)$$

2.2. ЗАДАЧА ДІРІХЛЄ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ.

Прикладами застосування отриманих формул є розв’язання крайових задач в кругових областях. Розглянемо задачу Діріхлє в кільці: знайти обмежену функцію $u(x, y)$, для якої

$$\Delta u(x,y) = 0, r^2 < x^2 + y^2 < R^2;$$

$$u|_{x^2+y^2=r^2} = f_1(x,y), \quad u|_{x^2+y^2=R^2} = f_2(x,y).$$

Покладемо $u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = v(\rho,\varphi)$. Тоді v задовольняє крайовій задачі:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} = 0, r < \rho < R;$$

$$v(r,\varphi) = f_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = g_1(\varphi);$$

$$v(R,\varphi) = f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = g_2(\varphi).$$

Застосуємо до розв'язку метод поділу змінних, тобто будемо шукати $v(\rho,\varphi)$ у вигляді

$$v(\rho,\varphi) = a(\rho)b(\varphi).$$

Якщо підставимо v в рівняння, отримаємо:

$$\frac{\rho\left(\rho a'(\rho)\right)'}{a(\rho)} = -\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)}.$$

Така рівність можлива, якщо ліва і права частина є константою. Оскільки $b(\varphi)$ має період 2π, ця константа дорівнює n^2:

$$\begin{cases} \frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} = -n^2, \\ \frac{\rho\left(\rho a'(\rho)\right)'}{a(\rho)} = n^2. \end{cases}$$

Якщо $n = 0$, то $b_0(\varphi) = const$;

Для $n \neq 0$ $b_n(\varphi) = C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi$;

Розв'язок другого рівняння неважко вгадати: $a(\rho)$ є ступеневою функцією $a(\rho) = \rho^\lambda$. Підставимо таке $a(\rho)$ в рівняння та отримуємо $\lambda^2 = n^2$, тобто $a_n(\rho) = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}$. Якщо $n = 0$, то розв'язком другого рівняння є функція $a_0(\rho) = A_0\ln\rho + B_0$.

Таким чином, метод поділу змінних дає злічену кількість розв'язків

$$v_0(\rho,\varphi) = A_0 \ln\rho + B_0;$$

$$v_n(\rho,\varphi) = (A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi),$$

і загальний розв'язок є їх сума:

$$v(\rho,\varphi) = A_0\ln\rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi)$$

Коефіцієнти A_k, B_k, C_k, D_k знаходяться з крайових умов $g_1(\varphi), g_2(\varphi)$.

Частковими випадками задачі Діріхлє в кільці є задача в крузі $(0 \le \rho < R)$ та поза кругом $(\rho > R)$.

Умова обмеженості розв'язку:

$$|v(\rho,\varphi)| < M$$

приводить до формул:

$$v(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi), 0 \le \rho < R;$$

$$v(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi), \rho > R.$$

Розглянемо детально задачу в крузі $0 \le \rho < R$.

Позначимо $g(\varphi) = v(R,\varphi)$ крайову умову та обчислимо коефіцієнти ряду.

Коефіцієнти C_n та D_n знаходяться із граничної умови:

$$v(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}R^n(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi) = g(\varphi).$$

Це є розклад функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є на $[\pi; -\pi]$, тоді:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt, \quad C_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt, \quad D_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt,$$

$$v(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right) g(t)dt.$$

Вираз для підінтегральної функції можна спростити, якщо записати:

$$\cos n(t-\varphi) = \frac{e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}}{2}.$$

В результаті отримаємо вираз

$$\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{in(t-\varphi)}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{-in(t-\varphi)}\right)^n\right),$$

який перетворюється за формулою нескінченної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(t-\varphi)}}\right)$$

і подальше спрощення приводить цей вираз до вигляду

$$\frac{1}{2}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(t-\varphi)+\rho^2}.$$

Таким чином, отримано формулу розв'язку задачі Діріхлє в крузі:

$$v(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(t-\varphi)+\rho^2}g(t)dt.$$

Вправа 2.4. Обчислити розв'язок $v(\rho,\varphi)$ або $u(x,y)$ в крузі для таких граничних функцій:

1. $g(\varphi)=1;$
2. $g(\varphi)=a\cos\varphi+\ b\sin\varphi\,;$
3. $g(\varphi)=a\cos 2\varphi+\ b\sin 2\varphi\,;$

Вправа 2.5. Розв'язати задачу Діріхлє в кільці із сталими граничними умовами:

$$\Delta v(\rho,\varphi)=\ 0, a<r<b;\qquad v(a,\varphi)=v_1;\ v(b,\varphi)=v_2.$$

Вказівка. Розв'язок не залежить від φ.

2.3. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Визначення 2.4. Функцію $f(x_1,\dots x_n)$ назвемо гармонічною в області $D\subset\mathbb{R}^n$, якщо

$$\Delta f(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\in D.$$

Тривіальними прикладами гармонічних функцій є стала та лінійна функції. Наведемо більш змістовні приклади.

1. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фіксована точка в $\mathbb{R}^3$,

$$r(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Розглянемо вираз (2.5) лапласіана в сферичних координатах. Якщо функція u залежить тільки від ρ, то умова гармонічності приймає вид:

$\Delta u(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0,$ звідки $\Delta u(r) = \frac{c_1}{r} + c_2,$ тобто функція

$$u(x,y,z) = \frac{1}{r(x,y,z)}$$

є гармонічною в будь-якій області $D, M_0 \notin D$. Далі $\frac{1}{r(x,y,z)}$ грає роль опорної функції в просторі R^3.

2.Встановимо деякі властивості функцій, гармонічних в області D.Позначимо через П поверхню – межу цієї області, $\boldsymbol{n}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до цієї поверхні, і запишемо формулу Гаусса-Остроградського

$$\oiint_{\Pi}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n})d\sigma = \iiint_D div\boldsymbol{f}dxdydz$$

для векторного поля $\boldsymbol{f} = u\boldsymbol{grad}\, v$.

Оскільки $(\boldsymbol{grad}\, v, \boldsymbol{n}) = \frac{\partial v}{\partial n}$, отримаємо:

$$\oiint_{\Pi} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = \iiint_D((\boldsymbol{grad}\, u, \boldsymbol{grad}\, v) + u\Delta v)dxdydz$$

Запишемо таку ж формулу для $\boldsymbol{f} = v\boldsymbol{grad}\, u$ і віднімемо з першої рівності другу. Отримаємо вираз

$$\oiint_{\Pi}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma = \iiint_D(u\Delta v - v\Delta u)dxdydz \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) називається першою формулою Гріна.

Властивість 1. Покладемо в (2.6) $u \equiv 1, v -$ гармонічна в D функція. Тоді

$$\oiint_{\Pi}\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0 \qquad (2.7)$$

З тотожності (2.7) випливає необхідна умова існування розв’язку задачі Неймана

$\Delta u = 0$ в D; $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Pi} = f$.

Такою умовою є співвідношення $\oiint_{\Pi} f d\sigma = 0$.

Вправа 2.6. Чи існує розв’язок задачі Неймана в кулі $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, якщо на сфері мають місце граничні умови:

1. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xy - yz$,
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 3xz$?

Нехай тепер у формулі (2.6) u – довільна гармонічна в $D \subset R^3$ функція,

$v(x, y, z) = \frac{1}{r(x,y,z)}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Якщо $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin D$, то права частина (2.6) нульова. Нехай $M_0 \in D$. Оточимо точку M_0 сферою $S_\varepsilon(M_0)$ радіуса ε і запишемо (6.1) для області $D - B_\varepsilon(M_0)$, $B_\varepsilon(M_0)$ – куля радіуса ε.

$\oiint_{\Pi \cup S_\varepsilon} (u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma = 0$

або

$$\oiint_{\Pi \cup S_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \oiint_{S_\varepsilon} (-u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

В правій частині цієї рівності вектор зовнішньої нормалі направлений до точки M_0. Спростимо праву частину:

$\frac{1}{r}|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}|_{S_\varepsilon} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{r}|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

і скористаємось рівністю (2.7). Тоді

$\oiint_{\Pi} \left(-u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \oiint_{S_\varepsilon} u d\sigma$

Остання формула має місце для всіх $\varepsilon > 0$. Перейдемо до границі по $\varepsilon \to 0$. Застосувавши теорему про середнє значення для інтеграла по сфері, отримаємо:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\Pi} (\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}) d\sigma \qquad (2.8)$$

Остання формула називається основною формулою Гріна. Наслідком з неї є наступні властивості гармонічних функцій.

Властивість 2. Значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює її середньому значенню на поверхні сфери, тобто

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{S_R(M_0)} u d\sigma$$

Доведення. Покладемо в (2.8) $\Pi = S_R(M_0)$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}|_{S_R} = -\frac{1}{R^2}, \ \oiint_{S_R(M_0)} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0$$

звідки і випливає твердження.

Властивість 3. Якщо D - обмежена область, то гармонічна функція u досягає найбільшого С та найменшого с значень в $\overline{D}$ на її межі П.

Доведення. Припустимо супротивне:

$u(M_0) = C \geq u(M)$ для всіх $M \in D$, M_0 – внутрішня точка області D.

Оточимо точку M_0 кулею $B_\varepsilon(M_0) \subset D$. Тоді для всіх $M \in S_\varepsilon(M_0)$, $u(M_0) \geq u(M)$, і якщо проінтегрувати цю нерівність по сфері, отримаємо оцінку

$$u(M_0) > \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oiint_{S_R(M_0)} u(M) d\sigma$$

що протирічить властивості 2.

З доведеної **властивості 3** випливає

Наслідок. Задача Діріхлє в **обмеженій** області *D*

$$\Delta u = 0 \text{ в } D, u|_{\Pi} = f$$

має не більше одного розв’язку.

Доведення. Припустимо, що є два розв'язки u_1 та u_2. Тоді їх різниця $v = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношенню

$\Delta v = 0$ в D, $v|_{\Pi} = 0$

тобто $\max_{D} v = \min_{D} v = 0$, звідки $v \equiv 0$.

Зауваження. В двовимірному випадку роль опорної виконує функція

$\ln \rho(M_0, M) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,

яка є гармонічною по змінних (x, y), якщо $x \neq x_0, y \neq y_0$. Розглянемо двовимірне векторне поле

$\boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{i}P(x, y) + \boldsymbol{j}Q(x, y), (x, y) \in D \subset R^2$

і нехай замкнута крива γ – межа області. Запишемо формулу Гаусса для циліндричної області $V = D \times [0; h]$:

$\oiint_{\Pi} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) dxdydz$,

де межа П складається з вертикальної поверхні до двох горизонтальних площин $z = 0, z = h$. Поверхневий інтеграл по цих площинах дорівнює 0, оскільки $\boldsymbol{f}$ ортогональне $\boldsymbol{n}$. Якщо поділити обидві частини наведеної рівності на h і перейти до границі $h \to 0$, отримаємо аналог формули Гаусса на площині:

$\oint_{\gamma} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}) dl = \iint_D div\boldsymbol{f} dxdy$,

де ліва частина – криволінійний інтеграл першого роду вздовж контуру γ.

Наведені вище міркування приводять до наступних формул Гріна для плоскої області D:

$$\oint_{\gamma} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dl = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v) dxdy \qquad (2.9)$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \ln \rho - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl \qquad (2.10)$$

де точка (x_0, y_0) оточена контуром γ.

2.4.ФУНКЦІЯ ГРІНА ЗАДАЧІ ДІРІХЛЄ

Запишемо формули Гріна (2.6) та (2.8) для гармонічних в області D функцій u та v.

$$0 = \oiint_{\Pi}(-u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma\ ; \qquad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_{\Pi}(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r})d\sigma,$$

додавання яких приводить до рівності

$$u(M_0) = \oiint_{\Pi}((\frac{1}{4\pi r} + v)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{4\pi r} + v))d\sigma \qquad (2.11)$$

Нехай для функції u ставиться задача Діріхлє, тобто на поверхні П задані значення u, а значення нормальної похідної невідомі. Тоді формула (2.11) дає розв'язок цієї задачі, якщо перший доданок в підінтегральній функції дорівнює нулю. Позначимо: $M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z),\ M_0 \in D$.

Визначення 2.5. Функцією Гріна тривимірної задачі Діріхлє назвемо функцію шести змінних

$$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{1}{4\pi r\,(M_0, M)} + v(M_0, M), \qquad (2.12)$$

де функція v гармонічна за змінними (x, y, z) і така, що $G(M_0, M)|_{M\in\Pi} = 0$.

Якщо функція Гріна відома, то розв'язок задачі Діріхлє

$$\Delta_3 u = 0 \text{ в } D; \quad u|_{\Pi} = f$$

можна записати формулою

$$u(M_0) = -\oiint_{\Pi}\frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M)f(M)d\sigma \qquad (2.13)$$

де диференціювання G під знаком інтеграла відбувається за змінними (x, y, z), тобто

$$\frac{\partial G}{\partial n} = (\boldsymbol{grad}_M G(M_0, M), \boldsymbol{n}),$$

$M \in \Pi$, $\boldsymbol{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні П.

На перший погляд, пошук функції Гріна (що зводиться до пошуку функції v) не легший від прямого пошуку функції u. Але треба зауважити, що гармонічна функція $v(M_0, M)$ задовольняє специфічній граничній умові. Ця обставина дозволяє, використовуючи певні фізичні міркування, обчислювати функцію Гріна для простих областей.

Дійсно, функцію $\frac{1}{4\pi r\,(M_{0,}M)}$ можна трактувати як електричний потенціал в точці $M(x, y, z)$, наведений одиничним зарядом, що розміщений в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Тоді $G = \frac{1}{4\pi r} + v$ є сума потенціалів, де $v(M_0, M)$ - потенціал в точці M, що породжений деякими іншими зарядами, розміщеними поза областю D (в силу гармонічності v в D). В деяких випадках функція v будується достатньо просто.

Приклад 1. Нехай D – півпростір $\{z > 0\}$, тобто

$$\Delta u(x, y, z) = 0, z > 0; u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Основний одиничний додатній заряд, що знаходиться в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$, можна скомпенсувати на поверхні $z = 0$ одиничним від'ємним зарядом в точці $(x_0, y_0, -z_0)$, тобто

$$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z\,) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right).$$

У цьому випадку

$$-\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Pi} = \frac{\partial G}{\partial z}|_{z=0} = \frac{z_0}{2\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Таким чином, розв'язок граничної задачі задається формулою

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy \qquad (2.14)$$

Зауваження. В даному прикладі область D є необмеженою, і теорема єдиності не має місця. Формула (2.14) дає обмежений розв'язок задачі Діріхлє.

Дійсно, якщо $f(x,y) = 1$, то з (2.14) випливає, що $u(x_0, y_0, z_0) \equiv 1$, але і рівнянню, і граничній умові задовольняє і функція $u(x,y,z) = 1 + \alpha z$.

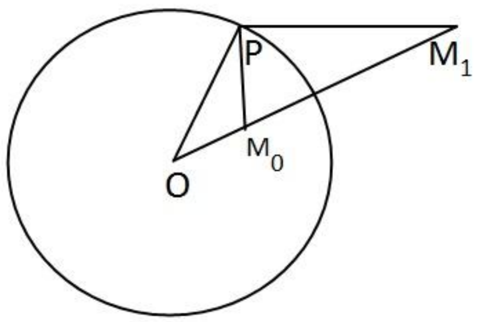
Вправа2.7. Довести, що з (2.14) випливає співвідношення

$\lim_{z_0 \to 0} u(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0)$

Приклад 2. Нехай *D*- куля $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, тобто $\Delta_3 u = 0$ в *D;*

$u|_{\partial D} = f(x,y,z)$.

Побудуємо функцію Гріна. Нехай заряд $q = 1$ розміщено в точці M_0, точка $P(x,y,z)$ належить поверхні – сфері S_R.



Нехай точка M_1 знаходиться на промені OM_0, $OM_0 \cdot OM_1 = R^2$. Тоді трикутники OM_0P та OM_1P подібні: $\frac{M_1P}{M_0P} = \frac{R}{OM_0}$

Остання рівність означає наступне: якщо в M_1 розмістити від'ємний заряд величиною $q = \frac{R}{OM_0}$, то в будь-якій точці P потенціал буде нульовий. Таким чином,

$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M_0,M)} - \frac{q}{r(M_1,M)}\right), \quad \text{де}$$

$$M_1(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0),\ \lambda^2 = \frac{R^2}{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}$$

Вправа 2.8. Записати явну форму для розв'язку задачі Діріхлє в кулі.

Вправа 2.9. Довести симетричність функції Гріна, тобто рівність $G(M_0, M) = G(M, M_0)$.

Для плоскої області $D \subset R^2$, що обмежена контуром γ, функція Гріна визначається аналогічно тривимірному випадкові. Якщо додати рівності (2.9) та (2.10), отримаємо формулу

$$u(x_0, y_0) = \oint_\gamma \left(-u \frac{\partial}{\partial n}\left(v - \frac{1}{2\pi} ln\rho\right) + \frac{\partial u}{\partial n}\left(v - \frac{1}{2\pi} ln\rho\right)\right) dl$$

тобто функція Гріна

$$G(x_0, y_0, x, y) = -\frac{1}{2\pi} ln\rho(M_0, M) + v(x_0, y_0, x, y)$$

де $v(x_0, y_0, x, y)$ гармонічна в D по кожній парі змінних $(x_0, y_0), (x, y)$. Якщо функція Гріна відома, то розв'язок задачі Діріхлє $\Delta u = 0$ в D, $u|_\gamma = f$ можна записати у вигляді:

$$u(x_0, y_0) = -\oint_\gamma \frac{\partial G}{\partial n}(x_0, y_0, x, y) f(x, y) dl \qquad (2.15)$$

Якщо умовно вважати вираз $-\frac{1}{2\pi} ln\rho(M_0, M)$ потенціалом в точці $(x; y)$, що наведений одиничним зарядом, розташованим в точці $(x_0; y_0)$, то в деяких випадках для побудови функції Гріна можна застосувати розглянутий вище метод компенсуючих зарядів.

Приклад 3. Нехай $D = \{y > 0\}$—верхня півплощина, γ—пряма $y = 0$. Розглянемо компенсуючий заряд $q = -1$ в точці $(x_0; -y_0)$ В точці $(x; y)$ цей заряд утворює потенціал

$$v(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{2\pi} ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

тобто $G(x_0, y_0, x, 0) = 0$. Для розв'язку задачі Діріхлє

$$\Delta u(x, y) = 0, \ y > 0; \quad u(x, 0) = f(x)$$

обчислимо похідну функції Гріна.

$$-\frac{\partial G}{\partial n}(x_0, y_0, x, 0) = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, x, 0) = \frac{1}{\pi}\ \frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

тобто розв'язок задачі Діріхлє для верхньої півплощини

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{(x-x_0)^2+y_0^2} \qquad (2.16)$$

Приклад 4. $D = \{x^2 + y^2 < R^2\}$, γ —коло $x^2 + y^2 = R^2$. Міркування, що наведені в прикладі 2, приводять до наступного виразу для функції Гріна в крузі:

$$G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{4\pi} ln\frac{x_0^2+y_0^2}{R^2} + \frac{1}{4\pi} ln\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

де $x_1 = \lambda x_0,\ y_1 = \lambda y_0,\ \lambda = \frac{R^2}{x_0^2+y_0^2}$.

Розв'язок задачі Діріхлє

$$v(\rho, \varphi) = u(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi),$$

обчислений за формулою (2.15), приводить до виразу

$$v(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho cos\,(t-\varphi)+\rho^2}v(R, t)\,dt$$

що співпадає з формулою, отриманою методом поділу змінних.

Для побудови функції Гріна на площині в деяких випадках можна застосувати апарат теорії функцій комплексної змінної. Позначимо:

C —комплексна площина, область

$$D \subset C, z \in C, \varsigma \in C,\ z = x + iy, \varsigma = \xi + i\eta;$$

$w_\varsigma(z)$ —конформне відображення області D на одиничний круг $|w| < 1,\ w_\varsigma(\varsigma) = 0$, тобто точка ς переходить в центр кола.

Задача—побудувати функцію Гріна області D, що визначається формулою

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(z, \varsigma) = -\frac{1}{2\pi} ln|z - \varsigma| + v_\varsigma(z)$$

де функція $v_\varsigma(z)$ гармонічна в D. Наведемо без доведення наступне твердження.

Теорема . Нехай $w_\varsigma(z)$ —конформне відображення області D на одиничне коло $|w| < 1,\ w_\varsigma(\varsigma) = 0$. Функція Гріна $G(z,\varsigma)$ задачі Діріхлє для області D визначається формулою:

$$G(z,\varsigma) = -\frac{1}{2\pi} ln\left|w_\varsigma(z)\right| .$$

Таким чином, побудова функції Гріна зводиться до пошуку відображення $w_\varsigma(z)$, яке для деяких областей є відомим.

Приклад 5. $D = \{y > 0\}$ −верхня півплощина:

$$w_\varsigma(z) = \frac{z-\varsigma}{z-\bar{\varsigma}}, \qquad G(z,\varsigma) = \frac{1}{4\pi} ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} ,$$

що збігається з результатом Прикладу 3.

Приклад 6. Нехай D – смуга $0 < y < \pi$. Тоді $w_\varsigma(z) = \frac{e^z-e^\varsigma}{e^z-\overline{e^\varsigma}}$, і функція Гріна має наступний вид:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ ln\frac{ch(x-\xi)-cos\,(\eta+y)}{ch(x-\xi)-cos\,(\eta-y)} .$$

Задача Діріхлє для даної області—знайти функцію $u(x,y)$, для якої:

$$\Delta u = 0, x \in R, 0 < y < \pi;\ \ u(x,0) = f(x),\ \ u(x,\pi) = g(x).$$

Обчислимо похідні функції Гріна на межі області:

$$-\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,\xi,0) = \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{siny}{ch(x-\xi)-cosy}$$

$$-\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,\xi,\pi) = -\frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,\pi) = \frac{1}{2\pi}\frac{siny}{ch(x-\xi)+cosy}$$

Розв’язок наведеної задачі Діріхлє має вигляд:

$$u(x,y) = \frac{siny}{2\pi}\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)d\xi}{ch(x-\xi)-cosy} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)d\xi}{ch(x-\xi)+cosy}\right)$$

2.5. ЗАДАЧА ДІРІХЛЄ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА. НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА. ТЕОРЕМА ЛІУВІЛЛЯ.

Рівняння $\Delta u = \mu,\quad \mu -$відома функція, називається рівнянням Пуассона. Розглянемо задачу Діріхлє для тривимірної обмеженої області D

$$\Delta u = \mu(x, y, z) \text{ в } D; \quad u|_{\Pi} = f \qquad (2.17)$$

і нехай відома функція Гріна $G(M_0, M)$ задачі Діріхлє для рівняння Лапласа в цій області .

Теорема. Нехай функція μ диференційована в області D і її частинні похідні обмежені. Тоді розв'язок задачі (2.17) дається формулою

$$u(M_0) = -\oiint_{\Pi} \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) f d\sigma - \iiint_D G(M_0, M)\, \mu(x, y, z) dxdydz,$$

де $M_0 = M(x_0, y_0, z_0),\ M = M(x, y, z)$.

Доведення теореми ґрунтується на дослідженні властивостей функції

$$v(x, y, z) = \iiint_D \frac{1}{r(M,P)} \mu(P) d\xi d\eta d\zeta, \qquad (2.18)$$

де $P = (\xi, \eta, \zeta)$. Назвемо цю функцію об'ємним потенціалом. Якщо $M \notin D$, то інтеграл є власним і

$$\Delta v(M) = \iiint_D (\Delta \frac{1}{r}) \mu(P) d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

Нехай тепер $M \in D$. Тоді маємо невласний інтеграл другого роду, підінтегральна функція в (2.18) має особливість в точці M, і ця особливість є інтегрованою. Дійсно , оточимо точку M кулею $K_\varepsilon(M), S_\varepsilon(M)$ - сфера, і перейдемо до сферичних координат

$$\xi = x + r sin\theta cos\varphi, \eta = y + r sin\varphi sin\theta, \zeta = z + r cos\theta.$$

Тоді

$$\iiint_{K_\varepsilon(M)} \frac{1}{r(M,P)} \mu(P) d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{0\,0\,0}^{\pi\,2\pi\,\varepsilon} r \mu(P) sin\theta dr d\varphi d\theta$$

є збіжним інтегралом. З тих же міркувань випливає, що оператор диференціювання $\frac{\partial}{\partial x}$ можна вносити під знак цього інтеграла :

$$\iiint_{K_\varepsilon(M)} (\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r})\,\mu(P)d\xi d\eta d\zeta = -\iiint_D \frac{x-\xi}{r^3}\mu(P)d\xi d\eta d\zeta =$$
$$\iiint_{0\,0\,0}^{\pi\,2\pi\,\varepsilon} sin^2\theta cos\varphi\mu(P)drd\varphi d\theta \ ,$$

тобто

$$\frac{\partial v}{dx}(M) = \iiint_D (\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r})\,\mu(P)d\xi d\eta d\zeta = -\iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}\right)\mu(P)d\xi d\eta d\zeta \qquad (2.19)$$

Повторне диференціювання під знаком інтеграла робить цей інтеграл розбіжним.

Лема. В умовах теореми має місце формула

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(M) = \mu(x,y,z)\oiint_\Pi \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{1}{r(M,P)})\,n_1\partial\sigma + \iiint_D \big(\mu(P) - \mu(M)\big)(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r})d\xi d\eta d\zeta,$$

де n_1 - перша координата нормального вектора $\boldsymbol{n}$.

Доведення. Застосуємо до інтеграла в правій частині (2.19) формулу Гаусса-Остроградського для векторного поля

$$\boldsymbol{f}(P) = -\boldsymbol{i}\frac{\mu(P)}{r(P,M)}$$

і отримаємо

$$\frac{\partial v}{dx}(M) = -\oiint_\Pi \frac{\mu(P)}{r(P,M)}n_1\partial\sigma + \iiint_D \frac{1}{r}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}d\xi d\eta d\zeta$$

. Тоді

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(M) = -\oiint_\Pi \mu(P)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)n_1\partial\sigma + \iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\mu(P)}{\partial\xi}d\xi d\eta d\zeta.$$

Зауважимо, що

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\,\mu(P) = \frac{\partial}{\partial \xi}\,\big(\mu(P) - \mu(M)\big)$$

і знов застосуємо формулу Гаусса-Остроградського до перетвореного об'ємного інтеграла. В результаті отримаємо :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(M) = -\oiint_{\Pi} \mu(P)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)n_1 \partial\sigma + \oiint_{\Pi} \left(\mu(P) - \mu(M)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)n_1 \partial\sigma -$$

$$-\iiint_D \left(\mu(P) - \mu(M)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta \ ,$$

і останній інтеграл збігається в силу нерівності

$$|\mu(P) - \mu(M)| < c \cdot r(P, M),$$

де $c^2 = \max_{P\in D}\left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)^2\right)(P)$

Спростивши вираз для $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ і скориставшись тим, що

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r},$$

отримаємо твердження леми.

Доведення теореми. Якщо аналогічно обчислити $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ та $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ і додати ці вирази, отримаємо

$$\Delta v(x, y, z) = \mu(x, y, z) \oiint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M,P)}\right)\partial\sigma$$

і поверхневий інтеграл за основною формулою Гріна (2.8) дорівнює -4π , тобто потенціал v задовольняє рівнянню Пуассона $\Delta v = -4\pi\mu$.

Якщо розглянути функцію

$$u(x, y, z) = -\iiint_D G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\mu(\xi, \eta, \zeta)d\xi d\eta d\zeta \ ,$$

G - функція Гріна, то вона задовольняє крайовій задачі $\Delta u = \mu$ в D; $u|_{\Pi} = 0$, оскільки $G(M_0, P) = 0$, коли $P \epsilon$ П. Додавання до u виразу $-\oiint_{\Pi}\frac{\partial G}{\partial n} f\,\partial\sigma$ дає для суми потрібне значення f на границі П. Теорему доведено.

Повернемось до розв'язку задачі Діріхлє в кулі

$$K_R = (\, x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < R^2): \qquad \Delta u = 0 \text{ в } K_R; \; u|_{S_R} = f,$$

що розглянута у вправі 2.8. Цей розв'язок має вигляд

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R} \oiint_{S_r} \frac{R^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} f(x, y, z) d\sigma \,. \qquad (2.20)$$

Позначимо:

$M = M(x, y, z) \in S_R$; $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0) \in K_R$;

$\rho^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2$; $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_0 - z)^2$.

Формулу (2.20) запишемо у вигляді

$$u(x_0, y_0, z_0) = \oiint_{S_r} H(x_0, y_0, z_0, x, y, z\,) f(x, y, z) d\sigma \qquad (2.21)$$

де ядро інтегрального оператора

$$H(x_0, y_0, z_0, x, y, z\,) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = \frac{(R - \rho)(R + \rho)}{4\pi R r^3}.$$

Позначимо через P центр кулі, тобто $PM = R,\; PM_0 = \rho,\; MM_0 = r.$

З нерівностей для сторін трикутника MPM_0 :

$$r < R + \rho, \qquad r > R - \rho$$

випливає двостороння оцінка для ядра H:

$$\frac{(R - \rho)}{4\pi R\,(R + \rho)^2} < H < \frac{(R + \rho)}{4\pi R\,(R - \rho)^2}$$

Нехай u - **додатня** гармонічна функція в області $K_R \subset D,\; P -$ центр кулі.

За теоремою про середнє значення

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\mathrm{S_R(P)}} u(x, y, z)\, \partial\sigma$$

Для довільної точки $M_0 \in K_R(P)$ запишемо значення $u(M_0)$ за формулою (2.21), а потім нерівності для $u(M_0)$, що випливають з нерівностей для H:

$$u(M_0) =$$

$$\oiint_{S_R(P)} H(M_0, M) u(M)\, \partial\sigma < \frac{(R+\rho)R}{(R-\rho)^2} \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{S_R(P)} u(x, y, z)\, \partial\sigma = \frac{(R+\rho)R}{(R-\rho)^2} u(P)$$

і, аналогічно

$$u(M_0) > \frac{(R-\rho)R}{(R+\rho)^2} u(P)$$

Розглянемо отриману двосторонню нерівність

$$\frac{(R-\rho)R}{(R+\rho)^2} u(P) < u(M_0) < \frac{(R+\rho)R}{(R-\rho)^2} u(P) \qquad (2.22)$$

P – центр кулі, M_0 - довільна точка кулі $K_R(P)$. Співвідношення (2.22) називається нерівністю Харнака.

Перший наслідок із цієї нерівності. Нехай $D = R^3$, тобто u гармонічна і додатня у всьому просторі. Перейдемо в (2.22) до границі, якщо $R \to \infty$. Отримаємо $u(P) = u(M_0)$ для всіх точок $M_0, P \in R^3$, тобто *:*

Якщо гармонічна в R^3 функція зберігає в R^3 знак, то вона є константою.

Наслідок другий – теорема Ліувілля.

Нехай гармонічна в R^3 функція обмежена зверху або знизу. Тоді вона є сталою.

Доведення. Якщо $u(x, y, z) > -c, \Delta u = 0$ *в* R^3, то функція $u(x, y, z) + c$ задовольняє умовам першого наслідку , тобто $u + c = const$.

Вправа 2.10. Записати нерівність Харнака на площині і довести теорему Ліувілля в R^2.

РОЗДІЛ 3. ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ

3.1.РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В R^n ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

Розглянемо задачу Коші параболічного рівняння: знайти функцію $u(t,\boldsymbol{x})$, $t > 0,\ \boldsymbol{x} \in R^n$, що задовольняє параболічному рівнянню та початковій умові

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k},\ \ u(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \qquad (3.1)$$

де матриця $A = ||\alpha_{jk}||$ додатньо визначена. До розв'язку цієї задачі, як і в одновимірному випадку, застосуємо апарат перетворення Фур'є. Нагадаємо деякі властивості n- вимірного перетворення Фур'є.

Нехай $f(\boldsymbol{x})$ - неперервна функція в R^n

$$\int_{R^n} |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} < \infty \qquad (3.2)$$

Визначимо її перетворення Фур'є формулою

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{R^n} f(\boldsymbol{x}) \exp\{-i(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x})\} d\boldsymbol{x}$$

і позначимо це символом :$f(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \tilde{f}(\boldsymbol{\omega})$.

Обернене перетворення Фур'є дається формулою

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \tilde{f}(\boldsymbol{\omega}) \exp\{i(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x})\} d\boldsymbol{\omega}$$

1 властивість.

Якщо $f(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \tilde{f}(\boldsymbol{\omega})$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ задовольняє (3.2), то $\frac{\partial f}{\partial x_k} \leftrightarrow i\omega_k \tilde{f}$

2 властивість (теорема про згортку).

Якщо $f(\boldsymbol{x})$ та $g(\boldsymbol{x})$ та задовольняють (3.2), то їх згортка

$$h(\boldsymbol{x}) = \int_{R^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

теж абсолютно інтегрована *і* $\tilde{h} = \tilde{f}\tilde{g}$.

Приклад. Обчислити перетворення Фур'є функції

$$f(\boldsymbol{x}) = \exp\{-(B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\}\,, B > 0.$$

Розв'язок. Виділимо у показнику під інтегралом

$\tilde{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{R^n} \exp\{-(B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - i(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x})\}\,d\boldsymbol{x}$

повний квадрат:

$$(B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + i(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x}) = \left(B\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}B^{-1}\boldsymbol{\omega}\right),\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}B^{-1}\boldsymbol{\omega}\right)+\frac{1}{4}(B^{-1}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}),$$

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\omega}) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(B^{-1}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\right\}\int\limits_{R^n}\exp\{-(B\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})\}\,d\boldsymbol{z} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det B}}\exp\left\{-\frac{1}{4}(B^{-1}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\right\}.$$

Якщо позначити $\frac{1}{4}B^{-1} = C$, то отримаємо формулу

$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det C}}\exp\left\{-\frac{1}{4}(C^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right\} \leftrightarrow \exp\{-(C\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\}$

оберненого перетворення Фур'є для $\exp\{-(C\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\}$.

Теорема 3.1. Якщо φ задовольняє (3.2), то розв'язок задачі Коші (3.1) дається формулою

$$u(t,\boldsymbol{x}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(detA)^{-\frac{1}{2}}\int_{R^n}\exp\left\{-\frac{1}{4t}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\}\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \qquad (3.3)$$

Зауваження 1 . Останню формулу можна записати у вигляді

$$u(t,\boldsymbol{x}) = E\varphi(\boldsymbol{\xi}),\ \ \boldsymbol{\xi}\sim\aleph(\boldsymbol{x},2tA),$$

де E - символ математичного сподівання, $\boldsymbol{x}$ та $2tA$ відповідно – середнє значення та кореляційна матриця гаусівського випадкового вектора $\boldsymbol{\xi}$.

Доведення теореми. Застосуємо до (3.1)перетворення Фур'є по змінній $\boldsymbol{x}$. Нехай $u(t,\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \tilde{u}(t,\boldsymbol{\omega})$. Тоді замість рівняння (3.1) отримаємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (властивість 1):

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -(A\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\tilde{u}\,, \quad \tilde{u}(0) = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\omega})$$

і її розв’язок

$$\tilde{u}(t,\boldsymbol{\omega}) = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\omega})\ \exp\{-t(A\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\}.$$

За теоремою про згортку

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{R^n} p(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$$

де функція

$$p(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp\{-t(A\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}) + i(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x})\}\,d\boldsymbol{\omega}$$

є оберненим перетворенням Фур’є від $\exp\{-t(A\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\}$. Скориставшись прикладом, що розглянуто вище, отримуємо

$$p(t,\boldsymbol{x}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(\det A)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4t}(A^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right\}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 2. Твердження теореми має місце і для більш широкого класу початкових умов – за яких інтеграл в правій частині (3.3) збігається.

Означення. Функція

$$p(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(\det A)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4t}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\}$$

називається фундаментальним розв’язком задачі Коші(3.1).

Якщо записати (3.3) як дію інтегрального оператора P_t на функцію φ:

$$(P_t\varphi)(\boldsymbol{x}) = \int_{R^n} p(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},)\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

то фундаментальний розв’язок $p(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ є ядром такого оператора.

Вправа 3.*1* Довести формулу

$$\big(P_s(P_t\varphi)\big)(\boldsymbol{x}) = (P_{s+t}(\varphi))(\boldsymbol{x}).$$

Розглянемо тепер параболічне рівняння із сталими коефіцієнтами більш загального вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad (3.4)$$

Якщо v' та v'' позначити відповідно вектор з перших частинних похідних (градієнт) та матрицю Гессе з других похідних, то (3.4) приймає форму

$$\frac{\partial v}{\partial t} = trAv'' + (\boldsymbol{b}, v')$$

де A називається матрицею дифузії, $\boldsymbol{b}$ – вектором зсуву.

Твердження. Розв'язок задачі Коші для рівняння (3.4) має вигляд

$$v(t, \boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b}) \qquad (3.5)$$

де $u(t, \boldsymbol{x})$ розв'язок (3.1) з тією ж самою початковою умовою.

Для доведення досить підставити функцію $v(t, \boldsymbol{x})$ в рівняння (3.4).

Наслідок. Фундаментальний розв'язок рівняння (3.4) має вигляд

$$p(t, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} (detA)^{-\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{1}{4t}(A^{-1}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y})\right\}$$

Зауваження 3. Повертаючись до ймовірнісного зображення розв'язку, отримуємо:

$$v(t, \boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b}) = E\varphi(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \sim \aleph(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b}, 2tA)$$

Вправа 3.2 Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = trAv'' + (\boldsymbol{b}, v') + c(t)v, \quad v(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$$

дається формулою

$$v(t, \boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b}) exp\left\{\int_0^t c(s)ds\right\}$$

де $u(t, \boldsymbol{x})$ розв'язок задачі (3.1)

Вправа 3.3. Довести, що розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = trAw'' + (\boldsymbol{b}, w') + f(t, \boldsymbol{x})$$

має вигляд

$$w(t,\boldsymbol{x}) = v(t,\boldsymbol{x}) + \int_0^t ds \int_{R^n} p(t-s, \boldsymbol{x} + (t-s)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}) f(s,\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

де v – функція з (3.5).

3.2.ЙМОВІРНІСНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ.

Параболічне рівняння є макроскопічною моделлю процесу дифузії. Нехай в деякому однорідному середовищі відбувається броунівський рух частинки. Характеристиками середовища є матриця дифузії A та вектор зсуву $\boldsymbol{b}$: перша визначає інтенсивність дифузії, а другий є швидкістю течії (вітру). Позначимо через $\boldsymbol{\xi}(t)$ випадковий вектор – координати частинки в момент часу t.
Визначимо умовну ймовірність

$$P\{\, \boldsymbol{\xi}(t) \in \Delta \,/\, \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{x} \,\} = P\,(t, \boldsymbol{x}, \Delta)$$

переходу частинки з точки $\boldsymbol{x}$ у множину Δ протягом часу t. Виявляється, що щільність цієї ймовірності відносно об'єму

$$h(\,t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\,) = \lim_{\Delta\downarrow y} \frac{P(\,t,\boldsymbol{x},\Delta\,)}{V(\Delta)}$$

і є фундаментальним розв'язком рівняння (3.4).

Зауваження. У випадку неоднорідного середовища матриця дифузії та вектор зсуву залежать від просторової змінної $\boldsymbol{x}$.

Вище було встановлено формулу для розв'язку параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = trAu'' + (\boldsymbol{b}, u') + f\,(t, \boldsymbol{x})$$

з початковою умовою $u(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}\,\varphi(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t \mathrm{E} f(\,s,\, \boldsymbol{\eta}\,) ds \qquad (3.6)$$

де $\boldsymbol{\xi} \sim \aleph(\, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b},\, 2tA\,)$, $\quad \boldsymbol{\eta} \sim \aleph(\, \boldsymbol{x} + (\,t-s\,)\boldsymbol{b},\, 2(\,t-s\,)A\,)$.

Розглянемо ряд прикладів функцій φ та f, для яких розв'язок (3.6) має досить простий вигляд. Нагадаємо деякі формули для обчислення математичних сподівань, пов'язаних з гауссівським випадковим вектором $\boldsymbol{\xi}$ із значеннями в довільному евклідовому просторі X.

Вектор $\boldsymbol{m}$ і оператор B називається відповідно середнім значенням та кореляційним оператором довільного випадкового вектора $\boldsymbol{\xi}$, якщо

$$\mathrm{E}(\,\xi, \boldsymbol{h}\,) = (\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}\,); \quad \mathrm{E}(\,\xi - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}\,)(\,\xi - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}\,) = (\,B\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}\,)$$

для всіх $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in X$. З останнього співвідношення випливає формула

$$\mathrm{E}(\,\xi, \boldsymbol{h}\,)(\,\xi, \boldsymbol{k}\,) = (\,B\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}\,) + (\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}\,)(\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}\,)$$

Обчислимо математичне сподівання $\mathrm{E}(\,T\xi, \xi\,)$ від квадратичної форми, T – симетричний оператор. Нехай $\{\,\boldsymbol{e}_k\,\}$ – ортобазис в X. Тоді

$$\mathrm{E}(T\xi, \xi\,) = \mathrm{E}\sum(\,T\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}_k)(\,\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{e}_k) = \sum \mathrm{E}(\,\boldsymbol{\xi}, T^*\boldsymbol{e}_k\,)(\,\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}_k\,) =$$

$$= \sum((\,B\boldsymbol{e}_k\,, T^*\boldsymbol{e}_k) + (\,m, \boldsymbol{e}_k\,)(\,m, T^*\boldsymbol{e}_k) = tr\, TB + (\,T\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\,).$$

Зауважимо, що формулу отримано для довільного випадкового вектора ξ.

Нехай тепер

$$\xi \sim \aleph(\,\boldsymbol{m}, B\,)$$

Гауссівська характеристична функція має вираз

$$\chi(\,\boldsymbol{z}\,) = \mathrm{E}\, exp\{\, i(\,\boldsymbol{z}, \xi\,)\,\} = exp\{\, i(\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{z}\,) - \tfrac{1}{2}(\,B\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\,)\,\},$$

звідки випливають формули:

$$\mathrm{E}\, cos(\,\xi, \boldsymbol{z}\,) = cos(\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{z}\,) exp\{\,-\tfrac{1}{2}(\,B\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\,)\,\}$$

$$\mathrm{E}\, sin(\,\xi, \boldsymbol{z}\,) = sin(\,\boldsymbol{m}, \boldsymbol{z}\,) exp\{\,-\tfrac{1}{2}(\,B\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\,)\,\}$$

Розглянемо приклади обчислення розв'язку за формулою (3.6)

Приклад 1. $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), f=0$

$u(t, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + t(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) + (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2t(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) + t^2(T\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + 2t\, tr\, TA.$

Приклад 2. $\varphi = 0, \quad f(t, \boldsymbol{x}) = (a(t), \boldsymbol{x}) + (D(t)\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$

$u(t, \boldsymbol{x}) = \int_0^t \Big(\big((\boldsymbol{a}(s),\ \boldsymbol{x}) + (t-s)(\boldsymbol{a}(s),\ \boldsymbol{b}) \big) + (D(s)(\boldsymbol{x} + (t-s)\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} +$

$t-s\boldsymbol{b} + 2t-s trDsA\, ds$

Якщо ***a*** та *D* сталі, отримаємо:

$u(t, \boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + t(D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \frac{t^2}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t^2 trDA + t^2(D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) + \frac{t^3}{3}(D\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$

Приклад 3. $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x});\ f(t, \boldsymbol{x}) = 0.$

$u(t, \boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b}) \exp\{-t(A\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})\}.$

Як ілюстрацію, розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_2 u + \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} + t(x^2 - 2xy + 5y^2),\ u(0, x, y) = \cos(2x + y).$$

$$A = I,\ \boldsymbol{b} = (1; -3),\ T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$u(t, x, y) = \cos(2x + y - t)\exp\{-5t\} +$$

$$+2t^3 + \frac{t^2}{2}(x^2 - 2xy + 5y^2) + \frac{t^3}{3}(4x - 16y) + \frac{13}{3}t^4.$$

Вправа 3.4. Знайти розв’язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_3 u + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 3\frac{\partial u}{\partial z} + \sin(3x - y + z),\ u(0, x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 4yz$$

3.3.ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Дослідимо задачу Коші для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_n u$$

де $n = 2$ або $n = 3$. Почнемо з тривимірного випадку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u,\ u(0,x,y,z) = u_0(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = u_1(x,y,z) \qquad (3.7)$$

Нехай $F(s)$ – двічі диференційовна функція, $s \in R$. Позначимо

$$r(x,y,z) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

і назвемо функцію

$$f(t,x,y,z) = \frac{F(r-at)}{r}$$

сферичною хвилею.

Лема. Сферична хвиля задовольняє рівнянню (3.7).

Доведення. Обчислимо похідні функції f:

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{a^2 F''(r-at)}{r}$, а лапласіан в сферичних координатах:

$\Delta f = \frac{1}{r^2}(r^2 f')' = \frac{F''(r-at)}{r}$, звідки і випливає твердження леми.

Наслідок. Функція

$$h(t,x,y,z) = \iiint_{\mathfrak{R}^3} g(\xi,\eta,\zeta) \frac{F(r-at)}{r} d\xi d\eta d\zeta \qquad (3.8)$$

задовольняє рівнянню (3.7) для тих функцій g, що інтеграл в правій частині збігається.

Доведення зводиться до диференціювання інтеграла за параметром.

Підберемо функції g та F таким чином, щоб функція h задовольняла одному з початкових умов (3.7).

Розглянемо функцію $F(s) = F_\varepsilon(s)$, що задовольняє умові:

$$F_\varepsilon(s) \geq 0;\ F_\varepsilon(s) = 0, |s| \geq \varepsilon;\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(s) ds = 1,$$

тобто F_ε – фінітна функція з носієм supp $F_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon; \varepsilon]$.

Наприклад,

$$F_\varepsilon(s) = \left[\begin{matrix} c\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - s^2}\right\}, |s| < \varepsilon \\ 0, |s| \geq \varepsilon \end{matrix}\right.$$

c – нормуюча константа.

Якщо перейти в (3.8) до сферичних координат, то

$h_\varepsilon(t,x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{at-\varepsilon}^{at+\varepsilon} g(x + r\sin\vartheta\cos\varphi, y + r\sin\vartheta\sin\varphi, z +$
$r\cos\vartheta F\varepsilon r-atr\sin\vartheta drd\vartheta d\varphi$.

Застосування до внутрішнього інтеграла теореми про середнє значення у вигляді

$\int_{at-\varepsilon}^{at+\varepsilon} \phi(r)F_\varepsilon(r - at)dr = \phi(r_0)\int_{at-\varepsilon}^{at+\varepsilon} F_\varepsilon(r - at)dr = \phi(r_0),$

де $at - \varepsilon < r_0 < at + \varepsilon$, і подальший перехід до границі $\varepsilon \to 0$ приводить до формули:

$$h(t,x,y,z) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t,x,y,z) =$$

$= at\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(x + at\sin\vartheta\cos\varphi, y + at\sin\vartheta\sin\varphi, z + at\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi.$

Обчислимо початкові умови функції h. Очевидною є рівність $h(0,x,y,z) = 0$.

Друга початкова умова

$\frac{\partial h}{\partial t}(0,x,y,z) = a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(x,y,z)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi = 4\pi a g(x,y,z)$.

Таким чином, якщо покласти $g(x,y,z) = \frac{u_1(x,y,z)}{4\pi a}$, то функція

$$v(t,x,y,z) =$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_1(x + at\sin\vartheta\cos\varphi\,, y + at\sin\vartheta\sin\varphi\,, z + at\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi$$

задовольняє рівнянню (3.7) та початковим умовам:

$$v(t, x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x, y, z) = u_1(x, y, z).$$

Нехай $u(t, x, y, z)$ задовольняє рівнянню (3.7). Диференціювання обох частин рівняння по t приводить до висновку, що $\frac{\partial u}{\partial t}$ теж задовольняє рівнянню. Розглянемо функцію

$$w(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_0(x + at\sin\vartheta\cos\varphi\,, y + at\sin\vartheta\sin\varphi\,, z + at\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi$$

яка є розв'язком рівняння (3.7).

Тоді з наведених вище міркувань випливає, що $w(0, x, y, z) = u_0(x, y, z)$,

і елементарні обчислення приводять до рівності

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, x, y, z) = 0.$$

Таким чином, доведено наступний результат:

Теорема. Розв'язок задачі Коші (3.7) дається формулою

$$u(t, x, y, z) = \tag{3.9}$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_1(x + at\sin\vartheta\cos\varphi\,, y + at\sin\vartheta\sin\varphi\,, z + at\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_0(x + at\sin\vartheta\cos\varphi\,, y + at\sin\vartheta\sin\varphi\,, z + at\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi\right)$$

Зауваження. Наведені в (3.9) вирази множенням на a^2t^2 зводяться до поверхневих інтегралів по сфері $S_{at}(x, y, z)$, тобто

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}} u_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint_{S_{at}} u_0 d\sigma\right) \tag{3.10}$$

Вправа 3.5. Розв'язати задачу Коші

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u, u(0,x,y,z) = x + 2y - z, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z^2$

Перейдемо до двовимірного хвильового рівняння і відповідної задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u, u(0,x,y) = u_0(x,y), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = u_1(x,y) \qquad (3.11)$$

Формально розв'язок цієї задачі Коші теж можна записати формулою (3.10), де u_0 та u_1 не залежать від третьої координати. Але цей вираз можна спростити, скориставшись співвідношенням

$$d\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma}$$

де $d\xi d\eta$ – площа проекції елемента сфери радіуса *at* на горизонтальну площину $\zeta = 0$, γ – кут нахилу дотичної до сфери площини в точці (ξ,η,ζ) до площини $\zeta = 0$:

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}$$

З урахуванням наявності двох півсфер розв'язок задачі Коші (3.11) можна записати як суму інтегралів по кругу $K_{at}(x,y)$ радіуса *at* (*x*, *y* – координати центру):

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\iint_{K_{at}(x,y)} \frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_{at}(x,y)} \frac{u_0(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} d\xi d\eta \qquad (3.12)$$

Розглянемо фізичну інтерпретацію розв'язків (3.10) та (3.12), вважаючи точку *M(x,y,z)* місцеперебуванням спостерігача, який “слухає” сигнал *u(t,x,y,z)*. Нехай початкові умови є фінітними функціями, тобто

$u_k(\xi,\eta,\zeta) = 0$, $k = 0,1$, якщо $P(\xi,\eta,\zeta) \notin D$, D – обмежена область.

Позначимо: $d_1 = \min_{P\in D} r(M,P),\ d_2 = \max_{P\in D} r(M,P),$

$r(M,P) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Якщо $at < d_1$, сигнал в точці M не відчувається; момент $t_1 = \frac{d_1}{a}$ відповідає передньому фронту хвилі. Що стосується моменту $t_2 = \frac{d_2}{a}$, то в трімірному випадку він відповідає задньому фронту; в двовимірному випадку останній є відсутнім.

Наведені міркування стосовно еволюційного оператора приводять до формул розв'язку неоднорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_k + f(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in R^k$$

до розв'язків, що визначені формулами (3.10) та (3.12) додаються такі члени:

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{ds}{t-s} \iint_{S_{a(t-s)}(x,y,z)} f(s, \xi, \eta, \zeta)\, d\sigma, k = 3; \qquad (3.10.A)$$

та

$$\frac{1}{2\pi a} \int_0^s ds \iint_{K_{a(t-s)}(x,y)} \frac{f(s,\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} d\xi d\eta\, , k = 2. \qquad (3.12.A)$$

Вправа 3.6. Записати (3.10.А) як потрійний інтеграл по кулі.

Вправа 3.7. Знайти розв'язок задачі Коші:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 + x - y,\ \ u_0 = 1,\ u_1 = x^2 + xy.$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 + x + y^2 - 3z^2,\ u_0 = u_1 = 0.$

3.4.ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПІВОСІ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Об'єктом дослідження є параболічне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$$

та гіперболічне

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

рівняння на півосі, тобто $x>0$. Додатково до початкових умов задається режим в точці $x = 0$ (гранична умова).

1. Розглянемо першу граничну задачу

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = \varphi(x), u(t,0) = 0, \varphi(0) = 0,$

тобто на кінці стрижня підтримується нульова температура. Продовжимо функцію φ на всю вісь як непарну функцію:

$$\Phi(x) = \left[\begin{array}{c} \varphi(x), x > 0 \\ -\varphi(-x), x < 0 \end{array}\right.$$

Скористаємося формулою (1.4) для розв'язку задачі Коші на всій осі

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(y)\, dy.$$

Якщо представити інтеграл сумою $\int_{-\infty}^{0} dy + \int_{0}^{\infty} dy$ і в першому доданку замінити змінну, отримаємо вираз:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right\}\right] \varphi(y) dy\ .$$

Оскільки $u(t,0) = 0$ і $u(t,x)$ задовольняє рівнянню, остання формула є розв'язком першої граничної задачі на півосі.

За загальною формулою (1.9) розв'язок неоднорідного рівняння

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), x > 0, u(0,x) = \varphi(x), u(t,0) = 0$

є сумою попереднього виразу та доданку

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int_{0}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-s)}\right\}\right] f(s,y) dy$$

Якщо гранична умова в точці x=0 має вигляд

$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \varphi'(0)=0$ (друга гранична задача)

то початкову умову слід подовжити на всю вісь як парну функцію, що приводить до формули

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}\right\}\right]\varphi(y)dy+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int_0^\infty\left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-s)}\right\}\right]f(s,y)dy$$

розв'язку другої граничної задачі для неоднорідного рівняння.

2. Дослідимо задачу на півосі для неоднорідних граничних умов

$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x>0, u(0,x)=\varphi(x), u(t,0)=g(t)$ (перша гранична задача)

або $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=g(t)$ (друга гранична задача)

Розглянемо різні методи їх розв'язку. У випадку граничної умови $u(t,0)=g(t)$, $g(0)=0$, покладемо

$$v(t,x)=u(t,x)-g(t)$$

Тоді рівняння для $v(t,x)$ має вигляд:

$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-g'(t), x>0, v(0,x)=\varphi(x), v(t,0)=0$

і розв'язок його отримано в п.1: доданок, що відповідає неоднорідному рівнянню, має вигляд

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{g'(s)ds}{\sqrt{t-s}}\int_0^\infty\left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-s)}\right\}\right]dy$$

Внутрішній інтеграл заміною змінної можна перетворити в вираз

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{a\sqrt{2(t-s)}}}^{\frac{x}{a\sqrt{2(t-s)}}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz=\Phi\left(\frac{x}{a\sqrt{2(t-s)}}\right)$$

де Φ – функція Лапласа,

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

а отриманий вираз

$$-\int_0^t g'(s)\Phi\left(\frac{x}{a\sqrt{2(t-s)}}\right)ds$$

інтегруванням частинами приводиться до вигляду

$$-g(t)+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-s)a^2}\right\}ds$$

Таким чином, розв'язок першої граничної задачі на півосі з умовою *u(t,0)=g(t)* має вигляд

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-s)a^2}\right\}ds$$

де u_0 – наведений а п.1 розв'язок, що відповідає умові *u(t,0)=0*.

Для розв'язку другої граничної задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x>0, u(0,x)=0, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=g(t),\ |u(t,x)|<C$$

застосуємо перетворення Лапласа по змінній *t*. Позначимо

$$\hat{u}(p,x)=\int_0^\infty e^{-pt}u(t,x)dt, \operatorname{Re} p>0.$$

Тоді останнє рівняння приймає форму

$$p\hat{u}(p,x)=a^2\hat{u}_{xx}(p,x), x>0, \frac{\partial\hat{u}(p,0)}{\partial x}=\hat{g}(p)\ .$$

Загальним розв'язком цьогодиференціального рівняння є функція

$$\hat{u}(p,x)=c_1\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}+c_2\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}, x>0, \operatorname{Re} p>0.$$

З обмеженості $\hat{u}(p,x)$ випливає, що c_2=0. Множник c_1 визначається з умови

$\frac{\partial\hat{u}(p,0)}{\partial x}=-\frac{\sqrt{p}}{a}c_1=\hat{g}(p)$, звідки

$$\hat{u}(p,x) = -\hat{g}(p)\frac{a}{\sqrt{p}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}.$$

За теоремою про згортку

$$u(t,x) = \int_0^t h(t-s,x)g(s)ds$$

де *h(t,x)* – оригінал, що відповідає зображенню $-\frac{a}{\sqrt{p}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}$.

Лема. Оригіналом згаданого зображення є функція

$$h(t,x) = -\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}$$

Доведення. Розв'яжемо задачу Коші на всій осі

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, x \in R, v(0,x) = \varphi(x)$$

за допомогою перетворення Лапласа. Покладемо

$$\hat{v}(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt}u(t,x)dt, \operatorname{Re} p > 0$$

Отримаємо рівняння

$$p\hat{v} - \varphi(x) = a^2\hat{v}_{xx}, \operatorname{Re} p > 0, x \in R$$

розв'язком якого є функція

$$\hat{v}(p,x) = c_1(x)\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\} + c_2(x)\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}$$

де з обмеженості $\hat{v}$ функції c_1 та c_2 задовольняють умов

$$c_1(-\infty) = 0, c_2(+\infty) = 0$$

Застосувавши метод варіації, розв'яжемо систему рівнянь

$$c_1'(x)\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\} + c_2'(x)\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\} = 0;$$

$$-c_1'(x)\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\} + c_2'(x)\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\} = -\varphi(x)\frac{a}{\sqrt{p}}$$

Отримаємо

$c_1'(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)\frac{a}{\sqrt{p}}\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}, \quad c_2'(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x)\frac{a}{\sqrt{p}}\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}x\right\}.$

Враховуючи умови на нескінченності, отримаємо вирази для $c_1(x), c_2(x)$:

$c_1(x) = \int_{-\infty}^{x} c_1'(y)dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\frac{a}{\sqrt{p}}\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{a}y\right\}dy$;

$c_2(x) = -\int_x^{\infty} c_2'(y)dy = \frac{1}{2}\int_x^{\infty}\varphi(y)\exp\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a}y\right\}dy$.

і розв'язок

$$\hat{v}(p,x) = \frac{1}{2\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-y|}\varphi(y)dy.$$

З іншого боку, розв'язок задачі Коші на R відомий:

$$v(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy .$$

Якщо порівняти дві останні формули, то

$$L^{-1}\left(\frac{a}{2\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}b}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{b^2}{4a^2t}} ,$$

де L^{-1} – символ оберненого перетворення Лапласа. Останню формулу можна переписати так:

$$L^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} .$$

Лему доведено.

Наслідок. Розв'язок граничної задачі

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = g(t)$$

дається формулою

$$u(t,x) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g(t-s)}{\sqrt{s}}e^{-\frac{x^2}{4a^2s}}ds .$$

3. Перейдемо до розгляду задач на півосі для гіперболічних рівнянь. Нехай

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), u(t,0) = 0$

де $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$. Якщо продовжити φ та ψ на всю вісь як непарні функції, отримаємо формулу для розв'язку цієї граничної задачі.

$$u(t,x) = \left[\begin{array}{l} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy, x \geq at \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \psi(y)dy, x < at \end{array} \right.$$

Для граничної умови $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$ початкові умови $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ треба продовжити на всю вісь як парні функції; це можливо, якщо $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

Тоді розв'язок граничної задачі

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$

має вигляд:

$$u(t,x) = \left[\begin{array}{l} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy, x \geq at \\ \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_{0}^{at+x} \psi(y)dy + \int_{0}^{at-x} \psi(y)dy\right), x < at \end{array} \right.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

не можна для всіх t обчислити за формулою (1.9) з **РОЗДІЛУ 1**. Це пов'язано з тим, що рівність для еволюційного оператора

$$H(t)H(s) = H(t+s)$$

виконується лише для малих t і s $(t + s < \frac{x}{a})$. Тому для умови $u(t,0) = 0$ формула розв'язку неоднорідного рівняння

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_0^s ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y)\, dy$$

має місце тільки для $t \leq \frac{x}{a}$

4. Розглянемо граничні задачі для гіперболічного рівняння з неоднорідними граничними умовами

$$u(t,0) = g(t) \text{ або } \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = g(t).$$

З фізичних міркувань збурення в точці $x = 0$ буде розповсюджуватися по струні зі швидкістю a. Це означає, що розв'язком граничної задачі

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, u(t,0) = g(t)$ або $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = g(t)$

будуть відповідно функції

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, x \geq at \\ g\left(t - \frac{x}{a}\right), x < at \end{cases}$$

якщо $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$; або

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, x \geq at \\ -a\int_0^{t-\frac{x}{a}} g(s)ds, x < at. \end{cases}$$

якщо $g(0) = g'(0) = 0$

Дані вирази додаються до розв'язку задачі коші для однорідних граничних задач.

Приклад. Знайти розв'язок граничної задачі

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t, u(0,x) = 27x^3, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, u(t,0) = t^3.$

Розв'язок. За наведеною формулою

$$u(t,x) = \begin{cases} 27x^3 + 9t^2x + \frac{t^3}{6}, x \geq \frac{t}{3} \\ t^3 + \frac{3}{2}t^2x + \frac{45}{2}tx^2 + \frac{9}{2}x^3, x < \frac{t}{3} \end{cases}$$

Вправа 3.8. Записати розв'язки граничних задач:

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx, x > 0, u(0,x) = x, u(t,0) = 0;$
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + x, x > 0, u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0;$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = 1 + x, u(t,0) = 1.$

Вправа 3.9. Знайти розв'язки граничних задач:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x, u(t,0) = t^2$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16t^2, x > 0, u(0,x) = \frac{x^4}{6}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2\sin x, u(t,0) = 4t^4$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, u(0,x) = x, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \cos t$

3.5.МЕТОД ПОДІЛУ ЗМІННИХ ДЛЯ ГРАНИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо граничну задачу на відрізку $(0; l)$ для параболічного

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ u(0,x) = u_0(x), u(t,0) = u(t,l) = 0 \qquad (3.13)$$

та гіперболічного

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l;$$

$$u(0,x) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), u(t,0) = u(t,l) = 0 \qquad (3.14)$$

рівнянь.Зауважимо, що $u_0(0) = u_0(l) = 0.$

Пропонований метод розв'язку цих задач – метод поділу змінних (Коші), що вже використовувався для розв'язку задачі Діріхлє в крузі. Так, для задачі (3.13) $u(t,x)$ шукаємо у вигляді

$u(t,x) = f(t)g(x), g(0) = g(l) = 0,$ звідки

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = a^2\frac{g''(x)}{g(x)}$$

що приводить до системи

$$f'(t) = cf(t),\ \ g''(x) = \frac{c}{a^2} g(x)\ , c - \text{константа},$$

що з фізичних міркувань (скінченність енергії) повинна бути від'ємною: $c = -\lambda^2$. Тоді

$$f(t) = e^{-t\lambda^2},\ g(x) = \sin\frac{\lambda}{a}x\ \ (g(0) = 0).$$

Умова $g(l) = 0$ приводить до співвідношення

$$\frac{\lambda}{a} l = \pi n, \lambda_n = \frac{\pi n a}{l}\ \ ,$$

тобто розв'язки рівняння утворюють послідовність

$$u_n(t,x) = exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t\right\} sin\frac{\pi n x}{l}$$

а загальний розв'язок

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(t,x)$$

Коефіцієнти A_n можна знайти з початкової умови :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\frac{\pi n x}{l}$$

Остання формула є розкладом $u_0(x)$ в ряд Фур'є по синусах на (0;l), звідки

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y) sin\frac{\pi n y}{l} dy$$

Таким чином , формула для розв'язку (3.13) має вигляд

$$u(t,x\ ) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t\right\}\int_0^l sin\frac{\pi n x}{l} sin\frac{\pi n y}{l} u_0(y) dy\ .$$

Вправа 3.10. Записати розв'язок параболічної граничної задачі для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

Аналогічно розв'язується задача (3.14) коливань струни із закріпленими кінцями :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos\frac{\pi na}{l}t + B_n sin\frac{\pi na}{l}t)\, sin\frac{\pi nx}{l}$$

де A_n та B_n знову ж таки є коефіцієнтами Фур'є:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y) sin\frac{\pi ny}{l}dy, \quad B_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l u_1(y) sin\frac{\pi ny}{l}dy .$$

В наведених прикладах розв'язок має вигляд

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) g_n(x)$$

де $g_n(x)$—ортогональні власні функції симетричного диференціального оператора

$$L = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, D_L = \{g \in C^2(0;l); g(0) = g(l) = 0\}.$$

Метод поділу змінних можна узагальнити і для більш складних задач , наприклад , для рівняння вищої просторової розмірності. Як приклад , розглянемо рівняння теплопровідності в прямокутнику

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = a^2\Delta u(t,x,y), 0 < x < l, 0 < y < m,$$

$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad u|_\gamma = 0, \ \gamma$- межа області .

Якщо покласти $u(t,x) = f(t)g(x,y)$, отримаємо :

$$f(t) = exp\{-\lambda^2 t\}, \ \Delta g(x,y) = -\frac{\lambda^2}{a^2}g(x,y), g|_\gamma = 0 .$$

Останнє рівняння теж допускає поділ змінних: $g(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, звідки

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} - \frac{\lambda^2}{a^2}, \text{ тобто}$$

$$\varphi''(x) + \mu^2\varphi(x) = 0, \varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

$$\psi''(y) + (\frac{\lambda^2}{a^2} - \mu^2)\psi(y) = 0, \psi(0) = \psi(m) = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд суми подвійного ряду

$u(t,x) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k} exp\left\{-\pi^2 a^2 (\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2})t\right\} sin\frac{\pi jx}{l} sin\frac{\pi ky}{m}$

а коефіцієнти $a_{j,k}$ знаходяться з початкової умови.

Розглянемо менш тривіальний приклад – першу граничну задачу для рівняння теплопровідності в крузі

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\rho,\varphi) = a^2 \Delta u(t,\rho,\varphi); u(0,\rho,\varphi) = u_0(\rho,\varphi); u(t,R,\varphi) = 0 \qquad (3.15)$$

Перший поділ змінних

$$u(t,\rho,\varphi) = f(t)g(\rho,\varphi)$$

приводить до системи

$$f(t) = exp\{-\lambda^2 t\},\ \Delta g(\rho,\varphi) = -\frac{\lambda^2}{a^2} g(\rho,\varphi), \quad g(R,\varphi) = 0\ .$$

Якщо покласти $g(\rho,\varphi) = v(\rho)h(\varphi)$, отримаємо вираз:

$$\Delta g = \frac{1}{\rho}\left(h(\rho v')' + \frac{v}{\rho} h''\right) = -\frac{\lambda^2}{a^2} vh\ .$$

Подальше спрощення приводить до рівняння з поділеними змінними

$$\rho\frac{(\rho v'(\rho))'}{v(\rho)} + \frac{\lambda^2}{a^2}\rho^2 = -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}$$

що приводить до системи

$$h''(\varphi) = -\mu^2 h(\varphi), \quad (\rho v'(\rho))' == (\mu^2 - \frac{\lambda^2}{a^2}) v(\rho) \qquad (3.16)$$

$|v(0)| < \infty,\ v(R) = 0$

Оскільки $h(\varphi)$ – періодична з періодом 2π, то $\mu = n$, n – натуральне. Співвідношення для $v(\rho)$ є сингулярною задачею Штурма-Ліувілля на власні значення. Відомо, що ці власні значення від'ємні та утворюють спадаючу послідовність , що прямує до $-\infty$. Відповідні власні функції $v_k(\rho)$ утворюють повну ортонормовану систему з вагою ρ в підпросторі $L_2(0;R)$, $|v(0)| < \infty$, $v(R) = 0$:

$$\int_0^R \rho v_j(\rho) v_k(\rho) d\rho = \delta_{jk} \ .$$

Перетворимо рівняння (3.16), поклавши

$$\rho = \frac{a}{\lambda} z, \quad v(\rho) = v\left(\frac{a}{\lambda} z\right) = w(z)$$

Тоді функція *w(z)* задовольняє рівнянню Бесселя :

$$w''(z) + \frac{w'(z)}{z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) w(z) = 0, \quad |w(0)| < \infty, \quad w\left(\frac{\lambda R}{a}\right) = 0$$

Розв'язком є функція Бесселя $J_n\left(\frac{\lambda \rho}{a}\right)$ порядку n:

$$v_n(\rho) = J_n\left(\frac{\lambda \rho}{a}\right),$$

а числа λ задовольняють співвідношенню

$$\frac{\lambda_{kn} R}{a} = z_{kn}, \quad \lambda_{kn} = \frac{z_{kn} a}{R}$$

де $z_{kn} - k$-ий (в порядку зростання) корінь функції Бесселя порядку n.
Умова ортогональності має вигляд

$$\int_0^R J_n\left(\frac{z_{kn} a}{R}\right) J_m\left(\frac{z_{jm} a}{R}\right) \rho d\rho = 0, \quad n \neq m$$

для всіх натуральних k та j

Таким чином , розв'язок (3.15) має вигляд

$$u(t,\rho,\varphi) = \sum_{n,k} exp\left\{-\frac{z_{kn}^2 a^2}{R^2} t\right\} (b_{kn} cosn\varphi + c_{kn} sinn\varphi) J_n\left(\frac{z_{kn}}{R}\rho\right).$$

РОЗДІЛ 4. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

4.1.ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ. РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СИМЕТРИЧНИМ ЯДРОМ

Рівняння відносно функції $u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D \subset R^n$ називається інтегральним, якщо ця функція знаходиться під знаком інтеграла. Ми розглянемо лише лінійні інтегральні рівняння

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_D g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x}) \qquad (4.1),$$

де функції $f: D \to R$ та $g: D \times D \to R$ відомі.

Визначимо оператор G в деякому функціональному просторі формулою

$$Gu(\boldsymbol{x}) = \int_D g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Тоді рівняння (4.1) можна записати в абстрактній формі

$$u = Gu + f \qquad (4.2)$$

а функція $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ називається ядром інтегрального оператора G.

В курсі аналізу були досліджені одновимірні інтегральні рівняння типу згортки:

на всій осі: $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) u(y) dy + f(x)$,

що розв’язуються за допомогою перетворення Фур’є;

на півосі: $u(t) = \int_0^t g(t - s) u(s) ds + f(t)$

для функцій-оригіналів, що розв’язуються за допомогою перетворення Лапласа.

Елементарним є клас вироджених інтегральних рівнянь – для них область значень оператора G є скінченновимірною.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (x + \ y - 2xy)u(y)dy + x + x^2$$

Розв'язок. Оскільки

$(Gu)(x) = \int_0^1 yu(y)dy + x\int_0^1 (1-2y)\, u(y)dy$, то $Im\, G = \{\alpha + \beta x\}$.

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x) = a + bx + x^2$$

і підставимо це $u(x)$ в рівняння :

$$a + bx + x^2 = \lambda \int_0^1 y(a + by + y^2)dy + \lambda x \int_0^1 (1-2y)(a + by + y^2)dy + x + x^2$$

що приводить до системи

$$a = \ \lambda\, \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{4}\right),\ b = 1 - \ \frac{\lambda}{6}(b+1) \ ,$$

розв'язком якої є

$$a = \ \frac{\lambda^2 - 42\lambda}{6(\lambda-2)(\lambda+6)},\ \ b = \frac{6-\lambda}{\lambda+6}\, .$$

Таким чином, розв'язком рівняння у випадку $\lambda \neq 2, \lambda \neq -6$ є функція

$$u(x) = \ \frac{\lambda^2 - 42\lambda}{6(\lambda-2)(\lambda+6)} + \frac{6-\lambda}{\lambda+6}x + x^2$$

Вправа 4.1. Розв'язати інтегральні рівняння.

1. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xy^3 + 5x^2y^3)u(y)dy + 4x^4 + 3$;
2. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + xy)u(y)dy + x + x^2$;
3. $u(x) = \lambda \int_0^\pi sin(2x + \ y)u(y)dy + \pi - 2x$.

Повернемось до абстрактної форми (4.2) інтегрального рівняння і введемо параметр λ:

$u = \lambda G u + f$.

Формально розв’язок цього рівняння має вигляд

$u = (I - \lambda G)^{-1} f$

і обернений оператор існує за умови

$\frac{1}{\lambda} \in \rho(G)$, $\rho(G)$ – резольвентна множина оператора G.

Якщо застосувати метод ітерацій, то формальний розв’язок зображується як сума ряду

$u = f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k$, $u_k = G u_{k-1}$,

$(I - \lambda G)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k G_k$ (ряд Неймана

Розглянемо питання збіжності цього ряду. Достатньою умовою є нерівність

$|\lambda| \, \|G\| < 1$

де $\|G\|$ - хоча б одна з можливих норм оператора G.

В цьому випадку ряд мажорується спадною геометричною прогресією.

Насправді збіжність має місце і для менших обмежень на оператор G. Як приклад, розглянемо одновимірне рівняння Вольтерра

$u(x) = \lambda \int_0^x g(x,y) u(y) dy + f(x)$

З курсу функціонального аналізу відомо, що спектр оператора Вольтерра $\sigma(G) = \{0\}$. Доведемо, що ряд Неймана збігається для всіх λ. Розглянемо спочатку рівняння з обмеженими коефіцієнтами: $|g(x,y)| < c_1$, $|f(x)| < c_2$, і оцінимо доданки ряду

$f + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(x)$, $u_n(x) = \lambda \int_0^x g(x,y) u_{n-1}(y)\, dy$:

$|u_1(x)| < \lambda c_1 c_2 x$; $|u_2(x)| < \lambda^2 c_1{}^2 c_2 \frac{x^2}{2}$; … $|u_n(x)| < \lambda^n c_1{}^n c_2 \frac{x^n}{n!}$,

тобто сума ряду не перевищує $c_2 \exp\{\lambda c_1 x\}$.

Більш цікавою (стосовно застосувань) є ситуація, коли функції g та f мають ітегровну особливість, наприклад:

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{\sqrt{|x-y|}}\ ,\ |f(x)| < \frac{c_2}{\sqrt{x}}. \qquad (4.3)$$

Теорема 4.1. За умов (4.3) ітерації рівняння Вольтера утворюють абсолютно збіжний ряд.

Доведення. Оцінимо члени ряду; при цьому застосуємо властивості Г-функції:

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\beta)^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ .\ \text{Тоді}$$

$$|u_1(x)| < c_1c_2\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{c_1c_2\pi}{\Gamma(1)}\ ,$$

$$|u_2(x)| < \frac{c_1{}^2c_2\pi}{\Gamma(1)}\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{c_1{}^2c_2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{x}\ ,$$

$$|u_n(x)| < \frac{c_1{}^n c_2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}x^{\frac{n-1}{2}}\ .$$

Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ можна довести за ознакою Даламбера: оцінимо

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-2}{4}}e^{-\frac{x}{2}}e^{\frac{n}{4}}dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}}dx} \le \sqrt{\frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{n}{2}}dx}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{n}{2}-1}}$$

(ми скористалися інтегральною нерівністю Коші-Буняковського та співвідношенням $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 0$$

і ряд збігається.

Зауваження 1. Наведений метод розв'язку рівняння Вольтера має місце і для більш загальних умов на члени рівняння:

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{|x-y|^{\alpha}}\ ,\ |f(x)| < \frac{c_2}{x^{\beta}}\ ,\ \alpha,\beta < 1$$

Зауваження 2. Теорема 4.1. стверджує, що для існування розв'язку рівняння достатньою умовою є інтегровність ядра. Таке ж твердження має місце і для довільної розмірності: якщо в (4.1) функція g задовольняє нерівності

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{||x-y||^{\alpha}}, \ \alpha < n \text{ (полярне ядро),}$$

то оператор G є обмеженим, і ряд Неймана збігається.

Зауваження 3. Якщо ядро g інтегрального рівняння

$$u(x) = \int_a^b g(x,y)u(y)dy + f(x)$$

симетричне, тобто $g(x,y) = g(y,x)$, то інтегральний оператор G є симетричним в гільбертовому просторі $L_2(a,b)$, тобто $(Gu,v) = (Gv,u)$, де скалярний добуток визначається формулою:

$$(u,v) = \int_a^b u(y)v(y)dy\ .$$

У випадку неперервного ядра G виявляється компактним оператором, тобто образ $G(\Omega)$ обмеженої в $L_2(a,b)$ множини функцій є передкомпактною множиною. Відмітимо наступну властивість такого оператора G в довільному гільбертовому просторі H.

Теорема. Симетричний компактний оператор G в гільбертовому просторі H має злічену множину дійсних власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \dots$, яким відповідає послідовність власних функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$, тобто рівняння $Gu = \lambda u$ має злічену кількість розв'язків. Кожне власне число λ_k має скінченну кратність, а послідовність $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \dots$ має єдину граничну точку 0. Власні функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$ утворюють базис в підпросторі ImG.

4.2.МЕТОД ПОВЕРХНЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЄ

Ідея методу потенціалів – зведення граничної задачі для еліптичного рівняння до інтегрального рівняння.

Нехай D – область в R^3, $П$ – її межа, точки $M = M(x,y,z)$, $P = P(\xi,\eta,\zeta)$;

$$r(M,P) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\ .$$

Для функції μ, що неперервна на поверхні $П$, покладемо

$$v(x,y,z) = \iint_{\pi} \mu(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\mathbf{grad}_P\,\frac{1}{r}\,,\,\boldsymbol{n}\right) \qquad (4.4)$$

де $\boldsymbol{n}$ —одиничний вектор зовнішньої нормалі. Назвемо функцію $v(M)$ потенціалом подвійного шару. Відзначимо наступну властивість цього потенціалу:

Якщо $M \notin П$, то $\Delta_M v = 0$, оскільки лапласіан можна внести під знак інтеграла.

Дослідимо ряд властивостей потенціалу подвійного шару, і в першу чергу геометричний зміст $v(x)$, коли $\mu\equiv 1$. Нехай $П$ – довільна (не обов'язково замкнута) поверхня, $M(x,y,z) \notin П$. Визначимо тілесний кут Ω, під яким з точки M видно поверхню $П$. Для цього побудуємо конічну поверхню K, утворену променями, що виходять з точки M та рухаються вздовж межі γ поверхні $П$. Нехай $S_R(M)$ – сфера радіуса R з центром в M, F – підмножина сфери, що знаходиться всередині конуса K. Тоді

$$\Omega = \frac{\text{площа } F}{R^2}.$$

Твердження 1. Має місце формула

$$w(M) = \iint_{П} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = -\Omega.$$

*Доведення***.** Проведемо сферу $S_\varepsilon(M)$ і нехай $П_\varepsilon$ – її підмножина, що знаходиться всередині конуса K. Розглянемо замкнену поверхню

$$Г = П \cup K \cup П_\varepsilon\ ,\ \ M \notin Г.$$

Оскільки функція $\varphi(M) = \frac{1}{r(M,P)}$, $P \in \Gamma$, є гармонічною всередині Γ, то

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0,$$

тобто

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \iint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma + \iint_{К} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma + \iint_{\Pi_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0.$$

Другий доданок в правій частині дорівнює нулю, а третій можна обчислити:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \Big|_{P\in\Pi_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \text{ звідки } \iint_{\Pi_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \frac{\text{площа } \Pi_\varepsilon}{\varepsilon^2} = \Omega.$$

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай D – область в R^3, Π – її межа. Тоді

$$w(M) = \begin{cases} -4\pi, & M \in D \\ -2\pi, & M \in \Pi \\ 0, & M \notin D \cup \Pi \end{cases}$$

Отримана для $w(M)$ формула використовується для доведення наступного співвідношення.

Твердження 2. Нехай $\mu \in C^2(R^3)$. Тоді має місце формула

$$\iiint_D (\boldsymbol{grad}\, \mu, \boldsymbol{grad}\, \tfrac{1}{r}) d\xi d\eta d\zeta = \lambda\mu(M) + \oiint_{\Pi} \left(\mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma\right),$$

де

$$\lambda = \begin{cases} 4\pi, & M \in D \\ 2\pi, & M \in \Pi \\ 0, & M \notin D \cup \Pi \end{cases}$$

Доведення. Як і при доведенні формул Гріна запишемо формулу Гаусса-Остроградського для векторного поля

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \mu(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{grad}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

в області D — $K_\varepsilon(M)$. Зауважимо, що $\Delta\frac{1}{r} = 0$.

Випадок $M \notin D \cup \Pi$ є тривіальним; випадок $M \in D$ вже розглянуто при дослідженні властивостей гармонічних функцій. Якщо $M \in \Pi$, то $K_\varepsilon(M)$ вирізає з області D половину кулі, і відповідний інтеграл по половині Π_ε сфери $S_\varepsilon(M)$ можна обчислити за теоремою про середнє значення:

$$\oiint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \mu(A)2\pi, \quad A \in \Pi_\varepsilon \ .$$

Граничний перехід $\varepsilon \to 0$ доводить твердження.

Твердження 3. Нехай поверхня $\Pi \in C^2$, тобто функції, в рівнянні цієї поверхні мають дві неперервні похідні. Якщо $\mu \in C^2(\Pi)$, то потенціал подвійного шару (4.4) є функцією, неперервною на Π.

Схема доведення. Нехай $M(x, y, z) \in \Pi, M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Треба оцінити різницю

$$v(M) - v(M_0) = \iint_{\Pi} \mu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{r(M,P)} \partial\sigma \ - \iint_{\Pi} \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{r(M_0,P)} \ d\sigma$$

де $r(M_0, P) < \delta$.

Доводиться, що за рахунок диференційованості поверхні цю різницю можна зробити менше ε.

Вправа 4.2.. Довести твердження 3.

Зауваження 1. Умову $\Pi \in C^2$ можна послабити: достатньою умовою є нерівність

$$\left|\boldsymbol{n}_M - \boldsymbol{n}_{M_0}\right| \le c|MM_0|^\alpha, \ \alpha > 0,$$

тобто вектор одиничної нормалі як функції як функція точки задовольняє умові Гьольдера. Поверхня, що задовольняє цій умові, відноситься до класу поверхонь Ляпунова.

Отримані результати дозволяють дослідити граничну поведінку потенціалу подвійного шару (4.4), коли $M(x, y, z) \to M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Виявляється, що $v(M)$ має на поверхні Π розрив першого роду.

Позначимо:

$$v_+(M_0) = \lim_{M\to M_0} v(M), \quad M \notin D \cup \Pi ;$$

$$v_-(M_0) = \lim_{M\to M_0} v(M), \quad M \in D ,$$

тобто $v_+(M_0)$ і $v_-(M_0)$ – зовнішня та внутрішня границі потенціалу.

Теорема 4.2. Якщо $\Pi \epsilon C^2$, то мають місце співвідношення:

$$v_+(M_0) = 2\pi\mu(M_0) + v(M_0) = 2\pi\mu(M_0) + \oiint_\Pi \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M_0 P)}\right) d\sigma;$$

$$v_-(M_0) = -2\pi\mu(M_0) + v(M_0) = -2\pi\mu(M_0) + \oiint_\Pi \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M_0 P)}\right) d\sigma,$$

тобто стрибок функції v на поверхні Π

$$v_+(M_0) - v_-(M_0) = 4\pi\mu(M_0).$$

Нагадаємо, що нормаль $\boldsymbol{n}$ – зовнішня.

Доведення спирається на твердження 2 та 3:

$$v(M) = \oiint_\Pi \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M\,P)}\right) d\sigma = -\lambda\mu(M) + \iiint_D \left(\boldsymbol{grad}\,\mu, \boldsymbol{grad}\,\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta,$$

де об'ємний інтеграл є функцією, неперервною на поверхні Π. Тоді

$$v_+(M_0) - v(M_0) = 2\pi\mu(M_0); \quad v_-(M_0) - v(M_0) = -2\pi\mu(M_0).$$

Зауваження 2. Нормальна похідна функції v неперервна на поверхні Π; похідні по дотичних напрямках мають стрибок в точці M_0.

Повернемось до задачі Діріхлє

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \text{ в } D; u\big|_\Pi = f(x,y,z)$$

і будемо шукати її розв'язок у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(x,y,z) = \oiint_\Pi \mu(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(M,P)} d\sigma \tag{4.5}$$

Оскільки для $M \epsilon D$ функція u задовольняє рівнянню $\Delta u = 0$, залишається знайти таку щільність $\mu(\xi,\eta,\zeta)$, щоб виконувалась гранична умова, яку можна записати таким чином:

$$u_-(x_0,y_0,z_0) = \lim_{M\to M_0} u(x,y,z) = f(x,y,z), \qquad M \epsilon D.$$

Теорема 4.3. Розв'язок задачі Діріхлє дається формулою (4.5), де функція μ задовольняє інтегральному рівнянню *на поверхні Π*:

$$-2\pi\mu(x,y,z) + \oiint_\Pi \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}d\sigma = f(x,y,z)\ .$$

Доведення. Перейдемо в (4.5) до границі $M \to M_0$; з твердження теореми 4.2 випливає потрібна рівність.

Стосовно отриманого інтегрального рівняння відомо, що воно має єдиний розв'язок, якщо f – неперервна функція.

Приклад. Нехай D – підпростір $z > 0$, тоді на площині $z = 0$: $u(x,y,0) = f(x,y), P(\xi,\eta,0), M(x,y,0)$. тобто

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 0,$$

і рівняння має розв'язок

$$\mu(x,y,0) = -\frac{1}{2\pi}f(x,y).$$

Розв'язок задачі Діріхлє

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}d\sigma.$$

Обчислимо підінтегральну нормальну похідну

$$-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}\Big|_{P\in\Pi} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z-\varsigma}{r^3}\Big|_{\varsigma=0} = \frac{z}{r^3}$$

тобто

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\xi d\eta.$$

Таку ж саму форму отримано методом функцій Гріна.

Метод потенціалів можна застосувати і для розв'язку задачі Діріхлє на площині. Так, якщо γ – замкнута крива, що обмежує область $D \epsilon R^2$, покладемо

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}\oint_\gamma \mu(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)\,dl \qquad (4.6)$$

Позначимо $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = \rho$.

Аналогом твердження 2 є формула $\big(M = M(x,y)\big)$:

$$\iint_D (\boldsymbol{grad}\,\mu, \boldsymbol{grad}\ln\frac{1}{\rho})d\xi d\eta = \lambda\mu(M) + \oint_\gamma \mu\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho}dl, \quad \text{де}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2\pi, & M \epsilon D \\ \pi, & M \epsilon \gamma \\ 0, & M \notin D \cup \gamma \end{bmatrix}$$

З останньої формули випливають співвідношення

$$v_+(M_0) = \pi\mu(M_0) + v(M_0), v_-(M_0) = -\pi\mu(M_0) + v(M_0).$$

Якщо шукати розв'язок задачі Діріхлє

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ в } D;\ \lim_{M\to M_0} u(x,y) = f(x_0,y_0),\ \ M \epsilon D, M_0 \epsilon \gamma$$

у вигляді (4.6), то отримаємо інтегральне рівняння для функції μ *на кривій* γ:

$$-\pi\mu(x,y) + \oint_\gamma \mu(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n} ln\frac{1}{\rho}dl = f(x,y).$$

Вправа 4.3. Розв'язати методом потенціалів задачу Діріхлє на півплощині $y > 0$.

Метод потенціалів застосовний і для розв'язку параболічних граничних задач: знайти функцію $u(t,x,y,z)$, що задовольняє умовам

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, t > 0, (x,y,z)\,\epsilon\, D; u(0,x,y,z) = 0,\ \ u(t,x,y,z)\big|_\Pi = f(t,x,y,z),$$

де Π- межа області D. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t,x,y,z) = \int_0^t ds \oiint_\Pi \mu(s,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial n}p(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\sigma, \boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta,\zeta),\ \boldsymbol{x} = (x,y,z),$$

де функція

$$p(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{3}{2}}} exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2 t}\right\}.$$

Доводиться, що $u(t, \boldsymbol{x})$ задовольняє рівнянню для $t > 0, \boldsymbol{x} \in D$, а гранична умова виконується за рахунок вибору функції μ, яка задовольняє деякому інтегральному рівнянню.

4.3. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЗБУРЕНОЇ ДИФУЗІЇ . МЕТОД ПАРАМЕТРИКСУ.

Розглянемо одновимірне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2(x) \geq \varepsilon^2 \tag{4.7}$$

із змінним коефіцієнтом дифузії $a^2(x)$. Доводиться, що розв'язок задачі Коші для початкової умови $u(0, x) = \varphi(x)$ має вигляд:

$$u(t, x) = (H(t)\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t, x, y)dy\,,\ p(t, x, y) > 0 \tag{4.8}$$

тобто еволюційний оператор $H(t)$ є інтегральним з ядром $p(t, x, y)$.

Якщо $\varphi(x) = 1$, то $u(t, x) = 1$, звідки випливає рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y)dy = 1\,, t > 0, x \in R.$$

Таким чином, для всіх $t > 0, x \in R$ ядро $p(t, x, y)$ є щільністю деякої випадкової величини. Для сталого коефіцієнта дифузії ця випадкова величина є гаусівською $\aleph(x, 2a^2 t)$.

Згідно (1.9), розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), u(0, x) = \varphi(x)$$

має вигляд:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t, x, y)dy + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, y)p(t - \tau, x, y)dy \tag{4.9}$$

Дослідимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x,u) \qquad (4.10)$$

яке назвемо збуреним по відношенню до рівняння $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Скориставшись формулою (4.9), запишемо розв'язок задачі Коші для (4.10)

$$u(t,x) = v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f\big(\tau, y, u(\tau,y)\big)p(t-\tau,x,y)dy \qquad (4.11)$$

де $v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t,x,y)dy$ є розв'язком задачі Коші для незбуреного рівняння.

Дослідимо детальніше випадок лінійного збурення:

$$f(t,x,u) = c(t,x)u, \quad |c(t,x)| \le A.$$

Відповідне інтегральне рівняння

$$u(t,x) = v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau,y)u(\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy$$

є рівнянням Вольтерра: за наведеною вище схемою його розв'язок:

$$u(t,x) = v(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x),$$

$$u_n(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau,y)u_{n-1}(\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy, \quad u_0 = v.$$

Якщо $|v(t,x)| < B$, то для ітерації u_n встановлюється оцінка:

$$|u_n(t,x)| < \frac{A^n B}{n!}t^n,$$

тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$ збігається абсолютно.

Зауважимо, що для $c = const$ розв'язок $u(t,x) = v(t,x)e^{ct}$.

Ядро $p(t,x,y)$, визначене формулою (4.8), носить назву фундаментального розв'язку рівняння (4.7).

Застосуємо ідею зведення до інтегрального рівняння для побудови фундаментального розв'язку рівняння (4.7). Відзначимо властивості $p(t,x,y)$, що випливають з його визначення:

1. $\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = a^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, y \in R$;
2. $\lim_{t\downarrow 0}\int \varphi(y)p(t,x,y)dy = \varphi(x)$.

Представимо $p(t,x,y)$як суму двох доданків:

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau,z,y)m(t-\tau,x,z)dz \qquad (4.12)$$

де функція

$$m(t,x,y) = \frac{1}{2a(x)\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(x)t}}$$

що зветься параметриксом, нагадує розв'язок рівняння із "замороженим" в точці x коефіцієнтом дифузії $a^2(x)$; $r(t,x,y)$ - шукана функція.

Доданок $m(t,x,y)$ забезпечує виконання початкової умови. Другий доданок, тобто функцію $r(t,x,y)$ треба вибрати так, щоб сума (4.12) задовольняла рівнянню (4.7). Якщо підставити (4.12) в (4.7), отримаємо співвідношення:

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} M(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)dz \qquad (4.13)$$

де нев'язка

$$M(t,x,y) = a^2(x)\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\partial m}{\partial t} \; .$$

Обчислення $M(t,x,y)$ приводить до виразу:

$$M(t,x,y\,) = m(t,x,y)\Big(2(\frac{a'(x)}{a(x)})^2 - \frac{a''(x)}{a(x)} + g_1(x)\frac{(x-y)^4}{t^2} + g_2(x)\frac{(x-y)^2}{t} +$$

$g3(x)|x-y|3t2+g4(x)x-yt$

Нехай функція $a(x)$ задовольняє умовам:

$$\varepsilon < |a(x)| < K; \quad |a'(x)| < C; \qquad |a''(x)| < C$$

Тоді $g_k(x)$ обмежені; параметрикс $m(t,x,y\,)$ задовольняє нерівності

$$m(t,x,y\,) < \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4K^2 t}}$$

З нерівності $s^b e^{-\alpha s} < C(\delta, b) e^{-(\alpha-\delta)s}, b > 0, \delta > 0,$ випливає оцінка нев'язки:

$$|M(t, x, y)| < \frac{C}{\sqrt{t}} q(t, x, y),$$

де гауссівська щільність

$$q(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}, \sigma > k\sqrt{2}\,.$$

Теорема. Розв'язок інтегрального рівняння (4.13) задовольняє нерівності

$$|r(t, x, y)| < \frac{d}{\sqrt{t}} q(t, x, y).$$

Доведення. Розв'язок має вигляд

$$r(t, x, y) = M(t, x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t, x, y), \quad r_0 = M,$$

$$r_n(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} M(t-\tau, x, z) r_{n-1}(\tau, z, y) dz$$

Оскільки згортка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t-\tau, x, z) q(\tau, z, y) dz = q(t, x, y),$$

то оцінка кожного доданку приводить до збіжності ряду, сума якого задовольняє наведеній нерівності.

Наслідок.. Фундаментальний розв'язок задовольняє нерівності

$$p(t, x, y) < m(t, x, y) + C\sqrt{t} q(t, x, y)$$

РОЗДІЛ 5. СУЧАСНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. КОРОТКИЙ ОГЛЯД.

5.1.УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1.1. Узагальнені функції та дії над ними. Узагальнений розв'язок звичайного диференціального рівняння

Розглянуті вище методи розв'язування задач для рівнянь математичної фізики застосовувані за деяких умов. Так, для задачі Коші

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ x \in R, \ u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$$

функція

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at) \qquad (5.1)$$

є розв'язком, якщо $\varphi \in C^2(-\infty,+\infty)$. З іншого боку, недиференційовна початкова умова

$$\varphi(x) = 1, \quad x \in [a,b]; \qquad \varphi(x) = 0, \qquad x \notin [a,b]$$

також породжує хвилі (5.1), але не задовольняє рівнянню. Нижче наведено конструкцію, що розширює поняття похідної і розв'язку диференціального рівняння.

*Узагальнені функції***.**

Визначимо клас $\mathfrak{D}$ функцій дійсної змінної: $\varphi \in \mathfrak{D}$, якщо $\varphi \in C^\infty(-\infty,+\infty)$ і $\varphi(x) = 0, \ x \notin \left[a_\varphi, b_\varphi\right]$ (фінітна функція) .

Множина $\{x: \varphi(x) \neq 0\}$ зветься носієм функції φ і позначається $supp\, \varphi$.

Приклад: $\varphi(x) = e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, |x| < a; \ \ \varphi(x) = 0, \ \ |x| \geq a,$ де $a > 0$.

Зауважимо, що $\mathfrak{D}$ є лінійним простором.

Термінологія: елементи $\mathfrak{D}$ звуться основними функціями.

Визначення 5.1. Послідовність $\varphi_n \in \mathfrak{D}$ збігається до функції φ, якщо :

1) $\text{supp}\varphi_n \in [a, b]$
2) $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ рівномірно на $[a, b], k = 0,1, \dots, n, \dots$

Очевидно, що $\lim\varphi_n = \varphi \in \mathfrak{D}$. Позначення: $\varphi_n \overset{\mathfrak{D}}{\to} \varphi$.

Визначення 5.2. Узагальненою функцією f назвемо лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathfrak{D}$.

Значення цього функціонала на функції φ позначимо $\langle f, \varphi\rangle$. Таким чином:

1) $\langle f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \alpha\langle f, \varphi_1\rangle + \beta\langle f, \varphi_2\rangle$;

2) Якщо $\varphi_n \overset{\mathfrak{D}}{\to} \varphi$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

Множина узагальнених функцій позначається $\mathfrak{D}^*$. Очевидно, що $\mathfrak{D}^*$– лінійний простір.

Приклад. Нехай $f(x)$ – функція дійсної змінної, що задовольняє умові:

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty,$$

де $[a, b]$ – довільний скінченний інтервал. Така функція зветься локально інтегровною.

Покладемо:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \qquad (5.2)$$

Оскільки в силу фінітності φ інтегрування відбувається по скінченному проміжку, інтеграл збігається і (5.2) визначає узагальнену функцію.

Термінологія. Узагальнена функція f, що задається формулою (5.2), зветься регулярною. Узагальнені функції, які не можна задати у вигляді інтеграла (5.2), звуться сингулярними.

Приклад. Визначимо узагальнену функцію δ рівністю:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),\ \varphi \in \mathfrak{D}.$$

Доведемо сингулярність δ-функції від супротивного. Припустимо існування локально інтегровної функції f, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),\ \varphi \in \mathfrak{D} \qquad (5.3)$$

Покладемо $\psi(x) = x\varphi(x)$. Тоді $\langle f, \psi \rangle$

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\varphi(x)dx = 0 = \langle xf, \varphi \rangle, \varphi \in \mathfrak{D}$$

тобто $xf(x) = 0$ майже всюди $\Rightarrow f(x) = 0$ майже всюди, що протирічить (5.3).

Зауваження. δ-функція носить ім'я Дірака (відомий фізик). Інтуітивно вона була визначена як звичайна функція $\delta(x)$ співвідношенням:

$$\delta(0) = \infty;\ \delta(x) = 0, x \neq 0;\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1.$$

Ці співвідношення можна розуміти так:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\varphi(x)dx$$

де послідовність g_n функцій задовольняє умов:

$$g_n(x) \geq 0;\ \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = 1;\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_n(x)dx > 1 - \sigma.$$

Визначимо операцію диференціювання узагальнених функцій. Нехай $f-$ регулярна і функція $f(x)$ в (5.2) диференційована. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx,$$

і перший доданок в правій частині нульовий в силу фінітності φ. Якщо в цьому випадку ототожнити похідну узагальненої функції f з похідною $f'(x)$, то отримаємо:

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle$$

Останнє співвідношення приймемо за визначення похідної довільної узагальненої функції:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle \qquad (5.4)$$

Наслідок. $\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \langle f, \varphi^{(n)} \rangle$.

Приклади.

1. $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$; $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \varphi^{(n)}(0)$.
2. Функція Хевісайда $\theta(x)$: $\theta(x) = 0, x < 0$; $\theta(x) = 1, x \geq 0$, породжує відповідну регулярну узагальнену функцію $\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) dx$. Її похідна $\langle \theta', \varphi \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$, звідки $\langle \theta^{(n)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(n-1)}, \varphi \rangle$.

5.1.2. *Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь*

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x) \qquad (5.5)$$

і позначимо через $L = \sum a_k(x) \frac{d^k}{dx_k}$ лінійний диференціальний оператор.

Класичний розв'язок рівняння – це функція $y(x), y \in C^n(-\infty; \infty)$, що задовольняє рівнянню. Позначимо

$$L^* y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(k)} \frac{d^k}{dx_k} (a_k(x) y(x)).$$

Визначення. Узагальнений розв'язок рівняння (5.5) визначається як узагальнена функція $y \in \mathfrak{D}^*$, для якої

$$\langle y, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D.$$

Зауваження. Будь-який класичний розв’язок рівняння є одночасно і узагальненим. Некласичний узагальнений розв’язок з’являється, коли права частина рівняння є розривною функцією або коли коефіцієнт $a_n(x)$ має нулі.

Приклад. Розв’язком рівняння $xy' = 0$ є регулярна узагальнена функція $y(x) = C_1 \theta(x) + C_2$.

Особливу роль грає фундаментальний розв'язок $\mathscr{E}$ диференціального оператора L, що визначається як узагальнена функція, для якої $L\mathscr{E} = \delta$.

Приклад. Нехай $L = \frac{d^2}{dx^2} - 1$. Перевіримо, що регулярна узагальнена функція $\mathscr{E}(x) = \theta(x) shx$ є фундаментальним розв'язком:

$$\langle L\mathscr{E}, \varphi \rangle = \int_0^\infty shx\, \varphi''(x)dx - \int_0^\infty shx\, \varphi(x)dx = shx\, \varphi'(x)\Big|_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty chx\, \varphi'(x)dx - \int_0^\infty shx\, \varphi(x)dx = -chx\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Основна властивість $\mathscr{E}$, що виправдовує його назву «фундаментальний розв'язок», полягає в наступному. Нехай f – інтегровна на осі функція, $\mathscr{E}$ — регулярна функція. Тоді згортка визначається відомою формулою:

$$(\mathscr{E} * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}(x-y) f(y) dy$$

Теорема. Згортка $\mathscr{E} * f$ задовольняє рівнянню $L(\mathscr{E} * f) = f$.

Доведення. $L(\mathscr{E} * f) = (L\mathscr{E}) * f = \delta * f = f$.

Зауваження. Для оператора L зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}$$

фундаментальний розв'язок можна побудувати, використовуючи перетворення Лапласа. Зображення $\mathcal{E}(p)$ фундаментального розв'язку обчислюється за формулою

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$$

Приклад. Для оператора $L = \frac{d^2}{dx^2} + a^2$ зображення $\mathcal{E}(p) = \frac{1}{p^2+a^2}$, звідки

$$\mathscr{E}(x) = \frac{1}{a}\theta(x) \sin ax .$$

5.1.3. Узагальнені розв'язки рівнянь математичної фізики.

1. Узагальнені функції векторної змінної визначаються як лінійні неперервні функціонали на просторі $\mathcal{D}$ основних функцій, що залежать від векторної

змінної. Як і в одновимірному випадку, основна функція $\varphi(x_1, .., x_n)$ є нескінченно диференційованою та фінітною. Якщо f – узагальнена функція, то для $k = k_1 + .. + k_n$

$$\langle \frac{\partial^k}{\partial {x_1}^{k_1} .. \partial {x_n}^{k_n}} f, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \frac{\partial^k}{\partial {x_1}^{k_1} .. \partial {x_n}^{k_n}} \varphi \rangle$$

Узагальнений розв'язок рівняння рівняння $Lu = f$, L – диференціальний оператор з частинними похідними, визначається як узагальнена функція u, для якої

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \ \varphi \in D.$$

Аналогічно, фундаментальний розв'язок $\mathscr{E}$ визначається співвідношенням

$$< L\,\mathscr{E}, \varphi > = \varphi(0).$$

Приклад. Перевірити, що для $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ фундаментальний розв'язок

$$\mathscr{E}(t,x) = \frac{1}{2a} \theta(t)\, \theta(at - x), \ \ \theta - \text{функція Хевісайда.}$$

Вказівка. Треба довести, що

$$\frac{1}{2a} \iint_\Delta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) dt dx = \varphi(0,0)$$

де $\varphi(t, x)$ – основна функція двох змінних, область $\Delta = \{ t, x : t > 0, at > |x| \}$.

В n –вимірному випадку з'являється можливість ввести узагальнені функції, що зосереджені на підмножинах меншої розмірності. Розглянемо сферу $S_R(M_0)$ в тривимірному просторі

$$S_R(M_0) = \{ x, y, z : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \}$$

та визначимо δ-функцію на цій сфері наступною формулою:

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi \rangle = \oiint_{S_R} \varphi(x, y, z) d\sigma$$

5.1.4. Узагальнений розв'язок задачі Коші

Класичний розв'язок задачі Коші для оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta u$ визначається як функція $u(t,\boldsymbol{x})$, $u \in C^2(0;\infty) \times C^2(R^n)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(t,\boldsymbol{x})$$

та початковим умовам $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x})$. Така постановка задачі Коші для узагальненого розв'язку не має сенсу, оскільки узагальнена функція не має значень при фіксованому аргументі. Переформулюємо постановку задачі Коші: обчислимо похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ як функціоналу на просторі $\mathcal{D}$.

$$\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \rangle = \langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \rangle = \int_{R^n} dx \int_0^\infty u \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t,x) dt =$$

$$= \int_{R^n} dx \left(-u_0(x) \; \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) + u_1(x)\varphi(0,x) + \int_0^{+\infty} (a^2 \Delta u + f(t,x)\varphi(t,x) dt \right)$$

Отриманому в правій частині виразу можна надати форму

$$\langle a^2\Delta u + f + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t), \varphi \rangle$$

що виправдовує наступне визначення.

Визначення. Узагальненою задачею Коші назвемо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right) u(t,x) = f(t,x) + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t) \tag{5.6}$$

розв'язок якого є узагальненою функцією.

Позначимо: $g = f + u_0\delta' + u_1\delta$.

Тоді розв'язок узагальненої задачі Коші: $\mathcal{E} * g$, $\mathcal{E}$ —фундаментальний розв'язок оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$.

Аналогічно визначається узагальнена задача Коші для рівняння дифузії. Нехай $\mathcal{E}$ – фундаментальний розв'язок оператора $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$. Заданим вище методом приведемо класичну задачу Коші:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t, x),\ u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$$

до форми

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right) u = f(t, \boldsymbol{x}) + u_0 \delta(t) \tag{5.7}$$

Останнє рівняння і є узагальненою задачею Коші, а його розв'язок

$$u = \mathscr{E} * g\,,\ \ g(t, x) = f(t, x) + u_0(x) \delta\,(t).$$

Неважко перевірити, що

$$< \mathscr{E}, f > = \frac{\theta\,(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_0^t d\tau \int_{R^n} exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2 t}\right\} f(\tau, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Таким чином, розв'язок (5.7) має вигляд:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\theta\,(t)}{\left(2a\sqrt{\pi}\right)^n} \left(\int_0^t d\tau \int_{R^n} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} f(\tau, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\ + \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} u_0(\boldsymbol{y})\, exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2 t}\right\} \right)$$

.

5.2.НЕЛІНІЙНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ МОДЕЛІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.2.1.Процеси, що моделюються квазілінійними параболічними рівняннями.

Розглянуті в попередніх розділах приклади та відповідна теорія стосується лінійних рівнянь математичної фізики. З іншого боку, одним з актуальних напрямів сучасної математичної фізики є вивчення нелінийних математичних моделей фізичних явищ та процесів; лінійні рівняння являють собою деяке наближення для опису згаданих об'єктів. Як приклад, згадаємо задачу Коші для рівняння теплопровідності (дифузії)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \ u(0, x) = \varphi(x),$$

розв'язок якої визначений формулою (1.4) :

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(y)dy$$

Якщо початкова умова $\varphi(x)\geq 0,$ то для довільних $t>0. x\in R$ розв'язок $u(t,x)>0,$ що у випадку фінітності φ означає нескінчену швидкість поширення початкового збурення, тобто лінійна модель теплопровідності виявляється неадекватною.

Нелінійні моделі математичної фізики, що являють собою нелінійні рівняння з частинними похідними, мають високу адекватність. Нижче розглянуто два приклади нелінійних параболічних рівнянь: рівняння нелінійної теплопровідності та рівняння «реакція-дифузія».

Поширення теплового збурення в нелінійному середовищі.

Нехай $u(t,x,y,z)$—поле температури в середовищі з наступними параметрами: щільністю ρ , питомою теплоємністю c, коефіцієнтом теплопровідності k. Якщо ці параметри залежні від температури, то u задовольняє рівнянню

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=div(k(u)gradu)+f(t,x,y,z,u) \qquad (5.8)$$

де $f(t,x,y,z,u)$—щільність теплових джерел. Для сталих параметрів та $f=0$ отримуємо лінійне однорідне рівняння теплопровідності. В одновимірному випадку (5.8) зводиться до рівняння

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(t,x,u) \qquad (5.9)$$

Термінологія. Параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=trA(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{gradu})u'' + f(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{gradu})$$

де $A=\left\|a_{jk}\right\|$—матриця коефіцієнтів, $u''=\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\right\|$—матриця Гессе, зветься квазілінійним. Інакше, квазілінійність означає лінійність відносно других похідних по просторових змінних.

Якщо матриця коефіцієнтів $A(t,x)$ не залежить від шуканої функції, рівняння зветься напівлінійним:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = trA(t,\boldsymbol{x})\mathring{u} + f(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{gradu})$$

Напівлінійне рівняння, в якому f не залежить від перщих похідних по просторових змінних, зветься рівнянням типу реакція-дифузія:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = trA(t,\boldsymbol{x})u'' + f(t,\boldsymbol{x},u).$$

Наведена термінологія застосовується також для систем параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j,k,s} a_{ijks} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_j \partial x_k} + f \ .$$

Нижче розглянуто приклади квазілінійних параболічних рівнянь, а також рівнянь і систем типу реакція-дифузія.

Розглянемо одновимірне середовище із ступеневою залежністю коефіцієнта теплопровідності від температури:

$$k = k_0 u^\sigma,\ \sigma = const > 0,\ \rho = const,\ c = const\ ,$$

та обчислимо розв'язок квазілінійної задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad u(0,x) = Q\delta(x),\ \ a^2 = \frac{k_0}{\rho c} \tag{5.10}$$

де початкова умова являє собою джерело, зосереджене в точці $x = 0$.

Фізичні міркування приводять до співвідношень

$$u(t,x) \to 0,\ \ u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \to 0,\ \ |x| \to \infty \tag{5.11}$$

звідки, інтегруючи рівняння (5.10), отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = a^2 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\ (t,+\infty) - a^2 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\ (t,-\infty) = 0\ ,$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0,x)dx = Q \tag{5.12}$$

Остання рівність означає закон збереження повної теплової енергії середовища. Подальші викладки приводять до явного вигляду розв'язку задачі Коші (5.10):

$$u(t,x) = g(t)\left(1 - \left(\frac{x}{x_0(t)}\right)^2\right)^{\frac{1}{\sigma}},\ |x| < x_0(t);$$

$$u(t,x) = 0,\ |x| \geq x_0(t) \qquad (5.13)$$

де функції $x_0(t)$, $g(t)$ визначаються формулами:

$$x_0(t) = bQ^{\frac{2}{\sigma+2}}(a^2t)^{\frac{1}{\sigma+2}}\ ; \qquad g(t) = b^{\frac{2}{\sigma}}Q^{\frac{2}{\sigma+2}}\left(\frac{\sigma}{2\sigma+4}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left((a^2t)\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\ ,$$

а обчислення параметру

$$b = \left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sigma}\right)}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}\left(\frac{\sigma}{2\sigma+4}\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}$$

спирається на закон (5.12) збереження теплової енергії.

Розв'язок (5.13) являє собою теплову хвилю, що поширюється від джерела, зосередженого в точці $x = 0$. Для кожного $t > 0$ точки $x = \pm x_0(t)$ визначають координати фронту теплової хвилі. Ці точки відокремлюють область $|x| < x_0(t)$, для якої $u(t,x) > 0$, від області $|x| \geq x_0(t)$, , до якої теплові збурення ще не дійшли. Швидкість руху фронту хвилі

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = const\ \cdot t^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \downarrow 0,\ t \to \infty\ .$$

З виразу для $x_0(t)$ випливає, що довільна точка x «відчуває» фронт хвилі в момент часу $t_x = \left(\frac{x}{b}\right)^{\sigma+2}\frac{1}{a^2Q^2}$, тобто має місце проникнення теплового збурення до всіх точок середовища.

Обчислимо границю розв'язку (5.13), коли $\sigma \to 0$. Фізично це означає перехід до лінійного середовища з коефіцієнтом теплопровідності k_0. Обчислення границі зводиться до розкриття невизначеностей, і в результаті отримаємо:

$$\lim_{\sigma\to 0} u(t,x) = \frac{Q}{2a\sqrt{\pi t}}exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}$$

що співпадає з функцією $p(t,x)$, яку отримано в **Розділі 1**.

Таким чином, в нелінійному середовищі із ступеневою нелінійністю теплопровідності, теплові збурення поширюються із скінченою швидкістю, тобто розглянута модель має вищу адекватність в порівнянні з лінійною.

Розглянемо ще один приклад нелінійного середовища, в якому відбувається поглинання теплової енергії пропорційно значенню температури. Математична модель такого процесу відповідає задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) - pu, \quad u(0,x) = Q\delta(x) \tag{5.14}$$

де $p > 0$—коефіцієнт поглинання.

Наявність поглинання приводить до експоненціального спадання у часі внутрішньої теплової енергії середовища:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = Qe^{-pt} .$$

Якщо виконати заміну

$$v(t,x) = e^{pt}u(t,x). \;\; \tau = \frac{1-e^{-p\sigma t}}{p\sigma},$$

то функція $v(\tau,x)$ задовольняє задачі Коші

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad v(0,x) = Q\delta(x), \; 0 < \tau < \frac{1}{p\sigma} \;\; ,$$

що відрізняється від (5.10) обмеженням для τ. Розв'язок $v(\tau,x)$ має вигляд (5.13), де t треба замінити на τ. Розв'язок задачі (5.14)—функція

$$u(t,x) = e^{-pt}v(\tau(t),x)$$

являє собою теплову хвилю, $u(t,x) = 0$, якщо $|x| \geq x_0(\tau(t))$. Оскільки

$$\lim_{t\to\infty} x_0(\tau) = x_0\left(\frac{1}{p\sigma}\right) = \left(\frac{bQa^2}{p\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+2}} \equiv L,$$

то зона проникнення теплової хвилі обмежена інтервалом $(-L;L)$, тобто нагрів є локалізованим. Зауважимо, що явище локалізації (підтверджене експериментом) неможливо описати в рамках лінійної моделі теплопровідності.

Напівлінійні системи типу «реакція—дифузія»

Моделювання ряду процесів в фізичних, хімічних та біологічних системах приводить до напівлінійних параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = div(D_i \boldsymbol{grad} u_i) + f_i(\boldsymbol{x}, u_1, \dots, u_n) \qquad (5.15)$$

для векторної функції $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \big(u_1(t, \boldsymbol{x}), \dots, u_n(t, \boldsymbol{x})\big)$. Зокрема, функція $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ описує поширення нервових імпульсів, епідемічних хвиль, міграцію біологічних популяцій та інші еволюціонуючі об'єкти. Система рівнянь (5.15) використовується також в хімічній кінетиці для опису процесів реакція—дифузія, що і дало привід для назви таких систем.

Точний аналітичний розв'язок крайових задач, що відповідають системі (5.15), вдається знайти лише в окремих випадках. Дослідників-прикладників, як правило, цікавить якісна поведінка цього розв'язку.

Як приклад, розглянемо слідуюче напівлінійне параболічне рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \qquad (5.16)$$

де функція f задовольняє наступних умов:

$f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) > 0,\ f(u)$ опукла догори на $(0; 1)$ (наприклад, $f(u) = u(1-u)$).

Шукана функція $u(t, x)$ являє собою приведену $(0 \le u \le 1)$ концентрацію особин біологічної популяції. Співвідношення (5.16) зветься «рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова-Фішера». Доданок $f(u)$ описує еволюцію популяції із врахуванням обмеженості природних ресурсів; доданок $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ враховує можливість міграції в просторі біологічних особин.

Доводиться, що для деякого класу початкових умов $u(0, x)$ розв'язок (5.16) асимптотично (при $t \to \infty$) наближається до біжучої хвилі, що поширюється ліворуч із швидкістю v:

$$u(t, x) = h(x + vt)$$

де швидкість хвилі $v \to v_0 = 2\sqrt{Df'(0)}$, а форма $h(x)$ задовольняє рівнянню

$$h'' - \frac{v_0}{D}h' + \frac{f(0)}{D} = 0.$$

Ще приклад системи (5.15)—система рівнянь «хижак—жертва» з дифузією в ареалі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1-u) - \frac{u}{u+h}v\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + k\frac{u}{u+h}v - mv\ .$$

В цій моделі $u\surd t, \boldsymbol{x}\surd, v\surd t, \boldsymbol{x}\surd -$ приведені концентрації особин двох популяцій (хижаків та жертв відповідно). За деяких умов розв'язок системи являє собою граничний цикл, що відповідає рівновазі між популяціями.

5.2.2.Фрактальні моделі математичної фізики: еволюційні рівняння з похідними дробового порядку

Як зауважено вище, для реальних фізичних процесів типу одновимірної дифузії лінійне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \qquad (5.17)$$

не завжди являє собою адекватну математичну модель. Так, з розглянутих прикладів випливає, що нелінійність в параболічному рівнянні свідчить про наявність хвильових ефектів. Процес «чистої» дифузії на мікроскопічному рівні можна уявити як випадковий рух частинки з координатою $\xi_x(t)$
з початковою умовою $\xi_x(0) = 0$: диференціальне рівняння є макроскопічним описом цього процесу.

Для моделі (5.17) із сталим коефіцієнтом a^2 задача Коші з початковою умовою $u(0,x) = x^2$ має розв'язок:

$$u(t,x) = E(\xi_x(t) - x)^2 = x^2 + 2a^2 t$$

де доданок $2a^2 t$ є квадратом зміщення частинки від початкової позиції. Експериментальні дані свідчать, що для деяких фізичних явищ (наприклад, дифузія в композитах), згаданий квадрат зміщення при $t \to \infty$ має асимптотику $t^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$. Математичною моделлю такої узагальненої дифузії є рівняння з дробовою (за змінною t) похідною, досліджені в [12]. Наведемо основні означення та результати з теорії рівнянь із дробовими похідними.

Дробова похідна (Капуто) функції $f(t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad m-1 < \alpha < 1, t > 0.$$

Зокрема, якщо $0 < \alpha < 1$,

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f^{'}(\tau) d\tau \tag{5.18}$$

Очевидно, що похідна сталої функції дорівнює нулю.

Далі розглядається тільки випадок $0 < \alpha < 1$.

Приклад. Обчислити похідну ступенової функції $f(t) = t^r$.

$$D^{\alpha} t^r = \frac{r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\tau^{r-1}}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau = \frac{r t^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{(1-s)^{\alpha}} ds =$$
$$\frac{r t^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(r, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)} t^{r-\alpha} \tag{5.19}$$

Розв’язок задачі Коші для звичайного рівняння першого порядку

$u^{'}(t) = \lambda u(t),\ u(0) = 1$ є експонентою: $u(t) = e^{\lambda t}$.

Аналогічно, для задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0, x) = \varphi(x)$$

розв’язок теж записується через експоненціальну функцію (1.4):

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(y) dy$$

Розв’язування рівнянь з дробовими похідними вимагає застосування (замість експоненти) деяких спеціальних функцій як суми рядів. Визначимо функції Міттаг-Леффлера формулами:

$E_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+pk)}$, $p \geq 0$, $z \in C$ — функція Міттаг-Леффлера ;

$E_{p,q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(q+pk)}$, $p > 0$, $q \in R$, $z \in C$ —узагальнена функція Міттаг-Леффлера .

Очевидно, що $E_p(z) = E_{p,1}(z)$.

Часткові випадки: $E_1(z) = e^z$; $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$.

Приклад. Перевірити, що функція $u(t) = CE_\alpha(\lambda t^\alpha)$ задовольняє рівнянню

$$D^\alpha u = \lambda u \ .$$

Обчислення. $D^\alpha u(t) = \mathrm{C}D^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^л t^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)}$.Скориставшись лінійністю оператора D^α та (5.19), отримаємо:

$$D^\alpha u(t) = \mathrm{C}\, \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^{k-1}}{\Gamma\big(1+\alpha(k-1)\big)} = \ \lambda u(t).$$

Для розв’язування рівняння дифузії дробового порядку α $(0 < \alpha < 1)$

$$D^\alpha u(t, \boldsymbol{x}) = \Delta u(t, \boldsymbol{x}) + f(t, \boldsymbol{x}) \ , \boldsymbol{x} \in R^n \qquad (5.20)$$

застосовується спеціальна функція Райта ϕ, що визначається формулою:

$$\boldsymbol{\phi}(-\beta, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\delta-\beta k)}, \ \ \beta \in (0; 1].$$

В монографії [12] наведено наступний результат.

Теорема. Розв’язок задачі Коші для рівняння (5.20) має вид:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int_{R^n} P(t, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) u(0, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \ \int_0^t d\tau \int_{R^n} Q(t-\tau, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\tau, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \ ,$$

де ядра $P(t, \boldsymbol{x})$, $Q(t, \boldsymbol{x})$ виражаються через функцію Райта.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНЛОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Будак Б.М., Самарський А.А., Тихонов А.М.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 372 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 463 с.
3. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под общ.ред. *В.С.Владимирова.* – М.:Наука, 1974. – 271 с.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
5. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.:Наука, 1971. – 237 с.
6. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики: М.: Изд-во МГТУ, 2002. -368 с.
7. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики - К.:Либідь, 2006, -363с.
8. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.— М.: Наука, 1987,—368 с.
9. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 443 с.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
11. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 411 с.
12. *S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type.— Springer Basel AG, 2004.—386 P.