

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

М. І. КЛИМЕНКО, С. М. ГРЕБЕНЮК, С. І. ГОМЕНЮК

**ЕФЕКТИВНІ МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ
В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИТІВ**

Херсон
Видавничий дім «Гельветика»
2019

УДК 531:539.374
К492

РЕЦЕНЗЕНТИ:

доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри механіки
Національного університету «Запорізька політехніка»

В. І. Пожусь

доктор технічних наук, професор, завідувач відділу механіки еластичних конструкцій
гірничих машин Інституту геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова
Національної академії наук України

В. І. Дирда

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Запорізького національного університету
(протокол № 5 від 27.12.2019 р.)*

К492 **Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І.** Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.

ISBN 978-966-916-992-1

Викладено основи математичного моделювання в'язкопружних композиційних матеріалів. Розглянуто математичні моделі в'язкопружного середовища, основні методи розв'язання задач теорії в'язкопружності. Висвітлюються сутність та основні підходи до розв'язання задачі гомогенізації композитних матеріалів. Наведено розв'язання даної задачі для в'язкопружних трансверсально-ізотропних волокнистих композитів. Розглядаються двохфазові композити, фазами яких є в'язкопружна матриця та пружне волокно. Для розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружних композитів запропоновано використання кінематичних умов узгодження у поєднанні з інтегральним перетворенням Лапласа.

Для наукових та інженерно-технічних співробітників, спеціалістів у галузі механіки суцільного середовища, викладачів, аспірантів та студентів.

The bases of mathematical design of viscoelastic composite are laid out. The mathematical models of viscoelastic environment, basic methods of decision of tasks of theory of viscoelastic are considered. Essence and basic approaches to the decision of task of homogenization of composite materials are lighted. The decision of the given task is resulted for viscoelastic transtropic fibre composite. Two-phase composites the phases of which a viscoelastic matrix and resilient fibre are examined. For the decision of task of homogenization of viscoelastic composite the use of kinematics terms of concordance is offered in combination with integral transformation Laplas.

The edition is suggested for researchers, post-graduate students and engineers who work in the areas of mechanics of continuous environmen.

УДК 531:539.374

ISBN 978-966-916-992-1

© Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І.
© Запорізький національний університет
© Видавничий дім «Гельветика»

Вступ

Важливою тенденцією розвитку сучасної техніки є зниження матеріалоемності конструкцій та споруд. Застосування композиційних матеріалів дозволяє вирішити цю задачу. Такі матеріали мають комплекс різноманітних властивостей, раціональне поєднання яких дозволяє оптимізувати технічні характеристики споруд та конструкцій.

Використання композитів дозволяє проектувати матеріали з заданими властивостями: жорсткістю, міцністю, пластичністю, антикорозійною стійкістю та іншими властивостями, важливими при практичному застосуванні. Наявність таких властивостей пов'язана з структурою композиту та властивостями його складових елементів. Тому знаходження механічних характеристик композиційних матеріалів за аналогічними характеристиками їх складових елементів є однією з актуальних задач сучасної механіки.

Композиційні матеріали, що застосовуються на практиці, у багатьох випадках являють собою систему шарів, що складаються з розташованих у одному напрямі волокон, поєднаних між собою матеріалом матриці. Експериментально доведено, що такі композити проявляють трансверсально-ізотропні властивості, причому для багатьох з них відзначається наявність в'язкопружності. У зв'язку з цим важливою для практики є задача гомогенізації в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів, що розглядається у даній роботі.

Розв'язання цієї задачі передбачає визначення ефективних механічних характеристик композиту, що дозволяє при розрахунках напружено-деформованого стану елементів будівельних конструкцій, окремих деталей машин та механізмів розглядати його як однорідний матеріал. Ця задача ускладнюється тим, що наявність в'язкопружних властивостей передбачає використання інтегральних операторів для їх опису. Характеристики таких операторів можуть визначатися як експериментально, так і з використанням аналітичних та чисельних методів.

У даній роботі для визначення параметрів вказаних операторів використовується інтегральне перетворення Лапласа. Перехід у простір зображень дозволяє замінити задачу розв'язання системи інтегральних рівнянь задачею розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вибір структури та змісту даної роботи орієнтований на використання її широким колом фахівців, а також студентів та аспірантів, що працюють над розв'язанням задач теорії в'язкопружних композитів. При цьому автори у перших трьох розділах, що висвітлюють основні теоретичні відомості, необхідні для дослідження в'язкопружних композитів, широко використовували матеріали, викладені у відомих дослідженнях [2, 3, 10, 28, 67, 78, 83, 139]. Матеріал четвертого розділу ґрунтується на власних результатах, отриманих авторами.

У першому розділі монографії висвітлюються питання, пов'язані з основами математичного моделювання в'язкопружного середовища.

Зокрема, тут розглянуті основні поняття теорії в'язкопружності, наведено визначальні рівняння механіки в'язкопружного середовища. Розглянуто інтегральні оператори, що використовуються для моделювання в'язкопружних аналогів механічних констант та їх ядра релаксації та повзучості, існуючі методи ідентифікації цих ядер.

Другий розділ висвітлює основні методи розв'язання задач теорії в'язкопружності, що можуть бути використані для розв'язання задач гомогенізації композитів: метод апроксимацій, метод квазіконстантних операторів, використання рядів за степенями оператора Вольтерра. Значну увагу приділено висвітленню сутності операційного методу, що використовується у подальшому для розв'язання задач гомогенізації в'язкопружних композитів.

Основні підходи до визначення ефективних характеристик композитів розглянуто у третьому розділі. Зокрема, тут висвітлюються основні поняття теорії композиційних матеріалів, розглянуто систему пружних характеристик ізотропних та трансверсально-ізотропних композиційних матеріалів, деякі існуючі методики гомогенізації композитів.

У четвертому розділі монографії наведено основні результати, отримані авторами щодо гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту. Тут детально розглянуто методику визначення ефективних параметрів інтегральних операторів, що визначають в'язкопружні властивості композитів. Для отримання повної системи характеристик, що визначають механічні характеристики в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту розв'язано

задачі поздовжнього та поперечного розтягнення, а також поздовжнього та поперечного зсуву.

Основний підхід, який пропонують для гомогенізації в'язкопружних транстропних волокнистих композитів автори монографії, ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження переміщень точок гомогенізованого композиту та його складових – матриці та волокна. У роботі для розв'язання вказаної задачі пропонується також використання енергетичного критерію узгодження, який дозволяє отримати пружні ефективні сталі. Після цього виконується перехід до в'язкопружних характеристик у просторі зображень Лапласа з подальшим відновленням часових залежностей для в'язкопружного матеріалу.

Автори сподіваються, що матеріал, викладений у даній роботі, стане у нагоді у наукових дослідженнях як фахівцям з механіки деформованого твердого тіла, так і студентам та аспірантам.

1. Математичні моделі в'язкопружного середовища

1.1 Основні поняття теорії в'язкопружності

Напружено-деформований стан пружного тіла при сталому у часі навантаженні залишається незмінним. Проте багато матеріалів мають здатність за наявності сталих напружень та сталій температурі з часом повільно деформуватися. Цю властивість матеріалів називають в'язкопружністю або повзучістю.

Теорія в'язкопружності передбачає необхідність врахування часу у процесі деформування матеріалу, для яких інерційними силами можна знехтувати.

Теорія в'язкопружності як розділ механіки суцільного середовища сформувалася у середині ХХ сторіччя, хоча багато її принципів та закономірностей було експериментально виявлено ще на початку ХІХ століття [139]. Серед перших дослідників, що виявили явище деформування матеріалів з часом за сталого навантаження були Л. Вікат (1834), В. Вебер (1835, 1841), Р. Кольрауш (1847). Д. Максвелл (1868) вперше сформулював закон деформування матеріалу з часом у вигляді диференціального рівняння. Математичну модель для дослідження лінійної в'язкопружності, що ґрунтується на використанні інтегральних рівнянь, запропонував Л. Больцман (1877) і дещо пізніше вдосконалив В. Вольтерра (1913, 1931). Спрощені моделі

в'язкопружного середовища були запропоновані Д.-Д. Томпсоном (1888), В. Фойгтом (1890) та іншими дослідниками.

Суттєвий поштовх для подальшого розвитку теорія в'язкопружності отримала з впровадженням у повсякденну практику композиційних матеріалів. Для багатьох з них є характерною відсутність сталості деформацій при дії сталого навантаження. Це створило передумови для розробки методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням фактору часу.

У 20-х роках минулого сторіччя були запропоновані практичні методи розрахунку в'язкопружних матеріалів, що ґрунтуються на фізичних залежностях між деформаціями та напруженнями. Зокрема, були розроблені теорія старіння та теорія течії. У межах теорії старіння постулюється функціональний зв'язок між напруженнями та деформаціями, що містить змінну часу. Теорія течії розглядає такий зв'язок між напруженнями та швидкостями деформацій. Такі функціональні залежності встановлювалися на основі обробки результатів експериментів, у яких зразки матеріалів піддавалися сталому у часі навантаженню. Суттєвим недоліком таких моделей є те, що час у них входить явним чином, отже, закон деформування матеріалу залежить від початку відліку часу.

Уточнена форма функціональної залежності між напруженнями, деформаціями та їх швидкостями була запропонована А. Надаї та К. Дейвенпортом [139]. Тут у функціональну залежність змінна часу у явному вигляді не входить. На основі використання такої

залежності були запропоновані методи розрахунку, що отримали назву теорії зміцнення.

У 40-х роках 20-го століття отримали подальший розвиток диференціальні моделі в'язкопружного матеріалу, у яких диференціальні залежності між напруженнями та деформаціями містили похідні цих величин за часом. Основою для створення таких моделей були експериментальні дані. Проте на початковому після прикладення навантаження проміжку часу диференціальні моделі погано узгоджувалися з результатами спостережень. Тому провідне місце у лінійній теорії в'язкопружності зайняли інтегральні співвідношення, у яких процес зміни деформацій в'язкопружного тіла у часі описувалися за допомогою лінійних інтегральних операторів. Найбільш відомим прикладом застосування інтегральних співвідношень для моделювання в'язкопружного деформування є спадкова теорія Больцмана-Вольтерра. Подальший розвиток математичного моделювання в'язкопружності пов'язаний з уточненням форми та структури лінійних інтегральних операторів, що використовуються при цьому.

Найпростіші моделі в'язкопружного середовища пов'язані з поданням матеріалу у вигляді поєднання елементарних пружних та в'язких елементів. При цьому для пружного елемента зв'язок між напруженнями та деформаціями установлюється законом Гука, тобто напруження, що виникає у елементі під дією зовнішньої сили, є пропорційним його деформації:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1.1)$$

де E – коефіцієнт пружності (модуль Юнга).

Для в'язкого елемента напруження є пропорційними швидкості деформації:

$$\sigma = K \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.2)$$

де K – коефіцієнт в'язкості матеріалу.

Для побудови найпростіших моделей в'язкопружного тіла його розглядають як сукупність в'язких та пружних елементів, поведінка яких описується відповідно співвідношеннями (1.1) або (1.2). При цьому розглядаються різні типи сполучення в'язких та пружних елементів.

Нехай в'язкий та пружний елементи з'єднані паралельно. Будемо вважати, що деформації у рівняннях (1.1) та (1.2) співпадають. Нехай σ_1 – напруження, що діє на пружний елемент, σ_2 – відповідно на в'язкий. Тоді модель деформування системи елементів, що розглядається, можна подати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_1 = E \cdot \varepsilon, \\ \sigma_2 = K \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

З цієї системи отримуємо рівняння

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + K \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (1.4)$$

Якщо напруження σ не змінюється з часом, то розв'язком лінійного диференціального рівняння (1.4) відносно невідомої деформації ε є експоненціальна залежність:

$$\varepsilon = C e^{-\frac{Et}{K}} + \frac{\sigma}{E}, \quad (1.5)$$

де C – стала інтегрування, яку визначають з початкових умов. З рівняння (1.5) випливає, що при $t \rightarrow \infty$ деформація $\varepsilon(t)$ наближається до сталої величини $\frac{\sigma}{E}$. Величину $\frac{K}{E}$ називають часом запізнення деформацій.

Розглянуту модель (1.3) називають моделлю Фойгта (моделлю Кельвіна) [139].

Розглянемо послідовне з'єднання в'язкого та пружного елементів. Для цього випадку напруження у пружному та в'язкому

елементах співпадатимуть, а деформації будуть різними. Позначимо ε_1 деформацію пружного елемента, ε_2 – в'язкого. Отримуємо модель, що подається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon_1, \\ \sigma = K \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Модель (1.6) називають моделлю Максвелла.

З системи (1.6) отримуємо рівність:

$$\sigma + \frac{K}{E} \frac{d\sigma}{dt} = K \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (1.7)$$

Величину $\frac{K}{E}$ називають часом релаксації.

Для сталої деформації $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ і отримаємо розв'язок диференціального рівняння (1.7) відносно напруження $\sigma(t)$ у вигляді:

$$\sigma = C \cdot e^{-\frac{Et}{K}}. \quad (1.8)$$

Отримана залежність (1.8) описує релаксацію напружень, яка проявляється у тому, що при $t \rightarrow \infty$ $\sigma \rightarrow 0$. Зазначимо [139], що для багатьох матеріалів при $t \rightarrow \infty$ напруження прямує не до нуля, а до деякої скінченної величини.

При сталому напруженні з рівняння (1.7) отримуємо, що у цьому випадку швидкість деформації є сталою величиною.

Розглянуті вище моделі Фойгта та Максвелла є найпростішими моделями в'язкопружного тіла.

Отримаємо найпростішу залежність між напруженнями та деформаціями в'язкопружного тіла у інтегральній формі.

Нехай $t = \tau$ – початковий момент часу, коли на тіло почало діяти навантаження. Будемо розглядати лінійну в'язкопружність, коли зв'язок між деформаціями $\varepsilon(t)$ та напруженнями $\sigma(t)$ у в'язкопружному тілі подається лінійною залежністю:

$$\varepsilon(t) = \alpha(t, \tau) \cdot \sigma, \quad (1.9)$$

де функцію $\alpha(t, \tau)$ подають у вигляді суми двох функцій:

$$\alpha(t) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \quad (1.10)$$

Величину $E(\tau)$ у (1.10) називають миттєвим модулем пружності, доданок $\frac{\sigma}{E(\tau)}$ у рівності (1.9) визначає пружну деформацію тіла у момент прикладення навантаження, доданок $C(t, \tau) \cdot \sigma$ – деформацію тіла за час $t - \tau$.

Розглянемо випадок, коли до в'язкопружного тіла у момент часу $\tau = t_0$ прикладене навантаження, що створює у тілі напруження $\sigma(t_0)$, що змінюється з часом t . Отримаємо залежність між деформацією та напруженням, використавши принцип суперпозиції, згідно з яким повну деформацію тіла при змінних навантаженнях можна знайти як алгебраїчну суму деформацій, спричинених окремими приростами напружень. При цьому вважаємо, що деформація від фіксованого приросту напруження пропорційна його значенню та залежить від тривалості дії цього приросту, проте не залежить від тривалості та дії інших приростів напруження. Замінивши суму інтегралом, можемо записати:

$$\varepsilon(t) = \alpha(t, t_0) \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(t, \tau) d\sigma(\tau).$$

Інтегруючи частинами цю рівність, отримуємо:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t_0)} + \int_{t_0}^t Q(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

У рівності (1.11)

$$Q(t, \tau) = -\frac{\partial \alpha(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Функцію $Q(t, \tau)$ називають ядром повзучості.

При $t_0 = 0$ і $Q(t, \tau) = Q(t - \tau)$ з (1.11) отримуємо рівняння Больцмана:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_{t_0}^t Q(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.12)$$

де миттєвий модуль пружності $E_0 = E(0)$.

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ у тілі діє стале у подальшому напруження $\sigma(t) = \sigma_0$. Тоді з (1.12) отримуємо:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \sigma_0 \int_{t_0}^t Q(t - \tau) d\tau.$$

Диференціюючи цей вираз за змінною t , отримуємо, що ядро повзучості є пропорційним до швидкості зміни деформації у часі

$$Q(t) = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

У початковий момент часу швидкість зміни деформації є високою, тому часто вважають, що при $t \rightarrow 0$ $Q(t) \rightarrow \infty$ [139].

Розглянуті вище диференціальні співвідношення, що відображають найпростіші моделі Фойгта та Максвелла, можна отримати з (1.12) при відповідному виборі ядра повзучості.

Якщо відомою є деформація $\varepsilon(t)$, то напруження $\sigma(t)$ можна визначити з рівняння (1.12). Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду (типу згортки). Його розв'язок має вигляд:

$$\sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) - \frac{1}{E_0} \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (1.13)$$

У рівнянні (1.13) $R(t-\tau)$ є резольвентою ядра $Q(t-\tau)$. Функцію $R(t-\tau)$ називають ядром релаксації.

Ввівши лінійний інтегральний оператор

$$\bar{E}(\varepsilon(t)) = E_0 \left(\varepsilon(t) - \frac{1}{E_0} \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (1.14)$$

рівняння (1.13) можна записати у компактній формі: $\sigma(t) = \bar{E}(\varepsilon(t))$.

Далі записи $\bar{E}(\varepsilon(t))$, $\bar{E}\varepsilon$, $\bar{E}[\varepsilon(t)]$ означають функцію часу, що є результатом дії оператора \bar{E} на функцію $\varepsilon(t)$. Тоді рівняння (1.12)

запишемо у формі: $\varepsilon(t) = \bar{E}^{-1}(\sigma(t))$, де \bar{E}^{-1} – оператор, обернений до оператора \bar{E} .

1.2 Визначальні рівняння теорії в'язкопружності

Далі розглядатимемо в'язкопружні тіла, зміна характеристик яких у часі моделюється з допомогою співвідношень спадкової теорії Больцмана-Вольтерра (1.12) – (1.13). Для їх дослідження можна застосувати принцип Вольтерра. Згідно з цим принципом, для описання напружено-деформованого стану в'язкопружного тіла застосовуються основні рівняння теорії пружності. При цьому співвідношення, що не містять пружних сталих (співвідношення Коші, рівняння сумісності деформацій, рівняння рівноваги), залишаються інваріантними, тобто використовуються без змін. У формулах закону Гука у прямій та оберненій формах пружні сталі потрібно замінити відповідними операторами типу $\bar{E}(\varepsilon(t))$ або $\bar{E}^{-1}(\varepsilon(t))$.

Розглянемо трансверсально-ізотропне (транстропне) в'язкопружне тіло [89]. Через усі точки такого тіла проходять паралельні площини пружної симетрії, у яких всі напрямки за своїми властивостями є еквівалентними, тобто тіло має площину ізотропії. Трансверсально-ізотропне тіло має вісь пружної симетрії. У декартовій системі координат $Oxuz$ спрямуємо вісь Oz

перпендикулярно до площини ізотропії, а осі Ox та Oy довільно у цій площині. У подальших позначеннях індекс 1 відповідатиме осі Oz , індекси 2 та 3 – відповідно осям Ox та Oy .

Введемо технічні константи: E_1 та E_2 – модулі пружності першого роду для розтягнення – стиску відповідно у напрямі осі Oz та напрямі, паралельному до площини ізотропії, ν_{12} – коефіцієнт Пуассона, що характеризує поперечний стиск при розтягненні у напрямі осі Oz , ν_{23} описує поперечний стиск у площині ізотропії при розтягненні у цій площині, G_{12} та $G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$ – модулі зсуву (модулі пружності другого роду) відповідно до площини, нормальної до площини ізотропії та площини ізотропії.

Для в'язкопружного тіла у загальному випадку напруження, переміщення та деформації є функціями не лише просторових координат, але й часу. Замінімо технічні сталі E_1 , E_2 , G_{12} та G_{23} відповідними лінійними інтегральними операторами \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , \bar{G}_{12} та \bar{G}_{23} , за структурою аналогічними до (1.14), що відрізняються між собою значеннями миттєвих модулів пружності та функціями ядер релаксації. Будемо вважати коефіцієнти Пуассона сталими величинами, що у багатьох випадках знаходить експериментальне підтвердження. Тоді рівняння узагальненого закону Гука для трансверсально-ізотропного в'язкопружного тіла набувають вигляду:

$$\varepsilon_x = (\bar{E}_2)^{-1} [\sigma_x - \nu_{23}\sigma_y] - \nu_{12} (\bar{E}_1)^{-1} [\sigma_z], \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_y = (\bar{E}_2)^{-1} [\sigma_y - \nu_{23}\sigma_x] - \nu_{12} (\bar{E}_1)^{-1} [\sigma_z], \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_z = -\nu_{12} (\bar{E}_1)^{-1} [\sigma_x + \sigma_y] + (\bar{E}_1)^{-1} [\sigma_z], \quad (1.17)$$

$$\gamma_{yz} = (\bar{G}_{12})^{-1} [\tau_{yz}], \quad (1.18)$$

$$\gamma_{xz} = (\bar{G}_{12})^{-1} [\tau_{xz}], \quad (1.19)$$

$$\gamma_{xy} = (\bar{G}_{23})^{-1} [\tau_{xy}]. \quad (1.20)$$

Тут вираз виду $\bar{E}^{-1}[y(t)]$ означає результат дії інтегрального оператора, оберненого до \bar{E} , на функцію $y(t)$.

Рівняння закону Гука у зворотній формі для трансверсально-ізотропного в'язкопружного тіла мають вигляд:

$$\sigma_x = \frac{\bar{E}_2 [\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_x + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_y]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (1.21)$$

$$\sigma_y = \frac{\bar{E}_2 [\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_x + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_y]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (1.22)$$

$$\sigma_z = \frac{\bar{E}_1 [(1-\nu_{23}^2)\varepsilon_z + \nu_{21}(1+\nu_{23})\varepsilon_x + \nu_{21}(1+\nu_{23})\varepsilon_y]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (1.23)$$

$$\tau_{xz} = \bar{G}_{12} [\gamma_{xz}]; \quad (1.24)$$

$$\tau_{yz} = \bar{G}_{12} [\gamma_{yz}]; \quad (1.25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\bar{E}_2 [\gamma_{xy}]}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (1.26)$$

Розглянемо випадок ізотропного в'язкопружного тіла, для якого фізичні властивості є однаковими у всіх напрямках. Для такого тіла $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu$, $G_{12} = G_{23} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$. У цьому випадку отримуємо формули закону Гука для в'язкопружного тіла у наступній формі:

$$\varepsilon_x = \bar{E}^{-1} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_y = \bar{E}^{-1} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_z = \bar{E}^{-1} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \quad (1.29)$$

$$\gamma_{yz} = \bar{G}^{-1} [\tau_{yz}], \quad (1.30)$$

$$\gamma_{xz} = \bar{G}^{-1} [\tau_{xz}], \quad (1.31)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{G}^{-1} [\tau_{xy}]. \quad (1.32)$$

Формули оберненого закону Гука для ізотропного в'язкопружного тіла мають вигляд:

$$\sigma_x = \frac{\nu \bar{E} [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{\bar{E} [\varepsilon_x]}{1 + \nu}, \quad (1.32)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu \bar{E}[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\bar{E}[\varepsilon_y]}{1+\nu}, \quad (1.33)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu \bar{E}[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\bar{E}[\varepsilon_z]}{1+\nu}, \quad (1.34)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\bar{E}[\gamma_{xy}]}{2(1+\nu)}, \quad (1.35)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\bar{E}[\gamma_{yz}]}{2(1+\nu)}, \quad (1.36)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\bar{E}[\gamma_{xz}]}{2(1+\nu)}. \quad (1.37)$$

Зауважимо, що формули прямого та оберненого законів Гука у циліндричній системі координат отримуємо, заміною індексу x на r , а y на θ .

Подальше використання основних рівнянь теорії лінійної в'язкопружності ґрунтується на застосуванні принципу Вольтерра.

1.3 Ядра повзучості та релаксації

Розглянемо зв'язок між напруженнями та деформаціями, що виражається узагальненим законом Гука для анізотропного тіла, який запишемо у тензорній формі [2]:

$$\hat{\sigma}(t) = \bar{\Gamma}^T [\hat{\varepsilon}(t)], \quad (1.38)$$

де $\hat{\Gamma}^T$ – лінійний тензорний інтегральний оператор четвертого рангу, що відповідає тензору пружних сталих для пружного тіла,

$$\sigma_{ij}(t) = \bar{\Gamma}_{ijkl} [\varepsilon_{kl}(t)], \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (1.39)$$

Тензор $\hat{\Gamma}^T$ є симетричним: $\bar{\Gamma}_{ijkl} = \bar{\Gamma}_{ijlk} = \bar{\Gamma}_{klij} = \bar{\Gamma}_{jilk}$.

В'язкопружний матеріал називають нестаріючим, якщо його фізичні властивості не залежать від «віку». Для таких матеріалів маємо співвідношення:

$$\bar{\Gamma}_{ijkl} [\varepsilon_{kl}(t)] = \Gamma_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \right). \quad (1.40)$$

У (1.40) $R_{ijkl}(t-\tau)$ – ядро релаксації, що включає множник, обернений миттєвому модулю Γ_{ijkl} . Нехай $R'_{ijkl}(t) = \Gamma_{ijkl} R_{ijkl}(t)$. Тоді величини $R'_{ijkl}(t)$ пов'язані з компонентами тензора функцій релаксації співвідношеннями [2]:

$$R'_{ijkl}(t) = -\frac{d\Gamma_{ijkl}(t)}{dt}, \quad \Gamma_{ijkl}(t) = \Gamma_{ijkl} \left(1 - \int_0^t R_{ijkl}(\tau) d\tau \right). \quad (1.41)$$

Крім тензора миттєвих модулів пружності Γ_{ijkl} розглядають тензор так званих рівноважних пружних сталих з компонентами

$$\Gamma_{ijkl}(\infty) = \Gamma_{ijkl} \left(1 - \int_0^{\infty} R_{ijkl}(\tau) d\tau \right). \quad (1.42)$$

Ці компоненти визначають характеристики в'язкопружного тіла, коли на нього навантаження діє нескінченно довго.

Функції $\Gamma_{ijkl}(t)$ повинні задовольняти наступні умови:

1. Тензор функцій релаксації $\bar{\Gamma}^T$ повинен задовольняти умову додатної визначеності.
2. Існують ненульові значення $\Gamma_{ijkl}(\infty)$.

Співвідношення (1.4) можна записати у оберненій формі, використовуючи обернений лінійний тензорний інтегральний оператор податливості $\bar{\Pi}^T = (\bar{\Gamma}^T)^{-1}$. Він виражається через тензор функцій повзучості з компонентами $\Pi_{ijkl}(t)$, такими, що

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.43)$$

Вираз (1.43) можна подати також у наступній формі:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \Pi_{ijkl}(\sigma_{kl}(t)) + \int_0^t Q_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau. \quad (1.44)$$

Функції $Q_{ijkl}(t)$ та $R_{ijkl}(t)$ називають відповідно ядрами повзучості та релаксації компонентів відповідних тензорних лінійних інтегральних операторів.

Для ізотропних матеріалів реологічні функції звичайно виражають через дві незалежні функції, що описують об'ємний стиск та зсувні властивості в'язкопружного тіла.

Для побудови визначальних співвідношень тут установлюють зв'язок кульової частини тензора напружень – середнього

напруження $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ з об'ємною деформацією $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

через операторний модуль об'ємного стиску

$$\sigma = \bar{B}[\theta] = B \left(\theta(t) - \int_0^t R_B(t-\tau)\theta(\tau)d\tau \right). \quad (1.45)$$

У аналогічній формі установлюється зв'язок між компонентами дівіатора напружень та компонентами дівіатора деформацій. Тут використовують операторний модуль зсуву \bar{G} . Компоненти дівіатора напружень визначаються за формулами:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, δ_{ij} – символи Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Компоненти девіатора деформацій мають вигляд:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon.$$

Зв'язок між компонентами девіатора напружень та компонентами девіатора деформацій визначається співвідношенням:

$$s_{ij} = 2\bar{G}[e_{ij}] = 2G \left(e_{ij}(t) - \int_0^t R_G(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau \right) \quad (1.46)$$

У формулах (1.45) та (1.46) $R_B(t)$ та $R_G(t)$ – відповідно ядра релаксації операторного модуля об'ємної деформації та операторного модуля зсуву, B та G – відповідні значення миттєвих модулів.

З інтегральних рівнянь (1.45) та (1.46) визначаємо функції $\Theta(t)$ та $e_{ij}(t)$:

$$\Theta(t) = \frac{1}{B} \left(\sigma(t) + \int_0^t Q_B(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right), \quad (1.47)$$

$$2e_{ij}(t) = \frac{1}{G} \left(s_{ij}(t) + \int_0^t Q_G(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad (1.48)$$

де $Q_B(t)$, $Q_G(t)$ – відповідно ядра повзучості операторних модулів об'ємної деформації та зсуву.

Ядра релаксації та повзучості у співвідношеннях (1.45) – (1.48) пов'язані між собою рівністю [3]:

$$Q(t) = R(t) + \int_0^t R(t-\tau) Q(\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Знаючи одне з ядер, ядро повзучості чи ядро релаксації, з інтегрального рівняння (1.49) можна визначити інше ядро.

1.4 Аналітичне подання ядер у операторах спадкової в'язкопружності

Деформування лінійних в'язкопружних матеріалів у межах спадкової теорії Больцмана-Вольтерра описується рівняннями:

$$\sigma(t) = \bar{E}[\varepsilon(t)] = E \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (1.50)$$

$$\varepsilon(t) = \bar{E}^{-1}[\sigma(t)] = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_0^t Q(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (1.51)$$

де E – миттєвий модуль пружності матеріалу, $\varepsilon(t)$ та $\sigma(t)$ – деформація та напруження у момент часу t , t – час спостереження, τ – час, що передує часу спостереження, $R(t)$ та $Q(t)$ – відповідно ядра релаксації та повзучості. Ці ядра пов'язані між собою співвідношенням (1.49).

Нехай $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ або $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

У цьому випадку рівняння (1.50) та (1.51) значно спрощуються. Вони набувають вигляду:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(1 - \int_0^t R(\tau) d\tau \right),$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau \right).$$

Функції $h(t) = 1 - \int_0^t R(\tau) d\tau$ та $g(t) = 1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau$ називають

відповідно функціями релаксації та повзучості.

У різноманітних задачах лінійної в'язкопружності використовують велику кількість функцій, що визначають ядра релаксації та повзучості інтегральних операторів, що моделюють в'язкопружні властивості матеріалу. Найчастіше для цього використовують функції, що мають слабку (інтегровану) особливість при $t = 0$. За вихідне ядро та відповідну йому резольвенту можна взяти ядро релаксації або ядро повзучості.

Для кожного конкретного випадку ядро вибирають, виходячи з фізико-механічних властивостей матеріалу, що досліджується та специфіки задачі. При цьому враховується наявність відомої функції для резольвенти вибраного ядра та кількість параметрів ядра, які потрібно визначити. Наведемо опис ядер, для яких є відомими відповідні резольвенти [2].

Найпростішим ядром, що використовується для опису повзучості та релаксації в'язкопружного матеріалу є ядро експоненціального типу

$$R(t) = \alpha e^{-\beta t}. \quad (1.52)$$

Параметри α та β тут мають розмірність часу, с^{-1} , значення $\frac{1}{\beta}$

називають часом релаксації, параметр $\alpha = \frac{E}{\eta}$, η – в'язкість матеріалу.

Область допустимих значень параметрів α та β визначається умовою існування додатного значення модуля $E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E \cdot h(t)$, тобто

повинні виконуватися умови:

$$0 \leq \alpha < \beta, \quad \beta > 0.$$

Резольвентою ядра (1.52) є функція

$$Q(t) = \alpha e^{-\chi t}, \quad \chi = \beta - \alpha. \quad (1.53)$$

Рівноважний модуль для ядра (1.52) має вигляд:

$$E_\infty = E \cdot \left(1 - \int_0^\infty R(\tau) d\tau \right) = E \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) > 0.$$

Інтервал часу, у якому реальні криві релаксації можна описати за допомогою однієї експоненти, є досить малим. Тому за ядро релаксації досить часто приймають суму експонент:

$$R(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{-\beta_k t}. \quad (1.54)$$

Область допустимих значень параметрів цього ядра релаксації визначається нерівностями

$$0 \leq \alpha_k < \beta_k, \beta_k > 0, \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\beta_k} < 1.$$

Резольвента цього ядра має вигляд:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k e^{-\chi_k t}. \quad (1.55)$$

При цьому параметри ядер (1.54) та (1.55) пов'язані співвідношеннями:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\beta_k - \chi_k} = 1, \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\beta_k - \chi_k} = 1.$$

Рівноважний модуль пружності для ядра (1.54) має вигляд:

$$E_\infty = E \left(1 - \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) > 0.$$

Множину величин $t_k = \frac{1}{\beta_k}$ називають дискретним спектром.

Замінивши підсумовування інтегруванням, отримуємо ядро, що відповідає неперервному спектру, у вигляді невластного інтегралу:

$$R(t) = \int_0^{\infty} \rho(\beta) e^{-\beta t} d(\ln \beta). \quad (1.56)$$

Функцію $\rho(\beta)$ називають щільністю розподілу часу релаксації.

Перевагою використання ядер у вигляді експоненціальних функцій є те, що їх нескладно застосовувати при розв'язанні практичних задач. Проте вони неточно описують процес релаксації при невеликих значеннях часу, оскільки вони є скінченними при $t = 0$.

Тому на практиці звичайно використовують ядра, що мають слабку (інтегровну) особливість. Найпростішим з таких ядер є ядро Абеля. Воно має вигляд:

$$R(t) = \frac{A}{t^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (1.57)$$

Резольвента ядра Абеля подається у вигляді ряду [2]:

$$Q(t) = \frac{\lambda}{t^\alpha} \cdot \Gamma(1 + \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{t^{n(1+\alpha)} \Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}. \quad (1.58)$$

У (1.58) $\Gamma(x)$ – гамма-функція.

При моделюванні в'язкопружних властивостей полімерів широке застосування знайшло ядро релаксації у вигляді дробово-експоненціальної функції $E_\alpha(-\beta, t)$ Ю.М. Работнова:

$$R(t) = A \cdot E_\alpha(-\beta, t) = At^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}. \quad (1.59)$$

Область допустимих значень параметрів ядра Работнова визначається нерівностями:

$$\beta > 0; -1 < \alpha \leq 0; A < \beta.$$

Його резольвента виражається через дробово-експоненціальну функцію Работнова $E_\alpha(A - \beta, t)$:

$$Q(t) = A \cdot E_\alpha(A - \beta, t).$$

Рівноважний модуль ядра Работнова має вигляд:

$$E_\infty = E\left(1 - \frac{A}{\beta}\right) > 0.$$

На практиці використовують також ядро М.А. Колтунова:

$$R(t) = \frac{Ae^{-\beta t^m}}{t^{1-\alpha}}. \quad (1.60)$$

Область допустимих значень ядра М.А. Колтунова визначається наступними нерівностями:

$$0 < \alpha \leq 1; \beta > 0; m \geq \alpha; 0 \leq A < \frac{m\beta^{\frac{\alpha}{m}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)}.$$

При значеннях $m=1; \alpha=1$ отримуємо експоненціальне ядро (1.52), при $m=1$ маємо ядро Ржаніцина:

$$R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}. \quad (1.61)$$

Його резольвента має вигляд:

$$Q(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A \cdot \Gamma(\alpha) t^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n)}.$$

Наведено основні типи ядер релаксації, що застосовуються при розв'язанні крайових задач для в'язкопружних тіл. Більш докладні відомості про ядра повзучості та релаксації наведені у дослідженнях [2, 61, 78]. Основним чинником, що впливає на вибір ядра при

побудові моделі в'язкопружного середовища, є характер та особливості задачі.

2. Методи розв'язання задач теорії в'язкопружності

2.1 Квазістатичні задачі теорії лінійної в'язкопружності

Розглянемо задачу визначення компонентів напружено-деформованого стану в'язкопружного ізотропного тіла, при якому впливом сил інерції можна знехтувати. Такі задачі називають квазістатичними.

Механічні характеристики ізотропного тіла можна описати з допомогою модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν або

модуля зсуву $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ та модуля об'ємної деформації

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. Для моделювання властивостей ізотропного

в'язкопружного матеріалу зручно застосовувати інтегральні оператори, що відповідають модулю зсуву та модулю об'ємної деформації [2]:

$$\bar{G}[y(t)] = G \left[y(t) - \int_0^t R_G(t-\tau) y(\tau) d\tau \right], \quad (2.1)$$

$$\bar{K}[y(t)] = K \left[y(t) - \int_0^t R_K(t-\tau) y(\tau) d\tau \right], \quad (2.2)$$

де G , K – відповідно миттєві значення модуля зсуву та модуля об’ємної деформації, $R_G(t)$ та $R_K(t)$ – ядра релаксації відповідних інтегральних операторів.

Замість інтегральних операторів (2.1) та (2.2) у багатьох задачах використовують обернені до них інтегральні оператори \bar{G}^{-1} та \bar{K}^{-1} , які називають операторами зсувної та об’ємної повзучості:

$$\bar{G}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{G} \left[y(t) + \int_0^t Q_G(t-\tau) y(\tau) d\tau \right], \quad (2.3)$$

$$\bar{K}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{K} \left[y(t) + \int_0^t Q_K(t-\tau) y(\tau) d\tau \right] \quad (2.4)$$

Тут $Q_G(t-\tau)$, $Q_K(t-\tau)$ – ядра повзучості відповідних інтегральних операторів.

З допомогою операторів (2.3) та (2.4) співвідношення між компонентами дівіаторів та кульових тензорів деформацій та напружень можна записати у наступній формі [3]:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \bar{K}^{-1}[\sigma], \\ \varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1}{2} \bar{K}^{-1}[\sigma_x - \sigma], \\ \gamma_{xy} = \bar{G}^{-1}[\tau_{xy}], \\ \dots \end{cases} \quad (2.5)$$

У рівностях (2.5) $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – лінійні та кутові деформації, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – нормальні та дотичні напруження, вирази для $\varepsilon_y - \varepsilon, \varepsilon_z - \varepsilon, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ отримуємо з наведених у (2.5) виразів круговою підстановкою індексів, всі деформації та напруження є функціями часу.

Використовуючи співвідношення (2.5), можна визначити залежність компонентів діватора та кульового тензора напружень від деформацій у операторній формі [3]:

$$\begin{cases} \sigma = 3\bar{K}[\varepsilon], \\ \sigma_x - \sigma = 2\bar{G}[\varepsilon_x - \varepsilon], \\ \tau_{xy} = \bar{G}[\gamma_{xy}], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.6)$$

З (2.6) визначаємо компоненти тензора напружень:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\bar{G}[\varepsilon_x] + (3\bar{K} - 2\bar{G})[\varepsilon], \\ \tau_{xy} = \bar{G}[\gamma_{xy}], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.7)$$

При записі основних рівнянь теорії в'язкопружності часто використовують допущення про те, що коефіцієнт Пуассона є сталою величиною, що не залежить від часу. Введемо інтегральний оператор

\bar{E} для модуля пружності першого роду та обернений до нього оператор \bar{E}^{-1} за формулами:

$$\bar{E}[y(t)] = E \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (2.8)$$

$$\bar{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E} \left(y(t) + \int_0^t Q(t-\tau) y(\tau) d\tau \right). \quad (2.9)$$

Тоді залежності (2.5) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \bar{E}^{-1} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \gamma_{xy} = 2(1 + \nu) \bar{E}^{-1} \left[\tau_{xy} \right], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.10)$$

Обернені залежності отримуємо зі співвідношень закону Гука для пружного ізотропного тіла, замінивши у них модуль Юнга E на інтегральний оператор \bar{E} (2.8).

При дослідженні напружено-деформованого стану в'язкопружного матеріалу звичайно використовують одну з двох альтернативних гіпотез [2]. Перша з них – гіпотеза про сталість коефіцієнта Пуассона, $\nu = \text{const}$, альтернативна гіпотеза – про сталість модуля K об'ємної деформації. Прийнявши першу гіпотезу,

замість релаксації модуля зсуву розглядаємо релаксацію модуля пружності E , тобто оператор \bar{G} замінюємо оператором $\frac{1}{2(1+\nu)}\bar{E}$.

При використанні другої гіпотези у рівностях (2.5) оператор \bar{K}^{-1} замінюємо константою $\frac{1}{K}$. Тоді вирази для деформацій набувають вигляду:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{2}\bar{G}^{-1}[\sigma_x] + \frac{\sigma}{3K} - \frac{1}{2}\bar{G}^{-1}[\sigma], \\ \gamma_{xy} = \bar{G}^{-1}[\tau_{xy}], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.11)$$

Для нестискуваного матеріалу, коли об'ємними деформаціями можна знехтувати, з (2.11) отримуємо рівності:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{2}\bar{G}^{-1}[\sigma_x - \sigma], \\ \gamma_{xy} = \bar{G}^{-1}[\tau_{xy}], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.12)$$

Для переміщень, напружень та деформацій у в'язкопружному тілі, що визначаються у квазістатичних задачах виконуються всі основні групи рівнянь теорії пружності. У формулах прямого та

оберненого законів Гука пружні характеристики K , G , E та обернені їм сталі замінюються на відповідні інтегральні оператори та обернені їм оператори. При цьому розв'язки задачі повинні задовольняти задані крайові умови, які записуються аналогічно умовам для задач дослідження напружено-деформованого стану у пружному тілі. Будемо вважати, що при $t < 0$ всі переміщення, напруження та деформації дорівнюють нулю.

Операція знаходження інтегрального оператора від функції рівносильна операції її інтегрування по змінній часу. Остання операція має переставну властивість з операціями диференціювання та інтегрування за просторовими координатами, тобто зміна порядку виконання цих операцій є коректною. З цього випливає правило розв'язання квазістатичної задачі теорії в'язкопружності – принцип Вольтерра. Його використання дозволяє для отримання розв'язків задач в'язкопружності використовувати розв'язки задач для пружних тіл. Він полягає у наступному [2, 3].

Нехай на поверхні в'язкопружного тіла задані переміщення або навантаження. Розв'яжемо відповідну задачу теорії пружності. У остаточних формулах для її розв'язків замінимо пружні сталі відповідними операторами. У подальшому для в'язкопружного тіла потрібно лише інтерпретувати отримані операторні вирази.

Якщо розв'язок пружної задачі або його частина не залежить від пружних сталих, то він є розв'язком і для в'язкопружної задачі.

Як приклад застосування принципу Вольтерра розглянемо розв'язання квазістатичної задачі в'язкопружності у напруженнях,

вважаючи, що коефіцієнт Пуассона для тіла, що досліджується, є сталим у часі, а дія масових сил відсутня. Розв'язання такої задачі для пружного тіла зводиться до інтегрування трьох диференціальних рівнянь Ламе:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u_x = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \cdot \Delta u_y = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \cdot \Delta u_z = 0. \end{cases}$$

У цих рівняннях $\theta = 3\varepsilon$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

u_x , u_y , u_z – переміщення у напрямках відповідних координатних

осей, $\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}$, $\mu = G$ – сталі Ламе.

Замінивши сталі Ламе їх виразами через модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (1-2\nu) \cdot \Delta u_x = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + (1-2\nu) \cdot \Delta u_y = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} + (1-2\nu) \cdot \Delta u_z = 0. \end{cases}$$

На основі принципу Вольтерра ці ж рівняння виконуються і для в'язкопружних тіл. Розв'язавши цю систему, отримуємо переміщення. Якщо крайові умови задані у переміщеннях, то розв'язки отриманої системи залежать лише від сталого коефіцієнта Пуассона, тобто деформований стан в'язкопружного тіла у будь-який момент часу збігається з деформованим станом пружного тіла. Напруження отримуємо, використавши закон Гука у зворотній формі для в'язкопружного тіла, де модуль Юнга E замінюється інтегральним оператором \bar{E} .

Зауважимо, що застосування принципу Вольтерра при розв'язанні квазістатичної задачі теорії в'язкопружності передбачає незмінність типу крайових умов на межі тіла, тобто у кожній точці зовнішньої поверхні тіла у будь-який момент часу задані або напруження, або переміщення.

Якщо розв'язок задачі теорії пружності містить ірраціональні або трансцендентні функції пружних сталих, то застосування принципу Вольтерра суттєво ускладнюється. Якщо при запису формул закону Гука для такого випадку використовується гіпотеза про сталість у часі коефіцієнта Пуассона, то перехід до в'язкопружного розв'язку не ускладнюється, інакше для розв'язання задачі в'язкопружності доцільно застосовувати інші методи.

2.2 Метод квазіконстантних операторів

Метод квазіконстантних операторів – це наближений метод розв’язання крайових задач для в’язкопружних тіл, що ґрунтується на використанні принципу Вольтерра [2]. Оцінка похибки методу здійснюється через малі безрозмірні параметри, які називають показниками квазіконстантності.

Інтегральний оператор вигляду

$$\bar{E}[\varphi(t)] = \int_0^t E(t-\tau) d(\varphi(\tau)) = \int_0^t E(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

де $\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}$, називають квазіконстантним оператором, якщо

виконується умова:

$$\left| \frac{tE'(t)}{E(t)} \right| = \mu(t) \leq \mu. \quad (2.14)$$

Тут безрозмірна додатна стала μ є близькою до нуля і її називають показником квазіконстантності оператора \bar{E} . Функцію $\mu(t)$ називають поточним значенням показника квазіконстантності. Цей показник легко визначити, якщо відомий вигляд ядра оператора (2.13), тобто функція релаксації

$$E(t) = E\left(1 - \int_0^t R(\tau) d\tau\right),$$

де $R(t)$ – ядро релаксації.

Використовуючи функцію релаксації, показник квазіконстантності μ можна записати у вигляді:

$$\mu = \max_{t>0} \left| \frac{t \cdot R(t)}{1 - \int_0^t R(\tau) d\tau} \right|.$$

При використанні принципу Вольтерра для переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі необхідно, замінивши пружні сталі відповідними інтегральними операторами, інтерпретувати отримані результати. Введене поняття квазіконстантності дозволяє отримати співвідношення для множення, обернення та знаходження аналітичних функцій від квазіконстантних операторів, що спрощує таку інтерпретацію. Детально методика застосування методу квазіконстантних операторів до розв'язання задач в'язкопружності розглянута у [2, 96, 97].

2.3 Застосування рядів за степенями операторів Вольтерра

Розглянемо метод знаходження розв'язків крайових квазістатичних задач теорії в'язкопружності, що використовує принцип Вольтерра та спеціальну форму запису відповідних пружних задач у вигляді рядів по степеням пружних сталих, що відповідають інтегральним операторам Вольтерра.

Сформулюємо загальну постановку крайової задачі лінійної теорії в'язкопружності для тіла, що займає область V тривимірного простору, обмеженого поверхнею S . Сюди входять рівняння рівноваги, що у векторній формі мають вигляд:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\vec{x}, t) + \vec{f}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.15)$$

геометричні формули Коші

$$2\hat{\varepsilon}(\vec{x}, t) = \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) + (\nabla \vec{u}(\vec{x}, t))^T, \quad (2.16)$$

крайові умови

$$\begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}(\vec{x}, t), \vec{x} \in S_u, \\ \hat{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x}, t), x \in S_\sigma. \end{cases} \quad (2.17)$$

Сюди входять також фізичні рівняння закону Гука:

$$\hat{\sigma}(\vec{x}, t) = \hat{E}(\vec{x}) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{x}, t) = \int_0^t \hat{E}(\vec{x}, t, \tau) d\hat{\varepsilon}(\vec{x}, \tau). \quad (2.18)$$

У рівняннях (2.15) – (2.18) використані наступні позначення: $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ – тензори напружень та деформацій з відповідними компонентами σ_{ij} , ε_{ij} , \vec{u} , \vec{f} , \vec{n} – відповідно вектори переміщень, об'ємних сил та зовнішньої одиничної нормалі до поверхні S , їх компоненти відповідно дорівнюють u_i , f_i , n_i , \vec{x} – радіус-вектор точки тіла з координатами x_i , \vec{U} – вектор переміщень, заданий на частині S_u поверхні S , \vec{p} – заданий на частині S_σ поверхні S вектор поверхневих сил з компонентами p_i , $i, j = 1, 2, 3$.

Рівняння (2.18) закону Гука записане для загального випадку неоднорідного старіючого в'язкопружного анізотропного середовища, властивості якого описуються тензором четвертого рангу функцій релаксації, аргумент τ визначається віком матеріалу.

Для однорідного нестаріючого анізотропного матеріалу співвідношення (2.18) набувають вигляду

$$\hat{\sigma}(\vec{x}, t) = \hat{R}(\vec{x}) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{x}, t) = \int_0^t \hat{R}(t - \tau) d\hat{\varepsilon}(\vec{x}, \tau). \quad (2.19)$$

У (2.19) тензор функцій релаксації $\hat{R}(t)$ у загальному випадку анізотропії містить 21 функцію релаксації, для ортотропного

матеріалу – 9 незалежних функцій, для трансверсально-ізотропного матеріалу – 5 незалежних функцій.

Однорідний нестаріючий ізотропний матеріал можна описати з допомогою двох скалярних інтегральних операторів \bar{B} і \bar{G} . У цьому випадку формули для закону Гука можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \sigma(\vec{x}, t) = \bar{B}\theta(\vec{x}, t) = \int_0^t R_B(t - \tau) d\theta(\vec{x}, \tau), \\ \hat{s}(\vec{x}, t) = 2\bar{G}\hat{e}(\vec{x}, t) = 2\int_0^t R_G(t - \tau) d\hat{e}(\vec{x}, \tau). \end{cases} \quad (2.20)$$

Тут σ – середнє напруження, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, \hat{e} – тензор, елементами якого є кутові деформації, \hat{s} – тензор дотичних напружень, θ – об'ємна деформація.

Розглянемо один з найбільш відомих методів розв'язання задач в'язкопружності, що ґрунтується на використанні принципу Вольтерра, – метод апроксимацій Ільюшина [2].

Нехай потрібно розв'язати крайову задачу (2.15)-(2.17), (2.19) для ізотропного однорідного в'язкопружного тіла з нестаріючого матеріалу з пружною об'ємною деформацією. Нехай також компоненти вектор-функцій $\vec{f}(\vec{x}, t)$, $\vec{p}(\vec{x}, t)$, $\vec{U}(\vec{x}, t)$ що характеризують зовнішню дію на тіло, можна подати у вигляді:

$$f_i(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^K F_{ik}^{(x)} F_{ik}^{(t)}, p_i(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^K P_{ik}^{(x)} P_{ik}^{(t)},$$

$$U_i(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^K V_{ik}^{(x)} V_{ik}^{(t)}.$$
(2.21)

Оскільки сформульована задача є лінійною, то для неї виконується принцип суперпозиції і розв'язок задачі у переміщеннях складається з функцій, що мають вигляд:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_h(\vec{x}, B, \bar{G}) \varphi(t).$$
(2.22)

Це переміщення відповідає лише одному з доданків у (2.21), при цьому вектор-функція \vec{u}_h – це вектор переміщень від миттєво прикладеного сталого одиничного навантаження $\varphi(t) = h(t)$, де $h(t)$ – функція Хевісайда. Розв'язок відповідної пружної задачі має вигляд:

$$\vec{u}^{(l)}(\vec{x}, t) = \vec{u}_h(\vec{x}, B, G) \varphi(t).$$
(2.23)

Введемо нову пружну безрозмірну сталу

$$\omega = \frac{2G}{3B} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}.$$
(2.24)

Константу (2.24) називають параметром Ільюшина.

Через константи B та ω можна подати всі пружні сталі, які можуть зустрітися у розв'язку пружної задачі:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1-\omega}{2+\omega}, G = \mu = \frac{3}{2}B\omega, E = \frac{9B\omega}{2+\omega}, \\ \lambda &= B(1-\omega). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Розв'язок (2.23) пружної задачі подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_i^{(l)}(\vec{x}, t) &= \left(A_1^{(u_i)}(\vec{x}, B)\omega + A_2^{(u_i)}(\vec{x}, B) + A_1^{(u_i)}(\vec{x}, B)\omega^{-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=4}^{N^{(u_i)}} \frac{A_n^{(u_i)}(\vec{x}, B)}{1 + \beta_n^{(u_i)}\omega} \right) \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тут $\beta_n^{(u_i)}$ – числові параметри.

Якщо пружний розв'язок задачі у переміщеннях неможливо точно подати у вигляді (2.26), то його потрібно апроксимувати таким виразом. Тоді коефіцієнти $A_k^{(u_i)}$ будуть параметрами апроксимації.

Введемо інтегральний оператор

$$\bar{\omega} = \frac{2\bar{G}}{3B}. \quad (2.27)$$

Обернений до нього оператор має вигляд:

$$\bar{\omega}^{-1} = \frac{3B}{2} \bar{G}^{-1}. \quad (2.28)$$

Оператор

$$\bar{g}_{\beta_n} = (1 + \beta_n \bar{\omega})^{-1} = \int_0^t g_{\beta_n}(t - \tau) d\varphi(\tau) \quad (2.29)$$

називають оператором зв'язної повзучості, а його ядро – функцією зв'язної повзучості. Це ядро можна визначити аналітично або наближено [2]. Розв'язок задачі в'язкопружності у переміщеннях отримаємо, замінивши у пружному розв'язку (2.26) всі пружні сталі ω на оператори $\bar{\omega}$ та використавши оператор $\bar{g}_{\beta_n} = (1 + \beta_n \bar{\omega})^{-1}$. Маємо наступні вирази для переміщень $u_i(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} u_i^{(l)}(\vec{x}, t) = & \left(A_1^{(u_i)}(\vec{x}) \bar{\omega} + A_2^{(u_i)}(\vec{x}) + A_3^{(u_i)}(\vec{x}) \bar{\omega}^{-1} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=4}^{N^{(u_i)}} A_n^{(u_i)}(\vec{x}) \bar{g}_{\beta_n^{(u_i)}} \right) \varphi(t) = A_1^{(u_i)}(\vec{x}) \cdot \frac{2}{3B} \int_0^t \Gamma_G(t - \tau) d\varphi(\tau) + \\ & + A_2^{(u_i)}(\vec{x}) \varphi(t) + A_3^{(u_i)}(\vec{x}) \cdot \frac{3B}{2} \int_0^t \Pi_G(t - \tau) d\varphi(\tau) + \\ & + \sum_{n=4}^{N^{(u_i)}} A_n^{(u_i)}(\vec{x}) \int_0^t g_{\beta_n^{(u_i)}}(t - \tau) d\varphi(\tau). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тут $\Gamma_G(t)$, $\Pi_G(t)$ – відповідно функції релаксації та повзучості оператора зсуву \bar{G} .

Визначимо ядро $g_{\beta_n}(t)$ оператора \bar{g}_{β_n} :

$$\bar{g}_{\beta_n} = (1 + \beta_n \bar{\omega})^{-1} \varphi(t). \quad (2.31)$$

Застосуємо до обох частин рівності (2.31) оператор $1 + \beta_n \bar{\omega}$.

Отримаємо наступну рівність:

$$\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t) + \beta_n \bar{\omega} [\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t)] = \varphi(t).$$

Останнє рівняння подамо у вигляді:

$$\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t) + \beta_n \bar{\omega} [\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t)] - \beta_n \bar{\omega} \int_0^t R_G(t-\tau) \bar{g}_{\beta_n} \varphi(\tau) d\tau = \varphi(t).$$

Звідси отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого типу відносно функції $\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t)$:

$$\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t) - \frac{\beta_n \bar{\omega}}{1 + \beta_n \bar{\omega}} \int_0^t R_G(t-\tau) \bar{g}_{\beta_n} \varphi(\tau) d\tau = \frac{\varphi(t)}{1 + \beta_n \bar{\omega}}. \quad (2.32)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (2.32) має вигляд [2]:

$$\bar{g}_{\beta_n} \varphi(t) = \frac{\varphi(t)}{1 + \beta_n \omega} + \int_0^t K_G(t - \tau) \frac{\varphi(\tau)}{1 + \beta_n \omega} d\tau. \quad (2.33)$$

Тут функція $K_G(t)$ – резольвента ядра $\frac{\beta_n \omega}{1 + \beta_n \omega} \Gamma_G(t)$.

Прийнявши у рівності (2.33) $\varphi(t) = h(t)$, отримуємо функцію зв'язної повзучості у вигляді:

$$g_{\beta_n}(t) = \frac{1}{1 + \beta_n \omega} \left(1 + \int_0^t K_G(\tau) d\tau \right). \quad (2.34)$$

Розглянемо крайову задачу (2.15) – (2.17) для однорідного ізотропного тіла, де співвідношення (2.20) набувають вигляду

$$\sigma = B\theta, \hat{s} = 2G\hat{e}. \quad (2.35)$$

У переміщеннях ця задача зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь Ламе з невідомим вектором переміщень \vec{u} :

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \Delta \vec{u} + \frac{1}{G} \vec{f} = 0. \quad (2.36)$$

Крайові умови (2.17) запишемо у вигляді:

$$\vec{u} = \vec{U}, \vec{x} \in S_u, \quad (2.37)$$

$$\vec{n} \cdot \left(2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right) \right) = \vec{p}, \vec{x} \in S_\sigma, \quad (2.38)$$

Визначимо переміщення точок тіла у вигляді ряду по степеням параметра Ільюшина. Для цього запишемо крайову задачу (2.36) – (2.38) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \frac{3}{2} \Delta \vec{u} = -\frac{1}{B\omega_0} \vec{f} + \\ & + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \left(\frac{1}{2} \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \frac{3}{2} \Delta \vec{u} \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\vec{u} = \vec{U}, \vec{x} \in S_u, \quad (2.40)$$

$$\vec{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \theta \hat{E} + 3\hat{\varepsilon} \right) = \frac{\vec{p}}{B\omega_0} + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \vec{n} (3\hat{\varepsilon} - \theta \hat{E}), x \in S_\sigma. \quad (2.41)$$

Розв'язок задачі (2.39)-(2.41) шукаємо у вигляді:

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^n \vec{v}^{(n)}. \quad (2.42)$$

Для того, щоб визначити невідомі функції $\vec{v}^{(n)}$, підставимо ряд (2.42) у (2.39)-(2.41) і прирівняємо коефіцієнти при однакових

степенях $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)$. Отримуємо рекурентну послідовність крайових

задач:

$$\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2}\right) \text{grad}(\text{div } \vec{v}^{(0)}) + \frac{3}{2} \Delta \vec{v}^{(0)} = -\frac{1}{B\omega_0} \vec{f},$$

$$\vec{v}^{(0)} = \vec{U}, \vec{x} \in S_u,$$

$$\vec{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \theta^{(0)} \hat{E} + 3\hat{\varepsilon}^{(0)} \right) = \frac{\vec{p}}{B\omega_0}, x \in S_\sigma,$$

$$\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2}\right) \text{grad}(\text{div } \vec{v}^{(k)}) + \frac{3}{2} \Delta \vec{v}^{(k)} = -\frac{1}{2} \text{grad}(\text{div } \vec{v}^{(k-1)}) -$$

$$-\frac{3}{2} \Delta \vec{v}^{(k-1)},$$

$$\vec{v}^{(k)} = \vec{0}, \vec{x} \in S_u,$$

$$\vec{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \theta^{(k)} \hat{E} + 3\hat{\varepsilon}^{(k)} \right) = -\vec{n} \left(3\hat{\varepsilon}^{(k-1)} - \theta^{(k-1)} \hat{E} \right), x \in S_\sigma. \quad (2.43)$$

Розв'язавши рекурентну послідовність крайових задач (2.43), отримуємо послідовність вектор-функцій $\vec{v}^{(0)}, \dots, \vec{v}^{(k)}$. Підставивши їх у k -у частинну суму ряду (2.42), отримаємо наближений розв'язок крайової задачі для пружного тіла. Застосувавши принцип Вольтерра, отримуємо розв'язок аналогічної задачі для в'язкопружного тіла.

2.4 Методи інтегральних перетворень

При визначенні компонентів напружено-деформованого стану композитів широко застосовують операційний метод, що ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лапласа [98, 99].

Розглянемо це перетворення та його основні властивості.

Функцією-оригіналом або оригіналом називають функцію дійсної змінної $f(t)$, яка задовольняє такі умови:

1) функція $f(t)$ неперервна або кусково-неперервна, тобто функція $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) існують такі сталі $M > 0$, $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ (величину $s_0 = \inf s$ називають показником зростання функції $f(t)$).

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається рівністю

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.44)$$

Інтеграл, що знаходиться у правій частині формули (2.44), називають інтегралом Лапласа. Цей інтеграл залежить від параметра p . Функцію $F(p)$ називають також лапласовим зображенням функції $f(t)$.

Твердження, що $F(p)$ є зображенням $f(t)$, символічно записують у наступному вигляді:

$$F(p) \div f(t), f(t) \div F(p).$$

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ називають перетворення, що ставить у відповідність функції дійсної змінної $f(t)$ функцію комплексної змінної $F(p)$ за формулою (2.44).

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал з показником зростання s_0 , то функція $F(p)$ визначена у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і є аналітичною в цій півплощині.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хевісайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При застосуванні перетворення Лапласа під заданою за допомогою аналітичної формули функцією $f(t)$ розумітимемо функцію $f(t) \cdot \eta(t)$, тобто будемо вважати, що $f(t) = 0$ при $t < 0$. Це виправдано, коли змінна t – це час.

Виходячи з означення зображення, можна довести, що $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$,

тобто зображенням $f(t) = 1$ є функція $\frac{1}{p}$.

Розглянемо основні властивості перетворення Лапласа.

1. Властивість лінійності. Якщо $f_i(t) \doteq F_i(p)$, $\alpha_i \in C$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p).$$

2. Властивість подібності. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Властивість запізнення. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\tau \in R$, $\tau > 0$, то

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

Цю властивість зручно використовувати при знаходженні зображень функцій, які на різних проміжках задаються різними аналітичними виразами.

4. Властивість зміщення. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\alpha \in C$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \div F(p + \alpha).$$

5. Правило диференціювання оригіналу. Якщо функції $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами і $f(t) \div F(p)$, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \div p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, якщо $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p).$$

6. Диференціювання зображення. Якщо $F(p) \div f(t)$, то

$$F'(p) \div -tf(t),$$

$$F''(p) \div t^2 f(t),$$

$$F'''(p) \div -t^3 f(t),$$

.....

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Останню формулу подамо у вигляді:

$$t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p).$$

7. Інтегрування оригіналу. Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

8. Інтегрування зображення. Якщо $F(p) \div f(t)$ і $\int_p^{+\infty} F(p) dp$ збігається,

то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{+\infty} F(p) dp.$$

9. Множення зображень. Якщо $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$ то

$$f_1(t) \circ f_2(t) \div F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Тут вираз

$$f_1(t) \circ f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

називають згорткою функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

Ці властивості широко використовуються при знаходженні оригіналів та зображень у операційному численні.

У багатьох випадках задане зображення можна перетворити до такого вигляду, коли оригінал легко визначається безпосередньо з використанням властивостей перетворення Лапласа та таблиці зображень. Наведемо деякі методи знаходження оригіналу за заданим зображенням.

Розглянемо знаходження оригіналу $f(t)$ за зображенням $F(p)$, що є правильним раціональним дробом, тобто $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де

$P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n відповідно, причому $m < n$.

Розкладаємо задане зображення на суму найпростіших дробів

$$\frac{A}{p-a}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Bp+C}{p^2+\alpha p+\beta}, \frac{Bp+C}{(p^2+\alpha p+\beta)^k}.$$

Для кожного з дробів знаходимо оригінал, користуючись властивостями перетворення Лапласа. Далі, використовуючи лінійність перетворення Лапласа, знаходимо шуканий оригінал $f(t)$.

Розглянемо спосіб знаходження оригіналу для зображення вигляду $F_1(p) \cdot F_2(p)$.

Знаходимо оригінали $f_1(t)$, $f_2(t)$ для зображень $F_1(p)$, $F_2(p)$, тобто $F_1(p) \div f_1(t)$, $F_2(p) \div f_2(t)$.

Обчислюємо згортку функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$:

$$f_1(t) \circ f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau.$$

Далі використовуємо правило множення зображень:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) \cdot f_2(t).$$

Знайдемо оригінал для зображення вигляду $F(p) = R(p)e^{-p\tau}$, де $R(p)$ – правильний раціональний дріб і $\tau > 0$.

Знаходимо оригінал $r(t)$ за його зображенням $R(p)$. Далі використовуємо теорему запізнення

Розглянемо теорему обернення перетворення Лапласа – найбільш загальний спосіб знаходження оригіналу за відомим зображенням.

Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання s_0 й $F(p)$ – її зображення, то у будь-якій точці неперервності функції $f(t)$ вона виражається через $F(p)$ за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-j\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (2.45)$$

де інтеграл береться по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і розглядається як головне значення, тобто

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

У точках розриву оригіналу $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)]$.

Формулу (2.45) називають формулою обернення Рімана-Мелліна. Вона визначає обернене перетворення Лапласа.

Відшукування оригіналів безпосередньо за формулою (2.45) є доволі складною задачею. Тому на практиці звичайно користуються наслідками з теореми обернення – так званими теоремами розкладу.

Розглянемо першу теорему розкладу та її застосування.

Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у нескінченно віддаленій точці, $F(\infty) = 0$ і у деякому околі цієї точки її розвинення в ряд за степенями $1/p$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функція $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ є оригіналом, що відповідає зображенню $F(p)$.

Для знаходження оригіналів раціональних зображень часто використовують другу теорему розкладу.

Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів p_1, p_2, \dots, p_n , що лежать у скінченній частині комплексної площини, то відповідний оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $F(p)e^{pt}$, що обчислені в усіх полюсах p_k функції $F(p)$, тобто

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res} [F(p)e^{pt}, p_k]. \quad (2.46)$$

Особливе значення для практики знаходження ядер релаксації в'язкопружних композитів є обернене перетворення дробово-раціональних функцій, тобто функцій вигляду $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де

$P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n відповідно, причому $m < n$, p_1, p_2, \dots, p_r – корені многочлена $Q_n(p)$ з кратностями l_1, l_2, \dots, l_r , де $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$.

На основі відомої формули для обчислення лишку функції $\varphi(z)$ у полюсі z_0 порядку n

$$\text{res} \varphi(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{l_k-1}}{dz^{l_k-1}} [(z - z_0)^n \varphi(z)],$$

з (2.46) отримуємо:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} \left[(p - p_k)^{l_k} e^{pt} F(p) \right], \quad (2.47)$$

де підсумовування виконується по усіх полюсах p_k зображення $F(p)$, тобто по усіх нулях многочлена $Q_n(p)$.

Якщо усі полюси p_k прості, то формула (2.47) набуває спрощеного вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left[(p - p_k) e^{pt} F(p) \right]. \quad (2.48)$$

Розглянемо застосування перетворення Лапласа до розв'язання рівняння Вольтерра першого та другого роду.

До інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду типу згортки відноситься рівняння виду

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt, \quad (2.49)$$

з ядром $K(x,t)$, яке залежить від різниці аргументів $x-t$, причому $f(x)$, $K(x-t)$ – задані функції, $\varphi(x)$ – шукана. Цей тип рівнянь називають рівняннями типу згортки.

Знайдемо зображення функцій $f(x)$, $K(x)$, $\varphi(x)$ по Лапласу.

Нехай $\varphi(x) \div \Phi(p)$, $f(x) \div F(p)$, $K(x) \div L(p)$.

Оскільки інтеграл у правій частині формули (2.49) є згорткою оригіналів $K(x)$, $\varphi(x)$, то за правилом множення зображень

$$K(x) \circ \varphi(x) \div L(p) \cdot \Phi(p).$$

Отже, інтегральному рівнянню (2.49) буде відповідати операторне рівняння

$$\Phi(p) = F(p) + L(p) \cdot \Phi(p).$$

Звідси знаходимо зображення невідомої функції у вигляді:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}.$$

Знайшовши оригінал $\varphi(x)$, який відповідає цьому зображенню, отримаємо розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра типу згортки.

При розв'язанні крайових задач теорії в'язкопружності у багатьох випадках зустрічаємо рівняння, що містять функції релаксації вигляду

$$\bar{R}(\varepsilon(t)) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon. \quad (2.50)$$

Функцію $\varphi(t)$, що визначається рівністю

$$\varphi(t) = \int_0^t \xi(t-\tau) d\eta(\tau),$$

називають згорткою Стілтєса функцій $\xi(t)$ та $\eta(t)$.

Отже, функція релаксації є згорткою Стілтєса ядра релаксації $R(t)$ та деформації $\varepsilon(t)$. Рівняння теорії в'язкопружності, що містять згортку Стілтєса, зручно розв'язувати, використовуючи замість перетворення Лапласа перетворення Лапласа-Карсона [2].

$$\tilde{f}(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.51)$$

Для перетворення Лапласа-Карсона теорема про зображення згортки має наступний вигляд. Якщо функція $\varphi(t)$ є згорткою Стілтєса функцій $\xi(t)$ та $\eta(t)$, то її зображення дорівнює добутку зображень функцій $\xi(t)$ та $\eta(t)$: $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\xi}(p) \cdot \tilde{\eta}(p)$.

Використання теорем про зображення згортки для перетворень Лапласа та Лапласа-Карсона дозволяє розв'язувати задачі

в'язкопружності нестаріючих матеріалів з різницеvimи ядрами в'язкопружних операторів. Після застосування відповідного інтегрального перетворення отримуємо систему рівнянь, що за виглядом відповідає системі для аналогічної задачі теорії пружності. Отже, розв'язки задачі теорії пружності – напруження, переміщення та деформації є зображеннями відповідних розв'язків задач теорії в'язкопружності. Для знаходження оригіналів цих розв'язків потрібно виконати обернене інтегральне перетворення.

Застосування операційного методу для розв'язування інтегральних рівнянь теорії в'язкопружності має обмеження, пов'язані з типом ядра в'язкопружного інтегрального оператора. Цей метод не можна застосовувати у випадках, коли межі в'язкопружного тіла змінюються з часом або його фізичні властивості залежать від моменту початку дії навантаження.

Значні труднощі при знаходженні оригіналу викликає реалізація оберненого перетворення Лапласа, що викликає необхідність застосування наближених або чисельних методів знаходження оригіналу за відомим зображенням.

3. Задача визначення ефективних характеристик композитів

3.1 Основні поняття теорії композиційних матеріалів

Композиційними матеріалами, або композитами, називають матеріали, що характеризуються наявністю наступних ознак: не зустрічаються у природі; складаються з двох та більше компонентів, відмінних за хімічним складом та розділених вираженою межею; мають нові властивості порівняно із властивостями складових компонентів; є неоднорідними в мікромасштабі й однорідними в макромасштабі; склад, форма та розподіл їх компонентів є визначеними заздалегідь; їх властивості визначаються кожним із компонентів, котрі повинні бути у матеріалі в достатньо великих кількостях [148].

Складову композиту, неперервну у всьому об'ємі композиційного матеріалу, називають матрицею, а складову, роз'єднану у об'ємі композиції, – арматурою або армуючим елементом.

Існує кілька систем класифікації композиційних матеріалів, що ґрунтуються на різних ознаках. До таких ознак належать матеріал матриці та матеріал армуючих волокон, структура, розташування і геометрія компонентів.

У залежності від геометрії армуючих елементів та їх взаємного розміщення композити бувають ізотропними та анізотропними.

Перші мають однакові властивості за всіма напрямками, другі залежать від напрямку. До макроскопічних ізотропних композитів відносяться дисперсно-зміцнені сплави, псевдосплави та хаотично армовані матеріали, до анізотропних композитів – матеріали, у яких волокна орієнтовані у певних напрямках. У деяких випадках хаотично армовані композити зміцнюються короткими (дискретними) частинками голчастої форми (відрідками волокон), орієнтованими в просторі випадковим чином. При цьому отримуємо матеріал, що за своїми властивостями є квазіізотропним, тобто анізотропним в мікрооб'ємах, але ізотропним в об'ємі всього виробу.

Анізотропію композитів, спроектовану заздалегідь з метою застосування для виготовлення певних конструкцій, називають конструкційною. Існує технологічна анізотропія, що виникає при пластичній деформації ізотропних матеріалів, та фізична, притаманна кристалам та пов'язана з особливостями будови їхньої кристалічної решітки. Зазвичай в техніці використовуються анізотропні композиційні матеріали з певною симетрією властивостей.

Ортотропні (ортогонально анізотропні) матеріали характеризуються наявністю у кожному елементарному об'ємі трьох взаємно перпендикулярних площин симетрії для властивостей цих матеріалів. До таких матеріалів відносяться композити, армовані послідовно шарами волокон в двох взаємно перпендикулярних напрямках та тканинами з поздовжньо-поперечним укладанням, а також шаруваті композиційні матеріали, армовані в двох не

ортогональних напрямках x'_1 та x'_2 з правильним чергуванням шарів. В останньому випадку площиною симетрії є серединна площина листа та дві площини, що перпендикулярні до неї та проходять через бісектриси кутів, утворених осями x'_1 та x'_2 .

У техніці часто застосовують шаруваті композиційні матеріали, які складаються з почергових шарів двох металевих сплавів, що мають каркасну будову.

Іноді композиційні матеріали розділяють за призначенням, але оскільки одні й ті самі композити можуть мати різне призначення, то цей принцип класифікації використовують рідко. Повна характеристика композитів повинна містити усі вказані ознаки, на практиці ж зазвичай використовують одну або дві з них.

Загальна назва композиційних матеріалів, як правило, походить від матеріалу матриці. Тут розрізняють металеві композити, полімерні композити, неорганічні композиційні матеріали. Композити, що містять два або більше різних за складом чи природою матричні матеріали, називають поліматричними.

Характеристика композитів за матеріалом матриці та армуючих елементів вказує на їх природу. Назва полімерних композиційних матеріалів складається зазвичай з двох частин: в першій – вказується матеріал волокна, у другій – слово «пластик» чи «волокніт», наприклад, склопластики або скловолокнітами, металопластики (металоволокніти), органоластики (органоволокніти),

борнопластики (борноволокніти), вуглепластики, азбопластики (азбестоволокніти).

Для металевих та неорганічних композитів поки що немає чітко встановленої системи позначень. Частіше за інші використовується подвійне позначення: спочатку пишуть матеріал матриці, потім – матеріал волокна. Наприклад, позначення мідь – вольфрам відноситься до композитів з мідною матрицею й вольфрамовими волокнами. Однак у літературі використовують й інші позначення: складне слово, в першій частині якого вказується матеріал волокна, а в другій – матриці (наприклад, бороалюміній, углеалюміній та інші).

Композиційні матеріали, що містять два або більше різних за складом чи природою типи армуючих елементів, називають поліармуючими. Поліармуючі композити поділяються на прості, якщо армуючі елементи мають різну природу, але однакову геометрію, та комбіновані, якщо армуючі елементи мають різну як природу, так і геометрію.

Згідно з геометрією армуючих матеріалів (порошки чи гранули, волокна, пластини) композити поділяються на порошкові (гранульовані), волокнисті й пластинчасті.

До першої групи відносяться матеріали типу псевдосплавів та інші композиції, отримані з сумішей різноманітних порошків. До другої – композити, армовані неперервними та дискретними волокнами (наприклад, композиції алюміній – борні волокна, склопластики), до третьої – армовані неперервними та дискретними пластинами

(наприклад, шаруваті композиційні матеріали, що являють собою набір фольги зі сталі, алюмінію та титану, що чергуються між собою.

Згідно з класифікацією композитів за структурою та розміщенням їх компонентів, вони поділяються на групи з каркасною, матричною, шаруватою та комбінованою структурою.

Композити з матричною структурою можуть бути армовані елементами, що містять хаотичну орієнтацію у просторі (дисперсними включеннями, дискретними та неперервними волокнами). В такому випадку матеріал є ізотропним або квазіізотропним.

Композити з матричною структурою, зміцнені армуючими елементами, орієнтовані певним чином у просторі, відносяться до впорядковано-армованих. Вони підрозділяються на одновісно армовані чи однонаправлені (з розміщенням волокна вздовж однієї осі), двохвісно армовані (з площинним розміщенням арматури) та трьохвісно армовані (з об'ємним розміщенням арматури).

Волокна використовують як арматуру композитів. Вони повинні мати невелику щільність, високу міцність у всьому інтервалі робочих температур, технологічністю, мінімальною розчинністю в матриці, високою хімічною стійкістю, відсутністю фазових перетворень в зоні робочих температур та бути нетоксичними при виготовленні та експлуатації. Для армування використовують металевий дріт, неорганічні та органічні волокна.

Високоміцний металевий дріт зі сталі, вольфраму, молібдену та інших металів, хоча й має велику щільність та меншу міцність, ніж

нанокомпозити, завдяки своїй технологічності, широкій доступності, порівняно невисокій вартості, часто використовується в якості арматури. Полікристалічні неорганічні волокна, як і металевий дріт, випускаються промисловістю у великій кількості. Їхнім недоліком є висока чутливість до механічних пошкоджень, проте мала щільність, висока міцність, хімічна стійкість вуглеводних дозволяють широко використовувати їх для армування полімерних матриць.

Роль матриці в армуванні композитів полягає у наданні виробу необхідної форми та створенні монолітного матеріалу. Поєднуючи в єдине ціле численні волокна, матриця дозволяє композиції сприймати різноманітного роду зовнішні навантаження, розтягнення (як у напрямку армування, так і перпендикулярно до нього), стиснення, вигин, зсув тощо. В той же час матриця повинна приймати участь в створенні несучої здатності композиції, забезпечуючи передачу зусиль на волокна.

За рахунок пластичності матриці здійснюється також передача зусиль від зруйнованих чи дискретних (коротких) волокон до сусідніх волокон та зменшення концентрації напружень поблизу різноманітних дефектів. Матриця слугує також захисним покриттям, що оберігає волокна від металевих пошкоджень та окиснення.

3.2 Пружні характеристики ізотропних та трансверсально-ізотропних матеріалів

В цілому композит можна представити як матеріал з анізотропними властивостями. Зв'язок між напруженнями та деформаціями для анізотропного матеріалу описується узагальненим законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, ε_{kl} – компоненти тензора деформацій, C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей.

Таким чином, для описання пружних властивостей композиційного матеріалу необхідно знати 81 компоненту тензора C_{ijkl} . Різних компонент для анізотропного матеріалу залишається всього 21 [147], якщо враховувати, що коефіцієнти тензора пружних сталей мають симетрію відносно індексів i, j, k, l :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jilk}. \quad (3.2)$$

Волокнистий композиційний матеріал являє собою односпрямований армований шар (рис. 3.1).

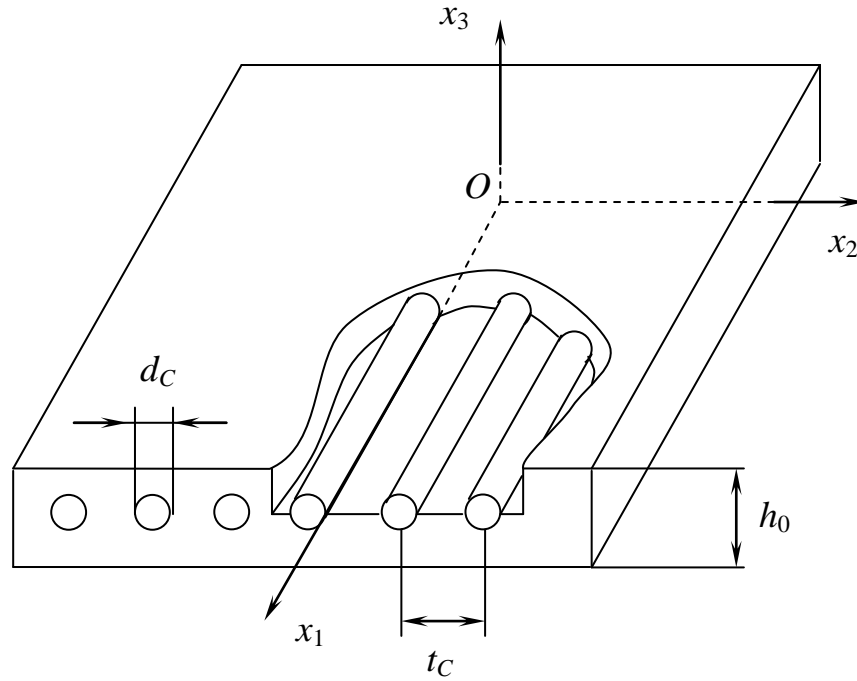


Рис. 3.1 – Елементарний односпрямований армований шар

Його можна розглядати як ортотропне середовище, що визначається 9 незалежними пружними сталими.

Для ортотропного матеріалу закон Гука запишеться у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{23} = a_{44}\sigma_{23},$$

$$\varepsilon_{13} = a_{55}\sigma_{13},$$

$$\varepsilon_{12} = a_{66}\sigma_{12}, \quad (3.3)$$

де a_{ij} – компоненти тензора податливості.

Якщо перейти від компонентів тензора податливості до технічних сталих, то рівняння (3.3) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\ \frac{\nu_{21}}{E_2} &= \frac{\nu_{12}}{E_1}, \\ \frac{\nu_{31}}{E_3} &= \frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ \frac{\nu_{32}}{E_3} &= \frac{\nu_{23}}{E_2},\end{aligned}\tag{3.4}$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності в напрямі осей x_1, x_2, x_3 ; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву в площинах x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2 ; ν_{ij}

$i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) – коефіцієнти Пуассона, котрі характеризують поперечне стискання при розтягненні в напрямі осей координат (визначають скорочення в напрямку осі x_j (другий індекс) при розтягненні вздовж осі x_i (перший індекс)).

Враховуючи напрям армування (рис.3.1), E_1 називають поздовжнім модулем пружності, а E_2, E_3 – поперечними модулями пружності, аналогічно модулі G_{13}, G_{12} називають модулями поздовжнього зсуву, G_{23} – модулем поперечного зсуву.

Якщо припустити, що частота армування волокнами достатньо велика, то армований шар можна вважати трансверсально-ізотропним із площиною ізотропії x_2Ox_3 . Тоді співвідношення (3.4) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} - \nu_{23} \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (-\nu_{23} \sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\ \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}, \\ G_{13} &= G_{12}, \\ \nu_{23} &= \frac{E_2}{2G_{23}} - 1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Таким чином, для визначення пружних характеристик композиційного шару необхідно знайти 5 незалежних величин E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , ν_{12} .

3.3 Задача гомогенізації композитів

При розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для конструкцій із волокнистих композитів виникає необхідність створення математичних моделей, які б описували геометрію та розташування кожного волокна у конструкції. Враховуючи, що частота армування волокнами досить велика, це приводить до громіздких математичних співвідношень, використовувати які досить проблематично. Тому, як правило, така проблема вирішується послідовним розв'язанням двох задач. Перша задача полягає в гомогенізації волокнистого композита, тобто неоднорідний композиційний матеріал представляється моделлю однорідного

анізотропного матеріалу, характеристики якого залежать від характеристик компонентів композита. Друга задача полягає в розв'язанні задачі механіки для моделі однорідного анізотропного матеріалу.

До визначення пружних характеристик композиційного матеріалу за пружними характеристиками його складових існує два альтернативних підходи.

Згідно з першим підходом, експериментально досліджується певний структурний елемент композита, який містить достатньо велику кількість армуючих частинок, щоб результати, отримані для нього, можна було б узагальнити на будь-який об'єм композиційного матеріалу. Застосування такого підходу дозволяє врахувати зміну пружних властивостей матриці й армуючих волокон в процесі виготовлення композита. З іншого боку, для отримання композита з необхідними властивостями доводиться проводити велику кількість експериментів, варіюючи різними параметрами – такими, як об'ємний вміст арматури, характер розташування армуючих елементів, застосування різних матеріалів для матриці та армуючих волокон.

Альтернативний структурний підхід передбачає визначення пружних характеристик композита через пружні характеристики матриці та армуючих волокон, їх об'ємні частки в композиті, розміри та взаємне розташування армуючих елементів. Суттєвим недоліком такого підходу є те, що пружні характеристики структурних

складових можуть значно відрізнятися у вихідному стані і в композиті.

Основними тенденціями при визначенні механічних характеристик композиційних матеріалів на сьогодні є спроби врахування особливих властивостей матеріалів матриці та волокна (анізотропії, в'язкопружності, температурного розширення, пластичності, слабкої стисливості та інших) та особливостей сумісного деформування матриці та волокна (контакту матеріалу матриці з матеріалом волокна, особливостей зчеплення між ними, наявності перехідного шару між матеріалами, дифузії, наявності пошкоджень тощо).

Врахування зазначених особливостей приводить до створення громіздких математичних моделей, застосовувати до яких аналітичні методи, як правило, не вдається. При застосуванні цих моделей використовують наближені методи (асимптотичні, чисельні), котрі, як правило, дають не аналітичні співвідношення, а числові значення механічних характеристик.

Так, широкого застосування при визначенні ефективних механічних характеристик набули асимптотичні підходи. Тут можна відзначити наступні дослідження. Основи варіаційного асимптотичного методу (VAMUCH) для визначення властивостей композитів, у тому числі й волокнистих, викладені в роботах W. Yu. і T. Tang [230, 231, 242, 243]. Так, у монографії [231] наведено підходи до визначення пружно-пластичних, електромагнітопружних та інших властивостей композитів за допомогою варіаційного асимптотичного

методу. Із зазначенням про періодичність армування як малий параметр, була сформульована варіаційна постановка для елементарної комірки гомогенізації за допомогою асимптотичного розкладання функціонала енергії. Для отримання чисельних результатів використовувався метод скінченних елементів, у результаті були визначені локальні поля в границях елементарної комірки, на основі яких можна відновити глобальну поведінку матеріалу. Перевагами методу є те, що за його допомогою визначаються властивості матеріалу за всіма напрямками одночасно в результаті розв'язання однієї задачі.

У статті [243] описане застосування варіаційного асимптотичного метода для елементарної комірки гомогенізації для дослідження ефективних властивостей волокнистого композиційного матеріалу, а також напружено-деформованих полів на мікрорівні. У дослідженні W. Yu, T. Tang [242] цей же метод використано для прогнозування ефективних термопружних властивостей композиційного матеріалу. На основі розробленої моделі та з використанням методу скінченних елементів отримані термопружні характеристики композита зі сферичними включеннями та композита с волокнами круглого й квадратного перетину. Інша стаття T. Tang, W. Yu [230] також присвячена подібній тематиці – застосуванню варіаційного асимптотичного методу до визначення термопружних характеристик та характеристик теплопровідності бінарного композита, композита зі сферичними та циліндричними включеннями.

Цикл робіт [179, 180, 184, 187, 200] присвячено застосуванню методів гомогенізації для визначення механічних характеристик композитів різної структури. Так, у статті R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, F. J. Sabina [180] розглянуто двофазний волокнистий композит періодичної структури з компонентами, що мають поперечну ізотропію. Отримані ефективні властивості цього композита з гексагональною структурою армування асимптотичним методом гомогенізації. У статті Rodríguez-Ramosa R., F. J. Sabina, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero [179] також розглянуто отримання ефективних характеристик аналогічного композита, але з прямокутною (тетрагональною) структурою армування.

Робота S. Kari, H. Berger, U. Gabbert, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos [187] присвячена застосуванню методу гомогенізації до розробки математичної моделі трифазного (включення, матриця та міжфазний шар) композиційного матеріалу. З використанням цієї моделі на основі двох методів – асимптотичного та методу скінченних елементів – отримані чисельні результати для ефективних характеристик композиційного матеріалу з випадково розподіленими сферичними включеннями та композиційного матеріалу з випадково розподіленими односпрямованими волокнами. В статті R. Guinovart-Díaz, J. C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, M. Ramírez, H. Camacho-Montes, F. J. Sabina [200] для волокнистого композита з паралелограмовидною структурою армування за допомогою асимптотичного методу гомогенізації

отримані співвідношення для визначення ефективних характеристик композита з циліндричними включеннями круглої форми (від абсолютно жорстких до порожнистих).

Робота J. C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, J. A. Otero, F. J. Sabina, F. Lebon., S. Dumont, I. Sevostianov [184] присвячена застосуванню асимптотичного методу гомогенізації до комірки у вигляді паралелограма для обчислення ефективних пружних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею й волокнами.

В серії робіт [58-60] показано застосування методу асимптотичного осереднення до визначення пружних сталих волокнистого і тканинного композита. Так, у роботі Ю. І. Димитрієнка, А. П. Соколова [60] викладені основи методу асимптотичного осереднення (методу Бахвалова-Побєдрі) для задач теорії пружності, а також основи методу скінченних елементів для розв'язання локальних задач теорії пружності на «комірці періодичності» та розрахунку ефективних пружних характеристик композитів. Надані варіаційні формулювання задач теорії пружності та задач на «комірці періодичності». Наведені приклади чисельних розв'язків локальних задач та результати моделювання полів мікронапружень для різних типів композиційних матеріалів: односпрямовано-армованих, просторово-ортогонально-армованих та інших.

Розвиток методу асимптотичного осереднення періодичних структур на випадок багаторівневих ієрархічних структур для визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів надано в статті Ю. І. Дмитрієнка, А. П. Соколова [59]. Сформульовані рекурентні послідовності локальних та осереднених задач теорії пружності на комірках періодичності різних структурних рівнів. Наведено приклади скінченно-елементних розв'язків серії локальних задач для моделі дворівневої структури тканинного композиційного матеріалу. Робота Ю. І. Дмитрієнка, А. П. Соколова [58] також присвячена розширенню методу асимптотичного осереднення періодичних структур на випадок багаторівневих ієрархічних структур. Запропоновано метод обчислення міцнісних властивостей композиційного матеріалу за міцнісними властивостями його компонентів. На основі методу скінченних елементів проведено розрахунок на міцність тканинного композиційного матеріалу.

Використовуючи підхід асимптотичної гомогенізації у статті W. J. Parnell, I. D. Abrahams [219] отримані ефективні пружні сталі матеріалу для дослідження процесів поширення хвиль у композиті. Запропоновані співвідношення знайдені за допомогою розкладань, що швидко збігаються, в системі двоякоперіодичних функцій для волокон круглого та еліптичного перетину.

Для регулярних неоднорідних структур, у тому числі волокнистих композитів, математичне моделювання їх фізико-механічної поведінки здійснюється рівняннями з швидко

осцилюючими коефіцієнтами [10, 12]. Використання таких рівнянь для чисельного розв'язання задач є досить проблематичним навіть за наявності сучасної комп'ютерної техніки. Тому за допомогою розкладання визначальних функцій за малим параметром (розміром комірки періодичності тощо) асимптотичним методом осереднення будуються простіші рівняння з осередненими коефіцієнтами, які й використовуються для розв'язання низки задач.

Асимптотичний підхід до визначення пружних та в'язкопружних характеристик волокнистого композита на комірці періодичності використано в роботі [21]. Застосовано розкладання шуканої функції за малим параметром (відношення розміру комірки періодичності до лінійного розміру всього зразка) для визначення фізико-механічних характеристик (коефіцієнти теплопровідності, дифузії, електропровідності тощо) волокнистих та зернистих композитів.

Застосування статистичних та ймовірнісних підходів при розв'язанні задачі гомогенізації композиційних матеріалів описане в нижченаведених роботах. Значний обсяг досліджень в напрямку визначення ефективних механічних характеристик композитів, у тому числі односпрямованих неперервно-волокнистих, проведено під керівництвом О. М. Гузя колективом вчених Л. П. Хорошуном, Б. П. Масловим, О. М. Шикуюлою, Назаренко Л. В. Ці дослідження узагальнено в монографії [108]. Охарактеризовано основні методи знаходження та отримано співвідношення для ефективних механічних характеристик у випадку транслопних властивостей

волокна, в'язкопружних властивостей компонентів та нелінійності деформування волокнистого композита стохастичної структури.

У монографії Y. W. Kwon, D. H. Allen, R. Talreja [206] представлено широкий спектр методів із застосуванням імовірнісних та статистичних підходів, які дозволяють описувати механічну поведінку композитів, у тому числі волокнистих та нанокомпозитів. Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталей при наявності пошкоджень, тріщин, дифузії, температурних факторів, реологічних процесів тощо. У тому числі тут наведено термопружні сталі для волокнистого композита, армованого системою n волокон.

В статті Y.-F. Ko, J. W. Ju [205] із використанням методу гомогенізації знайдено поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Також визначено поперечний модуль пружності композита для нестисливої матриці та круглих жорстких волокон.

Застосування методу гомогенізації при дослідженні пружнопластичної поведінки композита з випадково розподіленими односпрямованими круглими волокнами та пластичною матрицею описано в статті J. W. Ju, Y. F. Ko, H. N. Ruan [243]. Вплив випадкового процесу порушення зчеплення волокна та матриці в процесі деформування моделювався заміною відповідних волокон циліндричними пустотами. Пружні сталі трифазного композита (матриця, циліндричне волокно та пустота циліндричної форми, яка моделює порушення зчеплення волокна з матрицею) знаходились як

комбінація тензорів пружних сталих матеріалу матриці й матеріалів включень, а також тензора Ешелбі для еліпсоїдних включень. Матеріал матриці та волокна вважався ізотропним.

W. Zhong, N. Pan [246] на основі методу Монте-Карло запропонували стохастичний підхід до дослідження міжфазних явищ у волокнистих композитах. Зокрема, запропоновані методики були використані для моделювання процесу порушення зчеплення волокна та матриці.

Як правило, складність процесів взаємодії матриці та волокна приводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць та інші.

В статті Є. В. Куїмової, Н. А. Труфанова [85] на основі сумісного застосування методу квазіконстантних операторів та методу скінченних елементів чисельно визначені ефективні термов'язкопружні характеристики (5 операторних величин) для односпрямованих армованих полімерних композитів за властивостями компонентів. Для опису в'язкопружних властивостей армований композит подавався у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу із механічними характеристиками у вигляді різницевих інтегральних операторів. Значення пружних сталих знаходились із розв'язання крайової задачі термов'язкопружності на комірці періодичності. Тут досліджено також вплив об'ємної релаксації зв'язувального матеріалу на

властивості односпрямованого композита. Результати розрахунку пружних характеристик порівнювалися з результатами експерименту для композита з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном.

Для визначення в'язкопружних сталих волокнистого композиційного матеріалу в поперечному щодо волокна напрямі запропонована лінійна в'язкопружна модель поверхні розділу волокна та матриці у статті M. Gosz, B. Moran, J. D. Achenbach [190]. За допомогою гомогенізації для елементарної комірки методом скінченних елементів досліджені в'язкопружні властивості волокнистого композита.

У роботі M. Kaminski [202] визначені ефективні пружні властивості волокнистого композита на основі моделі стохастичних процесів старіння. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси старіння композита зі скляними волокнами та епоксидною матрицею.

У дослідженнях [186, 213] за допомогою методів гомогенізації та подальшого застосування методу скінченних елементів отримано низку механічних характеристик для композиційного матеріалу. Так, у публікації [213] з використанням представницького об'ємного елемента та методу гомогенізації були сформульовані крайові задачі для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого перетину. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати

для ефективних пружних та діелектричних характеристик композиційного матеріалу.

У статті M. E. Moreno., V. Tita, F. D. Marques [186] метод гомогенізації на основі представницького об'ємного елемента використовувався для визначення ефективних пружних та діелектричних характеристик композита. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого та квадратного перетину.

У дослідженні S. Sockalingam, G. Nilakantan [227] на основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на межі полімерної матриці й волокна. Різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна чисельно досліджені за допомогою методу скінченних елементів.

V. K. Srivastava, U. Gabbert, H. Berger, S. Singh [170] визначили ефективні пружні властивості для композитів із різною формою й розмірами включень, таких як циліндричні волокна, сферичні та еліптичні частинки, а також циліндричні волокна з напівсферичними кінцями. Аналіз ґрунтується на методиці гомогенізації вихідного композиційного матеріалу. Вплив різних параметрів, таких як об'ємна частка, форма та розміри включень, проводились за допомогою тривимірного представницького об'ємного елемента на основі чисельного моделювання методом скінченних елементів.

В роботі В. Klusemann, В. Svendsen [203] запропоновано дві модифікації класичних методів гомогенізації матричних композитів із включеннями – так званий прямий метод та ефективна самоузгоджувальна схема. Проаналізовано ефективність запропонованих модифікацій у порівнянні з класичними методами гомогенізації та з результатами моделювання методом скінченних елементів.

Т. Zeng, L. Wu, L. Guo [244] за допомогою модифікації методу скінченних елементів дослідили ефективні пружні характеристики просторових плетених композитів, у тому числі при наявності тріщин.

В роботі F. Yang, R. Pitchumani [239] на основі вільної енергії Гіббса представлена математична модель композиційного матеріалу з урахуванням міжфазного шару між матрицею та волокном. За допомогою методу скінченних елементів визначаються ефективні пружні сталі матеріалу при наявності міжфазного шару.

М. Würkner, Н. Berger, U. Gabbert [236] дослідили пружні сталі односпрямовано армованого композита з ромбічним вкладанням волокон. Математична модель створена методом гомогенізації на основі елементарного представницького об'єму. Чисельні результати отримані методом скінченних елементів. У іншій статті цих же авторів [237] досліджено ефективні пружні характеристики композита з ромбічним вкладанням волокон та з урахуванням особливостей міжфазного контакту на межі матриця-волокно за допомогою методу гомогенізації та методу скінченних елементів.

У статті N. Willoughby, W. J. Parnell, A. L. Hazel, I. D. Abrahams [198] армований композитний матеріал із випадково розподіленими волокнами моделюється за допомогою представницького об'ємного елемента з періодичними граничними умовами. Ефективні пружні характеристики матеріалу знаходяться на основі методу асимптотичної гомогенізації за допомогою скінченноелементних розв'язків.

C. L. Tucker, E. Liang [233], спираючись на теорію еквівалентних включень Ешелбі, самоузгоджену модель для коротких волокон, модель Морі-Танака, граничну модель, співвідношення Халпін-Цая, описують мікромеханічну поведінку композитів, армованих прямими короткими волокнами. На основі зазначених моделей за допомогою методу скінченних елементів отримані ефективні пружні характеристики композита.

В роботі V. S. Sai, V. B. Murthy, K. Satyanarayana, G. S. Rao [210] побудовано тривимірну скінченно-елементну модель із використанням методу гомогенізації на комірці періодичності для визначення пружних характеристик волокнистого композита. Композиційний матеріал складається з двох різних волокнистих матеріалів (Т-300 та S-скла), один із яких має трансверсально-ізотропні властивості, та ізотропної полімерної матриці. Композит має гексагональну структуру армування, поперечні перетини волокон мають форму еліпсів різних ексцентриситетів, в тому числі круглу. Чисельні значення пружних сталих композита при різних значеннях об'ємного вмісту волокон отримані за допомогою програмного

комплексу ANSYS, для поздовжнього модуля проведено порівняння з аналітичними значеннями, отриманими на основі правила сумішей.

Y. Zhang, Z. Xia, F. Ellyin [245] запропонували мікромеханічну модель односпрямованих волокнистих полімерних композитів з урахуванням наявності тріщини. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси руйнування в тривимірній періодичній комірці для в'язкопружної матриці та пружного волокна.

R. Sharma, A. R. Bhagat, P. Mahajan [224] за допомогою скінченно-елементного аналізу дослідили різноспрямований 4D армований вуглецевий композит. Враховувались порожнини, зміщення волокон та викривлення поперечних перетинів волокон, отримані методами рентгенівської томографії. На основі аналізу елементарної комірки за допомогою асимптотичної гомогенізації були отримані модулі пружності композиційного матеріалу.

Стаття R. M. G. Muneswara, Sk. Zareena [215] присвячена мікромеханічному аналізу композитів, армованих трансверсально-ізотропними волокнами з використанням тривимірного методу скінченних елементів, реалізованого в програмному комплексі ANSYS. За допомогою методів гомогенізації знайдені ефективні поздовжній та поперечний модулі пружності та коефіцієнт Пуассона.

Визначенню макровластивостей односпрямованого волокнистого композита для фізично нелінійного матеріалу присвячена робота [64]. Розглядалась квадратна схема армування для волокон круглого перетину. Для знаходження п'яти механічних характеристик трансверсально-ізотропного композита методом

скінченних елементів розв'язано три представницькі задачі при гармонічному навантаженні.

В статті В. У. Новикова, О. Ю. Бур'ян [120] представлена чисельно-аналітична модель визначення пружних сталих волокнистого композита з перехідним шаром на границі «матриця»-«волокно». Перехідний шар представлявся у вигляді набору порожнистих циліндрів, кожен із яких має ізотропні властивості. Із розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для отриманого складеного циліндра, що складається із суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистих циліндрів, що моделюють перехідний шар, отримані пружні сталі ортотропного однорідного матеріалу, що моделює волокно та перехідний шар. Для прямокутної комірки композиційного матеріалу – «матриця»-«перехідний шар»-«волокно» – на основі методу кінцевих різниць побудовано систему розв'язувальних рівнянь для різних видів навантажень з урахуванням раніше знайдених пружних сталих системи «перехідний шар»-«волокно». Розв'язання даної системи дає чисельні значення пружних сталих композиційного матеріалу з врахуванням міжфазного шару. Стаття О. Ю. Бур'ян, В. У. Новикова [27] є розширенням роботи В. У. Новикова, О. Ю. Бур'ян [120] як для односпрямованих волокнистих композитів, так і для дисперсно-наповнених, для котрих із використанням фрактального підходу отримані пружні характеристики перехідного шару в залежності від фрактальної розмірності.

У ході процедури визначення ефективних механічних характеристик також використовують інші, менш поширені методи – метод просторових характеристик, метод регулярних структур, метод орієнтаційного осереднення та інші.

Процес локального руйнування композиційного матеріалу, який обумовлений обривом одного з волокон, досліджено чисельно методом просторових характеристик [24]. При цьому матеріал моделювався наступним чином. Волокно, що обривається, вважалось пружним, об'єм матриці навколо нього вважався пружнов'язкопластичним, а весь масив композиційного матеріалу вважався трансверсально-ізотропним, однорідним.

В роботах Л. А. Фильштинського, Ю. В. Шрамка та інших на основі методу регулярних структур досліджується елементарна комірка волокнистого композита й знаходяться осереднені електричні та магнітні властивості композитів, армованих суцільними волокнами [116].

Інтегральне рівняння, розв'язок якого дасть механічні характеристики композитного матеріалу із в'язкопружними матрицею та включенням, представлено у роботі [157].

Різноманітні особливості проектування та застосування композиційних матеріалів та конструкцій на їх основі розглядаються у восьмитомній монографії під загальною редакцією Л. Браутмана і Р. Крока. Особливу увагу варто звернути на другий том цієї монографії під редакцією Дж. Сендецькі, присвячену механіці композиційних матеріалів. Зупинимось на найцікавіших із точки зору

тематики дослідження розділах цієї монографії. Зокрема, у розділах 1, 2 цього тому Н. Дж. Пагано [122] досліджено ефективні модулі для шаруватих композитів та наведено методику отримання механічних характеристик для шаруватого середовища. Розділ 3 надає відомості про точні та наближенні співвідношення для ефективних пружних характеристик композита в залежності від параметрів армування [123]. У розділі 7 у загальних рисах описано теорію великих деформацій матеріалів, які складаються із жорстких волокон та більш піддатливої матриці (наприклад, гумовокордного матеріалу). Теорію викладено з позицій макромеханіки так званих ідеальних волокнистих композитів (волокна розподілені неперервно, волокна є нерозтяжними й композит у цілому є нестисливим).

В статті P. Yan, C. P. Jiang, F. Song [238] для трифазних (волокно, міжфазний шар, матриця) п'єзоелектричних композитів з двоякоперіодичною мікроструктурою запропоновано новий варіаційний функціонал для елементарної комірки періодичності шляхом включення у функціонал енергії періодичних граничних умов. Для такого композиційного матеріалу знайдені деякі ефективні електропружні характеристики.

Y. Yao, S. Chen, P. Chen [240] на основі трифазної моделі (волокно-проміжний шар-матриця) дослідили параметри напружено-деформованого стану композиційного матеріалу, армованого короткими волокнами. Отримано аналітичні розв'язки при лінійному та степеневому законі зміни модуля пружності в проміжному шарі, при цьому коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення в

проміжному шарі вважаються сталими. Результати аналітичних розв'язків добре узгоджуються з чисельними результатами, отриманими методом скінченних елементів. В статті Y. Yao, S. Chen [241] побудовано математичну модель, що враховує шорсткість поверхні волокон при зчепленні з полімерною матрицею. Розглянуто вплив шорсткості поверхні волокон на напружено-деформований стан та ефективний модуль пружності волокнистого односпрямованого композита, армованого короткими циліндричними волокнами в шаховому порядку.

У роботі [29] за допомогою комплексних потенціалів та представлення їх рядами розв'язано задачу про макроскопічно однорідний напружено-деформований стан композитного матеріалу з анізотропними властивостями компонентів (площина, перпендикулярна до волокон, є площиною симетрії властивостей як матриці, так і волокна). Отримані співвідношення дозволяють визначати пружні характеристики композита, але при цьому необхідно розв'язувати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь, що можливо в результаті обчислювального експерименту.

Основні положення та математичний апарат методу орієнтаційного осереднення на основі розкладання функцій у ряд Фур'є викладені у [88]. За мікромеханічними характеристиками отримано осереднені тензори деформацій та напружень, що характеризують пружні, в'язкопружні та пружнопластичні властивості композита при різних схемах армування волокнами.

У монографії [127] наведено низку постановок одновимірних, дво- та тривимірних задач для отримання ефективних пружних характеристик пружних, в'язкопружних та пружно-пластичних волокнистих композитів. При розв'язках застосовуються як точні, де це можливо, так і наближені методи.

В серії робіт Н. Teodorescu, S. Vlase, I. Candea, D. L. Motoc [228], Н. Teodorescu-Draghicescu, S. Vlase, A. Chiru, D. Rosu, M. L. Scutaru, E. Secara [164, 225] на основі середнього арифметичного та середнього геометричного представлені розрахункові формули для визначення пружних сталих композита з еліптичними волокнами та наповнювачем. Результати розрахунку порівняно з експериментальними даними.

Експериментальні методи дослідження механічних характеристик волокнистих композитів представлені у низці робіт. Механіка текстильних та шаруватих композитів представлена в роботі А. Bogdanovich, С. М. Pastore [176]. Зокрема, наведені теоретичні та експериментальні характеристики пружних властивостей односпрямованих, текстильних та шаруватих композиційних матеріалів. У дослідженнях М. К. Кучера, М. М. Заразовского, М. П. Земцова [86, 87] досліджуються можливості прогнозування механічних характеристик шаруватих композитів на основі механічних характеристик окремого моношару, у тому числі при впливі температурних факторів. Запропоновані підходи перевірено порівнянням із результатами експериментальних досліджень.

В роботі L. J. Silva, T. H. Panzera, A. L. Christoforo, J. C. Rubio, Scarpa F. [211] проаналізовано застосування аналітичних (правило сумішей та підхід Халпіна-Цая) та експериментальних методів визначення пружних характеристик класу полімерних композитів, виготовлених із епоксидної матриці, армованої односпрямованими природними сизалевими та банановими волокнами з мікрочастинками кремнезему та малеїнового ангідриду.

Особливості властивостей компонентів гумовокордного матеріалу приводить до необхідності застосування специфічних підходів при визначенні ефективних механічних характеристик такого композиційного матеріалу.

Так, у роботі [153] наведені наближені, але досить загальні вирази для розрахунку модулів пружності односпрямованого гумовокордного моношару через пружні сталі матеріалу корда та гуми та об'ємний вміст корда в композиті, при цьому враховувались особливості деформування складових (нестисливість гуми, значні відмінності жорсткостей матеріалу корда й гуми та інше). Розглянуто вплив міжшарової зсувної деформації в проміжному гумовому шарі на напружено-деформований стан перехресно-армованої композитної полоси. За допомогою класичної теорії шаруватих пластин оцінюються характеристики жорсткості брекера та боковини шини.

Ефективні пружні характеристики односпрямованого гумовокордного матеріалу визначаються за допомогою розв'язку елементарних задач для одиничного кубика з одним армуючим кордом у ньому [20]. Для отримання аналітичних розв'язків зроблені

такі припущення: матеріал матриці та волокна пружний та ізотропний, при дії поздовжнього навантаження поперечні напруження надзвичайно малі; при дії поперечного навантаження поперечні напруження в матриці та волокні однакові, а поперечні деформації в матриці та волокні – пропорційні їх об'ємній частці в композиті. Отримані характеристики верифіковані методом скінченних елементів для масиву гумовокордного матеріалу. Найбільша різниця (до 60 %) спостерігається для поперечних модулів пружності, що пояснюється зробленими припущеннями.

Публікації [66, 135-137, 217] висвітлюють дослідження пружних характеристик гумовокордного матеріалу та створення математичних моделей для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів. Так, експериментальне дослідження пружних характеристик текстильних кордів та визначення ефективних характеристик гумовокордного матеріалу за відомими залежностями наведено в роботі [66]. Наведено підходи до визначення жорсткісних характеристик складених анізотропних гумовокордних матеріалів, які використовуються у каркасах [137] та брекерах [136] пневматичних шин. Однак при визначенні ефективних пружних характеристик гумовокордного матеріалу поздовжній та поперечний модулі пружності корду вважалися рівними, що не для всіх матеріалів справедливо і що, відповідно, обмежує застосування наведених співвідношень. Математичну модель рівноважної конфігурації профілю пневматичної шини у вигляді інтегрального рівняння представлено в роботі [135].

Деякі дотичні питання, пов'язані з механічними характеристиками волокнистих композитів розглядаються у наступних публікаціях. Аналітичні розв'язки задачі оптимізації структури намотки для тороїдальної оболонки при обмеженнях по стійкості представлені у дослідженні [25]. У роботі [163] розглядається алгоритм пошуку пружних сталих односпрямованого композитного шару за відомими пружними характеристиками багат шарового пакету, що складається із симетрично укладених шарів із односпрямованого композита.

С. Дарія Заде та Г. І. Львов у публікації [56] пропонують застосування чисельної методики до гомогенізації односпрямованого армованого композиту.

Задачі визначення механічних в'язкопружних характеристик односпрямованих композитів за відомими характеристиками матриці і волокна розглянуті у низці робіт. Зокрема, у [65, 81, 126] розглядаються проблеми прогнозування в'язкопружних властивостей композитів при наявності в'язкопружної матриці або в'язкопружного волокна, досліджено також випадок в'язкопружних властивостей обох фаз композиту.

У дослідженні [126] відзначається, що суттєві в'язкопружні властивості мають органічні волокна, тут виділено також типи волокон, в'язкопружністю яких можна знехтувати. Поздовжня повзучість композитів для в'язкопружного органічного волокна досліджена у [155]. У публікаціях [65, 92] матриця моделюється у вигляді ізотропного в'язкопружного матеріалу, при цьому

досліджується її поздовжня деформація. У [85] розглянуто чисельне визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих полімерних композитів, для чого запропонований варіант метода квазіконстантних операторів з частинними апроксимаціями.

Задача визначення характеристик в'язкопружного деформування композитів з використанням теорії спадкової в'язкопружності Больцмана-Вольтерра розглянута у [62]. Тут запропонована методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик композитів, основана на апроксимації функції деформування ланцюгового дробу і застосуванні метода операторних ланцюгових дробів. Основні підходи до розв'язання квазістатичних задач лінійної теорії в'язкопружності висвітлюються у [127].

У статті [63] розглянуто оптимізацію моделювання в'язкопружних властивостей композитів з в'язкопружними компонентами. Використання інтегрального перетворення Лапласа-Карсона та методу операторних ланцюгових дробів дозволило запропонувати алгоритм зведення функцій, що описують в'язкопружні властивості окремих фаз композиту, до функцій одного класу. Для моделювання в'язкопружних властивостей застосовувалися функції Міттаг-Лефлера. У якості прикладу застосування запропонованої методики розглядається зведення функції в'язкопружності до одного класу у односпрямованому армованому композиті.

У публікаціях [23, 75, 185, 194, 196, 223] розглядається розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого односпрямованого композиту. Основні результати, отримані у цих дослідженнях, наводяться у розділі 4 даної монографії.

На сьогодні наявна певна кількість робіт довідкового, а іноді більш навчального характеру, в яких узагальнено на час їх видання технологічні, механічні, фізичні, хімічні, конструкторські та інші аспекти виробництва й експлуатації композиційних матеріалів, у тому числі волокнистих. Ці роботи мають різну міру деталізації тих чи інших аспектів, однак, незважаючи на це, всі вони можуть бути використані в інженерній справі при розрахунку та проектуванні композиційних матеріалів та конструкцій із них. Зокрема, різні групи співвідношень для визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композита зведено в довідниках під редакцією Д. М. Карпиноса [80], В. В. Васильєва, Ю. М. Тарнопольського [79], А. Kelly [181] та інших.

3.4 Методи гомогенізації композиційних матеріалів

Найбільш поширені методики визначення пружних сталих для композиційного матеріалу дають наступні співвідношення. Розглянемо спочатку пружні сталі, отримані для плоскої задачі теорії пружності. У довідниках [79, 80] запропоновані такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
\nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1 - f), \\
E_2 &= \frac{eE_1}{(f + e(1 - f))(ef + (1 - f)) - f(1 - f)(e\nu_m - \nu_c)^2}, \\
G_{12} &= \frac{g}{f + g(1 - f)} G_m,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

де $e = \frac{E_c}{E_m}$, $g = \frac{G_c}{G_m}$, E_c – модуль пружності матеріалу волокна; E_m – модуль пружності матеріалу матриці; G_c – модуль зсуву матеріалу волокна, G_m – модуль зсуву матеріалу матриці, ν_c – коефіцієнт Пуассона матеріалу волокна; ν_m – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці; f – коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон.

Для волокон круглого перетину й параметрів шару, зображеного на рис. 3.1, коефіцієнт армування визначається формулою [80]:

$$f = \frac{\pi d_c^2}{4h_0} i_c, \tag{3.7}$$

де d_c – діаметр волокон; h_0 – товщина армованого шару; i_c – частота армування.

В роботі [172] запропоновані такі співвідношення для визначення пружних сталих композиційного матеріалу:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
\nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1 - f), \\
E_2 &= \frac{1 + 2f}{1 - f} E_m, \\
G_{12} &= \frac{1 - f + g(f + 1)}{f + 1 + g(1 - f)} G_m.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Формули для визначення пружних констант композита, запропоновані у працях [149], [191], мають вигляд:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
\nu_{12} &= 0,5, \\
E_2 &= \frac{4(1 - f)}{3 + (1 - f)E_m/E_1} E_m, \\
G_{12} &= (1 - f)G_m.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Наступна група формул описана у дослідженні [146]:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c \Psi_c, \\
\nu_{12} &= 0,5, \\
\nu_{21} &= 0, \\
E_2 &= \frac{4}{3} E_m, \\
G_{12} &= G_m.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Наведені нижче співвідношення є окремим випадком формул (3.6), справедливим лише для гумовокордних композитів, тобто якщо припустити, що $E_c \gg E_m$, $\nu_m = 0,5$, $G_m = E_m/3$ [168]:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c \Psi_c, \\
 \nu_{12} &= 0,5, \\
 \nu_{21} &= 0, \\
 E_2 &= \frac{4}{3(1-f)} E_m, \\
 G_{12} &= \frac{1}{(1-f)} G_m.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Для розв'язання тривимірних задач механіки композитів запропоновані наступні співвідношення для визначення пружних сталих. У роботі [80] для найпростішої моделі композиційного матеріалу – системи жорстко зв'язаних почергових ізотропних стрижнів, які мають характеристики волокна та матриці – представлені співвідношення, отримані на основі рівняння адитивності або правила сумішей:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c f + E_m (1-f), \\
 E_2 &= \frac{E_c E_m}{[E_m f + E_c (1-f)]},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{12} &= \frac{G_c G_m}{[G_c(1-f) + G_m f]}, \\
G_{23} &= \frac{\chi_m + f + (1-f)G_m/G_c}{(1-f)\chi_m + (1+f\chi_m)G_m/G_c} G_m, \\
v_{12} &= v_c f + v_m(1-f),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

де $\chi_m = 3 - 4v_m$.

У роботі Д. С. Аболіньша [1] запропонована така група формул:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m(1-f), \\
E_2 &= \frac{eE_1}{(f + e(1-f))((1-f) + ef) - f(1-f)(ev_m - v_c)^2}, \\
G_{12} &= \frac{1-f + g(f+1)}{f+1 + g(1-f)} G_m, \\
G_{23} &= \frac{g}{f + g(1-f)} G_m, \\
v_{12} &= v_c f + v_m(1-f).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Формули Г. А. Ваніна [28] мають вигляд:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m(1-f), \\
v_{12} &= v_m - \frac{gf(\chi_m + 1)(v_m - v_c)}{(1-f)(\chi_c - 1) + g(2-f + f\chi_m)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ \frac{\nu_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left[\frac{\chi_c - 1 + 2g}{(1-f)(\chi_c - 1) + g(2-f + f\chi_m)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2(g-1)f}{1-f + g(f + \chi_m)} \right] \right\}^{-1}, \\
G_{12} &= \frac{1-f + g(f+1)}{f+1 + g(1-f)} G_m, \\
G_{23} &= \frac{1-f + g(f + \chi_m)}{\chi_m(f + g(1-f)) + 1} G_m, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

де $\chi_c = 3 - 4\nu_c$.

В роботі [80] на основі варіаційного принципу отримані пружні характеристики для композита, у якого волокна прийняті трансверсально-ізотропними, а матриця ізотропною:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{K_m(K_c + G_m)(1-f) + K_c(K_m + G_m)f}{(K_c + G_m)(1-f) + (K_m + G_m)f}, \\
E_1 &= E_{1c}f + E_m(1-f) + \frac{4(\nu_{12c} - \nu_m)^2 f(1-f)}{\frac{1-f}{K_c} + \frac{f}{K_m} + \frac{1}{G_m}}, \\
\nu_{21} &= \nu_{12c}f + \nu_m(1-f) + \frac{(\nu_{12c} - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_c} \right) f(1-f)}{\frac{1-f}{K_c} + \frac{f}{K_m} + \frac{1}{G_m}},
\end{aligned}$$

$$G_{12} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{12c} - G_m} + \frac{\nu_m}{2G_m}},$$

$$G_{23-} < G_{23} < G_{23+},$$

$$\frac{4KG_{23-}}{K + mG_{23-}} < E_2 < \frac{4KG_{23+}}{K + mG_{23+}},$$

$$\frac{K - mG_{23+}}{K + mG_{23+}} < \nu_{23} < \frac{K - mG_{23-}}{K + mG_{23-}}, \quad (3.15)$$

де $m = 1 + \frac{4K\nu_{12}^2}{E_1}$, K – поперечний об’ємний модуль, що визначається

формулою $K = \frac{E_2}{2(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_2 / E_1)}$, $K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)}$ – модуль

об’ємної деформації матеріалу волокон, $K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}$ – модуль

об’ємної деформації матеріалу матриці.

Значення $G_{23\pm}$ обираються в залежності від співвідношення між характеристиками компонент у такий спосіб:

1. $G_{23c} > G_m$, $K_c > K_m$,

$$G_{23-} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{23c} - G_m} + \frac{(K_m + 2G_m)(1 - f)}{2G_m(K_m + G_m)}},$$

$$G_{23+} = G_m \left[1 + \frac{f(1+\beta_1)}{\rho - f \left(1 + \frac{3\beta_1^2(1-f)^2}{\alpha f^3 + 1} \right)} \right]. \quad (3.16)$$

$$2. \quad G_{23c} < G_m, \quad K_c < K_m,$$

$$G_{23-} = G_m \left[1 + \frac{f(1+\beta_1)}{\rho - f \left(1 + \frac{3\beta_1^2(1-f)^2}{\alpha f^3 - \beta_1} \right)} \right],$$

$$G_{23+} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{23c} - G_m} + \frac{(K_m + 2G_m)(1-f)}{2G_m(K_m + G_m)}}, \quad (3.17)$$

$$\alpha = \frac{\beta_1 - \gamma\beta_2}{1 + \gamma\beta_2}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_1}{\gamma - 1}, \quad \beta_1 = \frac{K_m}{K_m + 2G_m}, \quad \beta_2 = \frac{K_c}{K_c + 2G_{23c}}, \quad \gamma = \frac{G_{23c}}{G_m}.$$

Перший випадок звичайно реалізується у композитах з полімерною матрицею, а другий – з металевою.

На основі точної теорії армування [71] запропоновані аналітичні вирази для пружних характеристик композиційного матеріалу з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном. В результаті отримані такі пружні сталі композита:

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}}, \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}, \quad G_{12} = \frac{1}{S_{55}}. \quad (3.18)$$

Пружні податливості обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
 S_{22} &= \frac{1}{2}(S_2 + S_3), \quad S_{23} = \frac{1}{2}(S_2 - S_3), \quad S_{11} = \frac{1}{E_1^\circ} \cdot \frac{\alpha d_2 + 2\beta d_1}{d}, \\
 S_{12} &= -\frac{1}{E_1^\circ} \cdot \frac{2\alpha d_1 + \beta d_2}{d}, \quad S_{55} = \frac{1}{G^*} \cdot \frac{G_{12}^\circ(1-f) + G^*(1+f)}{G_{12}^\circ(1+f) + G^*(1-f)}, \\
 S_2 &= \frac{1}{E_1^\circ} \left(\alpha - \beta - \frac{2\alpha d_3 + \beta d_4}{d} \right), \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

де $d_1 = a_{22}v_{21}^\circ - a_{12}$, $d_2 = a_{11} - a_{21}v_{21}^\circ$, $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$d_3 = a_{22} \left(\alpha k(1 - \nu^*) - (1 - \nu_{23}^\circ) \right) f - 2a_{12} \left(\beta - \nu_{12}^\circ \right) f,$$

$$d_4 = 2a_{11} \left(\beta - \nu_{12}^\circ \right) f - a_{21} \left(\alpha k(1 - \nu^*) - (1 - \nu_{23}^\circ) \right) f,$$

$$a_{11} = (1 - \nu_{23}^\circ)(1 - f) + \alpha k(1 + f) + \beta k(1 - f), \quad a_{12} = \nu_{21}^\circ(1 - f) + \beta k f,$$

$$a_{21} = 2\beta f + 2\nu_{21}^\circ(1 - f), \quad a_{22} = \alpha f + (1 - f),$$

$$\alpha = \frac{E_1^\circ}{E^*}, \quad \beta = \nu^* \frac{E_1^\circ}{E^*}, \quad k = \frac{E_2^\circ}{E_1^\circ}, \quad f - \text{об'ємний вміст волокна, } * \text{ позначені}$$

величини, що відносяться до матриці, $^\circ$ – величини, що відносяться до волокна.

Для допоміжної податливості S_3 в результаті розв'язання крайової задачі на чистий поперечний зсув отримані два значення S_3' та S_3'' :

$$S_3' = \frac{1}{E_1^\circ}(\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - \nu^*) \frac{d_1 + d_2}{d} \right), \quad (3.20)$$

$$S_3'' = \frac{1}{E_1^\circ}(\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - \nu^*) \frac{-d_1}{d} \right), \quad (3.21)$$

У цих формулах

$$d_1 = b_1(a_{22} - a_{12}), \quad d_2 = b_1(a_{11} - a_{21}), \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$a_{11} = 3(1 + \nu_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 4(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f - f^{-2}) + \\ + \alpha k(1 + \nu^*)(3 - 4\nu^*f + f^{-2}),$$

$$a_{12} = 2(1 + \nu_{23}^\circ)(f^{-1} - 1) + 2(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + \\ + 2\alpha k(1 + \nu^*)(1 - \nu^*f + (1 - \nu^*)f^{-1}),$$

$$a_{21} = 3(1 + \nu_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 2(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f - f^{-2}) + \\ + \alpha k(3(1 + \nu^*) - 2(3 + \nu^* - 2\nu^{*2})f - (1 + \nu^*)f^{-2}),$$

$$a_{22} = 2(1 + \nu_{23}^\circ)(f^{-1} - 1) + (3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + \\ + \alpha k(2(1 + \nu^*) - (3 + \nu^* - 2\nu^{*2})f - (1 - \nu^* - 2\nu^{*2})f^{-1}),$$

$$b_1 = \left((1 + \nu_{23}^\circ) - \alpha k(1 + \nu^*) \right).$$

Перше значення отримане для умови сумісності, накладеної на радіальне переміщення, друге – на тангенціальне. При використанні значень податливості S_3 , отриманих за формулами (3.20) та (3.21), значення E_2 та ν_{23} можуть суттєво відрізнятися. У роботі [71]

запропонована емпірична формула на основі чисельних експериментів за допомогою методу скінченних елементів, яка дає результат, добре узгоджений з експериментальними даними:

$$S_3 = \frac{21}{25} S'_3 + \frac{4}{25} S''_3 = \frac{1}{E_1^\circ} (\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - \nu^*) \frac{17d_1 + 21d_2}{25d} \right). \quad (3.22)$$

У роботі [80] на основі варіаційного принципу запропоновані співвідношення для нижньої та верхньої оцінки пружних сталих для волокнистого композиційного матеріалу, які в загальному випадку щодо трансверсально-ізотропних компонентів наведені в роботі [103].

Ц. Хашин та Ш. Штрікман на основі варіаційного принципу запропонували нижню та верхню оцінки пружних сталих для волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами у дослідженні [180]. Зокрема, тут отримані наступні нижні оцінки:

$$E_1^L = E_1^\circ f + E_1^* (1 - f) + \frac{4(\nu_{12}^* - \nu_{12}^\circ)^2 k^\circ k^* G_{12}^*}{(k^\circ k^* + G_{12}^* (k^\circ f + k^* (1 - f)))};$$

$$\nu_{12}^L = \nu_{13}^L = \nu_{12}^\circ f + \nu_{12}^* (1 - f) + \frac{(\nu_{12}^* - \nu_{12}^\circ)(k^\circ - k^*)}{(k^\circ k^* + G_{12}^* (k^\circ f + k^* (1 - f)))};$$

$$G_{12}^L = \frac{G_{12}^* ((G_{12}^\circ + G_{12}^*) + f(G_{12}^\circ - G_{12}^*))}{((G_{12}^\circ + G_{12}^*) - f(G_{12}^\circ - G_{12}^*))};$$

$$\begin{aligned}
G_{23}^L &= \frac{G_{23}^* \left(k^\circ (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* + f k^* (G_{23}^\circ - G_{23}^*) \right)}{\left(k^* (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* - f (G_{23}^\circ - G_{23}^*) (k^* + 2G_{23}^*) \right)}; \\
k^L &= \frac{k^* (k^\circ + G_{23}^*) + f G_{23}^* (k^\circ - k^*)}{\left((k^\circ + G_{23}^*) - f (k^\circ - k^*) \right)}; \\
E_2^L = E_3^L &= \frac{1}{\frac{1}{4G_{23}^L} + \frac{1}{4k^L} + \frac{(v_{12}^U)^2}{E_1^L}}; \\
v_{23}^L &= \frac{2E_1^L k^L - E_1^L E_2^L - 4(v_{12}^U)^2 k^L E_2^L}{2E_1^L k^L}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Наведемо верхні оцінки, отримані вказаними авторами:

$$\begin{aligned}
E_1^U &= E_1^\circ f + E_1^* (1-f) + \frac{4(v_{12}^\circ - v_{12}^*)^2 k^\circ k^* G_{12}^\circ}{\left(k^\circ k^* + G_{12}^\circ (k^\circ f + k^* (1-f)) \right)}; \\
v_{12}^U = v_{13}^U &= v_{12}^\circ f + v_{12}^* (1-f) + \frac{(v_{12}^\circ - v_{12}^*) (k^* - k^\circ)}{\left(k^\circ k^* + G_{12}^\circ (k^\circ f + k^* (1-f)) \right)}; \\
G_{12}^U &= \frac{G_{12}^\circ \left((G_{12}^\circ + G_{12}^*) + (1-f)(G_{12}^* - G_{12}^\circ) \right)}{\left((G_{12}^\circ + G_{12}^*) - (1-f)(G_{12}^* - G_{12}^\circ) \right)}; \\
G_{23}^U &= \frac{G_{23}^\circ \left(k^* (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* + (1-f) k^\circ (G_{23}^* - G_{23}^\circ) \right)}{\left(k^\circ (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* - (1-f)(G_{23}^* - G_{23}^\circ)(k^\circ + 2G_{23}^\circ) \right)}; \\
k^U &= \frac{k^\circ (k^* + G_{23}^\circ) + (1-f) G_{23}^\circ (k^* - k^\circ)}{\left((k^* + G_{23}^\circ) - (1-f)(k^* - k^\circ) \right)};
\end{aligned}$$

$$E_2^U = E_3^U = \frac{1}{\frac{1}{4G_{23}^U} + \frac{1}{4k^U} + \frac{(v_{12}^L)^2}{E_1^U}};$$

$$v_{23}^U = \frac{2E_1^U k^U - E_1^U E_2^U - 4(v_{12}^L)^2 k^U E_2^U}{2E_1^U k^U}. \quad (3.24)$$

При армуванні системою n сортів суцільних волокон для визначення пружних характеристик композита запропоновані такі формули [80]:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n E_{ci} f_i + E_m f_m, \quad (3.25)$$

$$v_{12} = v_m - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1) (v_m - v_{ci})}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}{f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}, \quad (3.26)$$

$$E_2 = \left[\frac{v_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left(\frac{1}{R} - \frac{2P}{1+P} \right) \right]^{-1}, \quad (3.27)$$

$$G_{12} = G_m \frac{f_m + 2 \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{(1 + G_m / G_{ci})}}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(1 + G_m / G_{ci})}}, \quad (3.28)$$

$$G_{23} = G_m \frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}{1 - \chi_m \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}, \quad (3.29)$$

де f_i – об’ємна частка i -го сорту волокна в композиті, f_m – об’ємна частка матеріалу матриці в композиті, E_{ci} – модуль пружності матеріалу i -го сорту волокна, $G_r = 0$ – модуль зсуву матеріалу i -го сорту волокна, G_m – модуль зсуву матриці, ν_{ci} – коефіцієнт Пуассона матеріалу i -го сорту волокна, інші параметри мають наступні значення:

$$\chi_m = 3 - 4\nu_m, \quad \chi_i = 3 - 4\nu_{ci},$$

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{f_i \left(1 - \frac{G_m}{G_{ci}}\right)}{\chi_m + \frac{G_m}{G_{ci}}}, \quad R = f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{\left(2 + (\chi_i - 1) \frac{G_m}{G_{ci}}\right)}.$$

Розв’язок задачі про гомогенізацію транстропного пружного волокнистого композиту наводиться у серії публікацій [38-42]. При цьому для визначення ефективних пружних сталих використовуються кінематичні умови узгодження переміщень однорідного композиту та його складових, а також енергетичний критерій. Аналогічні підходи застосовуються у розділі 4 даної роботи для гомогенізації в’язкопружного транстропного волокнистого композиту.

4. Гомогенізація в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту

4.1 Основні припущення та вихідні співвідношення

Розглянемо задачу гомогенізації односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, складовими елементами (фазами) якого є трансверсально-ізотропні в'язкопружні матриця та волокно. Одною із найбільш розповсюджених схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах є гексагональна укладка волокон, наведена на рис. 4.1.

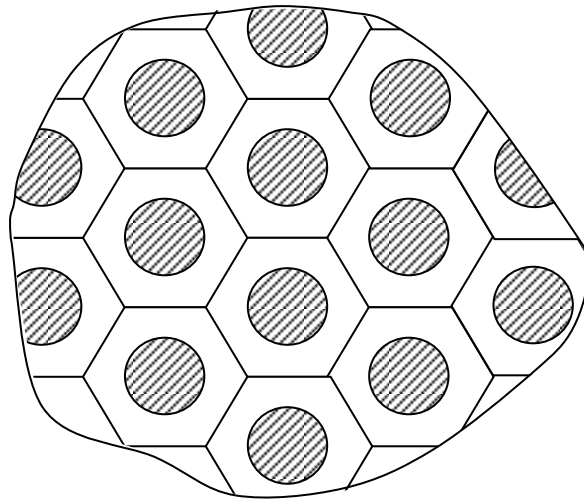


Рис. 4.1 – Гексагональна укладка волокон

Площини ізотропії матриці та волокна збігаються та розташовані перпендикулярно осі волокна. Будемо вважати, що для

матеріалів матриці та волокна справджується закон Гука, на межі поділу матриці та волокна існує ідеальний контакт.

Подамо представницький елемент волокнистого композиційного матеріалу у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – трансверсально-ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та трансверсально-ізотропного суцільного, що моделює волокно (рис. 4.2).

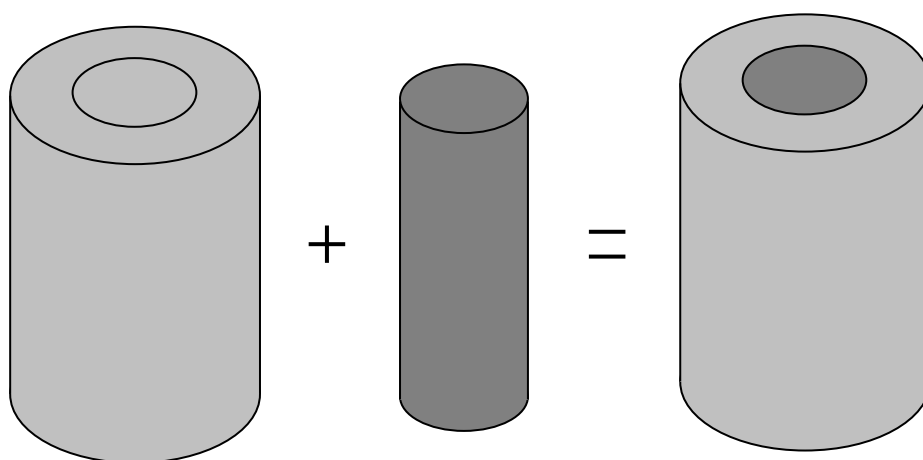


Рис.4.2 – Елемент волокнистого композита

При переході від гексагональної до циліндричної елементарної комірки вибираємо циліндр так, щоб його об'єм дорівнював об'єму гексагональної комірки. При цьому радіус циліндра приймемо таким, щоб об'ємний вміст волокна у гексагональній та циліндричній комірках співпадав (рис. 4.3).

Нехай f – об'ємний вміст волокон в композиті. Оскільки циліндри, що апроксимують матрицю та волокно у елементарній комірці, мають однакову висоту, то отримуємо, що

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (4.1)$$

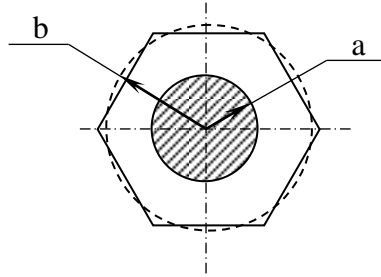


Рис. 4.3 – Гексагональна комірка

При дослідженні в'язкопружних матеріалів для моделювання зміни їх реологічних характеристик у часі замість вказаних модулів пружності та зсуву використовують інтегральні оператори

$$\bar{E}_i [y(t)] = E_i \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (4.2)$$

$$\bar{G}_{ij} [y(t)] = G_{ij} \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (4.3)$$

$i = 1, 2, j = 1, 2$. Структура та властивості цих операторів розглянуті у розділі 1.

За достатньо великої частоти армування матеріалу композиту волокнами армований шар можна розглядати як трансверсально-ізотропний. Тоді для визначення пружних характеристик композитів необхідно знайти п'ять незалежних величин: інтегральні оператори

\bar{E}_1 та \bar{E}_2 , що моделюють лінійні деформації в'язкопружного композиту, інтегральні оператори \bar{G}_{12} та \bar{G}_{23} , що моделюють зсувні деформації, а також коефіцієнт Пуассона ν_{12} , що розглядається як стала у часі величина.

Для знаходження ефективних пружних характеристик композиту застосуємо кінематичні умови узгодження переміщень для точок циліндрів, що моделюють матрицю, волокно та однорідний композит. Для цього розв'яжемо дві крайові задачі. Спочатку знайдемо розв'язок крайової задачі про сумісне деформування трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. При цьому знайдемо компоненти їх напружено-деформованого стану у вигляді функцій пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об'ємної частки кожної з цих фаз у композиті.

На наступному кроці розв'язання задачі гомогенізації отримуємо розв'язок аналогічної крайової задачі для композита, що подається у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, пружні характеристики якого (ефективні характеристики) поки що є невідомими. Визначаємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних характеристик однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектора переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі ефективні характеристики композиту у вигляді функцій механічних

характеристик матеріалів матриці та волокна, а також об'ємної частки кожного з них у композиті.

Для визначення системи ефективних механічних характеристик, що повністю відображає механічні властивості трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту достатньо розв'язати квазістатичні крайові задачі про рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув циліндричної елементарної комірки композиційного матеріалу.

Розглянемо осесиметричний напружено-деформований стан циліндричного в'язкопружного тіла. Поле напружень для нього визначається рівностями:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sigma_0(t), \\ \sigma_r &= \sigma_r(r, t), \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta(r, t), \\ \tau_{zr} &= \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.\end{aligned}$$

Рівняння рівноваги (A.8) та (A.9), що наведені у додатку А, виконуються тотожно, а рівняння (A.7) при масовій силі $G_r = 0$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4.4)$$

Для осьового напруження, що залежить лише від часу, осьова деформація $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ теж залежить лише від часу, лінійні деформації $\varepsilon_r = \varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r, t)$. Тоді з урахуванням співвідношень додатку А для осесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (4.4) є рівнянням відносно радіального переміщення $u_r(r, t)$ та набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (4.5)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція:

$$u_r(r, t) = C_1(t)r + \frac{C_2(t)}{r}. \quad (4.6)$$

де функції $C_1(t)$ та $C_2(t)$ визначаються з крайових умов.

Використовуючи співвідношення Коші, наведені у додатку А, знаходимо лінійні деформації у вигляді:

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1(t) - \frac{C_2(t)}{r^2}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u_r}{r} = C_1(t) + \frac{C_2(t)}{r^2}. \quad (4.8)$$

Використовуючи закон Гука у оберненій формі для трансверсально-ізотропного матеріалу (додаток А) та співвідношення (4.7), (4.8), знаходимо вирази для напружень $\sigma_r(r, t)$ та $\sigma_\theta(r, t)$:

$$\sigma_r(r, t) = \frac{\bar{E}_2 \left(\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + C_1 (1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2} (\nu_{23} + 2\nu_{12} \nu_{21} - 1) \right)}{1 - 2\nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21} \nu_{23} \nu_{12}}; \quad (4.9)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{\bar{E}_2 \left(\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + C_1 (1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2} (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12} \nu_{21}) \right)}{1 - 2\nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21} \nu_{23} \nu_{12}}. \quad (4.10)$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_z = \sigma_0(t)$ у вираз (А.36), знаходимо вираз для осьової деформації $\varepsilon_z(t)$:

$$\varepsilon_z(t) = \bar{E}_1^{-1} \left[\frac{\sigma_0 (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12} \nu_{21})}{(1 - \nu_{23})} \right] - \frac{2C_1 \nu_{21}}{(1 - \nu_{23})}. \quad (4.11)$$

У (4.11) \bar{E}_1^{-1} – інтегральний оператор, обернений до оператора \bar{E}_1 . Осьові переміщення, знаходимо, інтегруючи за осьовою координатою осьові деформації:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \left(\bar{E}_1^{-1} \left[\frac{\sigma_0 (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12} \nu_{21})}{(1 - \nu_{23})} \right] - \frac{2C_1 \nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z + C_3. \quad (4.12)$$

За умови $u_z(0) = 0$ знаходимо, що стала інтегрування $C_3 = 0$.

Отже, остаточно отримуємо:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \left(\bar{E}_1^{-1} \left[\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1 - \nu_{23})} \right] - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z. \quad (4.13)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (4.11) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_r(r, t) = \bar{E}_2 \left(\bar{E}_1^{-1} \left[\frac{\sigma_0\nu_{12}}{(1 - \nu_{23})} \right] + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right), \quad (4.14)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \bar{E}_2 \left(\bar{E}_1^{-1} \left[\frac{\sigma_0\nu_{12}}{(1 - \nu_{23})} \right] + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right), \quad (4.15)$$

Таким чином, для осесиметричного напружено-деформованого стану в'язкопружного циліндра отримані компоненти напружень, деформацій і переміщень у вигляді функцій механічних характеристик матеріалу та функцій часу, що можуть бути визначеними з крайових умов.

4.2 Поздовжнє розтягнення

Розглянемо осесиметричний напружено-деформований стан комірки композиційного матеріалу. Введемо циліндричну систему

координат (r, θ, z) , де вісь Oz співпадає з напрямом армування композита волокном. Моделлю матриці є в'язкопружний ізотропний порожнистий циліндр $(a \leq r \leq b)$, а волокна – трансверсально-ізотропний суцільний циліндр $(0 \leq r \leq a)$ (рис.4.4 а).

На межі розподілу матриці та волокна $(r = a)$ спостерігається ідеальний контакт, тобто радіальні переміщення та напруження тут є неперервними, осеві переміщення матриці та волокна співпадають.

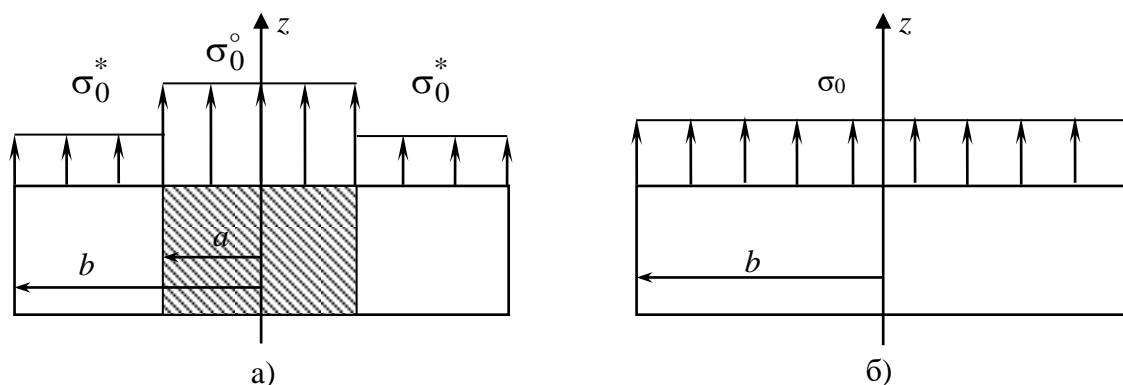


Рис. 4.4 – Поздовжнє розтягнення: а – сумісне деформування матриці та волокна; б – деформування композита

Далі будемо використовувати символ $*$ для компонент напружень, переміщень та деформацій матриці, символ $^\circ$ – для волокна.

Нехай на волокно діє у напрямі його осі стале навантаження σ_0° , відповідно осьове напруження для волокна також є сталою величиною та не залежить від просторових координат: $\sigma_z^\circ(t) = \sigma_0^\circ$.

Радіальне та тангенціальне напруження $\sigma_r^\circ = \sigma_r^\circ(r, t)$, $\sigma_\theta^\circ = \sigma_\theta^\circ(r, t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю.

Аналогічно до (4.4) та (4.5) для радіальних переміщень волокна отримуємо рівняння відносно радіального переміщення точок волокна, розв'язок якого запишемо у відповідності до (4.6):

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r + \frac{D(t)}{r}.$$

Враховуючи, що це переміщення повинне бути обмеженим при $r = 0$, то $D(t) \equiv 0$. Вираз для радіального переміщення волокна набуває вигляду:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r. \quad (4.16)$$

Вирази для осьового переміщення та радіального напруження трансверсально-ізотропного матеріалу волокна запишемо згідно з формулами (4.13) та (4.14), замінивши відповідно C_1 на C і прирівнявши $C_2 = 0$. Оскільки розглядається пружне волокно, то E_1° та E_2° є сталими, пов'язаними між собою співвідношенням

$$\frac{E_1^\circ}{\nu_{12}^\circ} = \frac{E_2^\circ}{\nu_{21}^\circ}. \quad (4.17)$$

З врахуванням (4.17) отримуємо:

$$u_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t) \nu_{21}^\circ \right) z, \quad (4.18)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right). \quad (4.19)$$

У рівностях (4.18) та (4.19) E_1° та E_2° – модулі пружності, ν_{12}° , ν_{21}° та ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, індекс 1 відповідає осі z , перпендикулярній площині ізотропії.

Знайдемо компоненти напружено-деформованого стану матриці. Оскільки вона є ізотропною, то $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = \nu_{23}^* = \nu$, поздовжнє деформування точок матриці визначається за допомогою лінійного інтегрального оператора \bar{E} , аналогічного до (4.2):

$$\bar{E}[y(t)] = E \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t - \tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (4.20)$$

де $E = \text{const}$ – миттєвий поздовжній модуль пружності (значення модуля пружності в'язкопружного матеріалу у початковий момент часу $t = 0$), $R(t)$ – ядро релаксації для матеріалу матриці.

Оператор, обернений до (4.20), має вигляд:

$$\bar{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E} \cdot \left(y(t) + \int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau \right),$$

де $Q(t)$ – ядро повзучості матриці.

Нормальні напруження у матриці мають вигляд: $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$, $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r,t)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(r,t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю. Аналогічно розглянутому вище випадку для волокна, отримуємо радіальні переміщення точок матриці у наступному вигляді:

$$u_r^*(r,t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (4.21)$$

Знайдемо деформації ε_r^* та ε_θ^* матриці за формулами (4.7), (4.8).

Отримуємо:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A(t) - \frac{B(t)}{r^2}, \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}. \quad (4.23)$$

Деформацію ε_z^* знайдемо зі зворотного закону Гука з врахуванням в'язкопружності матриці:

$$\sigma_z^* = \frac{\bar{E} \left[(1-\nu) \varepsilon_z^* + \nu (\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^*) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.24)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона матриці. Враховуючи, що $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$, $\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* = 2A(t)$, отримуємо:

$$\sigma_0^*(t) = \frac{\bar{E} \left[(1-\nu) \varepsilon_z^* + 2\nu A(t) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (4.25)$$

Звідси визначаємо осьову деформацію матриці ε_z^* :

$$\varepsilon_z^* = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \bar{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right] - \frac{2\nu}{1-\nu} A(t). \quad (4.26)$$

Осьове переміщення $u_z^*(z, t)$ точок матриці має вигляд:

$$u_z^*(z, t) = \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \bar{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right] - \frac{2\nu A(t)}{1-\nu} \right) z. \quad (4.27)$$

Використавши закон Гука у зворотній формі для ізотропного матеріалу, знайдемо вираз для радіального напруження σ_r^* точок матриці:

$$\sigma_r^* = \frac{\bar{E} \left[(1-\nu) \varepsilon_r^* + \nu (\varepsilon_z^* + \varepsilon_\theta^*) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

З врахуванням отриманих виразів для деформацій ε_z^* , ε_r^* та ε_θ^* з останньої рівності знаходимо:

$$\sigma_r^* = \frac{1}{1-\nu} \bar{E} [A(t)] - \frac{\bar{E} [B(t)]}{(1+\nu)r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_0^*(t). \quad (4.28)$$

Таким чином, отримано вирази для переміщень u_r^* , u_z^* та напружень σ_r^* точок матриці.

На межі контакту матриці та волокна $r = a$ маємо крайові умови неперервності радіальних переміщень та напружень:

$$u_r^*(a) = u_r^\circ(a), \quad (4.29)$$

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a). \quad (4.30)$$

У довільному перерізі $z = h$ осьові переміщення матриці та волокна повинні співпадати:

$$u_z^*(h) = u_z^\circ(h). \quad (4.31)$$

На межі $r = b$ комірки композиту радіальні напруження дорівнюють нулю:

$$\sigma_r^*(b) = 0. \quad (4.32)$$

Використовуючи крайові умови (4.29)-(4.32), а також отримані вирази (4.16), (4.18), (4.19), (4.21), (4.27) та (4.28) для радіальних переміщень та напружень матриці та волокна, а також осьових переміщень складових композиту, отримаємо систему рівнянь. З неї визначимо невідомі функції $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$, а також співвідношення між σ_0° та $\sigma_0^*(t)$.

Введемо позначення:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ},$$

$$\beta_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu},$$

$$\beta_2 = \frac{2\nu}{1 - \nu},$$

$$\gamma_1 = \frac{E_2^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)},$$

$$\gamma_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}.$$

Вказана система набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2}, \\ \frac{1}{1-\nu} \bar{E}[A(t)] - \frac{1}{(1+\nu)a^2} \bar{E}[B(t)] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_0^*(t) = \\ = \gamma_1 \sigma_0^\circ + \gamma_2 C(t), \\ \beta_1 \bar{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)] - \beta_2 A(t) = \alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 C(t), \\ \frac{1}{1-\nu} \bar{E}[A(t)] - \frac{1}{(1+\nu)b^2} \bar{E}[B(t)] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_0^*(t) = 0. \end{array} \right.$$

Застосувавши до обох частин третього рівняння цієї системи оператор \bar{E}^* , з врахуванням першого рівняння системи отримуємо:

$$\begin{aligned} \beta_1 \sigma_0^*(t) - \beta_2 \bar{E}[A(t)] &= \alpha_1 \sigma_0^\circ h(t) - \\ - \alpha_2 \left(\bar{E}[A(t)] + \frac{\bar{E}[B(t)]}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\text{де } h(t) = \bar{E}[1] = E \left(1 - \int_0^t R(t-\tau) d\tau \right).$$

Замінивши третє рівняння системи на рівняння (4.33), розв'яжемо отриману систему відносно $\bar{E}[A(t)]$, $\bar{E}[B(t)]$ та $C(t)$.

Знаходимо вирази для цих функцій у вигляді:

$$\begin{aligned}\bar{E}[A(t)] &= m(\alpha_1(1-\nu)f \cdot h(t)\sigma_0^\circ - (\alpha_2\nu(1+\nu) + \beta_1(1-\nu)f)\sigma_0^*), \\ \bar{E}[B(t)] &= m(a^2(1+\nu)\alpha_1h(t)\sigma_0^\circ + a^2(1+\nu)(\nu(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1)\sigma_0^*) \\ C(t) &= \frac{1}{\gamma_2}(m\alpha_1(f-1)h(t) - \gamma_1)\sigma_0^\circ + \\ &+ \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu} - m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu} + \nu(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f-1)\right)\right)\sigma_0^*.\end{aligned}$$

де $m = \frac{1}{(\alpha_2 - \beta_2)(1-\nu)f + \alpha_2(1+\nu)}$.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}k_1 &= m\alpha_1(1-\nu)f, \\ k_2 &= m(\alpha_2\nu(1+\nu) + \beta_1(1-\nu)f), \\ k_3 &= m(1+\nu)\alpha_1, \\ k_4 &= m(1+\nu)(\nu(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1), \\ k_5 &= \frac{m\alpha_1(f-1)}{\gamma_2}, \\ k_6 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \\ k_7 &= \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu} - m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu} + \nu(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f-1)\right)\right).\end{aligned}$$

Після застосування оберненого оператора \bar{E}^{-1} до функцій $\bar{E}[A(t)]$ та $\bar{E}[B(t)]$ знаходимо вирази для функцій $A(t)$ та $B(t)$:

$$A(t) = k_1\sigma_0^\circ - k_2\bar{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)], \quad (4.34)$$

$$B(t) = k_3a^2\sigma_0^\circ + k_4a^2\bar{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)]. \quad (4.35)$$

Вираз для $C(t)$ набуває вигляду:

$$C(t) = (k_5h(t) - k_6)\sigma_0^\circ + k_7\sigma_0^*(t). \quad (4.36)$$

Знайдемо співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та σ_0° . Для цього у перше з рівнянь системи підставимо вирази (4.34)-(4.36). Отримаємо:

$$(k_5h(t) - k_6 - k_1 - k_3)\sigma_0^\circ + k_7\sigma_0^* = (k_4 - k_2)E^{-1}[\sigma_0^*].$$

Застосувавши до цієї рівності оператор \bar{E} , отримаємо співвідношення:

$$k_7\bar{E}[\sigma_0^*] + (k_2 - k_4)\sigma_0^* = \bar{E}[k_1 + k_3 + k_6 - k_5h(t)]\sigma_0^\circ. \quad (4.37)$$

Застосуємо до отриманого інтегрального рівняння відносно функції $\sigma_0^*(t)$ перетворення Лапласа. Для оператора $\bar{E}[y(t)]$ зображення при перетворенні Лапласа має вигляд:

$$\bar{E}[y(t)] \div E(\tilde{Y}(p) - \tilde{R}(p)\tilde{Y}(p)) = E\tilde{Y}(p)(1 - \tilde{R}(p)), \quad (4.38)$$

де $\tilde{Y}(p) \div y(t)$, $\tilde{R}(p) \div R(t)$. Знайдемо зображення функції $h(t)$:

$$h(t) = \bar{E}[1] \div \frac{E(1 - \tilde{R}(p))}{p}. \quad (4.39)$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (4.37), з урахуванням співвідношень (4.38) та (4.39) отримуємо алгебраїчне рівняння, що містить $\tilde{S}^*(p)$ – зображення функції $\sigma_0^*(t)$:

$$\begin{aligned} & k_7 E \tilde{S}^*(p)(1 - \tilde{R}(p)) + (k_2 - k_4) \tilde{S}^*(p) = \\ & = E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)) \frac{\sigma_0^\circ}{p}. \end{aligned}$$

З цього рівняння знаходимо зображення функції $\tilde{S}^*(p)$:

$$\tilde{S}^*(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4} \cdot \frac{\sigma_0^\circ}{p} \div \sigma_0^*(t) = \varphi(t) \sigma_0^\circ.$$

Таким чином, співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та $\sigma_0^\circ(t)$ має вигляд:

$$\sigma_0^*(t) = \varphi(t) \sigma_0^\circ, \quad (4.40)$$

де $\varphi(t)$ є оригіналом функції

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4}.$$

Отримавши розв'язок задачі про спільне деформування матриці та волокна, розглянемо задачу про поздовжнє розтягнення для циліндричної комірки з однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень для цієї комірки описується рівностями:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_0(t), \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу формули зворотного закону Гука для нормальних напружень мають вигляд:

$$\sigma_z = \frac{\bar{E}_1 \left[(1 - \nu_{23}^2) \varepsilon_z + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \right]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}, \quad (4.42)$$

$$\sigma_r = \frac{\bar{E}_2 \left[\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_\theta \right]}{1 - 2\nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21} \nu_{23} \nu_{12}}, \quad (4.43)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{E}_2 \left[\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_\theta + (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_r \right]}{1 - 2\nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21} \nu_{23} \nu_{12}}. \quad (4.44)$$

У рівностях (4.42)-(4.44) \bar{E}_1 та \bar{E}_2 – лінійні інтегральні оператори, що мають вигляд (4.2).

При цьому вони пов'язані рівністю:

$$\frac{\bar{E}_1}{\nu_{12}} = \frac{\bar{E}_2}{\nu_{21}}. \quad (4.45)$$

Знайдемо лінійні деформації ε_z , ε_r та ε_θ . Для цього до обох частин рівності (4.42) застосуємо зворотний оператор \bar{E}_1^{-1} , рівностей (4.43) та (4.44) – оператор \bar{E}_2^{-1} . Отримаємо систему:

$$\begin{aligned} & (1 - \nu_{23}^2) \varepsilon_z + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \\ & = (1 - 2\nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21} \nu_{23} \nu_{12}) \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)], \\ & \nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_\theta = 0, \\ & \nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_r + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \varepsilon_\theta = 0. \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо деформацію ε_z :

$$\varepsilon_z = \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)]. \quad (4.46)$$

Знайдемо переміщення $u_z(z, t)$:

$$u_z(z, t) = \int_0^z \varepsilon_z dz_1 = \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)] \cdot z. \quad (4.47)$$

Значення $\sigma_0^*(t)$, $\sigma_0^\circ(t)$ та $\sigma_0(t)$ повинні задовольняти умови рівноваги:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^*(t) = \pi b^2 \sigma_0(t).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на πb^2 , запишемо його у вигляді:

$$f \cdot \sigma_0^\circ + (1 - f) \sigma_0^*(t) = \sigma_0(t). \quad (4.48)$$

Підставивши у цю рівність (4.40), отримаємо:

$$f \cdot \sigma_0^\circ + (1 - f) \varphi(t) \cdot \sigma_0^\circ = \sigma_0(t). \quad (4.49)$$

За умову узгодження переміщень при поздовжньому розтягненні однорідної комірки та комірки «матриця – волокно» виберемо рівність осьових переміщень для довільних значень координати z :

$$u_z^* = u_z^\circ = u_z. \quad (4.50)$$

З (4.50) та співвідношень Коші випливає рівність осьових деформацій матриці, волокна та однорідного матеріалу, що моделює композит.

З врахуванням введених позначень з співвідношень (4.18), (4.36) та (4.40) отримуємо, що осьова деформація волокна має вигляд:

$$\varepsilon_z^\circ = \alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 (k_5 h(t) - k_6 + k_7 \varphi(t)) \sigma_0^\circ. \quad (4.51)$$

Для моделі композита, використовуючи рівність (4.46) та умову (4.48), можна записати, що

$$\varepsilon_z = \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)] = \bar{E}_1^{-1} [f \cdot \sigma_0^\circ + (1-f) \varphi(t) \sigma_0^\circ]. \quad (4.52)$$

Враховуючи умови (4.50), маємо, що виконання умови узгодження забезпечує рівність $\varepsilon_z = \varepsilon_z^\circ$. Підставимо в цю рівність співвідношення (4.51) та (4.52):

$$\alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 (k_5 h(t) - k_6 + k_7 \varphi(t)) \sigma_0^\circ = \bar{E}_1^{-1} [f \cdot \sigma_0^\circ + (1-f) \varphi(t) \sigma_0^\circ].$$

Застосовуючи до обох частин цієї рівності оператор \bar{E}_1 , після ділення на ненульову сталу σ_0° отримуємо:

$$f + (1-f)\varphi(t) = \bar{E}_1 \left[\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(t) - \alpha_2 k_7 \varphi(t) \right]. \quad (4.53)$$

Рівняння (4.53) є лінійним інтегральним рівнянням типу згортки відносно невідомого ядра релаксації композиту $R_1(t)$. Для його розв'язання використаємо перетворення Лапласа. Нехай $R_1(t) \div \tilde{R}_1(p)$. Зважаючи на те, що зображенням для інтегрального оператора $\bar{E}_1[y(t)]$ є вираз

$$\tilde{E}_1[x(t)] \div E_1 \tilde{X}(p)(1 - \tilde{R}_1(p)),$$

то, з урахуванням отриманого раніше зображення функції

$$\varphi(t) \div \tilde{\Phi}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)},$$

знаходимо зображення рівняння (4.53) у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{f}{p} + \frac{(1-f)E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} &= \\ &= E_1 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 E(1 - \tilde{R}(p))}{p} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha_2 k_7 E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} \Bigg) (1 - \tilde{R}_1(p)).$$

Звідси знаходимо:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (4.54)$$

$$F_1(p) = f(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) + (1 - f)E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)),$$

$$F_2(p) = (\alpha_1 + \alpha_2 k_6)(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \alpha_2 k_5 (1 - \tilde{R}(p))E(Ek_7(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \alpha_2 k_7 E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)).$$

Знайдемо миттєвий модуль пружності E_1 . Для цього підставимо в рівняння (4.53) $t = 0$ та скористаємося тим, що $\tilde{E}_1[y(0)] = E_1 y(0)$.

Отримуємо:

$$f + (1 - f) \cdot \varphi(0) = E_1 [\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(0) - \alpha_2 k_7 \varphi(0)]. \quad (4.55)$$

Знайдемо $\varphi(0)$. Відомо, що для диференційовної функції-оригіналу $\varphi(t)$, що має зображення $\Phi(p)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} p\Phi(p) = \varphi(0)$.

Враховуючи, що $\tilde{R}(p)$ є зображенням і тому $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = 0$, знаходимо значення $\varphi(0)$, яке позначимо k :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} = \\ &= \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E)}{k_7 E + k_2 - k_4} = k. \end{aligned}$$

Підставивши у (4.55) знайдене значення $k = \varphi(0)$, а також $h(0) = E$, отримаємо рівняння, з якого визначаємо E_1 :

$$E_1 = \frac{f + (1 - f) \cdot k}{\alpha_1 + \alpha_2 (k_6 - k_5 E - k_7 k)}. \quad (4.56)$$

Знайдемо оригінал $R_1(t)$ ядра інтегрального оператора \bar{E}_1 у виразі для ефективного модуля пружності композита. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} x &= x(p) = 1 - \tilde{R}(p), \\ c_1 &= E(\alpha_1 k_7 + \alpha_2 (k_5 (k_4 - k_2) - k_7 (k_1 + k_3))), \\ c_2 &= (f - 1) E^2 k_5, \\ c_3 &= E(f k_7 + (1 - f)(k_1 + k_3 + k_6)), \end{aligned}$$

$$c_4 = f(k_2 - k_4),$$

$$x_0 = \frac{(k_4 - k_2)(\alpha_1 + \alpha_2 k_6)}{c_1}.$$

Тоді зображення $\tilde{R}_1(p)$ можна записати у вигляді:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 (x - x_0) - c_2 x^2 - c_3 x - c_4}{E_1 c_1 (x - x_0)}. \quad (4.57)$$

Особливими точками зображення $\tilde{R}_1(p)$ (4.57) є особливі точки функції $R(p)$, а також корені рівняння $x(p) = 1 - \tilde{R}(p) = 0$. Для знаходження оригіналу $R_1(t)$ можна використати теорему обернення для перетворення Лапласа.

Розглянемо випадок експоненціального ядра $R(t) = s_1 e^{s_0 t}$. Тоді отримуємо:

$$\tilde{R}(p) = \frac{s_1}{p - s_0},$$

$$x(p) = \frac{p - s_0 - s_1}{p - s_0}.$$

Введемо позначення:

$$y_1 = y_1(p) = p - s_0,$$

$$y_2 = y_2(p) = y_1 - s_1.$$

Вираз для $\tilde{R}_1(p)$ набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 y_1 (y_2 - x_0 y_1) - c_2 y_2^2 - c_3 y_2 y_1 - c_4 y_1^2}{E_1 c_1 (y_2 - y_1 x_0) y_1}.$$

Особливі точки цієї функції знаходимо з рівнянь

$$y_2(p) - y_1(p) x_0 = 0,$$

$$y_1(p) = 0.$$

Отримуємо два прості полюси:

$$p_1 = s_0 + \frac{s_1}{1 - x_0},$$

$$p_2 = s_0.$$

Тоді оригінал $R_1(t)$ знайденого зображення перетворення $\tilde{R}_1(p)$ знаходимо у вигляді:

$$R_1(t) = q_1 e^{p_1 t} + q_2 e^{p_2 t}. \quad (4.58)$$

У цьому виразі значення коефіцієнтів q_1 та q_2 :

$$q_1 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=p_1} = -\frac{s_1(c_2x_0^2 + c_3x_0 + c_4)}{E_1c_1(1-x_0)^2},$$

$$q_2 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=s_0} = \frac{c_2s_1}{E_1c_1}.$$

Таким чином, для розглянутого двофазового композиту, що складається з в'язкопружної ізотропної матриці і трансверсально-ізотропного волокна отримано лінійний інтегральний оператор \bar{E}_1 , що характеризує поздовжній модуль пружності першого роду, тобто одну з ефективних характеристик, з допомогою якої композит подається в'язкопружним трансверсально-ізотропним однорідним матеріалом.

Як приклад застосування викладеної вище методики побудови оператора \bar{E}_1 проведено розрахунок його характеристик при наступних параметрах волокна і матриці. Матеріал матриці – гума типу 67Л, для якої $E_0 = 4,5$ ГПа, статичний (умовно-рівноважний) поздовжній модуль пружності $E_\infty = 2,34$ ГПа, $\nu = 0,5$, інтегральний оператор

$$\tilde{E}[\varepsilon(t)] = E_0 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E_0 - E_\infty}{E_0} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right).$$

Тут $s_0 = -1$, волокно – поліетилен VHDPE Tenfor SNIA з параметрами $E_1 = 60,4$ ГПа, $E_2 = 4,68$ ГПа, $\nu_{12} = 0,38$, $\nu_{23} = 0,55$.
Результати розрахунку наведені в таблиці 4.1.

Для знайдених параметрів реологічної моделі композита при різних значеннях f побудуємо залежності

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\tilde{E}_1[1]}{E_1} = 1 - \int_0^t \left(q_1 e^{p_1(t-\tau)} + q_2 e^{s_0(t-\tau)} \right) d\tau = \\ &= 1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{s_0} - \frac{q_1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{q_2}{s_0} e^{s_0 t}. \end{aligned}$$

Таблиця 4.1 – Значення характеристик оператора \bar{E}_1 при різних значеннях f

f	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
E_1	4,5	15,69	26,87	38,06	40,23	60,40
p_1	-0,89	-0,91	-0,93	-0,95	-0,98	-1,00
q_1	$3,6 \cdot 10^{-17}$	$0,28 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-9}$
q_2	0,480	0,11	0,048	0,022	0,009	0,00

Відповідні графіки наведені на рис.4.5.

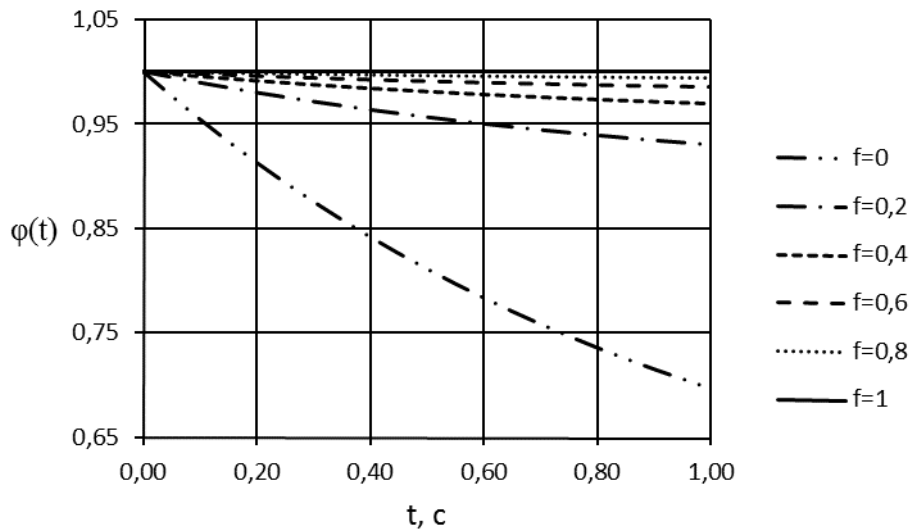


Рис. 4.5 – Часові залежності реологічних характеристик композиту

Отже, запропонована методика дозволяє знаходити реологічні параметри ефективного поздовжнього модуля пружності в'язкопружного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композитну систему «матриця-волокно» для в'язкопружної ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. Вона може бути використана для різних типів ядер релаксації, що описують в'язкопружні властивості матриці.

Визначимо параметри інтегрального оператора, що відповідає поздовжньому модулю пружності для композиту, фазами якого є трансверсально-ізотропні матриця та волокно. Як і у розглянутій вище задачі, матриця є в'язкопружною. Для цього випадку знайдемо компоненти напружено-деформованого стану матриці.

Нормальні напруження у матриці мають вигляд:

$$\sigma_z^* = \sigma_0^*(t),$$

$$\sigma_r^* = \sigma_r^*(r, t),$$

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(r, t),$$

дотичні напруження дорівнюють нулю.

Радіальні переміщення матриці отримуємо аналогічно розглянутому вище випадку у вигляді:

$$u_r^*(r, t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (4.59)$$

Деформації ε_r^* , ε_θ^* та ε_z^* мають вигляд:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A(t) - \frac{B(t)}{r^2},$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}.$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} (\bar{E}_1^*)^{-1} [\sigma^*(t)] - \frac{2\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} A(t),$$

$$\sigma_r^* = \frac{\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} \sigma^*(t) + \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 - \nu_{23}^*)} \bar{E}_1^* [A(t)] - \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 + \nu_{23}^*)} \cdot \frac{\bar{E}_1^* [B(t)]}{r^2}.$$

Тут \bar{E}_1^* – лінійний інтегральний оператор

$$\bar{E}_1^* [y(t)] = E_1^* \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right).$$

З крайових умов (4.29)-(4.32) отримуємо систему рівнянь відносно невідомих функцій $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ та співвідношення між $\sigma^*(t)$ та $\sigma^\circ(t)$. Застосувавши до неї інтегральне перетворення Лапласа. Нехай

$$A(t) \div \tilde{A}(p),$$

$$B(t) \div \tilde{B}(p),$$

$$C(t) \div \tilde{C}(p),$$

$$\sigma^*(t) \div \tilde{\sigma}^*(p),$$

$$\sigma^\circ(t) \div \tilde{\sigma}^\circ(p).$$

Зображення інтегрального оператора має вигляд:

$$\bar{E}_1^* [y(t)] \div \tilde{E}_1^* \tilde{Y}(p) = E_1^* \left[\tilde{Y}(p) (1 - \tilde{R}(p)) \right],$$

де $\tilde{R}(p)$ – зображення ядра $R(t)$.

Далі використаємо наступні позначення:

$$\alpha^\circ = \frac{v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ},$$

$$\alpha^* = \frac{v_{21}^*}{1 - v_{23}^*},$$

$$\beta^\circ = \frac{\alpha^\circ}{v_{12}^\circ},$$

$$\beta^* = \frac{\alpha^*}{v_{12}^*},$$

$$\gamma^* = \frac{v_{21}^*}{v_{12}^* (1 + v_{23}^*)},$$

$$\delta^\circ = \frac{1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ},$$

$$\delta^* = \frac{1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*}{1 - v_{23}^*},$$

$$y^* = E_1^* (1 - \tilde{R}(p)).$$

З врахуванням цих позначень система рівнянь відносно зображень невідомих функцій набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta^\circ E_1^\circ - \beta^* y^*) \tilde{A} + (\beta^\circ E_1^\circ + \gamma^* y^*) \frac{\tilde{B}}{a^2} = \alpha^* \tilde{\sigma}^* - \alpha^\circ \tilde{\sigma}^\circ, \\ \alpha^* \tilde{\sigma}^* + \beta^* y^* \tilde{A} - \gamma^* y^* \frac{\tilde{B}}{b^2} = 0, \\ 2(\alpha^\circ - \alpha^*) y^* \tilde{A} + 2\alpha^\circ y^* \frac{\tilde{B}}{a^2} = -\delta^* \tilde{\sigma}^* + \frac{\delta^\circ}{E_1^0} y^* \tilde{\sigma}^\circ. \end{array} \right. \quad (4.60)$$

З цієї системи знайдемо невідомі \tilde{A} , $\frac{\tilde{B}}{a^2}$ та відношення $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$.

Введемо допоміжні позначення:

$$k_1 = 2((\alpha^* - \alpha^\circ)\gamma^* - \alpha^\circ\beta^*),$$

$$k_2 = 2\alpha^*\beta^\circ E_1^\circ,$$

$$k_3 = 2\alpha^\circ\alpha^* + \delta^*\gamma^*,$$

$$k_4 = \delta^*\beta^\circ E_1^\circ,$$

$$k_5 = \frac{\gamma^*\delta^\circ}{E_1^\circ},$$

$$k_6 = 2(\alpha^\circ)^2 + \beta^\circ\delta^\circ,$$

$$k_7 = \beta^*\delta^* + 2(\alpha^* - \alpha^\circ)\alpha^*,$$

$$k_8 = -\beta^\circ E_1^\circ \delta^*,$$

$$k_9 = \frac{\beta^*\delta^\circ}{E_1^\circ},$$

$$k_{10} = 2\alpha^\circ(\alpha^* - \alpha^\circ) - \beta^\circ\delta^\circ.$$

Вирази для \tilde{A} , $\frac{\tilde{B}}{a^2}$ та $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$ набувають вигляду:

$$\tilde{A} = \frac{(k_3 y^* + k_4)\tilde{\sigma}^* - (k_5 (y^*)^2 + k_6 y^*)\tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\tilde{B}}{a^2} = \frac{(k_7 y^* + k_8) \tilde{\sigma}^* - (k_9 (y^*)^2 + k_{10} y^*) \tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}, \quad (4.62)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ} = \frac{(\beta^* k_5 - \gamma^* f k_9) (y^*)^2 + (\beta^* k_6 - \gamma^* f k_{10}) y^*}{(\alpha^* k_1 + \beta^* k_3 - \gamma^* f k_7) y^* + \alpha^* k_2 + \beta^* k_4 - \gamma^* f k_8}. \quad (4.63)$$

Для зображення \tilde{C} отримуємо:

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{a^2}. \quad (4.64)$$

Напруження у точках однорідного трансверсально-ізотропного композиту визначаються рівностями (4.41).

В'язкопружні властивості однорідного композиту моделюються з допомогою інтегрального оператора

$$\bar{E}_1 [x(t)] = E_1 \cdot \left(x(t) - \int_0^t R(t-\tau) x(\tau) d\tau \right), \quad (4.65)$$

де E_1 – миттєвий модуль пружності, $R(t)$ – ядро релаксації гомогенізованого композиту.

Для визначення параметрів інтегрального оператора, що відповідає ефективному поздовжньому модулю пружності застосуємо кінематичну умову узгодження осьових деформацій.

Перейдемо до простору зображень перетворення Лапласа. Зображення осьової деформації волокна має вигляд:

$$\tilde{\varepsilon}_z^\circ = \frac{\tilde{\sigma}^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - 2\nu_{21}^\circ E_1^\circ \tilde{C}}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}. \quad (4.66)$$

Для зображення осьової деформації гомогенізованого композиту маємо рівність:

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\tilde{\sigma}}{E_1(1 - \tilde{R})} = \frac{f\tilde{\sigma}^\circ + (1 - f)\tilde{\sigma}^*}{E_1(1 - \tilde{R})}. \quad (4.67)$$

Виконання умови узгодженості осьових деформацій матриці, волокна та композиту забезпечується рівністю $\tilde{\varepsilon}_z = \tilde{\varepsilon}_z^\circ$. Підставивши у цю рівність співвідношення (4.66) та (4.67), отримуємо:

$$\frac{f\tilde{\sigma}^\circ + (1 - f)\tilde{\sigma}^*}{E_1(1 - \tilde{R})} = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\tilde{\sigma}^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\tilde{C}\nu_{21}^\circ \right). \quad (4.68)$$

Вирази для зображень $\tilde{\sigma}^\circ$, $\tilde{\sigma}^*$ та \tilde{C} містять $y^* = E_1^*(1 - \tilde{R}^*)$. Перейшовши у рівності (4.68) до границі при $p \rightarrow \infty$ та враховуючи, що $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}^*(p) = 0$, отримуємо вираз для миттєвого поздовжнього модуля пружності.

Введемо позначення:

$$d_1 = \frac{-(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^3 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*},$$

$$d_2 = v_{21}^* (1-f)^2 \left(v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) (1-v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^* v_{12}^\circ}{v_{12}^*} \times \right.$$

$$\times f(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \times (1-v_{23}^\circ) - (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) v_{21}^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \left. \right),$$

$$d_3 = v_{21}^* (f-1) f (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) v_{21}^\circ E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) - (v_{21}^\circ)^2 \times$$

$$\times \frac{v_{12}^*}{v_{12}^\circ} E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) (1-f) -$$

$$- f v_{21}^\circ E_1^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ),$$

$$d_4 = f (v_{21}^\circ)^2 (E_1^\circ)^2 v_{12}^* (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) (v_{23}^* (f-1) - 1 - f),$$

$$d_5 = \frac{(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^2 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*},$$

$$d_6 = v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ) v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) + v_{21}^\circ \times$$

$$\times (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ)) \times v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) +$$

$$+ 2f (v_{21}^*)^2 v_{21}^\circ v_{12}^\circ (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ),$$

$$d_7 = \frac{(v_{21}^\circ)^2 v_{12}^* E_1^\circ}{v_{12}^\circ} (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ)) \times$$

$$\times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) +$$

$$+2(v_{21}^\circ)^2 E_1^\circ v_{12}^* v_{21}^* (1 + v_{23}^* + f(1 - v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*)).$$

Тоді вираз для зображення інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності з врахуванням цих позначень має вигляд:

$$\tilde{E}_1 = E_1 (1 - \tilde{R}) = \frac{d_1 (\tilde{E}_1^*)^3 + d_2 (\tilde{E}_1^*)^2 + d_3 \tilde{E}_1^* - d_4}{d_5 (\tilde{E}_1^*)^2 - d_6 \tilde{E}_1^* + d_7}.$$

Вираз для миттєвого модуля пружності набуває вигляду:

$$E_1 = \frac{d_1 (E_1^*)^3 + d_2 (E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7},$$

де E_1^* – миттєвий модуль пружності матриці.

Зображення ядра релаксації знайдемо з (4.68):

$$\tilde{R} = 1 - \frac{(f \tilde{\sigma}^\circ + (1-f) \tilde{\sigma}^*) (1 - v_{23}^\circ) E_1^\circ}{E_1 (\tilde{\sigma}^\circ (1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) - 2E_1^\circ v_{21}^\circ \tilde{C})}.$$

Вираз для нього через параметри комірки композиту має вигляд:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{E_1 \left[d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7 \right]}{d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7} - \frac{1}{E_1} \frac{d_1 (y^*)^3 + d_2 (y^*)^2 + d_3 y^* - d_4}{d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7}. \quad (4.69)$$

За знайденим зображенням, використовуючи теорему обернення для перетворення Лапласа, знаходимо оригінал ядра релаксації $R(t)$. Ця задача розв'язується достатньо просто для ядра релаксації матриці експоненціального типу. У такому випадку зображенням ядра релаксації для композиту є відношення двох поліномів, що має скінченну кількість полюсів. У цьому випадку знаходимо оригінал перетворення Лапласа, використовуючи теорему розкладу.

Нехай ядро релаксації для матриці

$$R^*(t) = be^{at} \div \tilde{R}(p) = \frac{b}{p-a}.$$

У цьому випадку зображення ядра набуває вигляду:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{Q(p)}{(p-a)(s_1 p^2 - s_2 p + s_3)}, \quad (4.70)$$

$$Q(p) = -d_1 (E_1^*)^3 (p-a-b)^3 + (E_1 d_5 - d_2) (E_1^*)^2 (p-a-b)^2 (p-a) - (E_1 d_6 + d_3) E_1^* (p-a-b)(p-a)^2 + (E_1 d_7 + d_4) (p-a)^3,$$

$$s_1 = d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7,$$

$$s_2 = 2(a+b)d_5 (E_1^*)^2 - (2a+b)d_6 E_1^* + 2ad_7,$$

$$s_3 = d_5 (E_1^*)^2 (a+b)^2 - d_6 E_1^* a(a+b) + d_7 a^2.$$

Оригінал ядра релаксації для композиту має вигляд:

$$R(t) = \alpha_0 e^{at} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t},$$

де p_1 та p_2 – корені квадратного тричлена у знаменнику корні квадратного трохчлена у знаменнику (4.70), коефіцієнти α_0 , α_1 та α_2 визначаємо за формулами:

$$\alpha_0 = \frac{Q(a)}{E_1 s_1 (a - p_1)(a - p_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{Q(p_1)}{E_1 s_1 (p_1 - a)(p_1 - p_2)},$$

$$\alpha_2 = \frac{Q(p_2)}{E_1 s_1 (p_2 - a)(p_2 - p_1)}.$$

За викладеною методикою визначені в'язкопружні характеристики композиту, фазами якого є трансверсально-ізотропне пружне волокно – поліетилен VHDPE Tenfor SNIA з параметрами $E_1^\circ = 60,4$ ГПа, $\nu_{12}^\circ = 0,38$, $\nu_{21}^\circ = 0,03$ $\nu_{23}^\circ = 0,55$ та ізотропна

в'язкопружна матриця – епоксидна смола Ciba-Geigy 913 ($E_1^* = E_2^* = E^* = 5,55$ ГПа, $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = \nu_{13}^* = \nu^* = 0,37$). Її в'язкопружні характеристики описуються інтегральним оператором

$$\bar{E}_1^*[\varepsilon(t)] = E^* \left(\varepsilon(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right).$$

У результаті розрахунку отримано залежності ефективного миттєвого модуля пружності E_1 та коефіцієнтів ядра релаксації

$$R(t) = \alpha_0 e^{-t} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} \quad (4.71)$$

від об'ємного вмісту f волокна у композиті. Значення цих характеристик при деяких f наведені у таблиці 4.2. Відзначимо, що залежність $E_1(f)$ є близькою до лінійної.

При довільних значеннях f найбільший внесок у реологічні характеристики композиту вносить доданок, що містить e^{-t} : коефіцієнт α_0 є максимальним за абсолютною величиною серед коефіцієнтів при експонентах у формулі (4.71) для ядра релаксації композиту.

Вибір експоненти e^{-t} як ядра релаксації для в'язкопружної матриці не повною мірою відповідає відомим експериментальним даним, оскільки це ядро є скінченним при $t = \tau$. Проте при великих значеннях часу t воно адекватно відображає якісні сторони лінійного

деформування в'язкопружного матеріалу, що виправдовує вибір такого ядра релаксації.

Таблиця 4.2. Значення характеристик оператора \bar{E}_1 при окремих значеннях об'ємного вмісту волокна у композиті

f	0,2	0,4	0,6	0,8
E_1 , ГПа	15,69	26,87	38,06	40,23
p_1	-0,784	-0,838	-0,893	-0,947
p_2	-0,781	-0,835	-0,888	-0,943
α_0	0,269	0,121	0,057	0,022
α_1	$0,26 \cdot 10^{-5}$	$0,99 \cdot 10^{-5}$	$0,43 \cdot 10^{-5}$	$0,54 \cdot 10^{-5}$
α_2	$0,19 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$0,75 \cdot 10^{-5}$	$-0,31 \cdot 10^{-5}$

Використання експоненціального ядра релаксації відповідає вибору для дослідження в'язкопружного стану матриці моделі типу Максвелла [139]. У цьому випадку матеріал подається у вигляді сполучення в'язких та пружних елементів, що з'єднані послідовно. При сталій у часі лінійній одиничній деформації лінійне осьове напруження у матриці $\sigma = \bar{E}_1^* [1] = 5,5 \cdot e^{-t}$. При $t \rightarrow \infty$ воно прямує до нуля. Існують матеріали, у яких ця залежність адекватно відображає зміну напруження у часі за умови сталості деформації [139]. Таку залежність для композиту маємо при $f = 0$, коли матеріал композиту співпадає з матеріалом матриці. При відмінних від нуля значеннях відносного об'ємного вмісту f волокна у композиті напруження зі

зростанням часу прямує до сталої величини, відмінної від нуля. У цьому випадку отримуємо модель Кельвіна для в'язкопружного композиту.

Таким чином, розглянута методика, що ґрунтується на використанні кінематичної умови узгодження у поєднанні з операційним методом, дозволяє визначати ефективні параметри інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту, що моделює систему «матриця – волокно» з трансверсально-ізотропними компонентами. Її можна застосувати при різних типах ядер релаксації, що моделюють в'язкопружні властивості матриці.

У розглянутих задачах гомогенізації трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту при поздовжньому розтягненні в'язкопружні властивості матриці та гомогенізованого композиту враховувалися шляхом використання інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності.

Розглянемо методику визначення операторного ефективного поздовжнього модуля пружності трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту на основі використання енергетичного критерію узгодженості.

Тут ефективні характеристики композиту визначаються з умови рівності пружної енергії деформування елементарної комірки, що складається з матриці та волокна, та пружної енергії деформування елементарної комірки однорідного композиту.

Розглядається випадок в'язкопружного композиту з трансверсально-ізотропними в'язкопружною матрицею та пружним волокном.

Для визначення операторного ефективного поздовжнього модуля пружності спочатку знайдемо вказані вище величини енергії пружного деформування. Після цього, застосувавши енергетичний критерій, отримаємо ефективні показники пружного композиту, а потім для знаходження розв'язку відповідної в'язкопружної характеристики перейдемо до простору лапласових зображень.

Тоді вирази для компонент напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного пружного волокна подаються наступними формулами:

$$u_r^\circ(r) = Cr; \quad (4.72)$$

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z; \quad (4.73)$$

$$\sigma_r^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \quad (4.74)$$

$$\sigma_\theta^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \quad (4.75)$$

$$\sigma_z^\circ = \sigma_0^\circ, \quad (4.76)$$

$$\varepsilon_r^\circ(r) = C; \quad (4.77)$$

$$\varepsilon_\theta^\circ(r) = C; \quad (4.78)$$

$$\varepsilon_z^\circ(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right). \quad (4.79)$$

Тут C – стала інтегрування.

Для трансверсально-ізотропної пружної матриці компоненти напружено-деформованого стану визначаються формулами:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r}; \quad (4.80)$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_0^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z; \quad (4.81)$$

$$\sigma_r^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right); \quad (4.82)$$

$$\sigma_\theta^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right); \quad (4.83)$$

$$\sigma_z^* = \sigma_0^*, \quad (4.84)$$

$$\varepsilon_r^*(r) = A - \frac{B}{r^2}; \quad (4.85)$$

$$\varepsilon_\theta^*(r) = A + \frac{B}{r^2}; \quad (4.86)$$

$$\varepsilon_z^*(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^*} \left(\frac{\sigma_0^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right). \quad (4.87)$$

У останніх рівностях A, B – сталі інтегрування, модулі пружності та коефіцієнти Пуассона пов'язані співвідношенням

$$\frac{E_1^*}{\nu_{12}^*} = \frac{E_2^*}{\nu_{21}^*},$$

Вирази для напружень та деформацій пружного трансверсально-ізотропного композиційного матеріалу описуватимуться формулами:

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_1} \sigma_0;$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0,$$

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\theta = 0;$$

$$\sigma_z = \sigma_0.$$

Запишемо умову узгодженості при використанні енергетичного критерію, тобто умову рівності пружної енергії деформації трансверсально-ізотропного однорідного циліндра, що моделює композиційний матеріал, та пружної енергії деформації системи з двох коаксіальних циліндрів – суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що моделює матрицю:

$$U^* + U^\circ = U. \quad (4.88)$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композиційного матеріалу має вигляд:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz.$$

Вираз для суми пружних енергій деформації матриці та волокна набуде вигляду:

$$U^* + U^\circ = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_r^* \tilde{\varepsilon}_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \sigma_z^* \varepsilon_z^*) r dr d\theta dz + \\ + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \sigma_z^* \varepsilon_z^*) r dr d\theta dz.$$

Враховуючи вирази для напружень та деформацій волокна при поздовжньому розтягненні, а також вирази для коефіцієнтів A , B та C , знайдені з крайових умов, отримуємо наступний вираз для суми пружних енергій деформації матриці та волокна:

$$U^* + U^\circ = \frac{\pi h a^2 (\sigma_0)^2}{2E_1 (1 - \nu_{23}^\circ) (l_1 - l_2)^2 (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \times \\ \times \left(\left((l_1 - l_2)^2 (1 - \nu_{23}^\circ) - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ l_1 (l_1 - 2l_2) \right) (d^*)^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. -4\nu_{21}^{\circ} E_1^{\circ} l_1 l_2 \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} d^* d^{\circ} + 2E_1^{\circ} E_2^{\circ} (l_1)^2 \frac{\nu_{12}^* \nu_{12}^*}{E_1^* E_1^*} (d^{\circ})^2 \right) + \\
& + \frac{\pi h (\sigma_0)^2 (b^2 - a^2)}{E_1^* (d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ}))^2 (l_1 - l_2)^2} \times \\
& \times \left(\left(\left(\frac{l_1 - l_2}{2} + 2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^{\circ} \right) (l_1 - l_2) + \nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^{\circ} l_2 \right) (d^{\circ})^2 + \right. \\
& \left. + f \nu_{21}^{\circ} \nu_{21}^{\circ} \tilde{E}_2^* E_1^* (f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)) (d^*)^2 - 2E_2^* f \nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^* l_1 d^* d^{\circ} \right). \quad (4.89)
\end{aligned}$$

У цих формулах

$$\begin{aligned}
l_1 &= E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^{\circ}), \\
l_2 &= E_2^{\circ} (f (1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)), \\
d^{\circ} &= \frac{E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ} \nu_{21}^{\circ}) - E_2^{\circ} (f (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*))}{E_1^{\circ}}; \\
d^* &= \frac{E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^{\circ}) - E_2^{\circ} (f (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*))}{E_1^*},
\end{aligned}$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композиту набуває вигляду:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^b \int_0^h (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} + \sigma_z \varepsilon_z) r dz dr d\theta = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2 \tilde{E}_1}. \quad (4.90)$$

На основі енергетичної умови узгодженості з рівності $U^* + U^\circ = U$ матимемо:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{\left(d^\circ + f(d^* - d^\circ)\right)^2} \left(\frac{(1-f)}{E_1^*} \left(1 + \frac{2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ}{l_1 - l_2}\right) (d^\circ)^2 + \right. \\ \left. + \frac{f}{E_1^\circ} \left(1 + \frac{2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ E_2^* (1-f)}{l_1 - l_2}\right) (d^*)^2 - \frac{4\nu_{21}^* f \nu_{21}^\circ (1-f)}{l_1 - l_2} d^* d^\circ \right).$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності для пружного композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними пружними матрицею та волокном у вигляді:

$$E_1 = \frac{d_1 (E_1^*)^3 + d_2 (E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7}. \quad (4.91)$$

Тут коефіцієнти d_i мають таке ж значення, що й у рівності (4.69). Для знаходження параметрів ефективного інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності в'язкопружного композиту замінимо у отриманому виразі для E_1 пружні сталі зображеннями відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Зображення інтегрального оператора \bar{E}_1 та \bar{E}_1^* мають вигляд:

$$\bar{E}_1 \div E_1(1 - \tilde{R}),$$

$$\bar{E}_1^* \div E_1^*(1 - \tilde{R}^*),$$

де E_1 та E_1^* – миттєві модулі пружності відповідно для однорідного композиту та матриці, \tilde{R} та \tilde{R}^* – зображення відповідних ядер релаксації. Отже, отримуємо:

$$E_1(1 - \tilde{R}) = \frac{d_1(E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^3 + d_2(E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 + d_3E_1^*(1 - \tilde{R}^*) - d_4}{d_5(E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 - d_6E_1^*(1 - \tilde{R}^*) + d_7}.$$

З останньої рівності знаходимо вираз для зображення ядра релаксації, що співпадає з ядром, визначеним за формулою (4.69).

Оскільки у запропонованій моделі в'язкопружного композиту коефіцієнт Пуассона ν_{12} є сталим, то для його визначення використаємо пружні розв'язки задач про поздовжнє розтягнення матриці, волокна та однорідного композиту.

Як умову узгодженості приймемо рівність радіальних переміщень на зовнішніх циліндричних поверхнях матриці та комірки, що моделює однорідний композит. З цієї умови знаходимо наступний вираз для коефіцієнта Пуассона ν_{12} :

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ)\nu_{12}^* + 2E_2^\circ f(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (4.92)$$

де параметри α та β мають наступний вигляд:

$$\alpha = E_2^* (1 - f) (1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ (f (1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)),$$
$$\beta = \nu_{21}^\circ E_2^* (1 - f) + \nu_{21}^* f E_2^\circ.$$

Отже, для визначення параметрів інтегрального оператора, що відповідає ефективному поздовжньому модулю пружності можна використати кілька підходів.

Перший з них полягає у розв'язанні двох крайових задач: задачі про сумісне поздовжнє розтягнення в'язкопружної матриці та пружного волокна та задачі про аналогічне деформування елементарної комірки, заповненої однорідним в'язкопружним трансверсально-ізотропним композитом. Для знаходження розв'язків цих задач використовуємо інтегральне перетворення Лапласа.

Далі для знаходження ефективного миттєвого модуля пружності та відповідного ядра релаксації використовуємо кінематичні умови узгодження осьових переміщень матриці, волокна та однорідного композиту. При використанні даного підходу можна спочатку отримати пружні розв'язки вказаних задач, а далі застосувати принцип Вольтерра з переходом у простір лапласових зображень.

Альтернативний підхід полягає у застосуванні енергетичного критерію узгодження для визначення ефективного пружного модуля E_1 з подальшим отриманням в'язкопружного розв'язку на основі

використання принципу Вольтерра або інтегрального перетворення Лапласа.

Зауважимо, що значні труднощі при використанні обох підходів викликає реалізація оберненого перетворення Лапласа. Для розв'язання цієї задачі на практиці у більшості випадків доводиться застосовувати наближені формули для відновлення оригіналу за заданим зображенням.

4.3 Поперечне розтягнення

Здійснимо дослідження поперечного осесиметричного розтягнення волокнистого композиту, розглянутого у п. 4.1, для випадку трансверсально-ізотропного пружного волокна та в'язкопружної ізотропної матриці (рис. 4.6).

Розглянемо спільне осесиметричне поперечне розтягнення матриці і волокна.

Для циліндричної комірки, що моделює систему «матриця – волокно», визначаємо крайові умови:

$$\sigma_r^*(r=b) = \sigma_0, \quad (4.93)$$

$$\sigma_r^\circ(r=a) = \sigma_r^*(r=a), \quad (4.94)$$

$$u_r^\circ(r=a) = u_r^*(r=a), \quad (4.95)$$

$$u_z^\circ(z=h) = u_z^*(z=h) \quad (4.96)$$

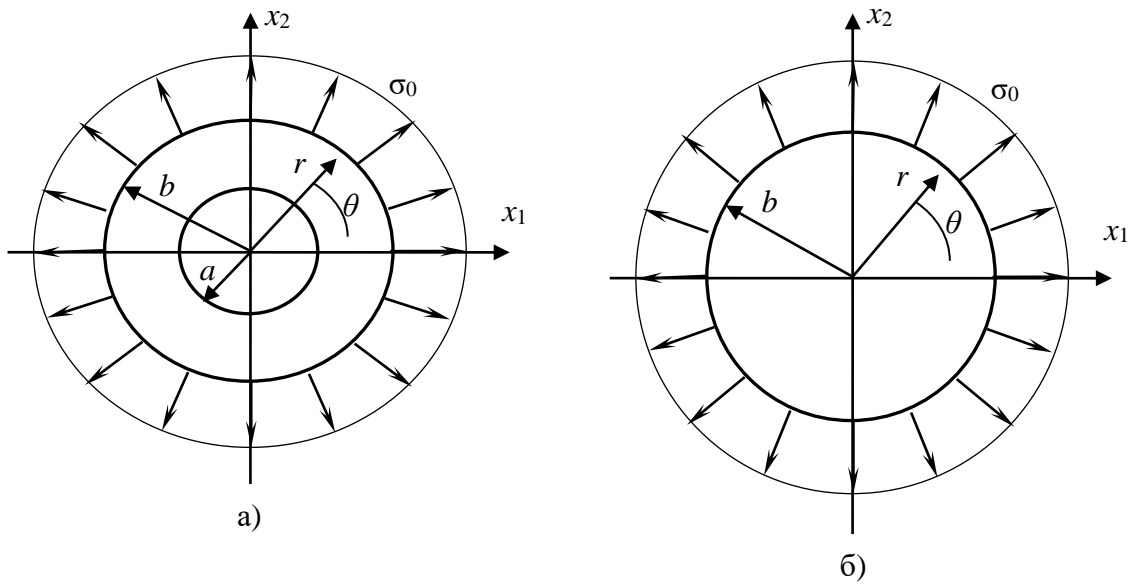


Рис. 4.6 – Поперечне розтягнення: а – сумісне деформування матриці та волокна; б – деформування композита

Нехай на зовнішню поверхню циліндра, що моделює матрицю ($r = b$), діє нормальне навантаження, що розтягує його у напрямі зростання радіальної координати. Для осесиметричного напружено-деформованого стану циліндрів, що моделюють матрицю і волокно, маємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4.97)$$

Інші рівняння рівноваги виконуються тотожно. Використовуючи закон Гука і співвідношення Коші, з (4.97) отримуємо диференціальне рівняння відносно радіальних переміщень u_r :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$u_r(r, t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (4.98)$$

Нехай $\sigma_0^*(t)$ та $\sigma_0^\circ(t)$ – осеві напруження у матриці та волокні. Розглянемо деформування волокна. Оскільки радіальне переміщення його точок є обмеженим при $r=0$, то коефіцієнт при $\frac{1}{r}$ повинен дорівнювати нулю. Тоді вираз для радіального переміщення точок волокна набуває вигляду:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r. \quad (4.99)$$

Вирази для осевого переміщення та радіального напруження точок трансверсально-ізотропного пружного матеріалу волокна мають вигляд:

$$u_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t)\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (4.100)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right). \quad (4.101)$$

У цих виразах E_1° та E_2° – поздовжній та поперечний модулі пружності першого роду, ν_{12}° , ν_{21}° та ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, індекс 1 відповідає осі z , перпендикулярній до площини ізотропії, $\sigma_0^\circ(t)$ – осьове напруження у точках волокна.

Реологічні властивості матриці, згідно зі спадковою теорією Больцмана-Вольтерра, будемо описувати з допомогою лінійного інтегрального оператора

$$\bar{E}_1^* [\varepsilon(t)] = E_1^* \cdot \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R_1^*(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right),$$

де $E_1^* = \text{const}$ – миттєвий модуль пружності, $R_1^*(t)$ – ядро релаксації в'язкопружної матриці.

Радіальні переміщення $u_r^*(r, t)$ точок матриці запишемо у вигляді (4.98). Залежності для її осьових переміщень та радіальних напружень набувають вигляду:

$$u_z^*(z, t) = \frac{1}{1-\nu^*} \left((1-\nu^* - 2\nu^{*2}) \cdot (\bar{E}_1^*)^{-1} [\sigma_0^*(t)] - 2A(t)\nu^* \right) z,$$

$$\sigma_r^*(r, t) = \frac{\nu^*}{1-\nu^*} \cdot \left(\sigma_0^*(t) + \frac{\bar{E}_1^* [A(t)]}{\nu^*} \right) - \frac{\bar{E}_1^* [B(t)]}{(1+\nu^*)r^2}.$$

Тут ν^* – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Використовуючи крайові умови (4.93)-(4.96), а також вирази для переміщень та напружень матриці та волокна, отримаємо систему рівнянь відносно функцій $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$, а також співвідношення між величинами $\sigma_0^*(t)$ та $\sigma_0^\circ(t)$.

Рівність (4.95) дозволяє виключити функцію $C(t)$:

$$C(t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2}.$$

Наявність у отриманій системі лінійного інтегрального оператора, що містить згортку функцій дозволяє спростити її розв'язання шляхом використання інтегрального перетворення Лапласа за змінною t часу.

Позначимо зображення $\sigma_0(t)$, $\sigma_0^*(t)$, $\sigma_0^\circ(t)$, $A(t)$, $B(t)$ відповідно $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, де p – параметр перетворення Лапласа, $\tilde{R}_1^*(p)$ – зображення ядра релаксації матриці.

Далі використаємо наступні позначення:

$$\alpha_1^* = \frac{E_1^*}{1 - \nu^*},$$

$$\alpha_2^* = \frac{E_1^*}{1 + \nu^*},$$

$$\alpha_3^* = \frac{\nu^*}{1 - \nu^*},$$

$$\alpha_4^* = \frac{1 - \nu^* - 2\nu^{*2}}{E_1^*(1 - \nu^*)},$$

$$\alpha_1^\circ = \frac{\nu_{21}^\circ E_1^\circ}{\nu_{12}^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)},$$

$$\alpha_3^\circ = \frac{\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ},$$

$$\alpha_4^\circ = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)},$$

$$x^* = 1 - \tilde{R}_1^*(p).$$

Після застосування перетворення Лапласа отримуємо систему відносно невідомих $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$. Вона має вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_1^* x^* \tilde{A} - \frac{\alpha_2^* x^*}{b^2} \tilde{B} = \varphi - \alpha_3^* \varphi_1; \\ (\alpha_1^\circ - \alpha_1^* x^*) \tilde{A} + (\alpha_1^\circ + \alpha_2^* x^*) \frac{\tilde{B}}{a^2} = \alpha_3^* \varphi_1 - \alpha_3^\circ \varphi_2; \\ 2(\alpha_3^* - \alpha_3^\circ) \tilde{A} - \frac{2\alpha_3^\circ \tilde{B}}{a^2} = \frac{\alpha_4^*}{x^*} \varphi_1 - \alpha_4^\circ \varphi_2. \end{cases} \quad (4.102)$$

З цієї системи можна визначити вирази для зображень $\tilde{A}(p)$ та $\tilde{B}(p)$, а також співвідношення між зображеннями $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$.

Для однорідного трансверсально-ізо­тропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит, напруження σ_z , а також всі дотичні напруження дорівнюють нулю. Оскільки радіальне переміщення $u_r(r, t)$ при $r = 0$ є обмеженим, то вираз для нього отримуємо у вигляді:

$$u_r(r, t) = D(t)r.$$

Використовуючи цю рівність та основні співвідношення теорії пружності для трансверсально-ізо­тропного матеріалу, отримуємо вираз для осьового переміщення у вигляді:

$$u_z(r, z, t) = -\frac{2D(t)v_{21}z}{1 + v_{23}}.$$

Для моделювання співвідношень між напруженнями та деформаціями в'язкопружного однорідного композиту будемо використовувати інтегральний оператор, аналогічний за структурою до оператора, введеного для матриці:

$$\bar{E}_1[\varepsilon(t)] = E_1 \cdot \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right). \quad (4.103)$$

З врахуванням крайової умови $\sigma_r(b) = \sigma_0(t)$ нормальне напруження у точках однорідного композиту можна записати у наступній формі:

$$\sigma_r(t) = \frac{\nu_{21} \bar{E}_1 [D(t)]}{\nu_{12} (1 - \nu_{23})} = \sigma_0(t).$$

Використовуючи цю рівність, вирази для радіальної та осьової деформації точок однорідного композиту можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_r = \frac{(1 - \nu_{23}) \nu_{12}}{\nu_{21}} \cdot \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)],$$

$$\varepsilon_z = -2\nu_{12} \cdot \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)].$$

Оскільки при $z = 0$ осьове переміщення точок гомогенізованого композиту дорівнює нулю, то, інтегруючи вираз для осьової деформації композиту, знаходимо функцію осьового переміщення у вигляді:

$$u_z(r, z, t) = -2\nu_{12} \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)] \cdot z.$$

При $r = 0$ радіальне переміщення u_r дорівнює нулю, то, інтегруючи за змінною r деформацію ε_r , отримуємо:

$$u_r = \frac{(1-\nu_{23})\nu_{12}}{\nu_{21}} \cdot \bar{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)] \cdot r.$$

Зображення знайдених осьового та радіального переміщень при перетворенні Лапласа мають вигляд:

$$\tilde{u}_r = \frac{(1-\nu_{23})\nu_{12}r\varphi}{\nu_{21}x},$$

$$\tilde{u}_z = \frac{-2\nu_{12}\varphi}{x} z,$$

де $x = \tilde{E}_1 = E_1(1 - \tilde{R}(p))$.

Сумарне осьове навантаження матриці та волокна повинне дорівнювати нульовому осьовому навантаженню для однорідного композиту, тобто повинна виконуватися рівність:

$$f\sigma_0^\circ(t) + (1-f)\sigma_0^*(t) = 0. \quad (4.104)$$

Рівність (4.104) у зображеннях набуває вигляду:

$$f\varphi_2(p) + (1-f)\varphi_1(p) = 0.$$

Звідси визначаємо залежність між $\varphi_1(p)$ та $\varphi_2(p)$:

$$\varphi_2(p) = \frac{(f-1) \cdot \varphi_1(p)}{f}.$$

Підставивши цю рівність у систему (4.102), знаходимо:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{a_1 x^{*2} + a_2 x^* - a_3}{2x^*(a_6 x^* - a_7)} \varphi_1, \\ \tilde{B} &= \frac{a_4 x^{*2} + a_5 x^* + a_3}{2x^*(a_6 x^* - a_7)} a^2 \varphi_1,\end{aligned}\tag{4.105}$$

де коефіцієнти a_i мають наступні значення:

$$\begin{aligned}a_1 &= (f-1)\alpha_4^\circ \alpha_2^*, \\ a_2 &= (f-1)(\alpha_4^\circ \alpha_1^\circ + 2\alpha_3^{\circ 2}) - f(2\alpha_3^\circ \alpha_3^* + \alpha_2^* \alpha_4^*), \\ a_3 &= \alpha_1^\circ \alpha_4^* f, \\ a_4 &= (f-1)\alpha_4^\circ \alpha_1^*, \\ a_5 &= f(2\alpha_3^*(\alpha_2^\circ - \alpha_3^*) - \alpha_4^* \alpha_1^*) + 2(f-1)\alpha_3^\circ(\alpha_3^* - \alpha_3^\circ), \\ a_6 &= f(\alpha_3^\circ(\alpha_1^* + \alpha_2^*) - \alpha_2^* \alpha_3^*), \\ a_7 &= f\alpha_1^\circ \alpha_3^*.\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$c_1 = \alpha_1^* a_1 - \alpha_2^* f a_4,$$

$$c_2 = \alpha_1^* a_2 - \alpha_2^* f a_5 + 2a_6 \alpha,$$

$$c_3 = \alpha_1^* a_3 + \alpha_2^* f a_3 + 2\alpha_3^* a_7,$$

$$c_4 = a_6 x^* - a_7.$$

Тоді вираз для $\varphi(p)$ набуває вигляду:

$$\varphi(p) = \frac{c_1 (x^*)^2 + c_2 x^* - c_3}{2c_4}. \quad (4.106)$$

Для визначення ефективних характеристик однорідного композиту використаємо кінематичні умови узгодження осьових переміщень матриці, волокна та гомогенізованого композиту при довільному $z = h$:

$$u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h), \quad (4.107)$$

а також рівність радіальних переміщень

$$u_r(b) = u_r^*(b). \quad (4.108)$$

Підставивши у (4.107) та (4.108) відповідні вирази для переміщень, після застосування перетворення Лапласа отримаємо:

$$\frac{\nu_{12}(1-\nu_{23})\varphi}{\nu_{21}x} = \tilde{A}(p) + \frac{\tilde{B}(p)}{b^2}, \quad (4.109)$$

$$-\frac{2\nu_{12}\varphi}{x} = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} \cdot \frac{f-1}{f} \varphi_1 - 2\nu_{21}^\circ \left(\tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{a^2} \right) \right). \quad (4.110)$$

Підставимо (4.105) та (4.106) у (4.109) та (4.110). Після елементарних перетворень отримаємо:

$$\frac{\nu_{21}x}{\nu_{12}(1-\nu_{23})} = \frac{x^* (c_1 x^{*2} + c_2 x^* - c_3)}{(a_1 + fa_4)x^{*2} + (a_2 + fa_5)x^* + (f-1)a_3}, \quad (4.111)$$

$$\frac{x}{\nu_{12}} = \frac{(1-\nu_{23}^\circ)E_1^\circ f (c_1 x^{*2} + c_2 x^* - c_3)}{c_5 x^{*2} - c_6 x^* + c_7}. \quad (4.112)$$

У виразі (4.112)

$$c_5 = \nu_{21}^\circ E_1^\circ f (a_1 + a_4),$$

$$c_6 = (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f-1)a_6,$$

$$c_7 = a_7(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(f-1) + E_1^\circ\nu_{21}^\circ f (a_2 + a_5).$$

Перейдемо у рівностях (4.111), (4.112) до границі при $p \rightarrow \infty$.

Враховуючи, що при $p \rightarrow \infty$

$$x = E_1(1 - \tilde{R}(p)) \rightarrow E_1, \quad x^* = E_1^*(1 - \tilde{R}^*(p)) \rightarrow E_1^*,$$

з рівності (4.111) заміною x на E_1 , а x^* на E_1^* , отримуємо вираз для відношення миттєвого модуля пружності E_1 до коефіцієнта Пуассона

$$\nu_{12}, \text{ а з (4.112) – відношення } \frac{\nu_{21}x}{\nu_{12}(1-\nu_{23})}$$

Зображення $\tilde{R}(p)$ ядра релаксації $R(t)$, визначаємо з (4.110):

$$\tilde{R}(p) = 1 - \frac{\nu_{12}}{E_1} \frac{(1-\nu_{23}^\circ)E_1^\circ f(c_1x^{*2} + c_2x^* - c_3)}{c_5x^{*2} - c_6x^* + c_7}.$$

За знайденим зображенням визначаємо оригінал $R(t)$.

Визначимо розв'язок аналогічної задачі про гомогенізацію трансверсально-ізотропного в'язкопружного волокнистого композиту при поперечному розтягненні для випадку, коли обидві фази композиту є трансверсально-ізотропними та в'язкопружними.

Реологічні властивості матриці і волокна згідно зі спадковою теорією Больцмана – Вольтерра описуються за допомогою лінійного інтегрального оператора, що має вигляд, аналогічний (4.103).

Переміщення, напруження та деформації точок волокна визначаються за формулами:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r. \quad (4.113)$$

$$u_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left((1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) \cdot (\bar{E}_1^\circ)^{-1} [\sigma_0^\circ(t)] - 2C(t)\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (4.114)$$

$$\sigma_r^\circ(r, t) = \frac{v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ} \cdot \left(\sigma_0^\circ(t) + \frac{\bar{E}_1^\circ[C(t)]}{v_{12}^\circ} \right). \quad (4.115)$$

Для матриці аналогічні співвідношення мають вигляд:

$$u_r^*(r, t) = A(t) \cdot r + \frac{B(t)}{r}, \quad (4.116)$$

$$u_z^*(z, t) = \frac{1}{1 - v_{23}^*} \left((1 - v_{23}^* - 2v_{12}^*v_{21}^*) \cdot (\bar{E}_1^*)^{-1} [\sigma_0^*(t)] - 2A(t)v_{21}^* \right) z, \quad (4.117)$$

$$\sigma_r^*(r, t) = \frac{v_{21}^*}{1 - v_{23}^*} \cdot \left(\sigma_0^*(t) + \frac{\bar{E}_1^*[A(t)]}{v_{12}^*} \right) - \frac{v_{21}^* \cdot \bar{E}_1^*[B(t)]}{v_{12}^* \cdot (1 + v_{23}^*) r^2}. \quad (4.118)$$

Використовуючи крайові умови (4.93) – (4.96), отримаємо систему рівнянь відносно функцій $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$. Рівність $u_r^\circ(r = a) = u_r^*(r = a)$ дозволяє виключити функцію $C(t)$:

$$C(t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2}. \quad (4.119)$$

Застосуємо до отриманої системи рівнянь перетворення Лапласа за часом.

Позначимо зображення $\sigma_0(t)$, $\sigma_0^*(t)$, $\sigma_0^\circ(t)$, $A(t)$, $B(t)$ відповідно функціями $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, де p –

параметр перетворення Лапласа, $\tilde{R}^\circ(p)$ та $\tilde{R}^*(p)$ – зображення ядер релаксації для волокна і матриці.

Введемо також позначення:

$$\alpha_1 = \frac{v_{21}}{1 - v_{23}},$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{v_{12}},$$

$$\alpha_3 = \frac{v_{21}}{v_{12}(1 + v_{23})},$$

$$\alpha_4 = \frac{1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21}}{1 - v_{23}},$$

$$x = E_1(1 - \tilde{R}(p)).$$

Після застосування перетворення Лапласа отримаємо систему відносно невідомих $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, а також $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\varphi(p)$:

$$\alpha_1^* b^2 \varphi_1(p) + \alpha_2^* x^* b^2 \tilde{A}(p) - \alpha_3^* x^* \tilde{B}(p) = b^2 \varphi(p),$$

$$a^2 (\alpha_2^\circ x^\circ - \alpha_2^* x^*) \tilde{A}(p) + (\alpha_2^\circ x^\circ + \alpha_3^* x^*) \tilde{B}(p) =$$

$$= a^2 (\alpha_1^* \varphi_1(p) - \alpha_1^\circ \varphi_2(p)),$$

$$2(\alpha_1^* - \alpha_1^\circ x^\circ) a^2 \tilde{A}(p) - 2\alpha_1^\circ x^\circ \tilde{B}(p) =$$

$$= a^2 \left(\frac{\alpha_4^* \varphi_1(p)}{x^*} - \frac{\alpha_4^\circ \varphi_2(p)}{x^\circ} \right). \quad (4.120)$$

З цієї системи знаходимо:

$$\tilde{A}(p) = c_1 \varphi_1(p) + c_2 \varphi_2(p), \quad (4.121)$$

$$\tilde{B}(p) = a^2 (c_3 \varphi_1(p) + c_4 \varphi_2(p)). \quad (4.122)$$

Тут використані позначення:

$$c_1 = \frac{-2\alpha_1^* \alpha_1^\circ (x^\circ)^2 x^* - \alpha_4^* x^\circ (\alpha_2^\circ x^\circ + \alpha_3^* x^*)}{d},$$

$$c_2 = \frac{2(\alpha_1^\circ)^2 (x^\circ)^2 x^* + \alpha_4^\circ x^* (\alpha_2^\circ x^\circ + \alpha_3^* x^*)}{d},$$

$$c_3 = \frac{\alpha_4^* x^\circ (\alpha_2^\circ x^\circ - \alpha_2^* x^*) - 2\alpha_1^* x^* x^\circ (\alpha_1^* - \alpha_1^\circ x^\circ)}{d},$$

$$c_4 = \frac{-\alpha_4^\circ x^* (\alpha_2^\circ x^\circ - \alpha_2^* x^*) + 2\alpha_1^\circ x^\circ x^* (\alpha_1^* - \alpha_1^\circ x^\circ)}{d},$$

$$d = -2x^* x^\circ (\alpha_1^\circ x^\circ (\alpha_2^\circ x^\circ - \alpha_2^* x^*) + (\alpha_1^* - \alpha_1^\circ x^\circ) (\alpha_2^\circ x^\circ + \alpha_3^* x^*)).$$

Підставляючи (4.121), (4.122) у перше з рівнянь системи (4.120), отримуємо співвідношення, що пов'язують між собою зображення $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ та $\varphi(p)$:

$$(\alpha_1^* + \alpha_2^* x^* c_1 - \alpha_3^* x^* f c_3) \varphi_1 + (\alpha_2^* x^* c_2 - \alpha_3^* x^* c_4 f) \varphi_2 = \varphi.$$

Для однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит, напруження σ_z , а також всі дотичні напруження дорівнюють нулю. Вирази для переміщень, напружень та деформацій гомогенізованого композиту, а також залежності між зображеннями $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$ та $\varphi_2(p)$ мають вигляд, аналогічний до виразів для цих компонентів отриманих у першій задачі п. 4.2.:

$$u_r = \frac{(1-\nu_{23})\nu_{12}}{\nu_{21}} \cdot \bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)] \cdot r, \quad (4.123)$$

$$u_r(r,t) = D(t)r, \quad (4.124)$$

$$\sigma_r(t) = \frac{\nu_{21}\bar{E}_1[D(t)]}{\nu_{12}(1-\nu_{23})} = \sigma_0(t), \quad (4.125)$$

$$\varepsilon_r = \frac{(1-\nu_{23})\nu_{12}}{\nu_{21}} \cdot \bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)], \quad (4.126)$$

$$\varepsilon_z = -2\nu_{12} \cdot \bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)], \quad (4.127)$$

$$u_z(r,z,t) = -2\nu_{12}\bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)] \cdot z, \quad (4.128)$$

$$\varphi_1(p) = \frac{f \cdot \varphi_2(p)}{f-1}, \quad (4.129)$$

$$\varphi = \left(\frac{f}{f-1} (\alpha_1^* + \alpha_2^* c_1 x^* - \alpha_3^* f c_3 x^*) + (\alpha_2^* x^* c_2 - \alpha_3^* x^* c_4 f) \right) \varphi_2. \quad (4.130)$$

Кінематичні умови узгодження осьових та радіальних переміщень точок волокна, матриці та однорідного композиту мають вигляд (4.107), (4.108).

Застосувавши до першої з рівностей (4.107) перетворення Лапласа, отримуємо:

$$\frac{v_{12}(1-v_{23})\varphi}{v_{21}x} = \tilde{A}(p) + \frac{\tilde{B}(p)}{b^2}. \quad (4.131)$$

З рівності $u_z(h) = u_z^\circ(h)$ отримаємо відповідне співвідношення для зображень:

$$-\frac{2v_{12}\varphi}{x} = \frac{1}{1-v_{23}^*} \left(\frac{(1-v_{23}^* - 2v_{12}^*v_{21}^*)\varphi}{x^*} - 2v_{21}^*\tilde{A}(p) \right). \quad (4.132)$$

Позначимо

$$k = f(\alpha_1^* + \alpha_2^*c_1x^* - \alpha_3^*fc_3x^*) + (f-1)(\alpha_2^*x^*c_2 - \alpha_3^*x^*c_4f).$$

Підставляючи в (4.131) рівності (4.121), (4.122) та (4.130) отримуємо:

$$\frac{v_{12}k(1-v_{23})}{v_{21}x} = c_1f + c_2(f-1) + c_3f^2 + c_4f(f-1). \quad (4.133)$$

З (4.132) знаходимо:

$$-\frac{2k\nu_{12}}{x} = \frac{k(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{x^*} - \frac{2\nu_{21}^*(c_1f + c_2(f-1))}{1-\nu_{23}^*}. \quad (4.134)$$

Переходячи у (4.133) та (4.134) до границі при $p \rightarrow \infty$, з врахуванням виразів для c_1, c_2, c_3, c_4 отримуємо співвідношення:

$$-\frac{E_1}{2k_0\nu_{12}} = \frac{E_1^*(1-\nu_{23}^*)}{k_0(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)(1-\nu_{23}^*) - 2\nu_{21}^*(m_1f + m_2(f-1))}. \quad (4.135)$$

У цій рівності

$$k_0 = f(\alpha_1^* + \alpha_2^*m_1E_1^* - \alpha_3^*fm_3E_1^*) + (f-1)E_1^*(\alpha_2^*m_2 - \alpha_3^*m_4f),$$

$$m_1 = \frac{-2\alpha_1^*\alpha_1^\circ(E_1^\circ)^2 E_1^* - \alpha_4^*E_1^\circ(\alpha_2^\circ E_1^\circ + \alpha_3^*E_1^*)}{m},$$

$$m_2 = \frac{2(\alpha_1^\circ)^2(E_1^\circ)^2 E_1^* + \alpha_4^\circ E_1^*(\alpha_2^\circ E_1^\circ + \alpha_3^*E_1^*)}{m},$$

$$m_3 = \frac{\alpha_4^*E_1^\circ(\alpha_2^\circ E_1^\circ - \alpha_2^*E_1^*) - 2\alpha_1^*E_1^\circ E_1^*(\alpha_1^* - \alpha_1^\circ E_1^\circ)}{m},$$

$$m_4 = \frac{-\alpha_4^\circ E_1^*(\alpha_2^\circ E_1^\circ - \alpha_2^*E_1^*) + 2\alpha_1^\circ E_1^\circ E_1^*(\alpha_1^* - \alpha_1^\circ E_1^\circ)}{m},$$

$$m = -2E_1^*E_1^\circ(\alpha_1^\circ E_1^\circ(\alpha_2^\circ E_1^\circ - \alpha_2^*E_1^*) + (\alpha_1^* - \alpha_1^\circ E_1^\circ)(\alpha_2^\circ E_1^\circ + \alpha_3^*E_1^*)).$$

Рівність (4.135) визначає залежність відношення характеристик композита $\frac{E_1}{\nu_{12}}$ від характеристик його складових. Враховуючи це співвідношення, можна визначити ядро релаксації $R(t)$ для матеріалу композита. Підставивши у (4.134) значення $x = \tilde{E}_1 = E_1(1 - \tilde{R}(p))$, отримуємо:

$$1 - \tilde{R}(p) = -\frac{2\nu_{12}}{E_1} \cdot \frac{kE_1^*(1 - \nu_{23}^*)}{k(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)(1 - \nu_{23}^*) - 2\nu_{21}^*(d_1f + d_2(f - 1))}.$$

Звідси знаходимо вираз для зображення ядра:

$$\tilde{R}(p) = 1 + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \cdot \frac{kE_1^*(1 - \nu_{23}^*)}{k(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)(1 - \nu_{23}^*) - 2\nu_{21}^*(d_1f + d_2(f - 1))}.$$

За знайденим зображенням, використовуючи теорему обернення для перетворення Лапласа, знаходимо оригінал $R(t)$.

Таким чином, розглянута методика дозволяє отримати характеристики лінійного інтегрального оператора \bar{E}_1 , з допомогою якого композит моделюється в'язкопружним трансверсально-ізотропним однорідним матеріалом. При відомому значенні коефіцієнта Пуассона ν_{21} аналогічні характеристики для

інтегрального оператора поперечного модуля пружності \bar{E}_2 можна знайти, використавши співвідношення

$$\bar{E}_2 = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} \bar{E}_1.$$

Застосування кінематичних умов узгодження переміщень матриці, волокна та однорідного композиту дозволяє визначити ефективні характеристики композиту як функції відповідних характеристик його складових та об'ємної частки волокна у композиті.

Розв'яжемо задачу гомогенізації в'язкопружного композиту у задачі про поперечне розтягнення, використовуючи енергетичний критерій узгодження. Для цього використаємо пружні розв'язки задач про сумісне поперечне розтягнення матриці та волокна та аналогічне деформування пружного однорідного композиту. Переміщення, напруження та деформації у першій задачі мають вигляд:

$$u_r^\circ(r) = Cr;$$

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z,$$

$$\sigma_r^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right),$$

$$\sigma_{\theta}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}} \left(\frac{\sigma_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + C \right),$$

$$\sigma_z^{\circ} = \sigma_0^{\circ},$$

$$\varepsilon_r^{\circ}(r) = C = \varepsilon_{\theta}^{\circ}(r),$$

$$\varepsilon_z^{\circ}(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^{\circ}} \left(\frac{\sigma_0^{\circ} (1-\nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ} \nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - 2C\nu_{21}^{\circ} \right),$$

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^*} \left(\frac{\sigma_z^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z,$$

$$\sigma_r^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_z^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right),$$

$$\sigma_{\theta}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_z^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right),$$

$$\varepsilon_r^*(r) = A - \frac{B}{r^2},$$

$$\varepsilon_{\theta}^*(r) = A + \frac{B}{r^2},$$

$$\varepsilon_z^*(z) = \frac{1}{1-\nu_{23}^*} \left(\frac{\sigma_0^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right).$$

Для задачі про поперечне розтягнення елементарної комірки з трансверсально-ізотропного пружного матеріалу, що моделює поведінку композиту напруження у ньому визначаються рівностями:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0, \\ \tau_{zr} &= \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0, \\ \sigma_r &= \sigma_0, \\ \sigma_\theta &= \sigma_0.\end{aligned}$$

Ненульові складові вектора переміщень запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}u_r(r) &= \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2} r; \\ u_z(z) &= -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1} z.\end{aligned}$$

Вирази для ненульових компонентів деформацій подаються рівностями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}.\end{aligned}$$

Сума енергій пружного деформування циліндрів, що моделюють волокно та матрицю, повинна дорівнювати пружній енергії деформації однорідного циліндра, що моделює гомогенізований композит. Отримуємо рівність:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_r^\circ \varepsilon_r^\circ + \sigma_\theta^\circ \varepsilon_\theta^\circ + \sigma_z^\circ \varepsilon_z^\circ) r dr d\theta dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \sigma_z^* \varepsilon_z^*) r dr d\theta dz = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Після підстановки виразів для напружень та деформацій, а також обчислення потрібних інтегралів у цій рівності отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{2E_1^\circ (1-\nu_{23}^\circ)} \left((\sigma_z^\circ)^2 (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + 2E_2^\circ E_1^\circ C^2 \right) + \\ & + \frac{(b^2 - a^2)}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} \times \left(\frac{(\sigma_z^*)^2 (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{2} + A^2 E_2^* E_1^* + \frac{B^2 E_2^* E_1^* (1-\nu_{23}^*)}{b^2 a^2 (1+\nu_{23}^*)} \right) = \\ & = \frac{b^2 (\sigma_0)^2 (1-\nu_{23})}{E_2}. \end{aligned}$$

Після підстановки виразів для зображень коефіцієнтів A , B , C , отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{(b^2 - a^2)}{2E_1^* E_2^* (d_2 - d_1)^2 (1 - v_{23}^*)} \left((\sigma_z^*)^2 E_2^* (E_2^{\circ 2} (1 - v_{23}^*)) \times \right. \\
& \times \left((1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) f^2 (1 - v_{23}^*) + 2(1 + v_{23}^*) f (1 - v_{23}^* - v_{12}^* v_{21}^*) + (1 + v_{23}^*)^2 \right) - \\
& - 2E_2^* E_2^\circ (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) (1 - v_{23}^*) \left(f (1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) + (1 + v_{23}^*) \right) + \\
& + E_2^{*2} (f - 1)^2 (1 - v_{23}^\circ)^2 (1 - v_{23}^*) \left. \right) + 2\sigma_0^2 E_1^* (1 - v_{23}^*) \times \\
& \times \left((1 - v_{23}^*) \left(E_2^\circ (1 + v_{23}^*) + E_2^* (1 - v_{23}^\circ) \right)^2 + \right. \\
& + f (1 + v_{23}^*) \left(E_2^* (1 - v_{23}^\circ) - (1 - v_{23}^*) E_2^\circ \right)^2 \left. \right) + \\
& + 4\sigma_0 \sigma_z^* E_1^* v_{21}^* (1 - v_{23}^*) \left(2E_2^* E_2^\circ (1 + v_{23}^*) (1 - v_{23}^\circ) (f - 1) - \right. \\
& - E_2^\circ E_2^\circ (1 + v_{23}^*) \left((1 + v_{23}^*) + f (1 - v_{23}^*) \right) + E_2^* E_2^* (1 - v_{23}^\circ) (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) \left. \right) - \\
& - 8\sigma_z^\circ \sigma_0 E_1^* f v_{21}^\circ E_2^* E_2^* (1 - v_{23}^\circ) (1 - v_{23}^*) - \\
& - 4\sigma_z^\circ \sigma_z^* E_1^* f v_{21}^\circ E_2^* (1 - v_{23}^*) v_{21}^* E_2^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) + \\
& + 2\sigma_z^{\circ 2} E_1^* f v_{21}^{\circ 2} E_2^{*2} (1 - v_{23}^*) \left(f (1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*) \right) \left. \right) + \\
& + \frac{a^2}{2E_1^\circ (d_2 - d_1)^2 (1 - v_{23}^\circ)} \left((\sigma_z^\circ)^2 (1 - v_{23}^\circ) \times \right. \\
& \times \left(E_2^{\circ 2} \left(f (1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*) \right)^2 + E_2^{*2} (f - 1)^2 (1 - v_{23}^\circ) (1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) - \right. \\
& - 2E_2^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) E_2^\circ \left(f (1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*) \right) \left. \right) + \\
& + 8\tilde{\sigma}_0^2 E_2^\circ E_1^\circ (1 - v_{23}^\circ)^2 + 8\tilde{\sigma}_z^* \sigma_0 E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) (1 - v_{23}^\circ) + \\
& + 2\tilde{\sigma}_z^{*2} E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^{*2} (f - 1)^2 (1 - v_{23}^\circ)^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8\sigma_z^\circ \sigma_0 E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^\circ \left(f(1-v_{23}^*) + (1+v_{23}^*) \right) (1-v_{23}^\circ) - \\
& -4\sigma_z^\circ \sigma_z^* E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^\circ \left(f(1-v_{23}^*) + (1+v_{23}^*) \right) v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ) = \\
& = \frac{b^2 (\sigma_0)^2 (1-v_{23})}{E_2}.
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів для σ_z^* та σ_z° і елементарних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1-v_{23}}{E_2} = & \frac{E_2^* (1-v_{23}^\circ) \left(f(1+v_{23}^*) + (1-v_{23}^*) \right) + E_2^\circ (1+v_{23}^*) (1-v_{23}^\circ) (1-f)}{E_2^* (d_2 - d_1)} + \\
& + \frac{d_0 f (f-1) \left(v_{21}^* E_2^\circ (1+v_{23}^*) + v_{21}^* E_2^* (1-v_{23}^\circ) - 2v_{21}^\circ E_2^* \right)}{E_2^* (d_2 - d_1) (d_1^* f + d_1^\circ (f-1))}.
\end{aligned}$$

$$d_1 = E_2^* (f-1) (1-v_{23}^\circ),$$

$$d_2 = E_2^\circ \left(f(1-v_{23}^*) + (1+v_{23}^*) \right).$$

$$d_1^\circ = \frac{\left(E_2^\circ \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + (1+v_{23}^*) \right) + E_2^* (1-f) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) \right)}{E_1^\circ};$$

$$d_1^* = \frac{\left(E_2^* (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^*) - E_2^\circ \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) + (1+v_{23}^*) \right) \right)}{E_1^*};$$

$$d_0 = \frac{\left(4v_{21}^\circ E_2^* - 2v_{21}^* \left(E_2^\circ (1+v_{23}^*) + E_2^* (1-v_{23}^\circ) \right) \right)}{E_2^*},$$

$$d^\circ = -d_1^\circ,$$

$$d_1^* = d^*.$$

Нехай $\gamma = E_2^*(1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(1 + \nu_{23}^*)$.

З урахуванням цього позначення отримуємо:

$$\frac{1 - \nu_{23}}{E_2} = \frac{E_2^*(1 - \nu_{23}^\circ)(f(1 + \nu_{23}^*) + (1 - \nu_{23}^*)) + E_2^\circ(1 - (\nu_{23}^*)^2)(1 - f)}{E_2^* \alpha} +$$

$$+ \frac{2fE_1^*E_1^\circ(1 - f)(\nu_{21}^*\gamma - 2\nu_{21}^\circ E_2^*)^2}{(E_2^*)^2 \alpha (2\beta(E_1^*(1 - f)\nu_{12}^\circ + E_1^\circ f \nu_{12}^*) - \alpha(E_1^\circ f + E_1^*(1 - f)))}.$$

У останньому виразі

$$\alpha = E_2^*(1 - f)(1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)),$$

$$\beta = \nu_{21}^\circ E_2^*(1 - f) + \nu_{21}^* f E_2^\circ.$$

Запишемо аналогічне співвідношення для ефективних характеристик трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту. Для цього замінимо E_2 та E_2^* зображеннями відповідних інтегральних операторів для в'язкопружних матеріалів – композиту та його матриці, тобто виразами

$$\tilde{E}_2 = E_2(1 - \tilde{R}(p)),$$

$$\tilde{E}_2^* = E_2^*(1 - \tilde{R}^*(p)),$$

де E_2 та E_2^* – миттєві поперечні модулі пружності для гомогенізованого композиту та його матриці, $\tilde{R}(p)$ та $\tilde{R}^*(p)$ – зображення відповідних ядер релаксації. При цьому отримуємо:

$$\frac{1-\nu_{23}}{\tilde{E}_2} = \frac{\tilde{E}_2^*(1-\nu_{23}^\circ)\left(f(1+\nu_{23}^*)+(1-\nu_{23}^*)\right)+E_2^\circ\left(1-(\nu_{23}^*)^2\right)(1-f)}{\tilde{E}_2^*\alpha} +$$

$$+ \frac{2f\tilde{E}_1^*E_1^\circ(1-f)\left(\nu_{21}^*\gamma-2\nu_{21}^\circ\tilde{E}_2^*\right)^2}{\left(\tilde{E}_2^*\right)^2\alpha\left(2\beta\left(\tilde{E}_1^*(1-f)\nu_{12}^\circ+E_1^\circ f\nu_{12}^*\right)-\alpha\left(E_1^\circ f+\tilde{E}_1^*(1-f)\right)\right)}.$$

Цей вираз у подальшому буде використаний для знаходження ефективних характеристик композиційного матеріалу.

4.4 Поздовжній зсув

Розглянемо задачу гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту в умовах чистого поздовжнього зсуву. Тоді у циліндричній області компоненти напружено-деформованого стану визначаються співвідношеннями:

$$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad ,$$

$$\tau_{zr} = \tau_{zr}(r, \theta),$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(r, \theta),$$

$$\begin{aligned}\gamma_{zr} &= \gamma_{zr}(r, \theta), \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}(r, \theta), \\ \varepsilon_z = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \gamma_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Нехай на зовнішню циліндричну поверхню області діє гармонічне навантаження (рис.4.7).

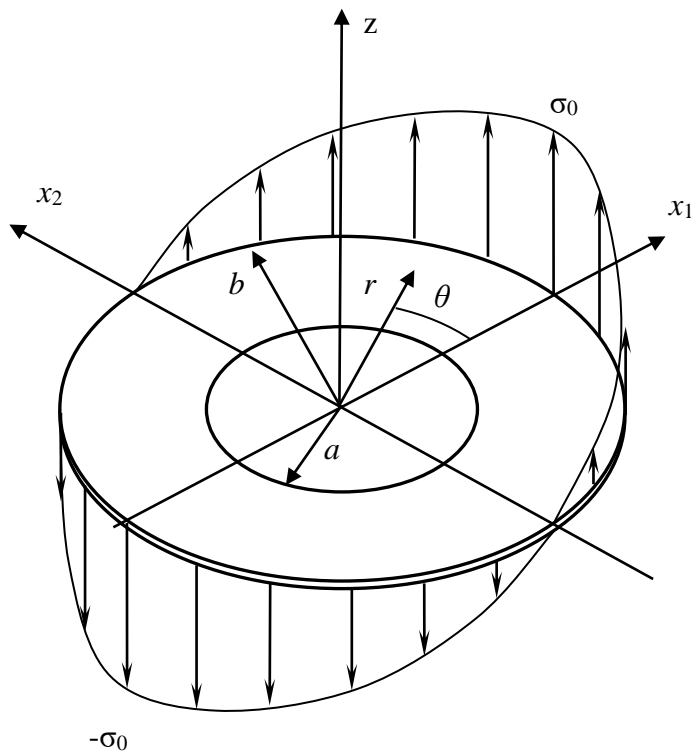


Рис. 4.7 – Крайові умови (для напружень $\tau_{zr}(b, \theta)$) при поздовжньому зсуві в кільці

При $r = b$

$$\tau_{zr}(b, \theta) = \sigma_0(t) \cos \theta. \quad (4.136)$$

Осьові переміщення при цьому визначаються рівністю:

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta, \quad (4.137)$$

де C_1 та C_2 є сталими величинами.

Використовуючи формули Коші, отримаємо вираз для деформацій:

$$\gamma_{z\theta}(r, \theta) = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta, \quad (4.138)$$

$$\gamma_{zr}(r, \theta) = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (4.139)$$

Застосування закону Гука дозволяє визначити вирази для напружень:

$$\tau_{zr}(r, \theta) = G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.140)$$

$$\tau_{z\theta}(r, \theta) = -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (4.141)$$

Розглянемо задачу про спільний повздовжній зсув порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю, та суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан в'язкопружної матриці (замість сталих у цьому випадку використовуємо функції часу t) подамо у вигляді:

$$u_z^*(t, r, \theta) = \left(A(t)r + \frac{B(t)}{r} \right) \cos \theta, \quad (4.142)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(t, r, \theta) = - \left(A(t) + \frac{B(t)}{r^2} \right) \sin \theta, \quad (4.143)$$

$$\gamma_{zr}^*(t, r, \theta) = \left(A(t) - \frac{B(t)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.144)$$

$$\tau_{zr}^*(t, r, \theta) = \tilde{G}_{12}^* \left(A(t) - \frac{B(t)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.145)$$

$$\tau_{z\theta}^*(t, r, \theta) = -\bar{G}_{12}^* \left(A(t) + \frac{B(t)}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (4.146)$$

У рівностях (4.145), (4.146) \bar{G}_{12}^* – лінійний інтегральний оператор, який характеризує в'язкопружні властивості матеріалу матриці:

$$\bar{G}_{12}^* [y(t)] = G_{12}^* \left(y(t) - \int_0^t R^*(t-\tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (4.147)$$

де G_{12}^* – миттєвий модуль зсуву, що відповідає значенню $t = 0$, $R^*(t)$ – ядро релаксації матриці.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна (суцільний циліндр) з врахуванням скінченності переміщень при $r = 0$ набувають вигляду:

$$u_z^\circ(t, r, \theta) = C(t)r \cos \theta, \quad (4.148)$$

$$\gamma_{z\theta}^\circ(t, \theta) = -C(t)\sin \theta, \quad (4.149)$$

$$\gamma_{zr}^\circ(t, \theta) = C(t)\cos \theta, \quad (4.151)$$

$$\tau_{zr}^\circ(t, \theta) = G_{12}^\circ \cdot C(t)\cos \theta, \quad (4.152)$$

$$\tau_{z\theta}^\circ(t, \theta) = -G_{12}^\circ \cdot C(t)\sin \theta. \quad (4.153)$$

Знайдемо функції $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$ у співвідношеннях (4.142)-(4.146) та (4.148)-(4.153) для задачі про сумісний повздовжній зсув матриці і волокна. Для цього використаємо крайову умову (4.136) та умови неперервності переміщень та напружень в композиті при $r = a$. Вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tau_{zr}^\circ(t, \theta) &= \tau_{zr}^*(t, a, \theta), \\ u_z^\circ(t, a, \theta) &= u_z^*(t, a, \theta). \end{aligned} \quad (4.154)$$

З врахуванням (4.147) отримуємо систему лінійних інтегральних рівнянь типу згортки відносно невідомих функцій $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$, а також функції $\sigma_0(t)$:

$$\begin{aligned}\bar{G}_{12}^* \left[A(t) - \frac{B(t)}{b^2} \right] &= \sigma_0, \\ \bar{G}_{12}^* \left[A(t) - \frac{B(t)}{a^2} \right] &= G_{12}^\circ \cdot C(t), \\ A(t) \cdot a + \frac{B(t)}{a} &= C(t) \cdot a.\end{aligned}\tag{4.155}$$

З останнього рівняння системи (4.155) отримуємо:

$$C(t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2}.\tag{4.156}$$

З врахуванням (4.156) система (4.155) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \bar{G}_{12}^* \left[A(t) - \frac{B(t)}{b^2} \right] = \sigma_0(t), \\ \bar{G}_{12}^* \left[A(t) - \frac{B(t)}{a^2} \right] = G_{12}^\circ \cdot \left(A(t) + \frac{B(t)}{a^2} \right). \end{cases}\tag{4.157}$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (4.157) використаємо інтегральне перетворення Лапласа. Використовуючи його властивості, зокрема, властивість лінійності та теорему про зображення згортки, знаходимо зображення для інтегрального оператора \bar{G}_{12}^* :

$$\bar{G}_{12}^* [y(t)] \div G_{12}^* Y(p) (1 - \tilde{R}^*(p)),$$

де $R^*(t) \div \tilde{R}^*(p)$.

Позначимо $A(t) \div \tilde{A}(p)$, $B(t) \div \tilde{B}(p)$. Зображення системи (4.157) має вигляд:

$$G_{12}^* \left(\tilde{A}(p) - \frac{\tilde{B}(p)}{b^2} \right) (1 - \tilde{R}^*(p)) = b^2 \tilde{\sigma}_0(p),$$

$$G_{12}^* \left(\tilde{A}(p) - \frac{\tilde{B}(p)}{a^2} \right) (1 - \tilde{R}^*(p)) = G_{12}^\circ \left(\tilde{A}(p) + \frac{\tilde{B}(p)}{a^2} \right). \quad (4.158)$$

З другого рівняння цієї системи виразимо $\tilde{B}(p)$ через $\tilde{A}(p)$:

$$\tilde{B}(p) = \frac{a^2 (G_{12}^* (1 - \tilde{R}^*(p)) - G_{12}^\circ) \tilde{A}(p)}{G_{12}^\circ + G_{12}^* (1 - \tilde{R}^*(p))}. \quad (4.159)$$

Підставивши (4.156) у перше рівняння системи (4.158), отримуємо вираз для зображення $\tilde{A}(p)$ у вигляді:

$$\tilde{A}(p) = \frac{(G_{12}^\circ + G_{12}^* x^*) \tilde{\sigma}_0}{G_{12}^* x^* (G_{12}^\circ (1 + f) + G_{12}^* x^* (1 - f))}. \quad (4.160)$$

де $x^* = 1 - \tilde{R}^*(p)$.

Підставивши (4.160) у (4.159), після елементарних перетворень отримуємо:

$$\tilde{B}(p) = \frac{a^2 (G_{12}^* x^* - G_{12}^\circ) \tilde{\sigma}_0}{G_{12}^* x^* (G_{12}^\circ (1+f) + G_{12}^* x^* (1-f))}. \quad (4.161)$$

Зображення функції $C(t)$ має вигляд:

$$\tilde{C}(p) = \tilde{A}(p) + \frac{\tilde{B}(p)}{a^2}.$$

Розв'яжемо аналогічну задачу про чистий повздовжній зсув для однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного однорідного матеріалу, що моделює композит. Подамо елементарну комірку для нього у вигляді суцільного нескінченного циліндра з радіусом $r = b$. Крайова умова має вигляд (4.136). Переміщення, напруження та деформації однорідного композиту при чистому поздовжньому зсуві мають вигляд:

$$u_z(t, r, \theta) = D(t) r \cos \theta, \quad (4.162)$$

$$\gamma_{\theta z}(t, \theta) = -D(t) \sin \theta, \quad (4.163)$$

$$\gamma_{zr}(t, \theta) = D(t) \cos \theta, \quad (4.164)$$

$$\tau_{zr}(t, \theta) = \bar{G}_{12} [D(t)] \cdot \cos \theta, \quad (4.165)$$

$$\tau_{z\theta}(t, \theta) = -\bar{G}_{12} [D(t)] \cdot \sin \theta. \quad (4.166)$$

У рівностях (4.165) та (4.166) \bar{G}_{12} – лінійний інтегральний оператор, за структурою аналогічний до (4.147), з миттєвим модулем зсуву G_{12} та ядром релаксації $R(t)$, $R(t) \div \tilde{R}(p)$.

З крайової умови (4.136) отримуємо, що

$$\bar{G}_{12}[D(t)] = \sigma_0(t). \quad (4.167)$$

Кінематична умова узгодження переміщень на зовнішній циліндричній поверхні комірки має вигляд:

$$u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta). \quad (4.168)$$

Підставивши сюди відповідні вирази для осьових переміщень, отримаємо:

$$D(t) = A(t) + \frac{B(t)}{b^2}. \quad (4.169)$$

Нехай

$$x = x(p) = 1 - \tilde{R}(p),$$

$$x^* = 1 - \tilde{R}^*(p).$$

З врахуванням (4.159), (4.160) рівняння (4.167) у зображеннях набуває вигляду

$$\frac{\tilde{\sigma}_0}{G_{12}x} = \frac{(G_{12}^\circ + G_{12}^*x^* + f \cdot (G_{12}^*x^* - G_{12}^\circ))\tilde{\sigma}_0}{G_{12}^*x^*(G_{12}^\circ(1+f) + G_{12}^*x^*(1-f))}.$$

З останньої рівності отримаємо:

$$G_{12}x = \frac{G_{12}^*x^*(G_{12}^\circ(1+f) + G_{12}^*x^*(1-f))}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)G_{12}^*x^*}. \quad (4.170)$$

Перейшовши у цій рівності до границі при $p \rightarrow \infty$, отримуємо формулу для визначення миттєвого модуля зсуву:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^*(G_{12}^\circ(1+f) + G_{12}^*(1-f))}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)G_{12}^*}. \quad (4.171)$$

Знайдемо ядро релаксації $R(t)$. Для цього з рівняння (4.170), враховуючи, що $x = 1 - \tilde{R}(p)$, знайдемо зображення $\tilde{R}(p)$:

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(x^*)^2 + C_2x^* + C_3}{C_4(x^* + C_5)}, \quad (4.172)$$

де коефіцієнти C_i , $i = 1, \dots, 5$, набувають наступних значень:

$$\begin{aligned}C_1 &= (f - 1)(G_{12}^*)^2, \\C_2 &= G_{12}^* (G_{12} - G_{12}^\circ)(1 + f), \\C_3 &= G_{12} \cdot G_{12}^\circ (1 - f), \\C_4 &= G_{12} \cdot G_{12}^* (1 + f), \\C_5 &= \frac{G_{12}^\circ (1 - f)}{G_{12}^* (1 + f)}.\end{aligned}$$

Нехай в'язкопружні властивості матриці композиту моделюються з допомогою ядра релаксації експоненціального типу

$$R^*(t) = s_1 e^{s_0 t}.$$

Його зображення при перетворенні Лапласа має вигляд:

$$\tilde{R}^*(p) = \frac{s_1}{p - s_0},$$

Тоді вираз для x^* у (4.172) набуває вигляду:

$$x^* = 1 - \tilde{R}^*(p) = \frac{p - s_0 - s_1}{p - s_0}.$$

Нехай $s = p - s_0$. Для ядра вказаного типу запишемо зображення ядра релаксації (4.172):

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(s - s_1)^2 + C_2(s - s_1)s + C_3s^2}{C_4s((C_5 + 1)s - s_1)}. \quad (4.173)$$

Функція $\tilde{R}(p)$ має дві особливі точки – прості полюси $p_1 = s_0$ та $p_2 = s_0 + \frac{s_1}{C_5 + 1}$. Оригінал $R(t)$ зображення $\tilde{R}(p)$ знаходимо з допомогою теореми розвинення.

Знайдемо лишки раціонального зображення $\tilde{R}(p)$.

$$q_1 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=s_0} = -\frac{C_1s_1}{C_4},$$

$$q_2 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{s_1(C_1C_5^2 - C_2C_5 + C_3)}{C_4(C_5 + 1)}.$$

Тоді оригінал ядра релаксації однорідного композиту набуває вигляду:

$$R(t) = q_1e^{s_0t} + q_2e^{p_2t},$$

Побудуємо залежність

$$\tilde{h}(t) = \bar{G}_{12} [1] = G_{12} \left(1 - \int_0^t R_1(t-\tau) d\tau \right).$$

Для експоненціального ядра ця залежність має вигляд:

$$\tilde{h}(t) = G_{12} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{s_0 t} + \alpha_3 e^{p_2 t}).$$

Тут використані наступні позначення:

$$\alpha_1 = 1 + \frac{q_1}{s_0} + \frac{q_2}{p_2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{q_1}{s_0},$$

$$\alpha_3 = -\frac{q_2}{p_2}.$$

Застосуємо викладений підхід до визначення ефективного модуля зсуву \bar{G}_{12} композиційного матеріалу, у якому матрицею є гума марки 67Л, волокно – поліетилен VHDPE Tenfor SNIA. Для вказаної матриці $G_0 = 1,5$ МПа, $G_\infty = 0,78$ МПа, $G_{12}^* = G_0$, $s_0 = -1$, $s_1 = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$, для волокна $G_{12}^\circ = 1,65$ ГПа. Відповідні параметри інтегрального оператора \bar{G}_{12} та функції $h(t)$ для різних значень частоти армування f наведені у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Значення характеристик оператора \bar{G}_{12} при різних значеннях f

f	G_{12}	q_1	q_2	p_2	α_1	α_2	α_3
0,0	1,500	0,480	0,000	-0,771	0,520	0,480	0,000
0,2	1,529	0,314	0,122	-0,723	0,518	0,314	0,168
0,4	1,558	0,198	0,133	-0,674	0,605	0,198	0,197
0,6	1,588	0,113	0,101	-0,624	0,725	0,113	0,162
0,8	1,619	0,049	0,053	-0,572	0,859	0,049	0,092
1,0	1,650	0,000	0,000	-0,520	1,000	0,000	0,000

Залежності $h(t) = \frac{\tilde{h}(t)}{G_{12}}$ при різних значеннях f наведені на рисунку 4.8.

Розглянемо випадок, коли в'язкопружні властивості матриці композиту описуються інтегральним оператором з ядром Абеля

$$R^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \text{ Тоді}$$

$$\tilde{R}^*(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad x = \frac{\sqrt{p} - 1}{\sqrt{p}}.$$

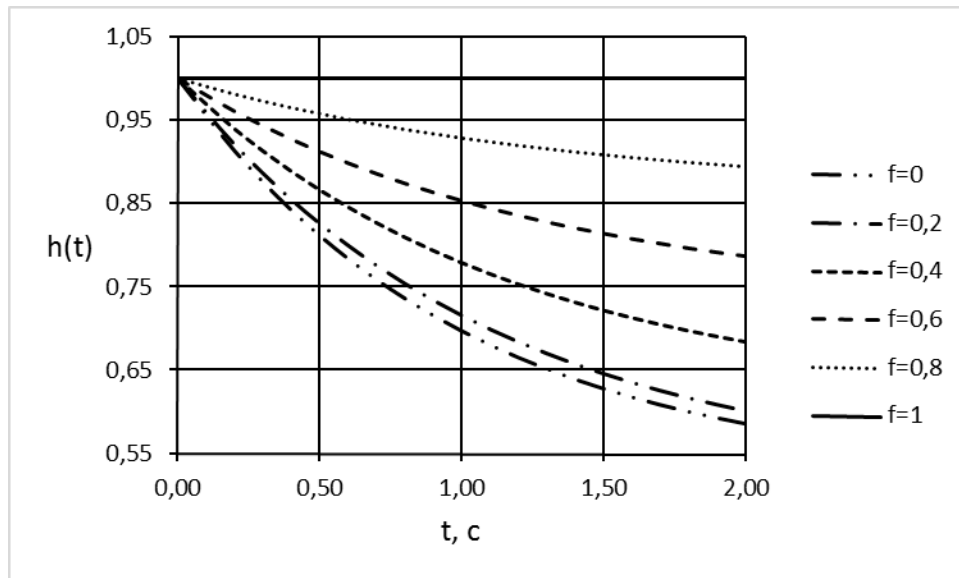


Рис. 4.8 – Залежність зсувних реологічних характеристик композиту від часу

Зображення ядра (4.172) набуває вигляду:

$$\tilde{R}(p) = \frac{k_1 k_3 - k_1 - k_2}{1 + k_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{p} - \frac{1}{1 + k_3}} - \frac{k_1}{\sqrt{p}}. \quad (4.174)$$

Оригінал $R(t)$ знаходимо з допомогою таблиць перетворення Лапласа та властивостей цього перетворення.

Повертаючись до вихідних параметрів задачі, знайдений оригінал ядра запишемо у вигляді:

$$R(t) = \frac{4f(1-f)}{1+f} \cdot \frac{(G_{12}^\circ)^2}{(1-f^2)((G_{12}^\circ)^2 + (G_{12}^*)^2) + 2(1+f^2)G_{12}^*G_{12}^\circ} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha e^{\alpha^2 t} (1 - \operatorname{erf}(\alpha \sqrt{t})) \right) + \frac{1-f}{1+f} \times \\ & \times \frac{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)G_{12}^*}{(1-f)G_{12}^* + (1+f)G_{12}^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ & \alpha = \frac{(1+f)G_{12}^*}{(1+f)G_{12}^* + (1-f)G_{12}^\circ}, \\ & \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

На рис. 4.9 наведено графіки ядра релаксації $R(t)$ для значень частки волокна у композиті $f = 0,1$ (крива 1), $f = 0,3$ (крива 2), $f = 0,5$ (крива 3), $f = 0,7$ (крива 4). Зі зростанням значення f , тобто збільшенням частки пружного волокна у композиті в'язкопружні властивості композита зменшуються (значення $R(t)$ при фіксованих t прямують до нуля).

Ядро релаксації при довільних значеннях f є монотонно спадною функцією, що набуває невід'ємних значень. Слабка (інтегровна) особливість у точці $t = 0$ пояснюється наявністю такої ж особливості у абелевому ядрі релаксації в'язкопружної матриці.

Отже, знайдено ядро релаксації для ефективного операторного модуля зсуву \bar{G}_{12} для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита. Запропоновану методику визначення ефективних операторних модулів, що ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження вибраних переміщень точок матриці, волокна та

однорідного композиту, можна застосувати також для дослідження композитів, у яких в'язкопружні характеристики моделюються ядрами релаксації, відмінними від абелевих. Вибір ядра релаксації залежить від в'язкопружних властивостей матеріалу, що визначаються експериментальним шляхом.

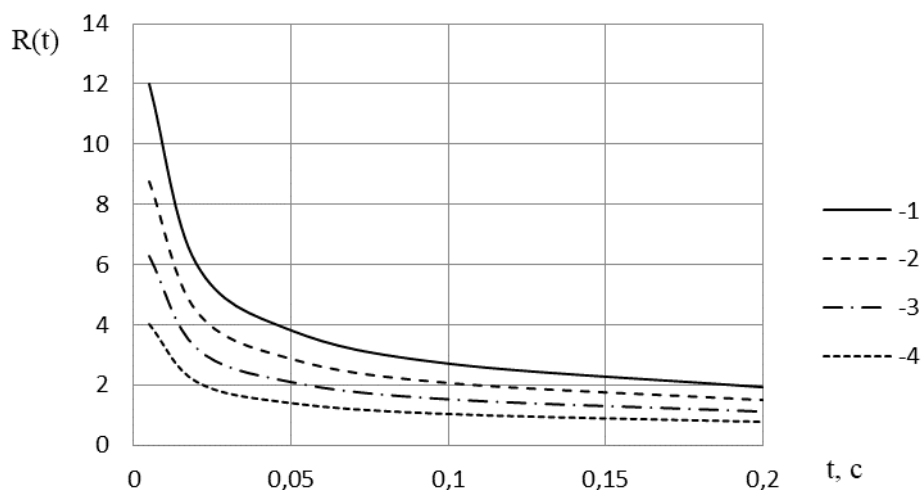


Рис. 4.9 – Залежності ядра релаксації $R(t)$ ефективного модуля поздовжнього зсуву в'язкопружного композита від часу t для різних значень частки f волокна у композиті ($f = 0,1$ – крива 1, $f = 0,3$ – крива 2, $f = 0,5$ – крива 3, $f = 0,7$ – крива 4)

Застосуємо енергетичний критерій узгодження до гомогенізації в'язкопружного трансропного композиту в умовах чистого поздовжнього зсуву. Розглянемо спочатку задачу про сумісний чистий поздовжній зсув ідеально пружних матриці та волокна.

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо наступні співвідношення для ненульових компонент напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна:

$$\begin{aligned}
 u_z^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\
 &\times \left(- (G_{12}^* + G_{12}^\circ) r + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta, \\
 \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\
 &\times \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta, \\
 \gamma_{zr}^*(r, \theta) &= - \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (\tilde{G}_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\
 &\times \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \\
 \tau_{zr}^*(r, \theta) &= - \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times \\
 &\times \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \\
 \tau_{z\theta}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Основні співвідношення для зображень ненульових компонент напружено-деформованого стану волокна при сумісному поздовжньому зсуві мають вигляд:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\gamma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\tau_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\tau_{z\theta}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^\circ \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}.$$

Розв'язки аналогічної задачі про чистий поздовжній зсув для транстропного в'язкопружного однорідного матеріалу, що моделює композит, виражаються рівностями:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta,$$

$$\gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta,$$

$$\gamma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta,$$

$$\tau_{zr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos \theta,$$

$$\tau_{z\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin \theta.$$

Згідно з енергетичним критерієм, сума величин енергії пружного деформування при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна дорівнює енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композиту при поздовжньому зсуві. Враховуючи це, маємо наступну рівність:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \int_0^{2\pi} (\tau_{z\theta}^* \gamma_{\theta z}^* + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^*) r dr d\theta dz + \int_0^a \int_0^b \int_0^{2\pi} (\tau_{zr}^\circ \gamma_{zr}^\circ + \tau_{z\theta}^\circ \gamma_{\theta z}^\circ) r dr d\theta dz = \\ & = \int_0^a \int_0^b \int_0^{2\pi} (\tau_{z\theta} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Підставивши сюди вирази для напружень та деформацій матриці, волокна та однорідного композиту, отримуємо наступну рівність:

$$\frac{b^2 (\sigma_0)^2}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} \times$$

$$\times \left((G_{12}^* + G_{12}^\circ)^2 (1-f) + f (G_{12}^\circ - G_{12}^*)^2 (1-f) \right) +$$

$$+ \frac{4a^2 G_{12}^\circ (\tilde{\sigma}_0)^2}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} = \frac{b^2 (\sigma_0)^2}{G_{12}}.$$

З цієї рівності отримуємо:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{(G_{12}^*)^2 + 2G_{12}^*G_{12}^\circ + (G_{12}^\circ)^2 - f^2(G_{12}^*)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} +$$

$$+ \frac{2f^2G_{12}^*G_{12}^\circ - f^2(G_{12}^\circ)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}.$$

Для переходу до розв'язку задачі про гомогенізацію в'язкопружного композиту в умовах поздовжнього зсуву замінимо пружні сталі G_{12} та G_{12}^* на зображення відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Отримуємо:

$$\frac{1}{\tilde{G}_{12}} = \frac{(\tilde{G}_{12}^*)^2 + 2\tilde{G}_{12}^*G_{12}^\circ + (G_{12}^\circ)^2 - f^2(\tilde{G}_{12}^*)^2}{\tilde{G}_{12}^*(\tilde{G}_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} +$$

$$+ \frac{2f^2\tilde{G}_{12}^*G_{12}^\circ - f^2(G_{12}^\circ)^2}{\tilde{G}_{12}^*(\tilde{G}_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}.$$

Звідси знаходимо вираз для зображення інтегрального оператора, що описує модуль зсуву:

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\tilde{G}_{12}^* (G_{12}^\circ (1+f) + \tilde{G}_{12}^* (1-f))}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)\tilde{G}_{12}^*}.$$

Зазначимо, що отримана формула співпадає з формулою, отриманою в задачі про поздовжній зсув на основі кінематичної умови узгодження.

4.5 Поперечний зсув

Розв'яжемо задачу про гомогенізацію в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого композитного матеріалу в умовах поперечного зсуву.

Нехай комірка композиту складається з в'язкопружних трансверсально-ізотропних матриці та волокна. Як і у попередніх випадках, моделлю волокна є суцільний циліндр $0 \leq r \leq a$, матриці – порожнинний циліндр ($a \leq r \leq b$). Розглянемо сумісний поперечний зсув цих елементів у площині ізоτροпії композиту.

Щоб отримати деформацію чистого поперечного зсуву, до зовнішньої поверхні комірки необхідно прикласти навантаження, що визначає крайові умови:

$$\begin{aligned}\sigma_r(b, \theta, t) &= \sigma_0(t) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta}(b, \theta, t) &= -\sigma_0(t) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (4.175)$$

Компоненти напружено-деформованого стану матриці та волокна визначаються шляхом інтегрування бігармонічного рівняння сумісності деформацій відносно функції Ері. З врахуванням крайових умов (4.175) отримаємо нормальні та дотичні напруження у матриці у вигляді:

$$\sigma_r^*(r, \theta) = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta; \quad (4.176)$$

$$\sigma_\theta^*(r, \theta) = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta; \quad (4.177)$$

$$\tau_{r\theta}^*(r, \theta) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta; \quad (4.178)$$

$$\tau_{zr}^* = \tau_{z\theta}^* = 0; \quad (4.179)$$

Для чистого поперечного зсуву осьова деформація $\varepsilon_z^* = 0$. Використовуючи закон Гука, а також співвідношення (4.176) та (4.177), отримуємо осьове напруження у матриці у вигляді:

$$\sigma_z^*(r, \theta) = \nu_{12}^* \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta. \quad (4.180)$$

Для волокна отримаємо:

$$\sigma_r^\circ(r, \theta) = -2F \cos 2\theta; \quad (4.181)$$

$$\sigma_\theta^\circ(r, \theta) = (2F + 12Hr^2) \cos 2\theta; \quad (4.182)$$

$$\tau_{r\theta}^\circ(r, \theta) = (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \quad (4.183)$$

$$\sigma_z^\circ(r, \theta) = 12Hr^2 \nu_{12}^\circ \cos 2\theta \quad (4.184)$$

$$\tau_{zr}^\circ = \tau_{\theta z}^\circ = 0. \quad 4.185)$$

Оскільки матриця та волокно є в'язкопружними, то величини A, B, C, D, F, H є невідомими функціями часу.

Визначимо компоненти деформацій для матриці та волокна. Їх в'язкопружні характеристики моделюються на основі спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. Тут аналогом поперечного модуля пружності E_2 є інтегральний оператор:

$$\bar{E}_2 [y(t)] = E_2 \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (4.186)$$

де $E_2 = \text{const}$ – миттєвий поперечний модуль пружності, $R(t)$ – ядро релаксації.

Застосуємо до співвідношень (4.175)-(4.176) перетворення Лапласа за часом t . У цих формулах невідомі функції часу замінюємо їх зображеннями – функціями $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, $\tilde{C}(p)$, $\tilde{D}(p)$, $\tilde{H}(p)$, $\tilde{F}(p)$, $\tilde{\sigma}_0(p)$, де p – параметр перетворення Лапласа. Зображення

лінійного інтегрального оператора (4.186) має вигляд: $\tilde{E}_2 \tilde{y}(p)$, де $\tilde{E}_2 = E_2(1 - \tilde{R}(p))$, $\tilde{R}(p)$ – зображення ядра релаксації $R(t)$.

Використовуючи закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу та формули Коші, знаходимо деформації та переміщення матриці та волокна. При цьому враховуємо кругову симетрію задачі.

Розв'яжемо задачу про сумісний поперечний зсув суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнинного циліндра, що моделює матрицю. Крайові умови (4.175) та умови неперервності переміщень та напружень при $r = a$ після застосування перетворення Лапласа мають вигляд:

$$\tilde{\sigma}_r^*(b, \theta) = \tilde{\sigma}_0(p) \cos 2\theta, \quad \tilde{\tau}_{r\theta}^*(b, \theta) = -\tilde{\sigma}_0(p) \sin 2\theta \quad (4.187)$$

$$\tilde{u}_r^*(a, \theta) = \tilde{u}_r^\circ(a, \theta), \quad (4.188)$$

$$\tilde{\sigma}_r^*(a, \theta) = \tilde{\sigma}_r^\circ(a, \theta), \quad (4.189)$$

$$\tilde{u}_\theta^*(a, \theta) = \tilde{u}_\theta^\circ(a, \theta), \quad (4.190)$$

$$\tilde{\tau}_{r\theta}^*(a, \theta) = \tilde{\tau}_{r\theta}^\circ(a, \theta). \quad (4.191)$$

Звідси знаходимо зображення невідомих функцій $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, $\tilde{C}(p)$, $D(p)$, $\tilde{H}(p)$, $\tilde{F}(p)$, $\tilde{\sigma}_0(p)$, що входять до складу зображень переміщень, напружень та деформацій.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \tilde{E}_2^\circ \left(\left(4f - 3 - \frac{1}{f^2} \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4f (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\
&- \tilde{E}_2^* \left(\left(4f - \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f^2} - f \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
d_{12} &= \tilde{E}_2^\circ \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\
&- \tilde{E}_2^* \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(1 - \frac{1}{f} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
d_{21} &= \tilde{E}_2^\circ \left(4f (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^*) \right) - \\
&- \tilde{E}_2^* \left(\left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
d_{22} &= \tilde{E}_2^\circ \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\
&- \tilde{E}_2^* \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
b_1 &= \tilde{E}_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) - \tilde{E}_2^* (1 + \nu_{23}^\circ).
\end{aligned}$$

Зображення радіального переміщення точок матриці має вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r^*(r, \theta) &= \left((1 + \nu_{23}^*) + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times (l^*(d_{22} - d_{12}) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{4a^2}{r^2} (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + f (1 + \nu_{23}^*) \left(1 - \frac{b^4}{r^4} \right) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \frac{\tilde{\sigma}_0 r}{\tilde{E}_2^*} \cos 2\theta, \quad (4.192)
\end{aligned}$$

$$l^* = \left(3 + \frac{b^4}{r^4}\right) (1 + \nu_{23}^*) - \frac{4r^2}{b^2} (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*).$$

Визначимо зображення переміщень та напружень для чистого поперечного зсуву циліндра ($0 \leq r \leq b$) з однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Крайові умови у зображеннях мають вигляд (4.187). Зображення радіального переміщення для однорідного композиту подається виразом:

$$\tilde{u}_r(r, \theta) = \frac{\tilde{\sigma}_0 (1 + \nu_{23}) r}{\tilde{E}_2} \cos 2\theta. \quad (4.193)$$

Отримали зображення радіальних переміщень матриці, волокна та однорідного композиту які використаємо для визначення в'язкопружних характеристик гомогенізованого матеріалу. Запишемо умову узгодження радіальних переміщень на зовнішній поверхні комірки. У зображеннях маємо:

$$\tilde{u}_r(b, \theta) = \tilde{u}_r^*(b, \theta), \quad (4.194)$$

Використовуючи рівність (4.194), отримуємо:

$$\frac{(1 + \nu_{23})}{\tilde{E}_2} = \frac{1}{\tilde{E}_2^*} \left((1 + \nu_{23}^*) + \frac{b_1}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}} \left((3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \right) \right) \times$$

$$\begin{aligned} &\times(1+v_{23}^*)-4(d_{22}-d_{12})(v_{23}^*+v_{21}^*v_{12}^*)+((d_{22}-d_{12})-f(d_{11}-d_{21}))\times \\ &\quad \times(1+v_{23}^*)+4f(d_{11}-d_{21})(1-v_{21}^*v_{12}^*)); \end{aligned}$$

Застосуємо позначення:

$$\chi_1 = \frac{d_{11}-d_{21}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}};$$

$$\chi_2 = \frac{d_{22}-d_{12}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}},$$

$$\gamma = \tilde{E}_2^*(1-v_{23}^\circ) + \tilde{E}_2^\circ(1+v_{23}^*)$$

Після перетворень отримаємо:

$$\frac{1+v_{23}}{\tilde{E}_2} = \frac{1}{\tilde{E}_2^*} \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2\tilde{E}_2^*)(1-v_{21}^*v_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right). \quad (4.195)$$

Якщо параметр перетворення Лапласа $p \rightarrow \infty$, то

$$\tilde{E}_2^\circ \rightarrow E_2^\circ, \quad \tilde{E}_2^* \rightarrow E_2^*, \quad \tilde{E}_2 \rightarrow E_2.$$

Замінивши зображення операторів миттєвими характеристиками, з рівності (4.195) отримаємо формулу для відношення $\frac{E_2}{1+v_{23}}$:

$$\frac{E_2}{1+\nu_{23}} = \frac{E_2^*}{1+\nu_{23}^* + 4(y - 2E_2^*)(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f \cdot x_1 + x_2)}. \quad (4.196)$$

У рівності (4.196) x_1 , x_2 , y отримуємо заміною у формулах для χ_1 , χ_2 , γ зображень \tilde{E}_2° , \tilde{E}_2^* відповідно на E_2° , E_2^* .

Знайдемо зображення $\tilde{R}(p)$ ядра релаксації для однорідного композиту. Замінивши у (4.195) \tilde{E}_2 на $E_2(1 - \tilde{R}(p))$, отримаємо формулу:

$$\tilde{R}(p) = \frac{\alpha(p) - m\tilde{E}_2^*}{\alpha(p)}. \quad (4.197)$$

У рівності (4.197)

$$\alpha(p) = 1 + \nu_{23}^* + 4(\gamma - 2\tilde{E}_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2),$$

$$m = \frac{1 + \nu_{23}}{E_2}.$$

Використовуючи формули обернення перетворення Лапласа, отримуємо оригінал $R(t)$ для ядра релаксації.

Як приклад запропонованої вище методики побудови оператора \tilde{E}_2 виконано розрахунок його характеристик для волокнистого композиту з наступними фазами. Матеріалом в'язкопружної матриці

є ізотропна гума типу 67Л, для якої $E_2^* = E^* = 4,5$ ГПа, статичний (умовно-рівноважний) модуль пружності $E_\infty^* = 2,34$ ГПа, $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = \nu_{23}^* = 0,5$, інтегральний оператор

$$\tilde{E}_2^*[\varepsilon(t)] = E_2 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E_2 - E_\infty}{E_2} \varepsilon(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \right),$$

матеріалом пружного трансверсально-ізотропного волокна є поліетилен VHDPE Tenfor SNIA з параметрами $E_2^\circ = 4,68$ ГПа, $\nu_{12}^\circ = \nu_{21}^\circ = 0,38$, $\nu_{23}^\circ = 0,55$. Ядро релаксації для інтегрального оператора, що відповідає ефективному поперечному модулю пружності композиту, має вигляд:

$$R(t) = 0,716 \cdot e^{-t} - 0,008e^{-0,772t} - 0,596e^{-0,992t}.$$

Відповідний графік наведено на рисунку 4.10. На ньому видно, що $R(t)$ є монотонно спадною функцією, що прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. З графіка випливає, що в'язкопружні властивості композиту у найбільшій мірі проявляються у початковий період навантаження комірки при $t \in [0;5]$, при $t > 5$ значення ядра релаксації близькі до нуля. Запропонована методика дозволяє знаходити ядро релаксації інтегрального оператора, що відповідає ефективному поперечному модулю пружності для в'язкопружного двохфазового

трансверсально-ізотропного волокнистого композиту з в'язкопружними трансверсально-ізотропними матрицею та волокном.

Розглянемо застосування енергетичного критерію до розв'язання задачі про гомогенізацію волокнистого в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту при сумісному поперечному зсуві його елементарної комірки. Як і раніше, комірка подається комбінацією суцільного циліндра $0 \leq r \leq a$, що моделює волокно, та порожнистого циліндра $a \leq r \leq b$, що моделює матрицю.

Спочатку запишемо розв'язок цієї задачі для ідеально пружного композиту з ідеально пружними матрицею та волокном.

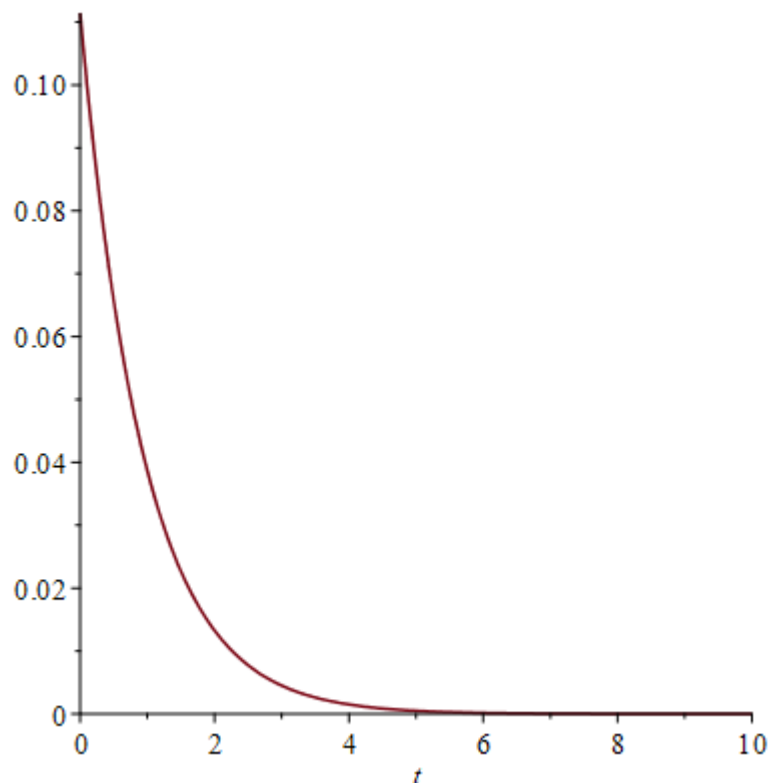


Рис. 4.10 – Графік ядра релаксації $R(t)$ в'язкопружного композиту

Напруження, переміщення та деформації точок матриці мають

ВИГЛЯД:

$$\sigma_r^*(r, \theta) = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_\theta^*(r, \theta) = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta;$$

$$\tau_{r\theta}^*(r, \theta) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta;$$

$$\tau_{zr}^* = 0,$$

$$\tau_{\theta z}^* = 0;$$

$$\sigma_z^*(r, \theta) = \nu_{12}^* \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^*(r, \theta) = & - \frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*) + 12Br^2(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{6C}{r^4}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{4D}{r^2}(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^*(r, \theta) = & \frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*) + 12Br^2(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{6C}{r^4}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{4D}{r^2}(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \end{aligned}$$

$$\gamma_{r\theta}^*(r, \theta) = \frac{2(1 + \nu_{23}^*)}{E_2^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta;$$

$$\gamma_{zr}^* = 0;$$

$$\gamma_{z\theta}^* = 0;$$

$$\varepsilon_z^* = 0.$$

Компоненти напружено-деформованого стану волокна визначаються за формулами:

$$\sigma_r^\circ(r, \theta) = -2F \cos 2\theta;$$

$$\sigma_\theta^\circ(r, \theta) = (2F + 12Hr^2) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_z^\circ(r, \theta) = 12Hr^2 \nu_{12}^\circ \cos 2\theta;$$

$$\tau_{r\theta}^\circ(r, \theta) = (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta;$$

$$\tau_{zr}^\circ = 0;$$

$$\tau_{\theta z}^\circ = 0,$$

$$\varepsilon_r^\circ(r, \theta) = -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta;$$

$$\varepsilon_\theta^\circ(r, \theta) = \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2 (1 - \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta;$$

$$\gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta) = \frac{2(1 + \nu_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta;$$

$$\gamma_{zr}^\circ = 0,$$

$$\gamma_{z\theta}^\circ = 0.$$

Введемо допоміжні змінні:

$$\zeta_2 = b_1 \chi_2;$$

$$\zeta_1 = b_1 \chi_1.$$

Тоді для коефіцієнтів A , B , C , D , F та H маємо:

$$B = \frac{\sigma_0 \zeta_2}{b^2};$$

$$D = \sigma_0 a^2 \zeta_1;$$

$$C = \sigma_0 \zeta_2 \frac{b^4}{2} - \sigma_0 \zeta_1 \frac{a^2 b^2}{2} = \sigma_0 \frac{b^2}{2} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2);$$

$$A = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3\sigma_0 \zeta_2}{2} - \frac{\sigma_0 f \zeta_1}{2} = -\frac{\sigma_0}{2} (1 + 3\zeta_2 + f \zeta_1);$$

$$F = \frac{\sigma_0}{2} \left(3\zeta_2 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) + \zeta_1 \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) - 1 \right);$$

$$H = \frac{\sigma_0}{b^2} \left(\zeta_2 \left(1 - \frac{1}{f^3} \right) + \zeta_1 \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f} \right) \right).$$

Компоненти напружень та деформацій матриці набувають вигляду:

$$\tau_{r\theta}^*(r, \theta) = - \left((1 + 3\zeta_2 + f \zeta_1) - 6 \frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) + \frac{2a^2}{r^2} \zeta_1 \right) \times \\ \times \sigma_0 \sin 2\theta,$$

$$\tilde{\sigma}_r^*(r, \theta) = \sigma_0 \left(1 + 3\zeta_2 + f \zeta_1 + (\zeta_1 a^2 - \zeta_2 b^2) \frac{3b^2}{r^4} - \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta}^*(r, \theta) = \sigma_0 \left(-(1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) + 12 \frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) \right) \cos 2\theta,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{E_2^*} & \left((1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1)(1 + \nu_{23}^*) - 12 \frac{\zeta_2 r^2}{b^2} (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_1 a^2 - \zeta_2 b^2)(1 + \nu_{23}^*) - \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{E_2^*} & \left(-(1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1)(1 + \nu_{23}^*) + 12 \frac{\zeta_2 r^2}{b^2} (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2)(1 + \nu_{23}^*) + \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta}^*(r, \theta) = -\frac{2\sigma_0}{E_2^*} (1 + \nu_{23}^*) & \left((1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) - 6 \frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) + \frac{2a^2 \zeta_1}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Наведемо розв'язок задачі про чистий поперечний зсув для однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту:

$$\sigma_r(r, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta,$$

$$\varepsilon_r(r, \theta) = \frac{\sigma_0 (1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta,$$

$$\varepsilon_{\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0 (1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta,$$

$$\gamma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{2\sigma_0(1+\nu_{23})}{E_2} \sin 2\theta.$$

Згідно з енергетичним критерієм енергія пружної деформації елементарної комірки однорідного композиту дорівнює сумі таких енергій для матриці та волокна. У результаті отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_0^h \int_0^{2\pi} (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \tau_{r\theta}^* \gamma_{r\theta}^*) r d\theta dz + \\ & + \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} (\sigma_\theta^\circ \varepsilon_\theta^\circ + \sigma_r^\circ \varepsilon_r^\circ + \tau_{r\theta}^\circ \gamma_{r\theta}^\circ) r d\theta dz dr = \\ & = \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) r d\theta dz dr. \end{aligned}$$

Підставляючи сюди наведені вище співвідношення для компонентів напружень та деформацій, після інтегрування та елементарних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0^2 b^2}{E_2^*} (\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*)) + \\ & + \frac{b^2 \sigma_0^2}{E_2^\circ} (\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ)) = \frac{b^2 \sigma_0^2 (1 + \nu_{23})}{E_2}. \end{aligned}$$

Тут застосовані наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1-f) \left(1 - 6f\zeta_2 + 2f\zeta_1 + 3\zeta_2^2 \left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f} + 3 + 6f^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - 6 \left(f^2 + \frac{1}{f^2} + 2f \right) \zeta_1 \zeta_2 + \left(f^2 + \frac{3}{f} - 3 + 3f \right) \zeta_1^2 \right), \\
\beta_1 &= \left(24f\zeta_1\zeta_2 - 12\zeta_2^2(1+f+f^2) - 4f\zeta_1^2 \right) (1-f), \\
\alpha_2 &= 9\zeta_2^2 \left(2f^3 - 2f^2 + f - 2 + \frac{1}{f^3} \right) + \zeta_1^2 \left(f^3 - 2f^2 + 10f - 18 + \frac{9}{f} \right) - \\
&\quad - 6\zeta_1\zeta_2 \left(f^3 + f^2 - 2f - 3\frac{1}{f} + \frac{3}{f^2} \right) + \left(2(3\zeta_2 - \zeta_1)(1-f) + 1 \right) f; \\
\beta_2 &= -\frac{12}{f} \left((1-f) \left(\zeta_2 \left(\frac{1+f+f^2}{f} \right) - \zeta_1 \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

З отриманого виразу для енергетичного критерію знаходимо:

$$\frac{1+v_{23}}{E_2} = \frac{E_2^\circ \left(\alpha_1 (1+v_{23}^*) + \beta_1 (v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) \right) + E_2^* \left(\alpha_2 (1+v_{23}^\circ) + \beta_2 (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right)}{E_2^* E_2^\circ}.$$

У п. 4.3 була отримана рівність:

$$\begin{aligned}
\frac{1-v_{23}}{E_2} &= \frac{E_2^* (1-v_{23}^\circ) \left(f (1+v_{23}^*) + (1-v_{23}^*) \right) + E_2^\circ \left(1 - (v_{23}^*)^2 \right) (1-f)}{E_2^* \alpha} + \\
&\quad + \frac{2fE_1^* E_1^\circ (1-f) (v_{21}^* \gamma - 2v_{21}^\circ E_2^*)^2}{(E_2^*)^2 \alpha \left(2\beta (E_1^* (1-f) v_{12}^\circ + E_1^\circ f v_{12}^*) - \alpha (E_1^\circ f + E_1^* (1-f)) \right)}.
\end{aligned}$$

Додаючи останні дві рівності почленно, отримуємо вираз:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{2E_2^*E_2^\circ} \left(E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1\eta_2) + \alpha\delta_2 \right).$$

У цій рівності використані наступні позначення:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= E_2^\circ \left(\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) + \\ &+ \left(\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) + \tilde{E}_2^*, \\ \delta_1 &= \tilde{E}_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) \left(f (1 + \nu_{23}^*) + (1 - \nu_{23}^*) \right) + \\ &+ E_2^\circ \left(1 - (\nu_{23}^*)^2 \right) (1 - f). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^* E_2^\circ}{E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1\eta_2) + \alpha\delta_2}.$$

Використавши останню рівність та рівність для відношення $\frac{1 + \nu_{23}}{E_2}$, знаходимо формулу для обчислення коефіцієнта Пуассона

ν_{23} :

$$\nu_{23} = \frac{(\alpha\delta_2 - E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1\eta_2))}{(\alpha\delta_2 + E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1\eta_2))}.$$

При розв'язанні задачі гомогенізації для ідеально пружного композиту були визначені параметри, що використовуються при моделюванні властивостей в'язкопружного композиту, а саме сталі величини – коефіцієнт Пуассона ν_{23} для площини ізотропії та миттєвий ефективний поперечний модуль пружності E_2 . Для знаходження виразу для інтегрального оператора \bar{E}_2 для в'язкопружного композиту замінимо у виразі для миттєвого модуля E_2 константи E_2 та E_2^* на зображення інтегральних операторів

$$\tilde{E}_2 = E_2(1 - \tilde{R}(p)), \quad \tilde{E}_2^* = E_2^*(1 - \tilde{R}^*(p)).$$

Звідси знайдемо формулу для зображення ядра релаксації $\tilde{R}(p)$, що співпадає з отриманою раніше на основі використання кінематичних умов узгодження.

Отже, визначити параметри ефективних характеристик в'язкопружного композиту можна на основі розв'язку відповідної задачі для ідеально пружного матеріалу з подальшим переходом у простір лапласових зображень.

Перелік використаної літератури

1. Аболиньш Д. С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала. *Механика полимеров*. 1965. № 4. С. 52–59.
2. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2003. 412 с.
3. Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. Москва : Высшая школа, 1990. 400 с.
4. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва : Машиностроение, 1984. 264 с.
5. Арутюнян Н. Х., Зевин А. А. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. Москва : Стройиздат, 1988. 256 с.
6. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. Москва : Наука, 1983. 336 с.
7. Ахундов В. М. Методика расчета тонких оболочек с малым количеством однонаправленных слоев на основе пространственных моделей деформирования. *Механика композитных материалов*. 2012. Т. 48, № 3. С. 419–436.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Деформационные характеристики резинокомпозитов со значительными наполнениями нитями корда. *Проблеми обчислювальної механіки*

- і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ : Ліра, 2012. Вип. 20. С. 27–37.
9. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Ленинград : Машиностроение, 1972. 216 с.
 10. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
 11. Бартенев Г. М., Бартенева А. Г. Релаксационные свойства полимеров. Москва : Химия, 1992. 384 с.
 12. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 352 с.
 13. Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. Москва : Издательство физико-математической литературы, 2003. 388 с.
 14. Бидерман В. Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. *Прочность, устойчивость, колебания*. Москва : Машиностроение. 1968. Т. 2. С. 211–242.
 15. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. Москва : Мир, 1965. 199 с.
 16. Блумберг Н. Н., Тамуж В. П. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композитных пластинах. *Механика композитных материалов*. 1980. № 3. С. 424–435.

17. Богуславська А. М., Клименко М. І., Гребенюк С. М. Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з композиційного матеріалу з транстропним волокном. *Нові матеріали і технології у металургії та машинобудуванні. Науковий журнал*. 2018. № 1. С. 101–107.
18. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред. *Механика полимеров*. 1965. № 2. С. 27–37.
19. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 376 с.
20. Болтыров А. А. Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала. *Проблемы шин и резинокордных композитов : труды восемнадцатого симпозиума (Москва, 15-19 октября 2007 г.)*, Москва, 2007. Т. 1. С. 73–86.
21. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск : Пороги, 2008. 196 с.
22. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. Москва : Наука, 1973. 288 с.
23. Булат А. Ф., Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Клименко М. И. Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими. *Проблеми міцності*. 2019. № 2. С. 15–25.

24. Булычев Г. Г., Кукуджанов В. Н. Динамическое разрушение предварительно-напряженного волокнистого композита, вызванное обрывом волокна. *Механика твердого тела*. 1993. № 3. С. 169–176.
25. Бурдун Е. Т., Криптюк А. В. Оптимизация структуры намоточной тороидальной оболочки при ограничениях по устойчивости. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*. 2011. Вип. 12. С. 24–32.
26. Бурлаков А. В., Львов Г. И., Морачковский О. К. Ползучесть тонких оболочек. Харків : Вища школа, 1977. 124 с.
27. Бурьян О. Ю., Новиков В. У. Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств. *Механика композитных материалов*. 2002. Т. 38, № 3. С. 289–304.
28. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Москва : Наука, 1985. 304 с.
29. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва : Машиностроение, 1988. 272 с.
30. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. Москва : Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
31. Вильчинский А. П. Моделирование вязкоупругих свойств полимерных смол. *Механика композитных материалов*. 2004. Т. 40, № 5. С. 699–709.

27. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С. Численный анализ процесса упруго-пластического деформирования структурированных сред. *Доповіді Національної академії наук України*. 2012. № 5. С. 49–56.
28. Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Победря Б. Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей. *Известия РАН, МТТ*. 2004. № 1. С. 119–157.
29. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. Київ : Наукова думка, 1987. 304 с.
30. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. К задаче идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. *Теоретическая и прикладная механика*, 2009. Вып. 45. С. 39–49.
31. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. *Прикладная механика*. 2011. Т. 47, № 3. С. 75–88.
32. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования. *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, № 5. С. 20–34.
33. Голуб В. П., Павлюк Я. В., Фернати П. В. К расчету деформаций ползучести линейно-вязкоупругих материалов при нестационарном одноосном нагружении. *Прикладная механика*. 2009. Т. 45. № 10. С. 45–61.

34. Голуб В. П., Фернати П. В., Ляшенко Я. Г. Об определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов. *Прикладная механика*. 2008. Т. 44, № 9. С. 12–25.
35. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Клименко М. І., Мізерна О. Л. Чисельне моделювання в'язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3 (66). С. 39–44.
36. Горбатко О. О. Ефективні характеристики в'язкопружного композиційного матеріалу з міжфазною тріщиною. *Вісник Чернігівського державного технологічного університету. Серія «Технічні науки»*. 2012. № 4(53). С. 144–150.
37. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности: Учеб. для вузов. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
38. Гребенюк С. Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транслопными матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*. Дніпропетровськ : Ліра, 2012. Вип. 13. С. 92–98.
39. Гребенюк С. Н. Определение продольного модуля упругости композита на основе энергетического условия согласования. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2012. Вип. 2(45). С. 106–110.

40. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*. Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2010. Вип. 11. С. 79–86.
41. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с трансропной матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*. Дніпропетровськ : Ліра, 2011. Вип. 12. С. 62–68.
42. Гребенюк С. М. Визначення пружних сталих композита з трансропними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ, 2012. № 1. С. 62–76.
43. Гребенюк С. М. Напружено-деформований стан порожнистого циліндру із волокнистого композита з трансропними компонентами. *Актуальні проблеми механіки деформіруемого твердого тела : труды VII Международной научной конференции* (м. Донецьк, 11-14 липня 2013 р.). Донецьк, 2013. Т. 1. С. 117–120.
44. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Леонтьева В. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния резинокордных материалов. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2010. Вип. 3(39). С. 126–131.

45. Гребенюк С. Н., Киричевский Вал. В. Напряженно-деформированное состояние композитных конструкций с трещинами. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*. 2006. № 3(97). С. 46–50.
46. Гребенюк С. Н., Киричевский В. В., Гоменюк С. И. Вязкоупругое деформирование конструкций из композиционного материала. *Вісник Східноукраїнського національного університету*. 2003. № 12(70). С. 226–231.
47. Гребенюк С. Н., Киричевский В. В., Толок В. А. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Проблемы шин и резинордных композитов: труды двенадцатого симпозиума*. (Москва, 15-19 октября 2001 г.). Москва, 2001. Т. 1. С. 147–151.
48. Гребенюк С. М., Клименко М. І. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон : ХНТУ, 2014. Вип. 3(50). С. 254–58.
49. Гребенюк С. Н., Мелашенко О. П. Использование различных критериев для расчета прочности волокнистых композитов. *Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил*. Харків : Видавництво Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2012. Вип. 3(32). С. 134–136.

50. Гребенюк С. Н., Мелашенко О. П. Определение прочностных характеристик композитной цилиндрической оболочки. *Геотехническая механика*. Днепропетровск: Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. 2007. Вып. 71. С. 163–165.
51. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*. Луганськ : СУНУ, 2010. № 10(152), Ч. 2. С. 41–48.
52. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский В. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики*: тезисы докладов международной конференции (г. Харьков, 1-7 декабря 2006 г.). Харьков, 2006. С. 63.
53. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Методы исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных оболочек с приложением к механике пневматических шин. *Научно-технический прогресс в машиностроении*. Москва: Международный центр научной и технической информации, институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 1993. Вып. 39. 49 с.

54. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. Москва : Машиностроение, 1988. 288 с.
55. Грищак В. З., Гребенюк С. Н. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон : ХНТУ, 2013. Вип. 2(47). С. 110–114.
56. Дария Заде С., Львов Г. И. Численная методика определения эффективных механических характеристик однонаправленно армированного композита. *Проблемы прочности*. 2015. № 4. С. 31–40.
57. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 2. С. 28–48.
58. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Исследование процессов разрушения композиционных материалов на базе метода асимптотической гомогенизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*. 2012. № 6. С. 101–113.
59. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*. 2012. Т. 24, № 5. С. 3–20.

60. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21, № 4. С. 96–110.
61. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей. Днепропетровск-Запорожье : Запорожский национальный университет, 2012. 370 с.
62. Дюво Ж. Функциональный анализ и механика сплошной среды. Приложение к изучению композиционных материалов с периодической структурой – гомогенизации. *Теоретическая и прикладная механика*. Москва : Мир. 1979. С.323–346.
63. Ефимов А. Б., Малый В. И. О принципе Вольтерра и методе аналитического продолжения в линейной вязкоупругости. Доклады АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1039-1043.
64. Жук Я. А., Сенченков И. К. К вопросу об определении макрохарактеристик однонаправленного волокнистого композита из физически нелинейного материала при гармоническом нагружении. *Системні технології*. 2003. № 4(27). С. 62-67.
65. Зелин В. И. Янсон Ю. О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний. *Механика полимеров*. 1977. № 6. С. 972–975.
66. Ильин В. П., Мальцев Л. Е., Соколов В. Г. Расчет строительных конструкций из вязкоупругих материалов. Ленинград : Стройиздат. Ленинградское объединение, 1991. 190 с.

67. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Москва : Изд-во МГУ. 1978. 287 с.
68. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. Москва : Наука, 1970. 240 с.
62. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41. № 5. С. 9–21.
63. Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О. Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композита, релаксація компонентів якого описується експонентами різних дробових порядків. *Математичні методи та фізико-математичні поля*. 2008. 51. № 3. С.1–12.
64. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев : Наукова думка. 1982. 260 с.
65. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. Москва : Стройиздат, 1996. 416 с.
66. Каспаров А. А. Упругие характеристики и механика деформирования текстильных кордов. *Геотехническая механика*. 1999. № 11. С. 69–83.
67. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н. Исследование процессов разрушения эластомерных конструкций в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования. *Проблемы прочности*. 2001. № 3. С. 129–140.

68. Киричевский В. В., Сахаров А. С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. Київ : Будівельник, 1992. 215 с.
69. Киричевский В. В., Толок В. А., Гребенюк С. Н. Расчет тороидальной оболочки в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету*. 2001. № 2(36). С. 204–208.
70. Киричевський В. В., Дохняк Б. М., Карпушин О. Д. Вплив кута армування на наведені пружні характеристики композиційних матеріалів, армованих суцільними волокнами. *Опір матеріалів і теорія споруд*. Київ : КДТУБА, 1999. Вип. 65. С. 108–114.
71. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.
72. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М. Термопружна задача для порожнистого циліндра з композиційного матеріалу з транстропним волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 94–101.
73. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Термомеханические характеристики волокнистого композиционного материала с изотропной матрицей и трансверсально-изотропным волокном. *Вісник Запорізького*

- національного університету. Фізико-математичні науки. 2017. № 1. С. 179–189.
74. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М. Термопружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально ізотропними матрицею і волокном. *Вісник Дніпропетровського національного університету ім. О. Гончара. Фізико-математичні науки.* 2017. Випуск 27. С. 75–90.
75. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Характеристики композиционного материала с трансверсально-изотропными вязкоупругими матрицей и волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя : ЗНУ, 2015. №3. С. 94-101.
76. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М., Гаценко А. В. Напружено-деформований стан гумових та гумовокордних віброізоляторів в умовах температурного та нелінійного деформування. *Геотехнічна механіка. Міжвідомчий збірник наукових праць.* Дніпро : Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. Випуск 138. 2018. С. 196–204.
77. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Смолянкova Т. М. Визначення ефективного модуля зсуву односпрямованого композиту при нормальному розподілі радіуса волокна. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя : ЗНУ, 2016. № 2. С. 127–136.

78. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. Москва : Высшая школа, 1976. 279 с.
79. Композиционные материалы: Справочник / Васильев В. В.; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. Москва : Машиностроение, 1990. 512 с.
80. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.
81. Кочетков В. А. Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон. *Механика композитных материалов*. 1993. № 3. С. 317–323.
82. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. Москва : Наука, 1985. 304 с.
83. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. Москва: Мир, 1974. 340 с.
84. Кузнецов Г. Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. Москва : Наука, 1979. 112 с.
85. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2009. №4(70). С. 129–148.

86. Кучер М. К., Заразовский М. М. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинобудування*. № 58. 2010. С. 24–29.
87. Кучер Н. К., Заразовский М. Н., Земцов М. П. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных высокопрочными волокнами. *Проблемы прочности*. 2006. Т. 38, № 1. С. 41–54.
88. Лагздинь А. Ж., Тамуж В. П., Тетерс Г. А., Креггерс А. Ф. Метод ориентационного усреднения в механике материалов. Рига : Зинатне, 1989. 190 с.
89. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. 416 с.
90. Лурье А. И. Теория упругости. Москва : Наука, 1970. 940 с.
91. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Москва : Высшая школа, 1979. 347 с.
92. Максимов Р. Д., Плумэ Э. Длительная ползучесть органостеклопластика. *Механика композитных материалов*. 2001. Т. 37, № 4. С. 435–450.
93. Малмейстер А. А., Янсон Ю. О. Прогнозирование релаксационных свойств эпоксидного связующего ЭД10 при сложном напряженном состоянии. *Механика композитных материалов*. 1983. № 5. С. 889–894.

94. Мальцев Л. Е. Приближенное операционное исчисление для уравнений Вольтерры в задачах механики полимеров. *Механика полимеров*. 1977. № 5. С.804–811.
95. Мальцев Л. Е. Об аналитическом определении параметров ядра Ржаницина-Колтунова. *Механика композитных материалов*. 1979. № 1. С. 161–163.
96. Малый В. И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов. *Известия АН СССР. МТТ*. 1980. № 1. С.77–86.
97. Малый В. И., Труфанов Н. А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов. *Известия АН СССР. МТТ*. 1987. № 6. С. 148–154.
98. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Слово, 2007. 296 с.
99. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. Киев : Вища школа, 1973. 266 с.
100. Матвеев В. П., Трояновский И. Е., Цаплина Г. С. Построение решений задач теории упругости в виде рядов по степеням упругих постоянных и их приложения к вязкоупругости. *Прикладная математика и механика*. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 651–659.
101. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. Т. 1: Механика материалов / А. Н. Гузь и др. Київ: Наукова думка, 1982. 368 с.

102. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. Т. 2: Механика элементов конструкций / А. Н. Гузь и др. Київ: Наукова думка, 1983. 464 с.
103. Механика композитов. Т.1. Статика материалов / В. Т. Головчан и др. Київ: Наукова думка, 1993. 455 с.
104. Механика композитов. Т. 10. Устойчивость элементов конструкций / И. Ю. Бабич и др.; ред. И. Ю. Бабич. Київ : Наукова думка, 2001. 375 с.
105. Механика композитов. Т. 11. Численные методы / Я. М. Григоренко и др.; под ред. акад. НАН Украины Я. М. Григоренко, акад. НАН Украины Ю.Н. Шевченко. Київ : Наукова думка, 2002. 448 с.
106. Механика композитов. Т. 12. Прикладные исследования / под ред. А. Н. Гузя и Л. П. Хорошуна. Київ : Наукова думка, 2003. 398 с.
107. Механика композитов. Т. 2. Динамика и устойчивость материалов / под ред. Н. А. Шульги. Київ : Наукова думка, 1993. 429 с.
108. Механика композитов. Т. 3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Л. П. Хорошун, Б.П. Маслов, Е. Н. Шикула, Л. В. Назаренко; под ред. Л. П. Хорошуна. Київ : Наукова думка, 1993. 390 с/
109. Механика композитов. Т. 4. Механика материалов с искривленными структурами / С. Д. Акбаров и др.; ред. А. Н. Гузь, С. Д. Акбаров. Київ : Наукова думка, 1995. 320 с.

110. Механика композитов. Т.5 . Механика разрушения / А. Н. Гузь и др.; ред. А. А. Каминский. Київ : Наукова думка, 1996. 340 с.
111. Механика композитов. Т. 6. Технологические напряжения и деформации в материалах / А. Н. Гузь и др.; ред. Н. А. Шульга, В.Т. Томашевский. Київ : Наукова думка, 1997. 394 с.
112. Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений / А.Н. Гузь и др. Київ : Наукова думка, 1998. 387 с.
113. Механика композитов. Т. 8. Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко и др. Київ : Наукова думка, 1999. 379 с.
114. Механика композитов. Т. 9. Динамика элементов конструкций / В. Д. Кубенко и др.; ред. В. Д. Кубенко. Київ: Наукова думка, 1999. 379 с.
115. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе / С. Н. Гребенюк и др. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. 2006. № 2. С. 50–54.
116. Моделювання магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів регулярної структури / Л. А. Фильштинський, та інші. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон : ХНТУ, 2013. Вип. 2(47). С. 357–362.
117. Московский С. Л., Мельникова К. П., Пугачев А. К. Исследование релаксационных свойств полимерных композитных материалов. *Механика композитных материалов*. 1984. № 6. С. 1105–1107.

118. Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига : Зинатне, 1988. 299 с.
119. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука, 1986. 166 с.
120. Новиков В. У., Бурьян О. Ю. Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах. *Прикладная физика*. 2000. № 1. С. 67–78.
121. Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор / В. И. Дырда и др. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ : Ліра, 2012. Вип.13. С. 152-158.
122. Пагано Н. Дж. Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. *Механика композиционных материалов* / Под ред. Дж. Сендецки. Москва : Мир, 1978. Том 2. С. 13–37.
123. Пагано Н. Дж. Точные модули анизотропных слоистых композитов. *Механика композиционных материалов* / ред. Дж. Сендецки. Москва : Мир, 1978. Том 2. С. 38–60.
124. Пипкин А. С. Конечные деформации идеальных волокнистых композитов. *Механика композиционных материалов* / ред. Дж. Сендецки. Москва: Мир, 1978. Том 2. С. 287–353.

125. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. Київ : Будівельник, 1986. 176 с.
126. Плуме Э. З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа. *Механика композитных материалов*. 1992. № 4. С. 557–566.
127. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
128. Победря Б. Е. Модели линейной теории вязкоупругости. *Известия РАН, МТТ*. № 3. 2003. С. 120–134.
129. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И. Прикладная механика резины. Киев : Наукова думка. 1973. 208 с.
130. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций / С. И. Гоменюк и др. *Вісник двигунобудування*. Запоріжжя: ОАО «Мотор Сич». 2009. № 2. С. 139–142.
131. Пшеничнов С.Г. Построение оригинала для трансформанты лапласа с помощью теории вычетов в задачах динамики линейно-вязкоупругих тел. *Нелинейные явления в открытых системах*. Москва, 1997. Вып. 8. С.79–87.
132. Пэйгано Н. Межслойные эффекты в композитных материалах: Пер. с англ. / под ред. Н. Пэйгано. Москва : Мир, 1993. 346 с.
133. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва : Наука, 1966. 752 с.

134. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва : Наука, 1977. 384 с.
135. Растеряев Ю. К., Агальцов Г. Н. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования. *Геотехническая механика*. 2005. № 60. С. 200–248.
136. Растеряев Ю. К. Теория деформирования составных анизотропных резинокордных материалов, используемых в каркасах пневматических шин. *Геотехническая механика*. 1999. № 11. С. 84–100.
137. Растеряев Ю. К., Каспаров А. А. Упругие характеристики и механика деформирования составных анизотропных резинокордных систем пневматических шин. Труды I Международного симпозиума по механике эластомеров. Днепропетровск, 1996. Т. II. С. 47-66.
138. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / В.А. Баженов и др. Київ : Будівельник, 1992. 136 с.
139. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. Москва : Издательство литературы по строительству, 1968. 418 с.
140. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига : Зинатне, 1974. 310 с.
141. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 535 с.
142. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. Москва : Наука, 1976. 573 с.

143. Семенюк М. П., Жукова Н. Б., Іванова Н. І. Про моделювання недосконалого контакту фаз при розрахунку ефективних механічних характеристик нанокompозитів. *Доповіді НАНУ*. 2013. № 12. С. 74–81.
144. Сендецьки Дж. Упругие свойства композитов. *Механика композиционных материалов*. Т. 2. / под ред. Дж. Сендецьки. Москва : Мир, 1978. С. 61-101.
145. Соколов Е. А. Возможности предсказания ползучести слоистого органопластика по свойствам однонаправленно армированного материала. *Механика композитных материалов*. 1980. № 1. С.142–147.
146. Соловей М. О., Кривенко О. П., Міщенко О. О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С. 30–48.
147. Столярова А. В., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композита з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С.130–42.
148. Структура и свойства композиционных материалов / К. И. Портной и др. Москва : Машиностроение, 1979. 255 с.
149. Тангорра Г. Упрощенные расчеты многослойных резинокордных пластин как комбинации ортотропных слоев. *Труды международной конференции по каучуку и резине*. Москва: Химия, 1971. С. 459-467.

150. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник. Москва : Машиностроение, 1987. 224 с.
151. Термопружне деформування композитної пластини / В.В. Киричевський и др. *Системні технології*. 2003. № 4(27). С. 109–113.
152. Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига : Зинатне, 1978. 240 с.
153. Тканые конструкционные композиты: Пер. с англ. / под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. Москва : Мир, 1991. 432 с.
154. Труфанов Н. А. Итерационный метод решения краевых задач теории вязкоупругости для анизотропных неоднородных тел. *Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика*. 1994. № 1. С. 55–60.
155. Труфанов Н. А., Сметанников О. Ю. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика. *Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций*. Свердловск, 1990. С. 114–118.
156. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Москва : Изд-во иностр. лит., 1963. 535 с.
157. Фильштинський Л. А., Загрязська П. І. Моделювання композитного матеріалу з в'язкопружними компонентами. *Вісник Запорізького національного університету*. Запоріжжя, 2010. № 2. С. 141–144.

158. Формирование и свойства двухфазных композитов «фибрового» типа / С. Б. Беликов и др. *Вестник двигателестроения*. Запорожье, 2006. № 2. С. 169-174.
159. Хорошун Л. П., Маслов Б. П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов. Київ : Наукова думка, 1980. 156 с.
160. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. Москва : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1983. 296 с.
161. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. Москва : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1988. 192 с.
162. Шепери Р. А. Вязкоупругое поведение композиционных материалов. *Композиционные материалы. Механика композиционных материалов*. Москва : Мир. 1978. Том 2. С. 102–195.
163. Шишкин Б. М., Левашов А. П. Численный алгоритм идентификации характеристик жесткости однонаправленно армированного слоя по заданным модулям упругости и коэффициенту Пуассона пакета композиционных слоев. *Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам* (Алушта, 22-31 мая 2013 г.). Москва : Изд-во МАИ, 2013. С. 457–459.

164. A homogenization method for pre-impregnated composite materials / H. Teodorescu-Draghicescu and otc. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2009, Vol. II, WCE 2009, July 1-3, 2009, London, U.K.
165. A model for predicting the evolution of damage in viscoelastic particle-reinforced composites / G. D. Seidel and otc. *Mechanics of Materials*. V. 37, 2005. P. 163-178.
166. A transversely isotropic viscoelastic constitutive equation for brainstem undergoing finite deformation / X. Ning and otc. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2006. Vol. 128. – P. 925-933.
167. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. *Micromechanics of Composite Materials: A Generalized Multiscale Analysis Approach*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. 1006 p.
168. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires. *Rubber Chemistry and Technology*. 1981. V. 54, N 3. P. 461–492.
169. An investigation of a spacecraft's propellant tank's shell's bearing strength / V. Z. Gristchak and otc. *Proceedings. The sixth world congress «Aviation in the XXI-st century»*. Kyiv, 2014. Vol. 1. P. 49–51.
170. Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size / V. K. Srivastava and otc. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2011. Vol. 3, № 1. P. 52–68.
171. Application of the Thermomechanical Characteristics of the Fiber-reinforced Composite with Transtropic Properties of the

- Components. / Boguslavskaya A., Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. Vol. 6, Issue 2, 2018. P. 1761–1766.
172. Ashton J. E., Halpin J. C., Petit P. H. *Primer on composite materials: analysis*. Stamford: Technomic, 1969. 124 p.
173. Barbero E. J. *Finite Element Analysis of Composite Materials (Composite Materials: Design and Analysis)*. Boca Raton: CRC Press, 2007. 360 p.
174. Bavan D. S., Kumar C. M. Finite element analysis of a natural fiber (maize) composite beam. *Journal of Engineering*. 2013. V. 2013. 7 p.
URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/450381>
175. Bazhenov V. A., Solovoi N. A., Krivenko O. P. Modeling of nonlinear deformation and buckling of elastic inhomogeneous shells. *Опир матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С. 121–147.
176. Bogdanovich A., Pastore C. M. *Mechanics of Textile and Laminated Composites: With Applications to Structural Analysis*. London : Chapman & Hall, 1996. 570 p.
177. Calculation of destruction mechanics parameters and temperature of dissipative heating by singular three-dimensional finite elements in conditions of nonlinear viscoelastic deformation / V. V. Kirichevsky and otc. *Fasta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2001. Vol. 1., № 8. P. 947–954.
178. Cisilino A. P., Ortiz J. E. Three-dimensional boundary element assessment of a fibre/matrix interface crack under transverse loading. *Computers & Structures*. 2005. V. 83, Issues 10-11. P. 856–869.

179. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – I. Elastic and square symmetry / R. Rodríguez-Ramos and otc. *Mechanics of Materials*. 2001. Vol. 33. P. 223–235.
180. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry / R. Guinovart-Díaz and otc. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2001. Vol. 49. P. 1445–1462.
181. Concise encyclopedia of composite materials / edited by A. Kelly. Cambridge: MIT Press, 1989. 317 p.
182. Dvorak G. *Micromechanics of Composite Materials*. New York-London: Springer, 2013. 442 p.
183. Ebrahimi S. H., Mohammadi S., Asadpoure A. An extended finite element (XFEM) approach for crack analysis in composite media. *International Journal of Civil Engineerng*. V. 6, № 3, 2008. P. 198–207.
184. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers / J.C. López-Realpozo and otc. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Volume 51, Issue 6. P. 1253–1262.
185. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber / S. Grebenyuk and otc. *20th International Scientific Conference Mechanika*. 2015. Kaunas: Kaunas University of Tehnology, 2015. P. 96-100.

186. Effective properties evaluation for smart composite materials / R. Medeiros and otc. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2012. Vol. 34. P. 362-370.
187. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites / S. Kari and otc. *Composites Science and Technology*. 2008. Vol. 68, Issues 3-4. P. 684-691.
188. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. 367 p.
189. Gopalakrishnan S., Chakraborty A., Mahapatra D.R. Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogenous Structures. London: Springer, 2008. 440 p.
190. Gosz M., Moran B., Achenbach J. D. Effect of a viscoelastic interface on the transverse behavior of fiber-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27. P. 1757–1771.
191. Gough V .E. Stiffness of cord and rubber constructions. *Rubber Chemistry and Technology*. 1968. V. 41, 4. P. 988-1021.
192. Grebenyuk S., Titiva O., Moment Scheme of the Finite Element for Spatially Reinforced Composite Materials. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. Vol. 4, Issue 3, 2016. P. 1629–1635.

193. Grebenyuk S. N. The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78, № 2. P. 270-276.
194. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. *Mechanika 2018 : proceedings of the 23th international scientific conference*. Kaunas University of Technology, Lithuania. Kaunas. 2018. P. 31–35.
195. Grebenyuk S., Klymenko M., Smoliankova T., Koval R. Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Actual Problems of Engineering Mechanics, Materials Science Forum*. Trans Tech Publication Ltd, 2019. Vol. 968. P. 511–518.
196. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. Mechanical properties of the composite with viscoelastic isotropic matrix and transversally isotropic fiber under transverse tension. *Mechanika 2016. Proceedings of the 21th international scientific conference*. Kaunas University of Technology, Lithuania. Kaunas. 2016. P. 96–100.
197. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal*. 6/7 (96). 2018. P. 6–12.
198. Homogenization methods to approximate the effective response of random fibre-reinforced composites / N. Willoughby and otc.

- International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. P. 1421–1433.
199. Hrebeniuk S., Klymenko M., Omelchenko K. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ, 2014. № 1. С. 14-23.
200. Influence of parallelogram cells in the axial behaviour of fibrous composite / R. Guinovart-Díaz and otc. *International Journal of Engineering Science*. 2011. Vol. 49, Issue 1. P. 75–84.
201. Ju J. W., Ko Y. F., Ruan H.N. Effective Elastoplastic Damage Mechanics for Fiber-reinforced Composites with Evolutionary Complete Fiber Debonding. *International Journal of Damage Mechanics*. 2008. Vol. 17(6). P. 493–537.
202. Kamiński M. Homogenization of fiber-reinforced composites under the stochastic aging process. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2008. Vol. 6. P. 361–370.
203. Klusemann B., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*. 2010. Vol. 30(4). P. 374–386.
204. Knight M. G., Wrobel L. C. , Henshall J. L. Micromechanical response of fibre-reinforced materials using the boundary element technique. *Composite Structures*. 2003. V. 62, Issues 3–4. P. 341–352.

205. Ko Y.-F., Ju J. W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. P. 2437–2458.
206. Kwon Y. W., Allen D. H., Talreja R. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York : Springer, 2007. 630 p.
207. MacLaughlin M. M., Doolin D. M. Review of validation of the discontinuous deformation analysis (DDA) method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2006. Volume 30, Issue 4. P. 271–305.
208. Maimi' P., Mayugo J. A., Camanho P. P. A three-dimensional damage model for transversely isotropic composite laminates. *Portugal Journal of Composite Materials*. 2008. Vol. 42, № 25. P. 2717–2745.
209. Matthews F. L., Davies G. A. O., Hitchings D., Soutis C. Finite element modelling of composite materials and structures. Cambridge: Woodhead Publishing, 2000. 214 p.
210. Mechanical properties of hybrid elliptical fiber reinforced lamina with equal fiber volume fractions / V.S. Sai and otc. *International Journal of Current Engineering and Technology*. 2013. V. 3, № 1. P. 102–107.
211. Micromechanical analysis of hybrid composites reinforced with unidirectional natural fibres, silica microparticles and maleic

- anhydride / L.J. Silva and otc. *Materials Research*. 2012. Vol. 15(6). P. 1003–1012.
212. Modeling of features is intense - is deformed statuses of designs from composite materials / S.N. Grebenuk and otc. *XXXIV Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St. Petersburg, 2006. P. 40.
213. Mukhopadhyay M. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Hyderabad: Universities Press, 2005. 371 p.
214. Muneswara Rao M. G., Zareena Sk. Micromechanical Analysis of FRP Composite with Orthotropic Fibers Subjected To Longitudinal and Transverse Loading. *Journal of Engineering Research and Applications*. 2014. Vol. 4, Issue 5. P. 132–137.
215. Ochoa O. O., Reddy J. N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1992. 206 p.
216. Pagano H. J. Exact solutions for composite laminites in cylindrical bending. *Composite Materials*. 1969. Vol. 3. P. 398–411.
217. Pande G. N., Beer G., Williams J. R. *Numerical methods in rock mechanics*. Chichester : Wiley, 1990. 327 p.
218. Parnell W. J., Abrahams I. D. Dynamic homogenization in periodic fibre reinforced media. Quasi-static limit for SH waves. *Wave Motion*. 2006. Vol. 43. P. 474–498.
219. Patel H. P., Kennedy R. H. Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading. *Computers and Structures*. 1982. Vol. 15, № 1. P. 79-84.

220. Riahi A., Curran J. H. Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures. *Applied Mathematical Modelling*. 2009. № 33. P. 3450–3464.
221. Seddak A., Benzerga D., Haddi A. Finite element analysis of delamination in a new woven composite. *Композиты и наноструктуры*. 2009. № 3. С. 18–24.
222. Sergey Grebenyuk, Mikhail Klimenko. Shear Modulus of a Fiber Composite with a Transtropik Viscoelastik Matrix and Transtropic Elastic Fiber. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 21, 3, 2018. P. 47-53.
223. Sharma R., Bhagat A. R, Mahajan P. Finite element analysis for mechanical characterization of 4D inplane carbon/carbon composite with imperfect microstructure. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 11, № 2. P. 170-184.
224. Simulation of elastic properties of sheet molding compounds / H. Teodorescu-Draghicescu and otc. *Recent advances in applied mathematics, Proceedings of the American conference on applied mathematics (American-Math '10*. Harvard University, Cambridge, USA, January 27-29, 2010. P. 642–646.
225. Soares C. A. M., Soares C. M. M., Freitas M. J. M. Mechanics of composite materials and structures. Dordrecht : Kluwer academic publishers, 1999. 517 p.
226. Sockalingam S., Nilakantan G. Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2012. Vol. 13(3). P. 282–295.

227. Some averaging methods in the micromechanics of composite materials with periodic structure / H. Teodorescu and otc. *10th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation (ACMOS'08)*. Istanbul, 2008. P. 210–214.
228. Soutis C., Beaumont P. W. R. Multi-scale modelling of composite material systems: the art of predictive damage modelling. Cambridge : Woodhead Publishing Limited, 2005. 506 p.
229. Tang T., Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2007. Vol. 2, N 9. P. 1813–1830.
230. Tang T. Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials. Logan: Utah State University, 2008. 280 p.
231. Tenek L. T., Argyris J. Finite Element Analysis for Composite Structures. Dordrecht : Kluwer academic publishers, 1997. 339 p.
232. Tucker C. L., Liang E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation. *Composites Science and Technology*. 1999. Vol. 59. P. 655–671.
233. Walter J. D., Patel H. P. Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates. *Rubber Chemistry and Technology*. 1979. V. 52, N 4. P. 710–724.
234. Williams J. R., O'Connor R. Discrete element simulation and the contact problem. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 1999. Volume 6, Issue 4. P. 279–304.

235. Würkner M., Berger H., Gabbert U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*. 2013. Vol. 63. P. 1–9.
236. Würkner M., Berger H., Gabbert U. On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements. *International Journal of Engineering Science*. 2011. Vol. 49. P. 322–332.
237. Yan P., Jiang C. P., Song F. An eigenfunction expansion-variational method for the anti-plane electroelastic behavior of three-phase fiber composites. *Mechanics of Materials*. 2011. Vol. 43. P. 586–597.
238. Yang F., Pitchumani R. Influence of interphase material property gradients on the micromechanics of fibrous thermosetting-matrix composites. *14th International Conference on Composite Materials (ICCM 14)*, San Diego, July 14th - 18th 2003. – URL: http://brabantio.me.vt.edu/sites/aml/index_htm_files/c0302.pdf
239. Yao Y., Chen S., Chen P. The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. *Mechanics of Materials*. 2013. V. 58. P. 35–54.
240. Yao Y., Chen S. The effects of fiber's surface roughness on the mechanical properties of fiber-reinforced polymer composites. *Journal of Composite Materials*. 2012. V. 47(23). P. 2909–2923.
241. Yu W., Tang T. A variational asymptotic micromechanics model for predicting thermoelastic properties of heterogeneous materials.

- International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 7510–7525.
242. Yu W., Tang T. Variational asymptotic method for unit cell homogenization. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures*. New York : Springer, 2010. P. 116–130.
243. Zeng T., Wu L., Guo L. Mechanical analysis of 3D braided composites: a finite element model. *Composite Structures*. 2004. Vol. 64. P. 399–404.
244. Zhang Y., Xia Z., Ellyin F. Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42, Issue 2. P. 591–604.
245. Zhong W., Pan N. A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*. 2003. Vol. 37, № 21. P. 1951-1969.

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + G_r = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0; \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + G_z = 0. \quad (\text{A.9})$$

Закон Гука для ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G} \left(\sigma_r - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G} \left(\sigma_\theta - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\theta z}; \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zr}; \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}, \quad (\text{A.15})$$

або

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_r - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_\theta + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_\theta - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_z - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right); \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}; \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}; \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}. \quad (\text{A.21})$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_r = 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_\theta = 2G \left(\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.24})$$

$$\tau_{\theta z} = G \cdot \gamma_{\theta z}; \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_{zr} = G \cdot \gamma_{zr}; \quad (\text{A.26})$$

$$\tau_{r\theta} = G \cdot \gamma_{r\theta}, \quad (\text{A.27})$$

або

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{\theta} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta}) \right); \quad (\text{A.30})$$

$$\tau_{\theta z} = G \cdot \gamma_{\theta z}; \quad (\text{A.31})$$

$$\tau_{zr} = G \cdot \gamma_{zr}; \quad (\text{A.32})$$

$$\tau_{r\theta} = G \cdot \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.33})$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_z + \frac{1}{E_2} \sigma_r - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_r - (\nu_{21} \sigma_z + \nu_{23} \sigma_{\theta})); \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_z - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_{\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta} - (\nu_{21} \sigma_z + \nu_{23} \sigma_r)); \quad (\text{A.35})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_1} \sigma_z - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{\theta} = \frac{1}{E_1} (\sigma_z - \nu_{12} (\sigma_r + \sigma_{\theta})); \quad (\text{A.36})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} \tau_{r\theta}; \quad (\text{A.37})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{zr}; \quad (\text{A.38})$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{z\theta}. \quad (\text{A.39})$$

Зворотний закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\sigma_z = \frac{E_1 \left((1 - \nu_{23}\nu_{32})\varepsilon_z + (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\varepsilon_r + (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\varepsilon_\theta \right)}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma_r = \frac{E_2 \left((\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})\varepsilon_z + (1 - \nu_{13}\nu_{31})\varepsilon_r + (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})\varepsilon_\theta \right)}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_3 \left((\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})\varepsilon_r + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta \right)}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.42})$$

$$\tau_{zr} = G_{12} \cdot \gamma_{zr}; \quad (\text{A.43})$$

$$\tau_{z\theta} = G_{31} \cdot \gamma_{z\theta}; \quad (\text{A.44})$$

$$\tau_{r\theta} = G_{23} \cdot \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.45})$$

Зворотний закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\sigma_z = \frac{E_1 \left((1 - \nu_{23}^2)\varepsilon_z + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_r + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_\theta \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.46})$$

$$\sigma_r = \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_z + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.47})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_r + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.48})$$

$$\tau_{zr} = G_{12} \cdot \gamma_{zr}; \quad (\text{A.49})$$

$$\tau_{z\theta} = G_{12} \cdot \gamma_{z\theta}; \quad (\text{A.50})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.51})$$

ДОДАТОК Б

Ефективні характеристики в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого односпрямованого композиту

1. Параметри ефективного операторного поздовжнього модуля

$$\text{пружності } \bar{E}_1[\varepsilon(t)] = E_1 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right).$$

Випадок в'язкопружної ізотропної матриці та пружного трансверсально-ізотропного волокна

Позначення:

$\nu_{12}^\circ, \nu_{21}^\circ, \nu_{23}^\circ$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна,

E_1°, E_2° - поздовжній та поперечний модулі пружності першого роду для волокна,

ν^* – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці,

E^* – миттєвий модуль пружності першого роду для матриці, $\tilde{R}^*(p)$ – зображення ядра релаксації для матриці,

E_1 – ефективний миттєвий поздовжній модуль пружності для трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту,

$\tilde{R}(p)$ – зображення ядра релаксації однорідного композиту.

Обчислення миттєвого поздовжнього модуля пружності E_1
для трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту

$$\alpha_1 = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \alpha_2 = \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}, \quad \beta_1 = \frac{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)}{1 - \nu^*},$$

$$\beta_2 = \frac{2\nu^*}{1 - \nu^*}, \quad \gamma_1 = \frac{E_2^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \gamma_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ},$$

$$m = \frac{1}{(\alpha_2 - \beta_2)(1 - \nu^*)f + \alpha_2(1 + \nu^*)},$$

$$k_1 = m\alpha_1(1 - \nu^*)f, \quad k_2 = m(\alpha_2\nu^*(1 + \nu^*) + \beta_1(1 - \nu^*)f),$$

$$k_3 = m(1 + \nu^*)\alpha_1, \quad k_4 = m(1 + \nu^*)(\nu^*(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1), \quad k_5 = \frac{m\alpha_1(f - 1)}{\gamma_2},$$

$$k_6 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad k_7 = \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\nu^*}{1 - \nu^*} - m \left(\frac{\alpha_2\nu^*(1 + \nu^*)}{1 - \nu^*} + \nu^*(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f - 1) \right) \right).$$

$$k = \frac{E^*(k_1 + k_3 + k_6 - k_5E^*)}{k_7E^* + k_2 - k_4},$$

$$E_1 = \frac{f + (1 - f) \cdot k}{\alpha_1 + \alpha_2(k_6 - k_5E^* - k_7k)}. \quad (\text{Б.1})$$

Знаходження зображення ядра релаксації для операторного
 поздовжнього модуля пружності

$$\tilde{R}(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (\text{Б.2})$$

$$F_1(p) = f(k_7 E(1 - \tilde{R}^*(p)) + k_2 - k_4) + \\
 + (1 - f) E^* (k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^* (1 - \tilde{R}^*(p))) (1 - \tilde{R}^*(p)),$$

$$F_2(p) = (\alpha_1 + \alpha_2 k_6) (k_7 E^* (1 - \tilde{R}^*(p)) + k_2 - k_4) - \\
 - \alpha_2 k_5 (1 - \tilde{R}^*(p)) E^* (E^* k_7 (1 - \tilde{R}^*(p)) + k_2 - k_4) - \\
 - \alpha_2 k_7 E^* (k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^* (1 - \tilde{R}^*(p))) (1 - \tilde{R}^*(p)).$$

**Випадок трансверсально-ізотропної в'язкопружної матриці та
 трансверсально-ізотропного пружного волокна**

Позначення:

ν_{12}^* , ν_{21}^* , ν_{23}^* – коефіцієнти Пуассона матеріалу матриці,

E_1^* – поздовжній модуль пружності матриці .

Обчислення миттєвого поздовжнього модуля пружності E_1
 для трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту.

$$d_1 = \frac{-(\nu_{21}^*)^2 \nu_{12}^\circ (f - 1)^3 (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) (1 - \nu_{23}^\circ)}{E_1^\circ \nu_{12}^*},$$

$$d_2 = v_{21}^* (1-f)^2 \left(v_{21}^\circ \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^* \right) + 1 + v_{23}^* \right) (1 - v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^* v_{12}^\circ}{v_{12}^*} \times \right. \\ \left. \times f \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) \times (1 - v_{23}^\circ) - \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ \right) v_{21}^\circ \left(v_{23}^* (f-1) - 1 - f \right) \right),$$

$$d_3 = v_{21}^* (f-1) f \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) v_{21}^\circ E_1^\circ \left(v_{23}^* (f-1) - 1 - f \right) - \left(v_{21}^\circ \right)^2 \times \\ \times \frac{v_{12}^*}{v_{12}^\circ} E_1^\circ \left(v_{23}^* (f-1) - 1 - f \right) \times \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^* \right) + 1 + v_{23}^* \right) (1-f) - \\ - f v_{21}^\circ E_1^\circ \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) + 1 + v_{23}^* \right) v_{21}^* (f-1) (1 - v_{23}^\circ),$$

$$d_4 = f \left(v_{21}^\circ \right)^2 \left(E_1^\circ \right)^2 v_{12}^* \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) + 1 + v_{23}^* \right) \left(v_{23}^* (f-1) - 1 - f \right),$$

$$d_5 = \frac{\left(v_{21}^* \right)^2 v_{12}^\circ (f-1)^2 \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ \right) \left(1 - v_{23}^\circ \right)}{E_1^\circ v_{12}^*},$$

$$d_6 = v_{21}^* (f-1) \left(1 - v_{23}^\circ \right) v_{21}^\circ \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ \right) + 1 + v_{23}^* \right) + v_{21}^\circ \times \\ \times \left(1 + v_{23}^* + f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) \right) \times v_{21}^* (f-1) \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ \right) + \\ + 2f \left(v_{21}^* \right)^2 v_{21}^\circ v_{12}^\circ (f-1) \left(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right),$$

$$d_7 = \frac{\left(v_{21}^\circ \right)^2 v_{12}^* E_1^\circ}{v_{12}^\circ} \left(1 + v_{23}^* + f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) \right) \times \\ \times \left(f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) + 1 + v_{23}^* \right) + \\ + 2 \left(v_{21}^\circ \right)^2 E_1^\circ v_{12}^* v_{21}^* \left(1 + v_{23}^* + f \left(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ \right) \right).$$

$$E_1 = \frac{d_1(E_1^*)^3 + d_2(E_1^*)^2 + d_3E_1^* - d_4}{d_5(E_1^*)^2 - d_6E_1^* + d_7}. \quad (\text{Б.3})$$

Обчислення зображення ядра релаксації інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності:

$$\tilde{R}(p) = \frac{d_5(y^*)^2 - d_6y^* + d_7}{d_5(y^*)^2 - d_6y^* + d_7} - \frac{1}{E_1} \frac{d_1(y^*)^3 + d_2(y^*)^2 + d_3y^* - d_4}{d_5(y^*)^2 - d_6y^* + d_7}, \quad (\text{Б.4})$$

$$y^* = E_1^*(1 - \tilde{R}^*).$$

3. Розрахунок ефективного значення коефіцієнта Пуассона ν_{12}

$$\alpha = E_2^*(1 - f)(1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)),$$

$$\beta = \nu_{21}^\circ E_2^*(1 - f) + \nu_{21}^* f E_2^\circ,$$

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ)\nu_{12}^* + 2E_2^\circ f(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^* E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}. \quad (\text{Б.5})$$

4. Розрахунок ефективного значення коефіцієнта Пуассона ν_{23}

$$d_{11} = E_2^\circ \left(\left(4f - 3 - \frac{1}{f^2} \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4f (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\ - E_2^* \left(\left(4f - \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f^2} - f \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{12} = E_2^\circ \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\ - E_2^* \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(1 - \frac{1}{f} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{21} = E_2^\circ \left(4f (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^*) \right) - \\ - E_2^* \left(\left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{22} = E_2^\circ \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - \\ - E_2^* \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$b_1 = E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) - E_2^* (1 + \nu_{23}^\circ),$$

$$\delta = f (1 + \nu_{23}^*) (\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma (1 - \nu_{23}^*),$$

$$\eta_1 = 2E_1^\circ E_1^* f (f - 1) (\nu_{21}^* \gamma - 2\nu_{21}^\circ E_2^*)^2,$$

$$\eta_2 = 1 / \left(E_2^* \left(\alpha (E_1^\circ f + E_1^* (1 - f)) - 2\beta (\nu_{12}^* E_1^\circ f + \nu_{12}^\circ E_1^* (1 - f)) \right) \right),$$

$$\gamma = E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*).$$

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}},$$

$$\chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}},$$

$$v_{23} = \frac{\alpha(1 + v_{23}^* + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - v_{21}^*v_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2)) - \delta - \eta_1\eta_2}{\alpha(1 + v_{23}^* + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - v_{21}^*v_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2)) + \delta + \eta_1\eta_2}. \quad (\text{Б.6})$$

5. Параметри ефективного операторного поздовжнього модуля зсуву

Позначення:

G_{12} – миттєвий модуль зсуву композиту,

G_{12}° – миттєвий модуль зсуву волокна,

G_{12}^* – миттєвий модуль зсуву матриці;

\tilde{R}^* – зображення ядра релаксації матриці;

\tilde{R} – зображення ефективного ядра релаксації композиту.

Визначення миттєвого модуля зсуву:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* (G_{12}^\circ (1 + f) + G_{12}^* (1 - f))}{(1 - f)G_{12}^\circ + (1 + f)G_{12}^*}. \quad (\text{Б.7})$$

Визначення зображення ефективного ядра релаксації для
поздовжнього модуля зсуву композиту:

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(x^*)^2 + C_2x^* + C_3}{C_4(x^* + C_5)}, \quad (\text{Б.8})$$

$$x^* = 1 - \tilde{R}^*(p),$$

$$C_1 = (f - 1)(G_{12}^*)^2,$$

$$C_2 = G_{12}^*(G_{12} - G_{12}^\circ)(1 + f),$$

$$C_3 = G_{12} \cdot G_{12}^\circ(1 - f),$$

$$C_4 = G_{12} \cdot G_{12}^*(1 + f),$$

$$C_5 = \frac{G_{12}^\circ(1 - f)}{G_{12}^*(1 + f)}.$$

ДОДАТОК В

ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	13	$t \sin \alpha t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	14	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
4	$t^n,$ $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	15	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	16	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	17	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
7	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	18	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
8	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	19	$J_n(t),$ $n \in \mathbb{N}$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
9	$t^k,$ $k > -1$	$\frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$	20	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$
10	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	21	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{p}}$
11	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	22	e^{-t^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \operatorname{Erf} \left(\frac{p}{2} \right)$

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
23	$\text{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{p}$	30	$\text{Ci}(t)$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{p^2 - 1}$
24	a^t	$\frac{1}{p - \ln a}$	31	$\text{Ei}(t)$	$-\frac{1}{p} \ln(p - 1)$
25	$\sin^2 t$	$\frac{2}{p(p^2 + 4)}$	32	$\text{erf}(t)$	$\frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \text{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$
26	$\cos^2 t$	$\frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}$	33	$\frac{e^{at} - 1}{t}$	$\ln \frac{p}{p - a}$
27	$\text{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$	34	$\delta(t)$	1
28	$\ln t$	$-\frac{1}{p} \ln(\gamma p)$	35	$\sin(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{1}{p}}$
29	$\text{Si}(t)$	$\frac{1}{p} \text{arctg} \frac{1}{p}$	36	$\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{p}}$

У таблиці використані наступні позначення спеціальних функцій: $\text{Si}(t)$ – інтегральний синус, $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, $\text{Ci}(t)$ – інтегральний косинус, $\text{Ci}(t) = \ln(\gamma t) + \int_0^t \frac{\cos u - 1}{u} du$, γ – стала Ейлера, $\text{Ei}(t)$ – інтегральна показникова функція, $\text{Ei}(t) = -\int_t^\infty \frac{e^u}{u} du$, $J_0(t)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, $J_n(t)$ – функція Бесселя першого роду n -го порядку, $\text{erf}(t)$ – інтеграл ймовірності,

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du, \quad \operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t), \quad \Gamma(x) - \text{гамма-функція}, \quad \delta(t) -$$

дельта-функція Дірака.

Додаток Г

Математичні моделі в'язкопружності матеріалів, властивості яких змінюються з часом

В'язкопружні властивості матеріалів, розглянутих раніше, подавалися у вигляді диференціальних чи інтегральних рівнянь, інваріантних у часі. Процес в'язкопружного деформування, що описується такими рівняннями, можна без змін повторити у інший проміжок часу, оскільки властивості матеріалу при цьому не змінюються. У диференціальних рівняннях, що моделюють в'язкопружність такого матеріалу, інваріантність у часі проявляється у тому, що коефіцієнти при функціях σ та ε , а також їх похідних є сталими величинами. У відповідних інтегральних рівняннях властивість інваріантності у часі проявляється у тому, що ядра інтегральних операторів є функціями, що залежать лише від різниці значень поточного часу t та моменту часу τ , що відповідає початку дії зовнішнього навантаження. Проте у багатьох матеріалів властивості з часом змінюються. Якщо така зміна відбувається весь час у напрямі зменшення його властивості деформуватися з часом, то її називають старінням матеріалу. Основні підходи до побудови математичних моделей в'язкопружності, що не є інваріантними у часі, розглянуто у [139]. Подальший виклад елементів теорії матеріалів з властивостями, не інваріантними у часі, здійснюється згідно з цим фундаментальним дослідженням.

У найпростіших диференціальних залежностях відсутність інваріантності властивостей матеріалу у часі можна здійснити шляхом заміни сталих коефіцієнтів диференціальних рівнянь змінними коефіцієнтами, що є функціями часу t .

Спрощене основне диференціальне рівняння лінійного деформування нестаріючого матеріалу можна подати у вигляді:

$$En \frac{d\varepsilon}{dt} + H\varepsilon = n \frac{d\sigma}{dt} + \sigma.$$

Тут коефіцієнт E дорівнює миттєвому модулю пружності, H – довготривалому модулю пружності, n – час релаксації. Якщо властивості матеріалу з часом змінюються, то параметри рівняння є функціями часу:

$$E(t)n(t) \frac{d\varepsilon}{dt} + H(t)\varepsilon = n(t) \frac{d\sigma}{dt} + \sigma. \quad (\Gamma.1)$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (Г.1) для деформацій при відомій правій частині має вигляд:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \left(\varepsilon(0) - \frac{\sigma(0)}{E(0)} \right) e^{-\int_0^t \frac{Hd\tau}{En}} + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{E(\tau) - H(\tau) + n(\tau)E'(\tau)}{n(\tau)E^2(\tau)} \cdot e^{-\int_{\tau}^t \frac{H(\tau)d\tau}{E(\tau)n(\tau)}} d\tau. \quad (\Gamma.2)$$

Формула (Г.2) є поданням залежності (Г.1) у інтегральній формі. Ця залежність є інтегральним рівнянням відносно функції $\sigma(t)$ з ядром, що при $\tau < t$ визначається рівністю

$$K(t, \tau) = \frac{E(\tau) - H(\tau) + n(\tau)E'(\tau)}{n(\tau)E^2(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{H(\tau)d\tau}{E(\tau)n(\tau)}}. \quad (\text{Г.3})$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E(0)}, \quad (\text{Г.4})$$

інтегральне рівняння (Г.2) спрощується та набуває вигляду:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left(\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau \right). \quad (\text{Г.5})$$

Запишемо розв'язок рівняння (Г.1) відносно функції $\sigma(t)$, вважаючи $\varepsilon(t)$ відомою функцією:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E(t) + (\sigma(0) - \varepsilon(0)E(0)) e^{-\int_0^t \frac{dt}{n}} - E(t) \int_0^t \varepsilon(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad (\text{Г.6})$$

У інтегральному рівнянні (Г.6) ядро $R(t, \tau)$ має вигляд:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \cdot \frac{E(\tau) - H(\tau) + n(\tau)E'(\tau)}{n(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{dz}{n(z)}}. \quad (\text{Г.7})$$

Для (Г.7) також повинна виконуватися умова $\tau < t$.

За умови (Г.4) інтегральне рівняння (Г.6) набуває вигляду:

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \quad (\text{Г.8})$$

Функція $R(t, \tau)$ є резольвентою ядра $K(t, \tau)$ інтегрального рівняння (Г.5). Обидві ці функції набувають відмінних від нуля значень лише при $\tau < t$.

Введемо допоміжні змінні ξ та ψ , що виражаються через змінну часу t . Умовний час ξ визначимо так, що $d\xi = \frac{dt}{n(t)}$. Тоді

змінна ξ визначається рівністю:

$$\xi = \int_0^t \frac{dt}{n(t)}. \quad (\text{Г.9})$$

Замінивши змінну t введеним за допомогою рівності (Г.9) умовним часом ξ , отримаємо спрощення рівняння (Г.1) у вигляді:

$$E(\xi) \frac{d\varepsilon}{d\xi} + H(\xi)\varepsilon = \sigma + \frac{d\sigma}{d\xi}. \quad (\Gamma.10)$$

Розв'язок (Г.6) набуває спрощеного вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \varepsilon(\xi)E(\xi) - [\sigma(0) - \varepsilon(0)E(0)]e^{-\xi} - \\ & - E(\xi) \int_0^{\xi} \varepsilon(\eta)R(\xi, \eta)d\eta. \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

У виразі (Г.11) ядро $R(\xi, \eta)$ має вигляд:

$$R(\xi, \eta) = F(\xi)e^{\eta-\xi} \cdot \frac{1}{E(\xi)}, \quad (\Gamma.12)$$

$$F(\xi) = \frac{E(\xi) - H(\xi) + \frac{dE}{d\xi}}{n(\xi)}. \quad (\Gamma.13)$$

Введемо змінну умовного часу ψ з допомогою формул:

$$d\psi = \frac{H(t)dt}{E(t)n(t)}; \quad \psi = \int_0^t \frac{H(\tau)d\tau}{E(\tau)n(\tau)}. \quad (\Gamma.14)$$

Рівняння (Г.1) з використанням нової умовної змінної часу зводиться до вигляду:

$$\frac{d\varepsilon}{d\psi} + \varepsilon = \frac{\sigma}{H(\psi)} + \frac{1}{E(\psi)} \cdot \frac{d\sigma}{d\psi}. \quad (\Gamma.15)$$

Його розв'язок – функція $\varepsilon(\psi)$ виражається рівністю:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\psi) = & \frac{\sigma(\psi)}{E(\psi)} + \left[\varepsilon(0) - \frac{\sigma(0)}{E(0)} \right] e^{-\psi} + \\ & + \frac{1}{E(\psi)} \int_0^{\psi} \sigma(\varphi) K(\psi, \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (\Gamma.16)$$

У виразі (Г.16) ядро $K(\psi, \varphi)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} K(\psi, \varphi) = & \Phi(\varphi) e^{\varphi - \psi} E(\psi), \quad (\Gamma.17) \\ \Phi(\varphi) = & \frac{E(\varphi) - H(\varphi) - \frac{H(\varphi)}{E(\varphi)} \cdot \frac{dE}{d\varphi}}{n(\varphi) E^2(\varphi)}. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли $\frac{H(t)}{E(t)} = p = \text{const}$. Основне рівняння

(Г.1) набуває вигляду:

$$E(t) \left[n(t) \frac{d\varepsilon}{dt} + p\varepsilon \right] = \sigma + n(t) \frac{d\sigma}{dt}.$$

Перейшовши до змінної умовного часу ξ , отримуємо останнє рівняння у вигляді:

$$E(\xi) \left[\frac{d\varepsilon}{d\xi} + p\varepsilon \right] = \sigma + \frac{d\sigma}{d\xi}.$$

При використанні змінної умовного часу ψ маємо це рівняння у вигляді:

$$E(\psi) \left[\frac{d\varepsilon}{d\psi} + \varepsilon \right] = \frac{\sigma}{p} + \frac{d\sigma}{d\xi}.$$

У випадку, що розглядається, $\psi = p\xi$. Ядро (Г.3) при переході до нових змінних умовного часу можна записати у вигляді:

$$K(\xi, \eta) = \frac{E(\eta)(1-p) - \frac{dE}{d\eta}}{n(\eta)E^2(\eta)} e^{(\eta-\xi)p} E(\xi), \quad (\text{Г.18})$$

$$K(\psi, \varphi) = \frac{E(\varphi)(1-p) - p \frac{dE}{d\varphi}}{n(\varphi)E^2(\varphi)} e^{\varphi-\psi} E(\psi). \quad (\text{Г.19})$$

Тоді резольвента цього ядра подається відповідно формулами:

$$R(\xi, \eta) = \frac{E(\eta)(1-p) + \frac{dE}{d\eta}}{n(\eta)} e^{\eta-\xi} \frac{1}{E(\xi)}, \quad (\text{Г.20})$$

$$R(\psi, \varphi) = \frac{E(\varphi)(1-p) + \frac{1}{p} \frac{dE}{d\varphi}}{n(\varphi)} e^{\frac{\varphi-\psi}{p}} \frac{1}{E(\psi)}. \quad (\text{Г.21})$$

У обох змінних умовного часу ми отримали ядро та резольвенту у вигляді експоненціальної функції, аргументом якої є різниця моменту часу, що розглядається, та моменту початку дії зовнішнього навантаження, помноженої на функцію моменту початку дії навантаження та функцію моменту часу, що розглядається.

Розглянемо випадок, коли сталим є час релаксації, тобто $n = \text{const}$. При цьому змінна умовного часу ξ відрізнятиметься від реального часу сталим множником $\frac{1}{n}$. Резольвента (Г.7) набуває вигляду:

$$R(t, \tau) = F(\tau) e^{\frac{\tau-t}{n}} \cdot \frac{1}{E(t)}. \quad (\text{Г.22})$$

Якщо сталою є величина $\frac{E(t)n(t)}{H(t)} = m = \text{const}$, що виражає час

запізнення деформацій, то ядро $K(t, \tau)$ подається рівністю:

$$K(t, \tau) = \Phi(\tau) e^{\frac{\tau-t}{m}} E(t). \quad (\Gamma.23)$$

Таке ядро часто застосовують для моделювання в'язкопружності старіючих матеріалів.

Отже, заміна реального часу t умовним часом ξ або ψ значно спрощує основне рівняння (Г.1), оскільки зводить одну з його частин до лінійного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами. Іншу його частину при цьому вважають заданою функцією умовного часу.

Властивості матеріалу, що змінюються у часі, звичайно встановлюються експериментальним шляхом. За результатами експериментів будують криві повзучості, тобто графіки, що подають зміну деформацій у часі при сталому навантаженні зразку, прикладеному у певний момент часу τ . При наявності лінійної залежності деформацій від напружень криві повзучості визначаються рівністю $\varepsilon = F(t, \tau)\sigma$, де $t > \tau$. Цю рівність можна подати у вигляді:

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} F(t, \tau) d\tau + \sigma(t_0) F(t, t_0). \quad (\Gamma.24)$$

Тут t_0 – момент прикладання навантаження. Виконаємо у рівності (Г.24) інтегрування частинами. Ввівши позначення

$$F(t,t) = \frac{1}{E(t)}, \quad E(t) \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = -K(t,\tau), \quad \text{цю рівність запишемо у}$$

вигляді:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) K(t,\tau) d\tau \right]. \quad (\text{Г.25})$$

Рівняння (Г.25) називають неінваріантним у часі лінійно-спадковим рівнянням повзучості.

З загальної деформації $\varepsilon = F(t,\tau)\sigma$ часто виділяють миттєву деформацію $\frac{\sigma}{E}$, отримуючи деформації чистої повзучості. Їх позначають $p = p(t)$. При сталому навантаженні, прикладеному у момент часу τ , деформація чистої повзучості має вигляд:

$$p(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma}{E(\tau)}. \quad (\text{Г.26})$$

Цю рівність можна записати у вигляді:

$$p(t) = \sigma [F(t,\tau) - F(\tau,\tau)]. \quad (\text{Г.27})$$

Величину

$$C(t, \tau) = F(t, \tau) - F(\tau, \tau) = F(t, \tau) - \frac{1}{E(\tau)} \quad (\Gamma.28)$$

називають мірою повзучості матеріалу. З означення цього показника випливає, що $C(\tau, \tau) = 0$. Через міру повзучості матеріалу функції $F(t, \tau)$ та $K(t, \tau)$ можна виразити наступним чином:

$$F(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau),$$

$$K(t, \tau) = -E(t) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E(\tau)} \right) - \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right]. \quad (\Gamma.29)$$

Для заданого ядра $K(t, \tau)$ можна, прийнявши у виразі (Г.25) $\sigma = 1$, $t_0 = \tau$, отримати вирази для міри повзучості та кривих повзучості у вигляді:

$$F(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \left[1 + \int_{\tau}^t K(t, \tau) d\tau \right], \quad (\Gamma.30)$$

$$C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \left[1 + \int_{\tau}^t K(t, \tau) d\tau \right] - \frac{1}{E(\tau)}. \quad (\Gamma.31)$$

Таким чином, у Додатку Г розглянуті найпростіші математичні моделі в'язкопружних матеріалів, властивості яких змінюються з часом.

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1 Математичні моделі в'язкопружного середовища	7
1.1 Поняття в'язкопружності	7
1.2 Визначальні рівняння теорії в'язкопружності	16
1.3 Ядра повзучості та релаксації	20
1.4 Аналітичне подання ядер у операторах спадкової в'язкопружності	25
Розділ 2 Методи розв'язання задач теорії в'язкопружності	33
2.1 Квазістатичні задачі теорії лінійної в'язкопружності	33
2.2 Метод квазіконстантних операторів	40
2.3 Застосування рядів за степенями оператора Вольтерра	42
2.4 Методи інтегральних перетворень	51
Розділ 3 Задача гомогенізації композиційних матеріалів	64
3.1 Основні поняття теорії композиційних матеріалів	64
3.2 Пружні характеристики композитів	69
3.3 Задача гомогенізації композиційних матеріалів	73
3.4 Методи гомогенізації композитів	96
Розділ 4 Гомогенізація в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту	110
4.1 Основні припущення та вихідні співвідношення	110
4.2 Поздовжнє розтягнення	117
4.3 Поперечне розтягнення	170
4.4 Поздовжній зсув	195
4.5 Поперечний зсув	215
Список використаних джерел	232
Додаток А	268
Додаток Б	273
Додаток В	281
Додаток Г	283

Наукове видання

КЛИМЕНКО Михайло Іванович
ГРЕБЕНЮК Сергій Миколайович
ГОМЕНЮК Сергій Іванович

ЕФЕКТИВНІ МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИТІВ

Монографія

В авторській редакції
Коректор: *О. В. Кудін*
Технічний редактор: *О. П. Кузьмінович*
Відповідальний за випуск: *М. І. Клименко*

ВИДАВНИЦТВО

Видавничий дім «Гельветика»
вул. Паровозна, 46а, офіс 105, м. Херсон, Україна, 73034,
тел.: +38(0552)39-95-80,
e-mail: mailbox@helvetica.com.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення
України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 6424 від 04.10.2018 р.

Підписано до друку 05. 11. 2019 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Умовних друкованих аркушів: 13,39. Наклад: 300 примірників.
Ціна договірна.