

Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

С.М. Гребенюк, О.О. Тітова, М.І. Клименко, С.І. Полюга, Ю.М. Стреляєв

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник
для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 12
від 23. 06. 2015 р.

Запоріжжя
2015

УДК 517.445(075.8)
ББК В19я73
0-609

Гребенюк С.М. Операційне числення: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика» / С.М. Гребенюк, О.О. Тітова, М.І. Клименко, С.І. Полюга, Ю.М. Стреляєв. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 86с.

У посібнику викладено теоретичний матеріал та основні методи розв'язання задач з операційного числення. Текст містить достатню кількість прикладів, які допоможуть студентам при вивченні даної дисципліни. Наведені також варіанти індивідуальних типових завдань для самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник призначений для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика».

Рецензент к. т. н., доцент *І.Г. Ткаченко*
Відповідальний за випуск *М.І. Клименко*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.....	5
1.1 Поняття перетворення Лапласа. Оригінал та зображення.....	5
1.2 Властивості перетворення Лапласа	6
1.3 Теорема про диференціювання та інтегрування оригіналів і зображень.....	14
1.4 Зображення згортки функцій. Формула Дюамеля	15
1.5 Зображення степеневі функції з довільним показником степеня	17
1.6 Зображення деяких спеціальних функцій.....	18
Запитання та завдання для самоперевірки.....	20
2 ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛА ЗА ЗАДАНИМ ЗОБРАЖЕННЯМ.....	22
2.1 Елементарний метод знаходження оригіналу за заданим зображенням.....	22
2.2 Теорема Рімана-Мелліна	23
2.3 Теорема розвинення	24
Запитання та завдання для самоперевірки.....	27
3 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ.....	29
3.1 Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та систем	29
3.2 Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля.....	33
3.3 Розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки.....	35
3.4 Розв'язання диференціально-різницевого рівнянь	38
3.5 Розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь	41
3.6 Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних	42
3.7 Підсумовування рядів.....	47
Запитання та завдання для самоперевірки.....	50
4 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.....	52
4.1 Поняття дискретного перетворення Лапласа	52
4.2 Властивості дискретного перетворення Лапласа	55
4.3 Застосування формули обернення для дискретного перетворення Лапласа.....	59
4.4 Розв'язання різницевого рівнянь.....	61
Запитання та завдання для самоперевірки.....	64
ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	66
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	82
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	83
Додаток А Таблиця оригіналів та зображень для перетворення Лапласа.....	85
Додаток Б Таблиця оригіналів та зображень для дискретного перетворення Лапласа (D -перетворення).....	86

ВСТУП

Операційне (символічне) числення є розділом математики, що вивчає інтегральне перетворення Лапласа. Його застосовують у радіотехніці, електроніці, теорії автоматичного управління та регулювання, а також інших галузях науки та техніки, де виникає потреба у розв'язанні лінійних рівнянь різних типів: звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь. Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції дійсної змінної її зображення – деяку функцію комплексної змінної. При цьому операції над зображеннями здебільшого виявляються простішими, ніж відповідні операції над вихідними функціями (оригіналами). Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення, за знайденим зображенням відновлюють оригінал.

Елементи операційного числення зустрічаються у працях Г.В. Лейбніца (1646 – 1716 рр.), Л.Ейлера (1707 – 1783 рр.), П. Лапласа (1749 – 1827 рр.), О. Коші (1789 – 1857 рр.). Вперше для практичних досліджень у галузі електротехніки операційний метод застосував англійський інженер-електрик О. Хевісайд (1850 – 1925 рр.). Застосувавши операційне числення до розв'язання диференціальних рівнянь, він отримав важливі результати у теорії електромагнітних коливань в електричних мережах. Чітке математичне обґрунтування на основі теорії інтегральних перетворень операційне числення отримало у дослідженнях Карсона, Бромвіча, Леві, Ван дер Поля та інших математиків.

Метою даного навчального посібника є ознайомлення студентів, що навчаються за напрямом підготовки «Математика, з основними теоретичними положеннями операційного числення та особливостями його застосування при розв'язанні різноманітних задач. Посібник складається з чотирьох розділів. У першому розділі висвітлено основні поняття операційного числення, зокрема, перетворення Лапласа та його властивості, що дозволяють переходити від оригіналів до зображень. Другий розділ містить стислий виклад основних методів знаходження оригіналів за відомим зображенням. У третьому розділі розглянуто особливості застосування операційного методу до розв'язання різноманітних типів рівнянь, у тому числі звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, диференціально-різницевих рівнянь, інтегро-диференціальних рівнянь, задач підсумовування рядів. Дискретне перетворення Лапласа та його застосування розглянуті у четвертому розділі. У посібнику наведено також варіанти завдань для індивідуальної роботи студентів, що охоплюють всі основні теми курсу операційного числення. Автори сподіваються, що посібник стане у нагоді читачам не лише при вивченні операційного числення, але й при виконанні курсових та дипломних робіт, а також при здійсненні наукових досліджень.

1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1 Поняття перетворення Лапласа. Оригінал та зображення

Нехай функцію $f(t)$ дійсної змінної t задано на скінченному або нескінченному інтервалі $(a;b)$.

Означення 1.1. *Інтегральним перетворенням* функції дійсної змінної $f(t)$ називають функцію

$$F(p) = \int_a^b K(t, p) f(t) dt,$$

де $K(t, p)$ – фіксована для даного перетворення функція, яку називають ядром перетворення, p – дійсний або комплексний параметр перетворення.

У залежності від вигляду ядра розрізняють різноманітні типи інтегральних перетворень. Ефективним засобом, що використовується при розв'язанні різноманітних задач математичного аналізу та у практичних науково-технічних дослідженнях, є інтегральне перетворення Лапласа.

Означення 1.2. *Перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, $t \in R$, називають функцію $F(p)$ комплексної змінної p , що визначається рівністю:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.1)$$

Функцію $F(p)$ називають *зображенням* функції $f(t)$ при перетворенні Лапласа, а інтеграл у правій частині рівності (1.1) називають *інтегралом Лапласа*.

Розділ математики, що вивчає перетворення Лапласа, його властивості та застосування, називають *операційним численням*, а метод розв'язання рівнянь різноманітних типів за допомогою перетворення Лапласа – *операційним методом*.

З'ясуємо, яким вимогам повинна задовольняти функція $f(t)$, щоб невласний інтеграл (1.1) був збіжним та визначав зображення $F(p)$.

Означення 1.3. *Оригіналом* при перетворенні Лапласа називають довільну функцію $f(t)$, що задовольняє наступним умовам:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 2) на довільному обмеженому інтервалі $f(t)$ може мати лише скінченне число точок розриву першого роду;
- 3) $|f(t)|$ зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі числа $\alpha \geq 0$ та $M > 0$, що $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha t}$. При цьому точну нижню грань α_0

значень α , для яких виконано останню умову, називають *показником зростання* функції $f(t)$.

Найпростішим прикладом оригінала є функція Хевісайда або одинична функція:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Можна перевірити, що вона задовольняє всім умовам функції-оригінала. Її показником зростання є число $\alpha_0 = 0$.

Теорема 1.1. (Теорема про існування зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0 , то інтеграл Лапласа

$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ є абсолютно збіжним у півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ комплексної площини p і визначає зображення $F(p)$, яке є функцією, аналітичною у цій півплощині.

Доведення. Оскільки $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0 , то виконується умова $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha_0 t}$. Нехай $p = \sigma + is$. Тоді $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$ і $|f(t)e^{-pt}| \leq M e^{(\alpha_0 - \sigma)t}$. Звідси знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha_0 - \sigma)t} dt = M \left. \frac{e^{(\alpha_0 - \sigma)t}}{\alpha_0 - \sigma} \right|_0^{+\infty} = \frac{M}{\sigma - \alpha_0}. \quad (1.2)$$

Оскільки за умовою теореми $\alpha_0 - \sigma < 0$, то $e^{(\alpha_0 - \sigma)t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отже, з нерівності (1.2) випливає, що інтеграл Лапласа є абсолютно збіжним при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Доведемо аналітичність $F(p)$. Для довільної точки півплощини $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta p} &= \frac{F(p + \Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta p t} - 1) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} \left(-\Delta p \cdot t + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{2!} - \frac{(\Delta p \cdot t)^3}{3!} + \dots \right) dt = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt + \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{де } \varepsilon = \Delta p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} t^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta p \cdot t}{3!} + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{4!} - \dots \right) dt.$$

Знайдемо оцінку для величини ε :

$$|\varepsilon| \leq |\Delta p| \cdot \int_0^{+\infty} e^{-pt} \|f(t)\| t^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta p \cdot t}{3!} + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{4!} - \dots \right) dt <$$

$$< |\Delta p| \int_0^{+\infty} M e^{\alpha_0 t} e^{-\sigma t} t^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta p \cdot t}{3!} + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{4!} - \dots \right) dt.$$

або $|\varepsilon| < |\Delta p| M \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma - \alpha_0 - |\Delta p|)t} t^2 dt$. Інтегруючи частинами праву частину цієї нерівності, отримуємо:

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(\sigma - \alpha_0 - |\Delta p|)^3} |\Delta p|.$$

Тому при $\Delta p \rightarrow 0$ маємо $|\varepsilon| \rightarrow 0$. Вираз для $F'(p)$ набуває вигляду:

$$F'(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} t \cdot f(t) dt.$$

Цей інтеграл є збіжним. Дійсно, $|tf(t)| < M e^{(\alpha_0 + \delta)t} e^{-\delta t} \cdot t$, де δ – досить мале число. Функція $Mte^{-\delta t}$ при $t > 0$ має максимум, тому існує таке число $M_1 > 0$, для якого $Mte^{-\delta t} < M_1$. Тоді $|tf(t)| < M_1 e^{(\alpha_0 + \delta)t}$. Отже, похідна $F'(p)$ існує і тому $F(p)$ є функцією, аналітичною у області $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що, хоча теорема 1.1 стверджує збіжність інтеграла лише при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, найчастіше функція $F(p)$ є визначеною та аналітичною на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

Теорема 1.2. (Необхідна умова існування зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Доведення. Нехай $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, що має показник зростання α . Тоді при $p = \sigma + is$ $|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| < \int_0^{+\infty} M e^{(\alpha - \sigma)t} dt = \frac{M}{\sigma - \alpha}$. З цієї нерівності випливає, що $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Оскільки $F(p)$ є аналітичною при $\operatorname{Re} p > \alpha$, то $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ по довільному напрямку. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що такі функції, як, наприклад, $F(p) = 1$, $F(p) = p$ не можуть бути зображеннями при перетворенні Лапласа.

За формулою (1.1) кожному оригіналу ставиться у відповідність функція $F(p)$. Цю відповідність між оригіналом $f(t)$ та його зображенням $F(p)$ надалі будемо записувати у вигляді: $f(t) \div F(p)$.

Оскільки оригінал дорівнює нулю при $t < 0$, то у подальшому для спрощення записів будь-яку функцію – оригінал, яку можна представити у вигляді $f(t) \cdot \eta(t)$ ($\eta(t)$ – функція Хевісайда), будемо коротко позначати $f(t)$.

Розглянемо приклади знаходження зображення $F(p)$ за заданим оригіналом $f(t)$ при перетворенні Лапласа.

Приклад 1.1. Знайти зображення функції Хевісайда.

Розв’язання. Маємо
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p}.$$

Таким чином, отримали, що $1 = \eta(t) \div \frac{1}{p}$.

Приклад 1.2. Знайти зображення функції $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$.

Розв’язання. За формулою (1.1) для $\operatorname{Re}(p - a) > 0$ знаходимо:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{a-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{a-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{-(p-a)b} - 1 \right) = \frac{1}{p-a}. \end{aligned}$$

Отже, $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$. При $a = 0$ маємо результат, отриманий у прикладі 1.1.

Приклад 1.3. Знайти зображення функції $f(t) = t$.

Розв’язання. Скористаємося формулою (1.1), згідно з якою отримуємо:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b te^{-pt} dt = \left\| \begin{array}{l} u = t; dv = e^{-pt} dt; \\ du = dt; v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right\| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right) \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали, що $t \div \frac{1}{p^2}$.

Знаходження зображення за допомогою формули (1.1) не завжди є легким та зручним. Ефективно вирішити цю задачу допомагає використання властивостей перетворення Лапласа, які ми розглянемо далі.

1.2 Властивості перетворення Лапласа

Теорема 1.3. (Теорема лінійності). Якщо $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то $A \cdot f(t) + B \cdot g(t) \div A \cdot F(p) + B \cdot G(p)$, де A та B – дійсні або комплексні сталі.

Доведення цієї теореми впливає з властивості лінійності для інтегралів. Використовуючи властивість лінійності та знайдене зображення показникової функції e^{at} , знайдемо зображення тригонометричних та показникових функцій.

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Теорема 1.4. (Теорема подібності). Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної дійсної сталої $\alpha > 0$ $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Доведення. $f(\alpha t) \div \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt$. Виконаємо у цьому інтегралі заміну змінної $\alpha t = t_1$. Тоді $dt = \frac{dt_1}{\alpha}$. Маємо:

$$f(\alpha t) \div \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-\frac{pt_1}{\alpha}} dt_1 = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 1.5. (Теорема зміщення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $e^{at} f(t) \div F(p - a)$, де a – довільна стала.

Доведення. Знайдемо зображення функції $e^{at} f(t)$:

$$e^{at} f(t) \div \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a).$$

Теорему доведено.

Використовуючи теорему зміщення, знайдемо зображення функцій $e^{at} \sin bt$, $e^{at} \cos bt$, $e^{at} \operatorname{sh} bt$, $e^{at} \operatorname{ch} bt$. Отримуємо:

$$e^{at} \sin bt \div \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \quad e^{at} \cos bt \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2};$$

$$e^{at} \operatorname{sh} bt \div \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \quad e^{at} \operatorname{ch} bt \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}.$$

Приклад 1.4. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$, якщо $F(p) = \frac{3p-5}{p^2-4p+13}$.

Розв'язання. Запишемо вираз для $F(p)$ у вигляді:

$$F(p) = \frac{3p-5}{p^2-4p+13} = \frac{3(p-2)+1}{(p-2)^2+9} = 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2+3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p-2)^2+3^2}.$$

$$\text{Отримуємо: } F(p) \div 3e^{2t} \cos 3t + \frac{1}{3} e^{2t} \sin 3t = f(t).$$

Теорема 1.6. (Теорема запізнення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, де $\tau > 0$ – довільна стала.

Доведення. Оскільки $f(t-\tau)$ є оригіналом, то $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, тому отримуємо:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt.$$

Виконаємо заміну $t-\tau = t_1$. Тоді знаходимо, що

$$\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

Звідси випливає, що $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$. Теорему доведено.

Ця теорема дає можливість знаходити зображення кусково-неперервних функцій, зокрема, функцій, що описують імпульсні процеси.

Приклад 1.5. Знайти зображення одиничного імпульсу $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо функцію $f(t)$ за допомогою функції Хевісайда:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau). \text{ Тоді } f(t) \div \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p}.$$

Використовуючи теорему запізнення, знайдемо зображення періодичної функції – оригінала, тобто функції $f(t) \cdot \eta(t)$, де $f(t)$ є періодичною функцією.

Нехай функція $f(t)$ має період T . Розглянемо допоміжну функцію

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0; T], \\ 0, & t \notin [0; T]. \end{cases} \text{ З допомогою цієї функції оригінал } f(t) \cdot \eta(t) \text{ можна}$$

записати у вигляді:

$$f(t) \cdot \eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT) \cdot \eta(t-nT).$$

Знайдемо зображення $f(t) \cdot \eta(t)$. Для цього використаємо теорему запізнення. Якщо $f_1(t) \div F_1(p)$, то отримуємо:

$$f(t) \cdot \eta(t) \div F(p) = F_1(p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Остання рівність виконується при $\operatorname{Re} p > 0$, коли $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$ є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Враховуючи, що $F_1(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$, отримуємо формулу для зображення періодичного оригіналу з періодом T у вигляді:

$$f(t) \cdot \eta(t) \div F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

Приклад 1.6. Знайти зображення функції $f(t) = |\cos t|$.

Розв'язання. Для знаходження потрібного зображення використаємо отриману формулу для зображення періодичного оригіналу, де $T = \pi$ – період функції $|\cos t|$. Спочатку знайдемо інтеграл $\int_0^{\pi} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\pi} \cos t \cdot e^{-pt} dt$. Двічі інтегруючи частинами, отримуємо:

$$\int_0^{\pi} \cos t \cdot e^{-pt} dt = \frac{p(e^{-\pi p} + 1)}{1 + p^2}.$$

Підставивши значення цього інтеграла у формулу для зображення періодичного оригіналу, остаточно знаходимо:

$$|\cos t| \div \frac{p(e^{-\pi p} + 1)}{(1 - e^{-\pi p})(1 + p^2)}.$$

Теорема 1.7. (Теорема випередження). Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної сталої величини $\tau > 0$

$$f(t + \tau) \div e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right).$$

Доведення. Маємо: $f(t + \tau) \div \int_0^{+\infty} f(t + \tau) e^{-pt} dt$. Виконавши заміну змінної $t + \tau = t_1$, отримуємо:

$$\begin{aligned} f(t + \tau) \div e^{p\tau} \int_{\tau}^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 &= e^{p\tau} \left(\int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 - \int_0^{\tau} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 \right) = \\ &= e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 \right). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

1.3 Теорема про диференціювання та інтегрування оригіналів і зображень

Теорема 1.8. (Теорема диференціювання по параметру). Якщо $f(t, x) \div F(p, x)$ і функція $f(t, x)$ при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція $F(p, x)$ має частинну похідну по x , то
$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \div \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Приклад 1.7. Знайти зображення функції $f(t) = te^{at}$, де a – довільна стала.

Розв'язання. $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$. Диференціюємо по параметру a обидві частини

цього співвідношення: $te^{at} \div \frac{1}{(p-a)^2}$.

Теорема 1.9. (Теорема про диференціювання оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$ і функції $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Доведення. Для першої похідної $f'(t)$ маємо:

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = \left\| \begin{array}{l} u = e^{-pt}, dv = f'(t) dt, \\ du = -pe^{-pt} dt, v = f(t) \end{array} \right\| = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. Користуючись цією формулою, знайдемо зображення другої похідної $f''(t) = (f'(t))'$:

$$f''(t) \div p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знаходимо зображення $f'''(t)$. Застосовуючи формулу для зображення першої похідної $(n-1)$ разів, отримуємо:

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорему доведено.

Якщо для функції $f(t)$ $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то отримуємо:

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p).$$

Приклад 1.8. Знайти зображення виразу $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) + 5$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригінала отримуємо:

$$\begin{aligned}x'(t) \div pX(p) - x(0) &= pX(p) - 1, \\x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0) &= p^2X(p) - p - 2.\end{aligned}$$

Підставивши ці зображення функції $x(t)$ та її похідних у заданий вираз та враховуючи, що $5 \div \frac{5}{p}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) + 5 \div p^2X(p) - p - 2 + 3(pX(p) - 1) + 2X(p) + \frac{5}{p} &= \\= (p^2 + 3p + 2)X(p) - p - 5 + \frac{5}{p}.\end{aligned}$$

З теореми про диференціювання оригінала випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо $f'(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ аналітична при $p \rightarrow \infty$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$.

Наслідок 2. Якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Теорема 1.10. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $F'(p) \div -tf(t)$, $F''(p) \div t^2f(t)$, ..., $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$.

Доведення. Оскільки функція $F(p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то вона має похідні довільних порядків. Тому, диференціюючи зображення $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ по p , отримаємо:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-pt} dt \div -tf(t).$$

Тоді $F''(p) \div (-t)(-t)f(t) = t^2f(t)$. Отже, кожне диференціювання $F(p)$ по p відповідає множенню оригінала попередньої похідної на $(-t)$, тому отримуємо: $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$. Теорему доведено.

Приклад 1.9. Знайти зображення функції $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Раніше ми отримали, що $t \div \frac{1}{p^2}$. Тоді $-t^2 \div \left(\frac{1}{p^2}\right)' = -\frac{2}{p^3}$, тому $t^2 \div \frac{2}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання, знаходимо, що $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Теорема 1.11. (Теорема про інтегрування оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$.

Доведення. Нехай $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ і $\varphi(t) \div \Phi(p)$. За теоремою про диференціювання оригіналу $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$, оскільки $\varphi(0) = 0$. З співвідношень $\varphi'(t) = f(t) \div F(p)$ випливає, що $F(p) = p\Phi(p)$, звідки $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, тобто $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$. Теорему доведено.

Приклад 1.10. Знайти зображення функції $\varphi(t) = \int_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau$.

Розв'язання. Знайдемо зображення підінтегральної функції $t \cos 2t$. Маємо $\cos 2t \div \frac{p}{p^2 + 4}$. За теоремою про диференціювання зображення знаходимо

$$t \cos 2t \div -\left(\frac{p}{p^2 + 4}\right)' = -\frac{4 - p^2}{(p^2 + 4)^2} = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}.$$

Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу отримуємо:

$$\int_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau \div \frac{p^2 - 4}{p(p^2 + 4)^2}.$$

Теорема 1.12. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int_p^\infty F(q) dq$ збіжний, то $\int_p^\infty F(q) dq \div \frac{f(t)}{t}$.

Доведення. Враховуючи співвідношення $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ і змінюючи порядок інтегрування по t та q , отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(q) dq &= \int_p^\infty \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-qt} dt \right) dq = \int_0^{+\infty} \left(\int_p^\infty e^{-qt} dq \right) f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-qt}}{t} \right) \Big|_p^\infty f(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \div \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад 1.11. Знайти зображення функції $\frac{e^t - 1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $e^t - 1 \div \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$, то за теоремою 1.12 отримуємо:

$$\frac{e^t - 1}{t} \div \int_p^\infty \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} \right) dq = \ln \frac{q-1}{q} \Big|_p^\infty = -\ln \frac{p-1}{p} = \ln \frac{p}{p-1}.$$

Приклад 1.12. Знайти зображення інтегрального синуса $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Розв'язання. Знайдемо зображення підінтегральної функції у виразі для інтегрального синуса. Оскільки $\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}$, то, за теоремою про інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} = \text{arctg } z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } p = \text{arcctg } p.$$

За теоремою про інтегрування зображення маємо: $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \div \frac{\text{arcctg } p}{p}$.

Теорему про інтегрування зображення у деяких випадках можна використати для обчислення невластних інтегралів.

Нехай $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$ задовольняє умовам оригінала і $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(p)$. Застосувавши теорему про інтегрування зображення, отримуємо: $\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(z) dz$. Тоді $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \Phi(0) = \int_0^\infty F(z) dz$. Таким чином, отримали формулу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(z) dz,$$

де $f(t) \div F(p)$.

Приклад 1.13. Обчислити $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Розв'язання. $\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$. Тому маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty F(z) dz = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}.$$

1.4 Зображення згортки функцій. Формула Дюамеля

Означення 1.4. Згортою неперервних функцій $f(t)$ та $g(t)$, $t \geq 0$,

називають інтеграл $f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$.

Зауважимо, що операція згортки є комутативною: $f * g = g * f$. Крім того, згортка неперервних функцій також є неперервною.

Теорема 1.13. Якщо функції $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то їх згортка також є оригіналом.

Доведення. Покажемо, що функція $f * g$ задовольняє всім трьом умовам оригінала. З неперервності $f(t)$ та $g(t)$ випливає неперервність згортки цих функцій.

Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то вони тотожно дорівнюють нулю при $t < 0$ і підінтегральний вираз у формулі згортки $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ тотожно дорівнює нулю при $t < 0$, тому $f * g = 0$ при $t < 0$.

Доведемо, що функція $\varphi(t) = f * g$ задовольняє третій умові оригінала, тобто $|\varphi(t)| \leq K \cdot e^{\beta t}$. Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то існують дійсні константи α_1 та α_2 , такі, що $|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t}$, $|g(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}$. Нехай $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тоді $|f(\tau) \cdot g(t-\tau)| \leq M_1 M_2 e^{\alpha \tau} e^{\alpha(t-\tau)} = M_1 M_2 e^{\alpha t} = K e^{\alpha t}$, де $K = M_1 M_2$. Звідси випливає, що $|\varphi(t)| \leq \int_0^t |f(\tau) \cdot g(t-\tau)| d\tau \leq \int_0^t K e^{\alpha \tau} d\tau = K t e^{\alpha t}$.

Оскільки $\forall t \geq 0 \quad t < e^t$, то $|\varphi(t)| \leq K e^{(\alpha+1)t} = K e^{\beta t}$, де $\beta = \alpha + 1$. Таким чином, згортка $\varphi(t) = f * g$ є оригіналом. Теорему доведено.

Теорема 1.14. (Теорема про множення зображень). Якщо $f(t) \div F(p)$, а $g(t) \div G(p)$, то $F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t)$, де $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$ – згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Доведення. Функція $f * g$ є оригіналом. За означенням перетворення Лапласа маємо:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Змінимо порядок інтегрування у отриманому повторному інтегралі і виконаємо підстановку $t_1 = t - \tau$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} g(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = F(p) \cdot G(p). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад 1.14. Знайти оригінал, зображенням якого є функція

$$F(p) = \frac{3p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

Розв'язання. Запишемо задане зображення $F(p)$ у вигляді:

$$F(p) = \frac{3p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Застосуємо теорему про множення зображення, згідно з якою виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{3p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} &\div 3 \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t - \tau) d\tau = \frac{3}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) + \cos t) d\tau = \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{\sin t}{2} + \frac{\sin t}{2} + t \cos t \right) = \frac{3}{2} (\sin t + t \cos t). \end{aligned}$$

З теореми 1.14 випливає, що, коли $f * g \div F(p) \cdot G(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то виконується *формула Дюамеля*:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau)d\tau + f(0)g(t). \quad (1.3)$$

Дійсно, вираз $pF(p)G(p)$ можна записати у вигляді:

$$pF(p)G(p) = (pF(p) - f(0))G(p) + f(0)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t).$$

Зауважимо, що формулу Дюамеля (12.3) можна записати також у вигляді:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t g'(\tau)f(t - \tau)d\tau + g(0)f(t).$$

Формулу Дюамеля застосовують при розв'язанні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

1.5 Зображення степеневі функції з довільним показником степеня

Раніше (приклад 1.9) було знайдено зображення степеневі функції $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$ для натуральних показників степеня $n \in \mathbb{N}$. Отримаємо формулу для зображення оригінала t^k , де k – довільне додатне число (при $k < 0$ t^k має нескінченний розрив при $t = 0$). Для цього спочатку познайомимось з важливою спеціальною функцією – гамма-функцією Ейлера. Вона визначається невластим інтегралом:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Можна перевірити, що цей невластий інтеграл є збіжним при $x > 0$.

До найважливіших властивостей гамма-функції відносять рекурентну формулу $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, що виконується при $x > 1$. Оскільки

виконується рівність $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, то за рекурентною формулою можна обчислити значення гамма-функції для довільного натурального аргументу. Маємо:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

Обчисливши відповідний невластний інтеграл, можна знайти значення $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, що часто зустрічається при розв'язанні задач, пов'язаних з гамма-функцією: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Застосуємо гамма-функцію для знаходження зображення степеневі функції t^k :

$$t^k \div \int_0^{+\infty} t^k e^{-pt} dt = \left\| \begin{matrix} pt = t_1, \\ pdt = dt_1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{p^{k+1}} \int_0^{+\infty} t_1^k e^{-t_1} dt_1 = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}.$$

Отже, отримали формулу: $t^k \div \frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$. Наприклад, при $k = \frac{1}{2}$ отримуємо:

$$\sqrt{t} \div \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}, \text{ при } k = -\frac{1}{2} \text{ маємо: } \frac{1}{\sqrt{t}} \div \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$$

Можна довести, що інтеграл Лапласа для функції t^k збігається при $k > -1$, хоча для значень $-1 < k < 0$ t^k має нескінченний розрив при $t = 0$.

1.6 Зображення деяких спеціальних функцій

Розглянемо перетворення Лапласа для деяких спеціальних функцій.

Функцію $\text{erf } t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$ називають *інтегралом ймовірностей*.

Запишемо ряд для функції $e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}$. Він є рівномірно збіжним на всій числовій прямій. У результаті його інтегрування на проміжку від 0 до t отримуємо рівномірно збіжний ряд для інтеграла ймовірностей:

$$\text{erf } t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

При великих значення аргументу t здебільшого використовують функцію

$$\text{Erf } t = 1 - \text{erf } t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Знайдемо зображення інтеграла ймовірностей, для чого спочатку визначимо зображення функції $f(t) = e^{-t^2}$. Згідно з означенням перетворення Лапласа отримуємо:

$$e^{-t^2} \div \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cdot e^{-pt} dt = e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2} dt = \left\| \begin{array}{l} t + \frac{p}{2} = \tau, \\ dt = d\tau \end{array} \right\| = e^{\frac{p^2}{4}} \int_{\frac{p}{2}}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \text{Erf} \left(\frac{p}{2} \right).$$

Тоді, за теоремою інтегрування оригіналу, для інтеграла ймовірностей $\text{erf } t$ знаходимо:

$$\text{erf } t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \div \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \text{Erf} \left(\frac{p}{2} \right) = \frac{1}{p} \cdot e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \text{Erf} \left(\frac{p}{2} \right).$$

Знайдемо зображення функцій Бесселя при перетворенні Лапласа. Нагадаємо, що функція Бесселя $J_\nu(t)$ першого роду порядку ν визначається як степеневий ряд, що є розв'язком диференціального рівняння Бесселя:

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \nu^2)x(t) = 0.$$

Цей ряд має вигляд: $x(t) = J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$. Функція $J_\nu(t)$

є неперервною функцією, визначеною на всій числовій прямій, якщо $\nu \in Z$. Якщо $\nu \notin Z$, то $J_\nu(t)$ визначена додатних значень аргументу t . При $\nu = n \in N$

отримуємо $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}$. Для цілих від'ємних значень ν

виконується рівність $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. Для обчислення функцій Бесселя першого роду $J_\nu(t)$ можна використовувати рекурентну формулу: $J_{\nu+1}(t) = J_{\nu-1}(t) - 2J'_\nu(t)$.

Використовуючи означення функції $J_n(t)$, можна довести, що вона є оригіналом. Знайдемо її перетворення Лапласа. Спочатку знайдемо зображення функції $J_0(t)$. Ця функція задовольняє рівняння Бесселя при $\nu = 0$:

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0.$$

Нехай $J_0(t) \div L_0(p)$. Оскільки $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$, то, за теоремою про диференціювання оригінала, маємо: $J_0'(t) \div pL_0(p) - 1$, $J_0''(t) \div p^2L_0(p) - p$. За теоремою про диференціювання зображення маємо:

$$tJ_0(t) \div -L_0'(p), \quad tJ_0''(t) = -\left(p^2L_0(p) - p\right)' = -2pL_0(p) - p^2L_0'(p) + 1.$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння Бесселя при $\nu = 0$ отримуємо:

$$-2pL_0(p) - p^2 L_0'(p) + 1 + pL_0(p) - 1 - L_0'(p) = 0,$$

Це рівняння можна записати у вигляді: $\frac{dL_0}{L_0} = -\frac{pdp}{p^2 + 1}$. Інтегруючи цю

рівність, отримуємо: $L_0(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}}$.

Сталу C у останній рівності знаходимо, використовуючи наслідок з теореми про диференціювання оригіналу: $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t)$. Маємо:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Cp}{\sqrt{p^2 + 1}} = C = \lim_{t \rightarrow 0+0} J_0(t) = J_0(0) = 1.$$

Таким чином, отримали зображення $J_0(t) \div \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$.

Оскільки $J_0'(t) = -J_1(t)$, то зображення $J_1(t)$ має вигляд:

$$J_1(t) \div -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Використовуючи рекурентну формулу для функцій Бесселя $J_n(t)$, за допомогою методу математичної індукції можна довести, що

$$J_n(t) \div \frac{\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Таким чином, маємо зображення функцій Бесселя $J_n(t)$ при перетворенні Лапласа.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення інтегрального перетворення.
2. Наведіть означення перетворення Лапласа.
3. Яку функцію називають оригіналом?
4. Наведіть приклади функцій-оригіналів.
5. Сформулюйте теорему існування зображення.
6. Сформулюйте необхідну умову зображення.
7. Наведіть приклади функцій, які задовольняють необхідній умові зображення при перетворенні Лапласа.
8. Чи може функція $F(p) = \cos \frac{1}{p}$ бути зображенням деякого оригінала?
9. Перевірте, які з вказаних функцій є оригіналами: а) $t^2 \eta(t)$; б) $b^t \eta(t)$, $b > 0$, $b \neq 1$; в) $e^{4t^2} \eta(t)$; г) $\frac{\eta(t)}{t-3}$; д) $t^t \eta(t)$; е) $\frac{\eta(t)}{t^2 + 2}$; ж) $\text{ctgt} \eta(t)$.

10. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

11. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t) = \begin{cases} 1-t, t \in [0;1], \\ 0, t \notin [0;1]. \end{cases}$

12. Сформулюйте основні властивості перетворення Лапласа.

13. Сформулюйте теореми про диференціювання оригіналів та зображень.

14. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайдіть зображення наступних функцій: 1) $\sin^2 \omega t$; 2) $\frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t)$; 3) $\sin \alpha t \cos \beta t$; 4) $\cos^3 \omega t$; 5) $e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t$; 6) $\sin \alpha t \cdot \operatorname{ch} \beta t$.

15. Знайдіть зображення наступних функцій: а) $e^{t-2} \eta(t-2)$, б) $e^{t-2} \eta(t)$; в) $e^t \eta(t-2)$; г) $t^2 \eta(t-1)$; д) $(t-1)^2 \eta(t-1)$.

16. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, 0 \leq t < 1, \\ -1, 1 \leq t < 2, \\ 0, t \geq 2. \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ t, 0 \leq t < 1, \\ 1, t \geq 1. \end{cases}$

17. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t) = |\sin 2t|$; б) $f(t) = \{2t\}$.

18. Знайдіть зображення розв'язку задачі Коші: $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

19. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t) = t^2 \cos t$; б) $f(t) = (t+2) \operatorname{sh} 4t$.

20. Знайдіть зображення функції $f(t) = \int_0^t \tau^{10} e^{-2\tau} d\tau$.

21. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; б) $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

22. Обчисліть інтеграли ($a > 0$, $b > 0$): а) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$.

23. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t) = t\sqrt[3]{t}$; б) $f(t) = t^3\sqrt{t}$.

24. Знайдіть згортку функцій $f * g$, якщо: а) $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$; б) $f(t) = \sqrt{1+t}$, $g(t) = 1$.

25. Знайдіть зображення згорток функцій із завдання 24.

26. Користуючись теоремою множення зображень, знайдіть оригінали для наступних функцій: а) $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+16)}$.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛА ЗА ЗАДАНИМ ЗОБРАЖЕННЯМ

2.1 Елементарний метод знаходження оригінала за заданим зображенням

У багатьох випадках зображення вдається перетворити до такого вигляду, коли відповідний оригінал легко знаходиться за допомогою властивостей перетворення Лапласа і таблиці зображень, наведеної у додатку А. Зокрема, якщо зображення $F(p)$ є раціональною функцією, то для знаходження оригінала використовують метод розкладу зображення на елементарні дроби. Розглянемо сутність цього методу на прикладах.

Приклад 2.1. Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)}$.

Розв'язання. Представимо задане зображення $F(p)$ у вигляді суми елементарних дроби:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

Приводячи суму дроби у правій частині цієї рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p , отримуємо значення невідомих коефіцієнтів A , B , C та D і зображення $F(p)$ у вигляді:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)} = \frac{5}{p} - \frac{4}{p-1} - \frac{p}{p^2+9} + \frac{4}{p^2+9}.$$

Використавши теорему лінійності та таблицю зображень, знаходимо оригінал:

$$F(p) \div f(t) = 5 - 4e^t - \cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t.$$

Приклад 2.2. Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про множення зображень. Запишемо $F(p)$ у вигляді:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Згідно з теоремою 1.14 маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2+1)^2} &= \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \div \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(t-2\tau) - \cos t) d\tau = -\frac{1}{4} \sin(t-2\tau) \Big|_0^t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Отже, оригінал заданого зображення має вигляд: $f(t) = \frac{1}{2}(t \cos t - \sin t)$.

2.2 Теорема Рімана-Мелліна

У загальному випадку розв'язання задачі знаходження оригінала за заданим зображенням ґрунтується на теоремі обернення (теоремі Рімана-Мелліна).

Теорема 2.1. (Теорема Рімана-Мелліна). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображення, то у кожній точці неперервності функції $f(t)$ справедлива *формула обернення Рімана-Мелліна*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.1)$$

де інтегрування здійснюється по довільній прямій $\operatorname{Re} p = \gamma$, $\gamma > \alpha$ (α – показник зростання функції $f(t)$) і інтеграл розглядається у розумінні головного значення.

Доведення. Як відомо з теорії інтегралів Фур'є, для абсолютно інтегровної кусково-гладкої функції $f(t)$ виконується рівність:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isu} f(u) du \right) ds, \quad (2.2)$$

де зовнішній інтеграл розглядається як головне значення.

Розглянемо функцію $\varphi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, $\sigma > \alpha$. Для неї виконується формула (2.2), тобто $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \Phi(s) ds$, де $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \varphi(t) dt$. Оскільки

$f(t) = 0$ при $t < 0$, то $\Phi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ist} \varphi(t) dt$. Тоді отримуємо:

$$\int_0^{+\infty} e^{ist} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-ist} e^{-\sigma t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+is)t} dt.$$

Позначимо $p = \sigma + is$, $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$. Оскільки $\Phi(s) = F(p)$, то

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} F(\sigma + is) ds.$$

Тому $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+si)t} F(\sigma + is) ds$. Це означає, що виконується

рівність $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$. Теорему доведено.

2.3 Теорема розвинення

Безпосереднє застосування формули (2.1) часто пов'язане з технічними труднощами, тому на практиці для знаходження оригіналу користуються теоремами розвинення, що ґрунтуються на теоремі Рімана – Мелліна.

Теорема 2.2. (Перша теорема розвинення). Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки $p = \infty$ і її розвинення у ряд Лорана має вигляд $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$, то функція $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ є оригіналом для зображення $F(p)$.

Приклад 2.3. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$.

Розв'язання. Знайдемо розвинення зображення $F(p)$ у ряд Лорана:

$$F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! p^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}.$$

Теорема 2.3. (Друга теорема розвинення). Якщо функція $F(p)$ є однозначною та має скінченне число особливих точок p_1, p_2, \dots, p_n , то функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(e^{p_k t} F(p_k) \right) \quad (2.3)$$

є оригіналом, що має зображення $F(p)$.

Доведення. Нехай $F(p)$ – функція, що є аналітичною у всій комплексній площині за винятком скінченного числа особливих точок та задовольняє умові $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Виберемо пряму, вздовж якої здійснюється інтегрування у формулі (2.1) (пряма $\text{Re } p = \sigma$) так, щоб всі особливі точки функції $F(p)$ були розташовані ліворуч від цієї прямої. У такому випадку інтеграл (2.1) можна обчислити з допомогою *леми Жордана*, відомої з курсу теорії функцій комплексної змінної: якщо функція $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то інтеграл

$\int_{C_R} F(p)e^{pt} dp$, взятий по дузі C_R кола $|p|=R$, такий, що на цій дузі $\operatorname{Re} p < \sigma$, при $t > 0$ прямує до нуля, якщо $R \rightarrow +\infty$.

Виберемо контур, що складається з відрізка AB прямої $\operatorname{Re} p = \sigma$ та дуги C_R , радіус якої R візьмемо достатньо великим, щоб всі особливі точки p_1, p_2, \dots, p_n функції $F(p)$ попали всередину цього контуру. За основною теоремою про лишки, відомою з курсу теорії функції комплексної змінної, отримуємо:

$$\int_{AB} F(p)e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p)e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p=p_k}.$$

При $t > 0$ за лемою Жордана $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p)e^{pt} dp = 0$, тому з останньої рівності

при $R \rightarrow +\infty$ отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p=p_k},$$

тобто отримали формулу (2.3).

З першої теореми розвинення випливає, що у випадку, коли $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$

– правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left((p - p_k)^{n_k} \frac{Q(p)}{R(p)} e^{pt} \right)^{(n_k - 1)}. \quad (2.4)$$

У формулі (2.4) p_k – полюси порядку n_k функції $F(p)$. Якщо всі ці полюси (нулі знаменника $R(p)$) є простими, то оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.5)$$

Формулу (2.5) можна записати також у вигляді:

$$f(t) = \frac{Q(p_1) \cdot e^{p_1 t}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) \dots (p_1 - p_n)} + \frac{Q(p_2) \cdot e^{p_2 t}}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3) \dots (p_2 - p_n)} + \dots + \frac{Q(p_n) \cdot e^{p_n t}}{(p_n - p_1)(p_n - p_2) \dots (p_n - p_{n-1})}. \quad (2.6)$$

Приклад 2.4. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}$.

Розв'язання. Функція $F(p)$ має полюси $p_1 = -1$ та $p_2 = 2$ другого порядку, тому застосуємо формулу (2.4):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{3pe^{pt}}{(p-2)^2} \right)' + \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 2} \left(\frac{3pe^{pt}}{(p+1)^2} \right)' = \\
&= 3 \lim_{p \rightarrow -1} \frac{e^{pt} \left((1+pt)(p-2) - 2p \right)}{(p-2)^3} + 3 \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt} \left((1+pt)(p+1) - 2p \right)}{(p+1)^3} = \\
&= \frac{1}{9} \left((6t-1)e^{2t} - (3t-1)e^{-t} \right).
\end{aligned}$$

Приклад 2.5. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p) = \frac{1}{p^4 - 1}$.

Розв'язання. Знаменник функції $F(p)$ має лише прості корені $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = -i$, $p_4 = i$. Тому за формулою (2.6) маємо:

$$\begin{aligned}
f(t) &\div \frac{e^{-t}}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)} + \frac{e^t}{(1+1)(1+i)(1-i)} + \frac{e^{it}}{(i+1)(i-1)(i+i)} + \\
&+ \frac{e^{-it}}{(-i+1)(-i-1)(-i-i)} = -\frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} + \frac{ie^{it}}{4} - \frac{ie^{-it}}{4} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \operatorname{sin} t).
\end{aligned}$$

Якщо серед особливих точок раціонального зображення $F(p)$ є прості полюси $p = \alpha \pm \beta i$, то

$$\left(F(p) \cdot e^{pt} \right) \Big|_{p=\alpha+\beta i} + \left(F(p) \cdot e^{pt} \right) \Big|_{p=\alpha-\beta i} = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res} \left(F(p) \cdot e^{pt} \right) \Big|_{p=\alpha+\beta i} \right]. \quad (2.7)$$

Приклад 2.6. Знайти оригінал $f(t)$ для зображення $F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

Розв'язання. Особливими точками зображення $F(p)$ є прості полюси $p_{1,2} = \pm i$ та $p_{3,4} = \pm 3i$. За формулами (2.3) та (2.7) маємо:

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res} \left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)} \right) \Big|_{p=i} \right] + 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res} \left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)} \right) \Big|_{p=3i} \right].$$

Знаходимо лишки у точках $p = i$ та $p = 3i$:

$$\operatorname{Res} \left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)} \right) \Big|_{p=i} \right] = \frac{(2i+3)e^{it}}{16i} = \frac{(2-3i)(\cos t + i \sin t)}{16},$$

$$\operatorname{Res} \left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)} \right) \Big|_{p=3i} \right] = \frac{(6i+3)e^{3it}}{-48i} = \frac{(-2+i)(\cos 3t + i \sin 3t)}{16},$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(2-3i)(\cos t + i \sin t)}{16}\right] = \frac{2\cos t + 3\sin t}{16},$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(-2+i)(\cos 3t + i \sin 3t)}{16}\right] = -\frac{2\cos 3t + \sin 3t}{16}.$$

За формулою (2.7) знаходимо оригінал для заданого зображення:

$$f(t) = \frac{2\cos t + 3\sin t - 2\cos 3t - \sin 3t}{8}.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає елементарний метод знаходження оригінала за заданим зображенням?
2. Як застосовують теорему множення зображень для знаходження оригінала їх добутку?
3. Сформулюйте теорему Рімана-Мелліна.
4. Сформулюйте умови, яким повинно задовольняти зображення, щоб до нього можна було застосувати першу теорему розвинення.
5. Сформулюйте другу теорему розвинення. Для яких зображень її можна застосовувати?
6. Наведіть формулу для визначення оригінала раціонального зображення, всі особливі точки якого є простими полюсами.
7. Як визначають оригінал раціонального зображення, особливими точками якого є полюси різних порядків?
8. Наведіть формулу для визначення оригінала раціонального зображення, що має прості комплексні полюси.

9. Чи може бути зображенням функція $F(p) = \frac{2p^2 + p}{p^2 + p + 1}$?

10. Розклавши задане зображення $F(p)$ на елементарні дроби, знайдіть оригінали, якщо:

1) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2-5p+6}$; 2) $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$; 3) $F(p) = \frac{3p-2}{(p^2+1)(p^2-p+1)}$

4) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$; 5) $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$; 6) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3-6p^2+5p}$.

11. Знайдіть оригінали для наступних зображень:

1) $F(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$; 2) $F(p) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$;

$$3) F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)^4}; 4) F(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}.$$

12. Знайдіть оригінал для зображення $F(p)$, якщо:

$$а) F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}; б) F(p) = \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}.$$

13. Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p) = \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$.

14. Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}$.

Побудуйте графік $f(t)$.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ

3.1 Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та систем

Застосування до диференціального рівняння перетворення Лапласа приводить до алгебраїчного рівняння відносно зображення. З отриманого рівняння можна знайти зображення шуканого оригінала, а далі за зображенням можна відтворити оригінал.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$, що задовольняє вимогам оригіналу:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t). \quad (3.1)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (3.2)$$

Нехай $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Застосовуючи до обох частин рівняння (3.1) перетворення Лапласа і використовуючи теорему лінійності та теорему про диференціювання оригінала, від диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2) переходимо до алгебраїчного рівняння виду

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) + Q(p) = F(p),$$

де $Q(p)$ – деякий многочлен, коефіцієнти якого визначаються початковими умовами (3.2).

Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення $X(p)$, отримуємо:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Знайшовши оригінал $x(t)$ для $X(p)$, ми одержимо шуканий розв'язок диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2), тобто розв'язок задачі Коші.

Аналогічно розв'язують і системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Різниця полягає лише у тому, що замість одного алгебраїчного рівняння отримуємо систему кількох рівнянь відносно зображень.

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Коші: $x'(t) + x(t) = e^{-t}$, $x(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригінала $x'(t) \div pX(p) - 1$. Застосовавши перетворення Лапласа до заданої задачі Коші, отримуємо: $pX(p) - 1 + X(p) = \frac{1}{p+1}$. Розв'язавши це алгебраїчне

рівняння відносно $X(p)$ маємо: $X(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}$.

Оскільки $\frac{1}{(p+1)^2} \div te^{-t}$, $\frac{1}{p+1} \div e^{-t}$, то шуканий розв'язок $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = (t+1)e^{-t}.$$

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші:

$$x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді, з урахуванням початкових умов, $x''(t) \div p^2 X(p)$, $x^{(4)}(t) \div p^4 X(p)$. Оскільки $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то зображенням заданого диференціального рівняння є алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси знаходимо, що $X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}$. Знайдемо тепер оригінал, що

відповідає даному зображенню. Функція $X(p)$ має два полюси $\pm i$ третього порядку. Тому за формулою (2.4) отримуємо:

$$x(t) = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -i} \left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right)'' + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right)'' = \frac{3}{8}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{8}t^2 \sin t.$$

Приклад 3.3. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = e^t, \\ x + y' = e^{-t}, \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = y(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тоді $x'(t) \div pX(p) - 1$, $y'(t) \div pY(p) - 1$. Оскільки $e^t \div \frac{1}{p-1}$, $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$, то внаслідок застосування до заданої системи диференціальних рівнянь перетворення Лапласа отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно зображень розв'язків $X(p)$ та $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX - 1 + Y = \frac{1}{p-1}, \\ pY - 1 + X = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}, \quad Y(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}.$$

Використовуючи таблицю оригіналів та зображень, знаходимо оригінали для зображень $X(p)$ та $Y(p)$:

$$x(t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t, \quad y(t) = \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} t.$$

Розглянемо приклад розв'язання диференціального рівняння (3.1) операційним методом, коли права частина рівняння $f(t)$ має точки розриву першого роду, тобто є кусочно неперервною функцією.

Приклад 3.4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' + x = f(t)$ при початкових умовах $x(0) = x'(0) = 0$, якщо функція $f(t)$ має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ 1, & 1 \leq t < 3; \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Праву частину $f(t)$ запишемо у вигляді: $f(t) = \eta(t-1) - \eta(t-3)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Застосуємо до заданого диференціального рівняння перетворення Лапласа. Зображення $f(t)$

згідно з теоремою запізнення, має вигляд: $F(p) = \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p} = \frac{e^{-p}(1 - e^{-2p})}{p}$

Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді зображення диференціального рівняння з врахуванням початкових умов має вигляд:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{e^{-p}(1 - e^{-2p})}{p}.$$

Звідси знаходимо зображення $X(p)$: $X(p) = \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p(p^2 + 1)}$. Для знаходження

оригінала $x(t)$ використаємо теорему запізнення. Знайдемо спочатку оригінал для функції $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$. Маємо:

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{p^2 + 1 - p^2}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \div 1 - \cos t.$$

Тоді за теоремою запізнення отримуємо:

$$e^{-p} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) \div (1 - \cos t) \cdot \eta(t-1), \quad e^{-3p} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) \div (1 - \cos t) \cdot \eta(t-3).$$

Таким чином, розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$x(t) = (1 - \cos t) \cdot \eta(t-1) - (1 - \cos t) \cdot \eta(t-3).$$

Цей розв'язок можна записати у вигляді:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ 1 - \cos(t-1), & 1 \leq t < 3; \\ -\cos(t-1) + \cos(t-3), & t \geq 3. \end{cases}$$

Операційне числення можна застосувати також до розв'язання деяких лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема, якщо ці коефіцієнти є многочленами. При переході від диференціального рівняння відносно оригінала $x(t)$ до рівняння відносно зображення $X(p)$ використовують теорему про диференціювання зображень, згідно з якою похідна $\frac{dX}{dp} \div -t \cdot x(t)$. Тому внаслідок застосування перетворення Лапласа отримуємо диференціальне рівняння відносно зображення $X(p)$, порядок якого дорівнює максимальному степеню многочленів, що є коефіцієнтами для оригінала, а степені коефіцієнтів отриманого рівняння не перевищують порядку рівняння відносно оригінала. Операційний метод для розв'язання рівнянь з коефіцієнтами-многочленами доцільно застосовувати, якщо старший степінь його коефіцієнтів менший ніж порядок диференціального рівняння.

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння $t \cdot x'' + x' - t \cdot x = 0$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа. Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} -t \cdot x(t) &\div \frac{dX}{dp}, \quad x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \\ x''(t) &\div p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p, \\ t \cdot x''(t) &\div -(p^2 X(p) - p)' = -2pX(p) - p^2 \frac{dX}{dp} + 1. \end{aligned}$$

Отже, рівняння відносно зображення $X(p)$ має вигляд:

$$-2pX - p^2 \frac{dX}{dp} + 1 + pX - 1 + \frac{dX}{dp} = 0, \Rightarrow (1 - p^2) \frac{dX}{dp} - pX = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{dX}{X} = \frac{pdp}{1 - p^2}, \Rightarrow \ln|X| = -\frac{1}{2} \ln|1 - p^2| + \ln|C| = \ln \left| \frac{C}{\sqrt{1 - p^2}} \right|.$$

Отже, $X(p) = \frac{C}{\sqrt{1 - p^2}}$. Для знаходження сталої інтегрування C

використаємо наслідок 1 з теореми про диференціювання оригінала, згідно з яким $\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) = x(0)$. Маємо:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Cp}{\sqrt{1 - p^2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Cp}{i\sqrt{p^2 - 1}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{C_1 p}{\sqrt{p^2 - 1}} = C_1 = x(0) = 1.$$

Отже, $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} = \frac{1}{p} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Для знаходження оригіналу

запишемо зображення $X(p)$ у вигляді ряду. Для цього застосуємо формулу

біноміального ряду: $(1+z)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)z^n}{n!}$. Підставивши сюди

$z = -\frac{1}{p^2}$, $m = -\frac{1}{2}$, отримуємо:

$$X(p) = \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-1)^n}{p^{2n}} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{p^{2n+1}} \right).$$

Для знаходження оригінала $x(t)$ застосуємо першу теорему розвинення, згідно з якою отримуємо:

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n)!} t^{2n}.$$

3.2 Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля

Лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.1) можна записати у вигляді: $L(x) = f(t)$, де символ $L(x)$ означає *лінійний диференціальний оператор n -го порядку*: $L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$. З означення лінійного диференціального оператора випливає, що $L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2)$, де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – довільні n разів диференційовні функції, c_1 та c_2 – довільні константи.

Теорема 3.1. Якщо $x_1(t)$ є розв'язком диференціального рівняння $L(x) = 1$ при нульових початкових умовах, то розв'язком рівняння $L(x) = f(t)$ при таких самих початкових умовах є функція

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа при нульових початкових умовах до рівняння $L(x) = 1$, отримаємо алгебраїчне рівняння $\tilde{L}(p) X_1(p) = \frac{1}{p}$,

де $\tilde{L}(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, $X_1(p) \div x_1(t)$. Звідси знаходимо: $\tilde{L}(p) = \frac{1}{p X_1(p)}$.

Зображенням рівняння $L(x) = f(t)$ при нульових початкових умовах є рівняння $\tilde{L}(p)X(p) = F(p)$, де $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Для зображення $X(p)$ отримуємо $X(p) = \frac{F(p)}{\tilde{L}(p)} = pX_1(p)F(p)$. Тоді за формулою Дюамеля

(1.3) отримаємо:

$$x(t) = x_1(0)f(t) + \int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

оскільки $x_1(0) = 0$. Другий вираз у правій частині рівності (3.3) впливає з комутативності згортки. Теорему доведено.

Дана теорема дозволяє знаходити розв'язок диференціального рівняння (3.1) без використання зображення правої частини цього рівняння. Знаючи розв'язок для одиничної правої частини рівняння, ми за допомогою інтегрування знаходимо розв'язок для довільної правої частини. Вимога нульових початкових умов є несуттєвою: заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими умовами.

Приклад 3.6. Знайти розв'язок задачі Коші: $x_1'' + x_1 = \frac{1}{2 + \cos t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу відносно невідомої функції $x_1(t)$: $x_1'' + x_1 = 1$, $x_1(0) = x_1'(0) = 0$. Застосувавши до цього рівняння перетворення Лапласа, отримуємо рівняння відносно зображення $X_1(p)$

функції $x_1(t)$: $p^2X_1(p) + X_1(p) = \frac{1}{p}$, звідки знаходимо:

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{(p^2 + 1) - p^2}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Оригінал $x_1(t)$ для отриманого зображення $X_1(p)$ має вигляд: $x_1(t) = 1 - \cos t$.

Для знаходження розв'язку заданої задачі Коші використаємо формулу Дюамеля (3.3), згідно з якою

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{2 + \cos \tau} d\tau.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині цієї рівності:

$$\int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{2 + \cos \tau} d\tau = \int_0^t \frac{\sin t \cos \tau}{2 + \cos \tau} d\tau - \int_0^t \frac{\cos t \sin \tau}{2 + \cos \tau} d\tau.$$

$$\int_0^t \frac{\cos t \sin \tau}{2 + \cos \tau} d\tau = -\cos t \cdot \int_0^t \frac{d(2 + \cos \tau)}{2 + \cos \tau} = -\cos t \cdot \ln(2 + \cos \tau) \Big|_0^t =$$

$$= -\cos t (\ln(2 + \cos t) - \ln 3),$$

$$\int_0^t \frac{\sin t \cos \tau}{2 + \cos \tau} d\tau = \left\| \begin{array}{l} z = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}, \cos \tau = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \\ d\tau = \frac{2dz}{1 + z^2}. \end{array} \right\| = 2 \sin t \int_0^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \frac{(1 - z^2) dz}{(1 + z^2)(3 + z^2)}.$$

Оскільки $\frac{1 - z^2}{(1 + z^2)(3 + z^2)} = \frac{1}{z^2 + 1} - \frac{2}{z^2 + 3}$, то

$$2 \sin t \int_0^t \frac{\cos \tau d\tau}{2 + \cos \tau} = 2 \sin t \int_0^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \left(\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{2}{z^2 + 3} \right) dz = 2 \sin t \left(\operatorname{arctg} z \Big|_0^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) =$$

$$= 2 \sin t \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) = \sin t \cdot \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Таким чином, розв'язок заданої задачі Коші має вигляд:

$$x(t) = \sin t \cdot \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \cos t (\ln(2 + \cos t) - \ln 3).$$

3.3 Розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки

Операційний метод можна ефективно застосувати до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки:

$$a \cdot f(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Тут інтеграл $\int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau$ є згортокою $K(t) * f(t)$ ядра інтегрального рівняння $K(t)$ та невідомої функції $f(t)$. Розв'язок цього рівняння можна знайти, застосувавши до нього перетворення Лапласа з подальшим застосуванням теореми множення зображень.

Розглянемо застосування операційного методу до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, тобто при значеннях сталої $a \neq 0$ у рівнянні (3.4).

Якщо інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) * f(t) dt$ є абсолютно збіжним, то перетворення

Лапласа за теоремою множення зображень відображає згортку у добуток зображень, тобто $K(t) * f(t) \div \tilde{K}(p) \cdot F(p)$, де $K(t) \div \tilde{K}(p)$. Тому рівняння (3.4) після переходу до зображень набуває вигляду:

$$a \cdot F(p) = \Phi(p) + \lambda \tilde{K}(p) F(p),$$

де $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(p)$, $K(t) \div \tilde{K}(p)$.

Звідси отримуємо, що $F(p) = \frac{\Phi(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)}$. Цю рівність можна записати у

вигляді: $F(p) = \frac{1}{a} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} \Phi(p)$. Позначимо $\frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \Psi(p)$ і

нехай $\Psi(p) \div \psi(t)$. Тоді рівності $F(p) = \frac{1}{a} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \cdot \Psi(p) \Phi(p)$ відповідає на

множині оригіналів розв'язок $f(t) = \frac{1}{a} \varphi(t) + \frac{\lambda}{a} \psi(t) * \varphi(t)$.

Зокрема, якщо ядро $K(t)$ є многочленом, тобто $K(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, то його

зображення набуває вигляду: $\tilde{K}(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_n \cdot n!}{p^{n+1}}$. Тоді отримуємо:

$$\Psi(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + n! a_n}{a p^{n+1} - \lambda (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + n! a_n)}.$$

Функція $\Psi(p)$ є дробово-раціональною і її оригінал можна знайти за допомогою другої теореми розвинення (формула (2.4)).

Приклад 3.7. Розв'язати операційним методом інтегральне рівняння:

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Розв'язання. Застосуємо до даного рівняння перетворення Лапласа. Нехай

$f(t) \div F(p)$. Тоді $\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}$, $\int_0^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau = t^2 * f(t) \div \frac{2}{p^3} F(p)$. Рівняння

відносно зображення $F(p)$, що відповідає заданому інтегральному рівнянню, має вигляд:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^3} F(p).$$

Звідси знаходимо вираз для зображення $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Оригінал $f(t)$ розв'язку заданого інтегрального рівняння Вольтерра другого роду типу згортки знаходимо, записавши вираз для $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів та застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (див. підрозділ 2.1):

$$F(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{p^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2p+1}{p^2+p+1}.$$

Після елементарних перетворень за таблицею зображень при перетворенні Лапласа знаходимо шуканий розв'язок $f(t) = \frac{e^t}{6} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$.

Інтегральне рівняння Вольтерра першого роду типу згортки отримуємо з (3.4) при $a=0$. Воно має вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

У результаті застосування до цього рівняння перетворення Лапласа отримуємо операторне рівняння $\Phi(p) = \lambda \tilde{K}(p) F(p)$, розв'язком якого є функція

$$F(p) = \frac{1}{\lambda \tilde{K}(p)} \Phi(p). \quad (3.6)$$

Якщо вираз у правій частині (3.6) є зображенням, то розв'язком рівняння є оригінал функції $F(p)$. Слід зазначити, що у загальному випадку $\frac{1}{\tilde{K}}$ не є зображенням, для неї не виконується необхідна умова існування зображення – рівність $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{K}(p)} = 0$.

Приклад 3.8. Розв'язати інтегральне рівняння $\sin t = \int_0^t \cos(t-\tau) f(\tau) d\tau$.

Розв'язання. Тут $K(t) = \cos t$, $K(0) \neq 0$. Застосуємо перетворення Лапласа:

$$f(t) \div F(p), \int_0^t \cos(t-\tau) f(\tau) d\tau \div \frac{pF(p)}{p^2+1}, \sin t \div \frac{1}{p^2+1}.$$

Рівняння відносно зображення $F(p)$ шуканої функції $f(t)$ набуває вигляду: $\frac{1}{p^2+1} = \frac{pF(p)}{p^2+1}$. Звідси знаходимо, що $F(p) = \frac{1}{p}$. Отже, $f(t) = 1$.

Інтегральне рівняння (3.4) називають *особливим*, якщо його ядро $K(t)$ у одній або декількох точках проміжку інтегрування має нескінченний розрив,

або ж одна чи обидві межі інтегрування є нескінченними. Прикладом такого рівняння є окремий випадок рівняння Вольтерра першого роду – *інтегральне рівняння Абеля*. Це рівняння має вигляд:

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} = \varphi(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.7)$$

Ядро цього рівняння $K(t) = t^{-\alpha}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} K(t) = +\infty$. Зображення ядра $K(t)$ має вигляд: $t^{-\alpha} \div \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} = \tilde{K}(p)$.

Нехай ядро $K(t)$ інтегрального рівняння (3.4) при $t=0$ має нескінченний розрив і не є диференційовним у цій точці. Розглянемо згортку функцій

$$f(t) * 1 = \int_0^t f(\tau) d\tau = g(t).$$

За теоремою про інтегрування оригіналу $g(t) \div G(p) = \frac{F(p)}{p}$ і за формулою (3.6) для зображення розв'язку рівняння (3.5) маємо:

$$G(p) = \frac{1}{\lambda p \tilde{K}(p)} \Phi(p).$$

Для рівняння Абеля отримуємо:

$$G(p) = \frac{1}{p^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \Phi(p).$$

Оригінал зображення $G(p)$ має вигляд:

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * \varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \varphi(t-\tau) d\tau.$$

Тут ми використали відому формулу: $\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Вважаючи функцію $g(t)$ диференційовною, знаходимо розв'язок інтегрального рівняння Абеля у вигляді:

$$f(t) = g'(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \left(\int_0^t \tau^{\alpha-1} \varphi'(t-\tau) d\tau + \varphi(0) t^{\alpha-1} \right).$$

3.4 Розв'язання диференціально-різницевих рівнянь

У різноманітних науково-технічних задачах доводиться мати справу з диференціальними рівняннями, у які невідома функція входить при різних значеннях аргументу. Прикладом таких рівнянь є диференціальне рівняння n -го порядку:

$$f\left(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), x'(t), x'(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_n(t)), x^{(n)}(t - \tau_n(t))\right) = 0.$$

Означення 3.1. Диференціальні рівняння, до яких невідома функція входить при різних значеннях аргументу, називають *диференціальними рівняннями з відхиленням*. Якщо у диференціальному рівнянні з відхиленням всі відхилення $\tau_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, є сталими величинами, то таке рівняння називають *диференціально-різницеvim рівнянням*. Якщо у диференціально-різницеvому рівнянні всі відхилення $\tau_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, є додатними константами, а старша похідна невідомої функції входить у рівняння лише при одному значенні аргументу, не меншому, ніж всі інші аргументи функції та її похідних у даному рівнянні, то таке диференціально-різницеve рівняння називають *диференціальним рівнянням з запізненням*.

Прикладом диференціального рівняння з запізненням є рівняння

$$x''(t) = \varphi\left(t, x(t), x'(t), x(t - \tau_1), x'(t - \tau_2)\right),$$

де $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$.

Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням зі сталими коефіцієнтами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \quad (3.8)$$

де коефіцієнти a_k та відхилення τ_k є сталими величинами, $\tau_k \geq 0$, $k=1, 2, \dots, n$, $t \geq 0$. Шукана функція $x(t)$ повинна задовольняти заданим початковим умовам:

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (3.9)$$

Застосуємо до обох частин рівняння (3.8) перетворення Лапласа, використавши при цьому теорему 1.6 (теорему запізнення). Отримаємо алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$ шуканої функції $x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \quad (3.10)$$

де $f(t) \div F(p)$.

З рівності (3.10) визначаємо зображення $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}.$$

Знайшовши функцію $x(t)$, що є оригіналом для $X(p)$, отримуємо розв'язок задачі (3.8), (3.9).

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння $x''(t) - x(t-1) = t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Застосувавши до заданого рівняння перетворення Лапласа, отримаємо: $p^2 X(p) - X(p) e^{-p} = \frac{1}{p^2}$. Звідси знаходимо зображення розв'язку

рівняння: $X(p) = \frac{1}{(p^2 - e^{-p})p^2}$. Використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, запишемо отриманий вираз для $X(p)$ у наступному вигляді:

$$X(p) = \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p^2}} = \frac{1}{p^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{2n}}.$$

З урахуванням теореми запізнення, знаходимо оригінал $x(t)$ у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \eta(t-k),$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

Для диференціальних рівнянь з запізненням, що описують процеси з післядією, часто зустрічаються задачі у наступній постановці. Потрібно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння (3.8) для $t \geq t_0$, причому для всіх $t < t_0$, значення $x(t)$ у яких впливають на значення розв'язку при $t \geq t_0$, функція $x(t)$ є відомою. Наприклад, потрібно знайти неперервний розв'язок $x(t)$ при $t \geq t_0$ рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)),$$

де τ – задана додатня константа, якщо відомо, що $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі.

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння $x'(t) = x(t-1)$, якщо $x(t) = t$ при $-1 \leq t \leq 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді $x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p)$. З заданого рівняння випливає, що $pX(p) = \int_0^{+\infty} x(t-1)e^{-pt} dt$. Виконаємо у останньому інтегралі заміну змінної $\tau = t-1$. Тоді $d\tau = dt$, при $t=0$ $\tau = -1$, при $t \rightarrow +\infty$ $\tau \rightarrow +\infty$. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x(t-1)e^{-pt} dt &= \int_{-1}^{+\infty} x(\tau)e^{-p(\tau+1)} d\tau = e^{-p} \int_{-1}^0 x(\tau)e^{-p\tau} d\tau + e^{-p} \int_0^{+\infty} x(\tau)e^{-p\tau} d\tau = \\ &= e^{-p} \int_{-1}^0 \tau e^{-p\tau} d\tau + e^{-p} X(p). \end{aligned}$$

Застосувавши до останнього інтеграла формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int_{-1}^0 \tau e^{-p\tau} d\tau = \left\| \begin{array}{l} u = \tau, dv = e^{-p\tau} d\tau, \\ du = d\tau, v = \int dv = -\frac{e^{-p\tau}}{p} \end{array} \right\| = -\frac{\tau e^{-p\tau}}{p} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{p} \int_{-1}^0 e^{-p\tau} d\tau = -\frac{e^p}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p^2} \Big|_{-1}^0 = -\frac{e^p}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^p}{p^2}.$$

Отже, $pX(p) = \frac{1-e^{-p}}{p^2} - \frac{1}{p} + e^{-p}X(p)$. З отриманого рівняння відносно зображення $X(p)$ знаходимо:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p^2(p-e^{-p})} - \frac{1}{p(p-e^{-p})} - \frac{e^{-p}}{p^2(p-e^{-p})} = \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^3} \right) \times \\ &\times \frac{1}{1-\frac{e^{-p}}{p}} = \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^3} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{n+3}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)p}}{p^{n+3}} \div \\ &\div \left\| \frac{1}{p^k} \div \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p) \right\| \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+2} \cdot \eta(t-n)}{(n+2)!} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+1} \cdot \eta(t-n)}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n-1)^{n+2} \cdot \eta(t-n-1)}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали розв'язок даної задачі:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+2} \cdot \eta(t-n)}{(n+2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+1} \cdot \eta(t-n)}{(n+1)!} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n-1)^{n+2} \cdot \eta(t-n-1)}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

3.5 Розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь

Розглянемо застосування операційного методу до розв'язання рівнянь, що містять невідому функцію $x(t)$ та її похідні $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$ і при цьому містять інтеграл, до яких входять $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$.

Рівняння виду

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) + \sum_{m=0}^n \int_0^t k_m(t-\tau) x^{(m)}(\tau) d\tau = f(t), \quad (3.11)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – задані числа, ядра $k_m(t)$ та $f(t)$ – задані функції, $x(t)$ – шукана функція, є інтегро-диференціальним рівнянням.

Інтегро-диференціальне рівняння (3.11) можна розв'язати, застосувавши до нього перетворення Лапласа. Нехай $x(t) \div X(p)$, $k_m(t) \div K_m(p)$. Оскільки за теоремою про диференціювання оригіналу

$$x^{(m)}(t) \div p^m X(p) - p^{m-1}x(0) - p^{m-2}x'(0) - \dots - x^{(m-1)}(0) = \Phi(p),$$

то за теоремою множення зображень маємо:

$$\int_0^t k_m(t-\tau)x^{(m)}(\tau)d\tau \div K_m(p)\Phi(p).$$

Таким чином, застосування перетворення Лапласа дозволяє звести розв'язання інтегро-диференціального рівняння (3.11) відносно оригіналу $x(t)$ до розв'язання алгебраїчного рівняння відносно зображення $X(p)$.

Приклад 3.10. Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння:

$$x''(t) + \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot (x''(\tau) + x(\tau))d\tau = 2\cos t,$$

якщо $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді $x''(t) \div p^2X(p)$, $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}$,

$\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$. За теоремою множення зображень отримуємо:

$$\int_0^t \sin(t-\tau) \cdot (x''(\tau) + x(\tau))d\tau \div \frac{1}{p^2+1}(p^2X(p) + X(p)).$$

Після застосування перетворення Лапласа отримуємо рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^2X + \frac{1}{p^2+1} \cdot (p^2+1)X = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Розв'язавши його, знаходимо:

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

За таблицею перетворення Лапласа знаходимо оригінал $X(p) \div x(t) = t \sin t$.

3.6 Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно невідомої функції $u(x, t)$:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.12)$$

де $a, b, c, a_1, b_1 \in$ неперервними функціями, що залежать лише від змінної x , $x \in [0; l]$. Будемо вважати, що $a > 0$. Розглянемо два випадки: 1) $a_1 < 0$ – гіперболічний випадок; 2) $a_1 \equiv 0, b_1 < 0$ – параболічний випадок.

Потрібно знайти розв'язок $u(x, t)$ диференціального рівняння (3.12) для $t \geq 0$ та $0 \leq x \leq l$, що задовольняє початкові умови $u(x, 0) = \varphi(x)$ для параболічного випадку або $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$ для гіперболічного випадку, а також крайовим умовам $u(0, t) = f(t)$, $\alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t)$, де α, β, γ – задані сталі величини.

Будемо вважати, що u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є функціями-оригіналами змінної t . Застосуємо до рівняння (3.12) перетворення Лапласа за цією змінною. Нехай $U(p, x) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt$. Тоді отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

За теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU - u(x, 0) = pU - \varphi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Будемо вважати також, що $f(t)$ є оригіналом і при цьому $f(t) \div F(p)$. Тоді з крайових умов маємо:

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi) \right) \Big|_{x=l} = \gamma U|_{x=l}. \quad (3.13)$$

Застосування операційного методу дозволяє звести розв'язання нестационарної задачі для рівняння (3.12) з частинними похідними до розв'язання звичайного диференціального рівняння

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \quad (3.14)$$

де $A = c + a_1 p^2 + b_1 p$, $B = -a_1 p\varphi - a_1 \psi - b_1 \varphi$, при крайових умовах (3.13).

Приклад 3.11. Температура $u(x, t)$ у тонкому стержні задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a^2 = \text{const}$. Знайти розподіл температур у півпросторі $x > 0$, якщо є відомим закон зміни температури його лівого кінця, а початкова температура стержня дорівнює нулю: $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} = f(t)$.

Розв'язання. Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа за змінною t . Отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення

$U(x, p): pU = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}$. Знайдемо його розв'язок з урахуванням умови $U|_{x=0} = F(p)$. Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{px}}{a}}.$$

Згідно з умовою задачі функції u та U повинні бути обмеженими при $x \rightarrow +\infty$, тому $C_2 = 0$, а загальний розв'язок U отриманого рівняння набуває

вигляду: $U(x, p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}$. Для знаходження сталої C_1 використаємо умову $U|_{x=0} = F(p)$. Звідси знаходимо, що $C_1 = F(p)$. Отже, зображення розв'язку

вихідного рівняння має вигляд: $U(x, p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}$.

Для знаходження оригіналу розв'язку розглянемо спочатку окремий

випадок $f(t) = 1$. Тоді $F(p) = \frac{1}{p}$, $U_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{p}$. Оригіналом цієї функції є

$$u_1(x, t) = \text{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Для довільної $f(t) \div F(p)$ використаємо формулу (3.3). Оскільки для нашого випадку у цій формулі

$$x_1 = \text{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad x_1'(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t}^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad x_1(0) = 0,$$

то, підставивши ці вирази у (3.3), отримуємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Приклад 3.12. Один кінець стержня, довжина якого дорівнює l , закріплений, на інший кінець діє сила $f(t) = A \sin \omega t$, спрямована вздовж осі стержня. Знайти переміщення $u(x, t)$ при повздовжніх коливаннях цього стержня.

Розв'язання. Математична модель даної задачі – це гіперболічне рівняння відносно шуканої функції $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де a – коефіцієнт, що залежить від матеріалу стержня. Для цього рівняння маємо початкові умови: $u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. Крайові умови для функції $u(x,t)$

мають вигляд: $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t$, E – модуль пружності стержня.

Застосуємо до диференціального рівняння, що описує коливання стержня, перетворення Лапласа. Нехай $u(x,t) \div U(x,p)$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \div p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2}.$$

Отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x,p)$:

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2} U(x,p),$$

крайові умови для якого мають вигляд: $U(0,p) = 0$, $\frac{dU(l,p)}{dx} = \frac{A}{E} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Інтегруючи це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, отримуємо:

$$U(x,p) = C_1 \operatorname{ch} \frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{px}{a}.$$

Використовуючи крайові умови, знаходимо значення сталих інтегрування C_1 та C_2 :

$$U(0,p) = C_1 = 0, \quad \frac{dU(l,p)}{dx} = \frac{p}{a} C_2 \operatorname{ch} \frac{pl}{a} = \frac{A}{E} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$C_2 = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{1}{p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}}.$$

Таким чином, отримали зображення шуканого розв'язку $u(x,t)$ у вигляді:

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{a}}{p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}}.$$

Позначимо $A_1(p) = \operatorname{sh} \frac{p}{a} x$, $A_2(p) = p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l$. Тоді зображення $U(x,p)$ набуває вигляду:

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{A_1(p)}{A_2(p)}.$$

Знайдемо особливі точки для $U(x, p)$. Для цього розв'яжемо рівняння $A_2(p) = 0$ або $p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l = 0$. Звідси $p = 0$, $p = \pm i\omega$, $\operatorname{ch} \frac{pl}{a} = 0$.

Враховуючи, що $\operatorname{ch} \frac{pl}{a} = \cos \frac{ipl}{a}$, маємо:

$$\cos i \frac{pl}{a} = 0 \Rightarrow i \frac{pl}{a} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow p_k = i\omega_k,$$

$$\text{де } \omega_k = \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2} \right).$$

Функція $U(x, p)$ має прості полюси $p = 0$, $p = \pm i\omega$, $p_k = i\omega_k$ (далі вважатимемо, що $\omega \neq \omega_k$). Оригінал $u(x, t)$ для знайденого зображення $U(x, p)$ знаходимо за другою теоремою розвинення (теорема 2.3):

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} \left[\left(\frac{A_1(p)}{A_2(p)} e^{pt} \right) \Big|_{p=0} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A_1(i\omega)}{A_2'(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_1(i\omega_k)}{A_2'(i\omega_k)} e^{i\omega_k t} \right) \right].$$

Оскільки

$$A_2'(p) = (p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{lp}{a} + 2p^2 \operatorname{ch} \frac{lp}{a} + \frac{l}{a} p (p^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{lp}{a},$$

то, підставляючи у вираз для $u(x, t)$ значення функцій $A_1(p)$ та $A_2'(p)$, отримуємо:

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot 2 \operatorname{Re} \left[\frac{i \sin \frac{\omega x}{a}}{-2\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \sin \frac{\omega_k}{a} x e^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a} i\omega_k (\omega^2 - \omega_k^2) i \sin \frac{l}{a} \omega_k} \right].$$

Знайшовши дійсну частину виразу у дужках, остаточно отримуємо шуканий розв'язок даної задачі у вигляді:

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} \left[\frac{\sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} + \frac{2a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x \sin \omega_k t}{\omega_k (\omega^2 - \omega_k^2)} \right].$$

3.7 Підсумовування рядів

Знайдемо суму S числового ряду $\sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$. Нехай існує така функція $f(t)$, що $f(t) \rightarrow F(p)$. Тоді $F(n) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$. Шукану суму ряду можна записати у вигляді: $S = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt$. Оскільки ряд $\sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$ при $t > 0$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $(\pm 1)^n e^{-t}$, то отримуємо:

$$s = (\pm 1)^m \int_0^{+\infty} \frac{f(t) e^{-mt}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (3.15)$$

Приклад 3.13. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$. Її особливими точками є прості полюси $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, $p_4 = -3$. За другою теоремою розвинення знаходимо:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res} \left(F(p_k) e^{p_k t} \right) = \sum_k \frac{(p_k^3 + 3p_k + 3) e^{p_k t}}{(p(p+1)(p+2)(p+3))' \Big|_{p=p_k}}.$$

Після відповідних обчислень у правій частині останньої рівності отримуємо:

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}).$$

Для знаходження суми заданого ряду застосуємо формулу (3.17), згідно з якою знаходимо:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}) e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \frac{1}{2} \left(-e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-3t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3}.$$

Розглянемо збіжний функціональний ряд $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, $a \leq t \leq b$. Нехай функції $f_n(t)$ є оригіналами і при цьому $f_n(t) \div F_n(p)$. Будемо вважати, що ряд $S(p) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ є збіжним і при $p \rightarrow \infty$ $S \rightarrow 0$, а $S(p)$ є аналітичною функцією в околі нескінченно віддаленої точки $p = \infty$. Тоді $s(t) \div S(p)$. Якщо

знаходження суми $S(p)$ є простішою задачею у порівнянні з обчисленням $s(t)$, то $s(t)$ можна знайти за допомогою першої теореми розвинення як оригінал для зображення $S(p)$.

Приклад 3.14. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n}(t)$.

Розв'язання. У підпункті 1.6 було отримано зображення функцій Бесселя n -го порядку $J_n(t) \div \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$. Отже, $J_{2n}(t) \div \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}}$. Знайдемо суму ряду, що є зображенням заданого ряду.

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{p^2+1}-p)^{2n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \cdot \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^2}{1+(\sqrt{p^2+1}-p)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $J_0(t) \div \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}$, отримуємо:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n}(t) = \frac{1}{2} (J_0(t) - \cos t).$$

Розглянемо збіжний у деякому інтервалі $t \in (a; b)$ функціональний ряд $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \varphi_n(t)$. Якщо члени послідовності $\varphi_n(t)$ є коефіцієнтами розвинення функції $\Phi(x, t)$ у збіжний при $|x| < 1$ степеневий ряд $\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) x^n$, то функцію $\Phi(x, t)$ називають *твірною функцією* послідовності $\varphi_n(t)$.

Нехай $f(t) \div F(p)$, тоді при $p = n$ маємо:

$$F(n) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt.$$

Підставляючи цей вираз для $F(n)$ у заданий функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \varphi_n(t)$, отримуємо формулу для суми цього ряду:

$$s(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) e^{-nx} \right) dx.$$

З урахуванням розвинення у степеневий ряд для твірної функції $\Phi(x, t)$ цю рівність можна записати у вигляді:

$$s(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \Phi(e^{-x}, t) dx. \quad (3.16)$$

Цю формулу можна використати для знаходження сум тригонометричних рядів. Для цього потрібно визначити твірну функцію для послідовностей виду

$$(\pm 1)^n \sin(nk + m)t, (\pm 1)^n \cos(nk + m)t.$$

Використаємо розвинення у степеневий ряд $\frac{\pm z}{1 \mp z} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^n z^n$, де $z = xe^{ikt}$,

$0 < x < 1$. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{xe^{i(k+m)t}}{1 \mp xe^{ikt}} &= \frac{x \cos(k+m)t \mp x^2 \cos mt + i(x \sin(k+m)t \mp x^2 \sin mt)}{1 \mp 2x \cos kt + x^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} x^n e^{i(nk+m)t}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо шукані твірні функції:

$$\Phi_{k,m}(x, t) = \frac{x \cos(k+m)t \mp x^2 \cos mt}{1 \mp 2x \cos kt + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \cos(nk + m)t \cdot x^n, \quad (3.17)$$

$$\Phi_{k,m}(x, t) = \frac{x \sin(k+m)t \mp x^2 \sin mt}{1 \mp 2x \cos kt + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \sin(nk + m)t \cdot x^n. \quad (3.18)$$

Приклад 3.15. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{(2n-1)(2n+1)}$.

Розв'язання. Маємо $F(p) = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} \div \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{x}{2} = f(x)$. Використаємо

твірну функцію (3.18). Для заданого ряду вона має вигляд:

$$\Phi_{2,0}(x, t) = \frac{x \sin 2t}{1 - 2x \cos 2t + x^2}.$$

За формулою (3.16) знаходимо:

$$s(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \operatorname{sh} \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{-x} \sin 2t}{1 - 2e^{-x} \cos 2t + e^{-2x}} dx.$$

Виконаємо заміну змінної $e^{-\frac{x}{2}} = u$. Тоді $-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = du$. Отримуємо інтеграл:

$$s(t) = -\frac{\sin 2t}{2} \int_0^1 \frac{u^2 - 1}{u^4 - 2u^2 \cos 2t + 1} du = -\frac{\sin 2t}{2} \int_0^1 \frac{d\left(u + \frac{1}{u}\right)}{\left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 4\cos^2 t} =$$

$$= -\frac{\sin t}{4} \ln \frac{u + \frac{1}{u} - 2\cos t}{u + \frac{1}{u} + 2\cos t} \Big|_0^1 = \frac{\sin t}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|.$$

Таким чином, сумою заданого ряду є функція $s(t) = \frac{\sin t}{2} \cdot \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|$.

Запитання та завдання для самоперевірки

- Для розв'язання яких диференціальних рівнянь доцільно застосовувати операційний метод?
- Як можна розв'язати диференціальне рівняння за допомогою формули Дюамеля?
- Надайте означення диференціального рівняння з запізненням.
- Які інтегральні рівняння доцільно розв'язувати операційним методом?
- Які властивості перетворення Лапласа застосовуються при розв'язанні диференціально-різницевого рівнянь?
- Розв'яжіть наступні задачі Коші:
 - $x^{(4)} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;
 - $x''' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$;
 - $x'' + x = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$.
- Знайдіть розв'язок диференціального рівняння з періодичною правою частиною: $x'' + 2x' + x = f(t)$, $f(t) = f(t+4) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 2-t, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$.
- За допомогою формули Дюамеля розв'яжіть задачу Коші: $x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
- Знайдіть загальний розв'язок рівняння $tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0$.
- Розв'яжіть систему, застосовуючи операційний метод: $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t. \end{cases}$
- Розв'яжіть інтегральні рівняння:
 - $x(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau$;
 - $1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) x(\tau) d\tau$.
- Розв'яжіть інтегро-диференціальні рівняння:

$$\text{а) } x'(t) - \int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = \cos t, \quad x(0) = 1,$$

$$\text{б) } x''(t) - 4 \int_0^t e^{-(t-\tau)}(x'(\tau) + x(\tau))d\tau, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 12.$$

13. Розв'яжіть диференціальні рівняння з запізненням:

$$\text{а) } x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$\text{б) } x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

14. Розв'яжіть диференціальне рівняння з запізненням $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, якщо

на початковій множині $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ задана початкова функція $\varphi(t) = \cos t$.

4. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

4.1 Поняття дискретного перетворення Лапласа

Означення 4.1. Функцію $f(n) = f_n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають *решітчастою функцією*. Функції f_n можуть відповідати різні функції $f(t)$, такі, що $f_n = f(t)$ при $t = n$. Таку функцію $f(t)$ називають *огинаючою* для відповідної решітчастої функції f_n . До решітчастих функцій можна застосовувати *дискретне перетворення Лапласа* або *D-перетворення*.

Означення 4.2. Решітчасту функцію f_n , огинаючою якої є оригінал $f(t)$ перетворення Лапласа, називають *оригіналом D-перетворення*.

Означення 4.3. Функцію $F^*(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, що визначається рядом

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}, \quad (4.1)$$

називають *зображенням оригінала f_n D-перетворення*, а ряд у правій частині (4.1) – *дискретним перетворенням (D-перетворенням) решітчастої функції f_n* .

Відповідність між оригіналом та зображенням при D-перетворенні позначатимемо: $f_n \div F^*(p)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. Якщо ряд (4.1) є збіжним при $\operatorname{Re} p = s_1$, то він збігається абсолютно та рівномірно при $\operatorname{Re} p > s_1$.

Доведення. З необхідної умови збіжності ряду випливає, що для всіх p , таких, що $\operatorname{Re} p = s_1$, $f_n e^{-pn} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді існує таке $M > 0$, що при достатньо великих n $|f_n e^{-pn}| < M$. Тоді при $\operatorname{Re} p > s_1$ $|f_n e^{-pn}| < M e^{-(s-s_1)n}$. Права

частина цієї нерівності при $s - s_1 > 0$ є загальним членом збіжного ряду для нескінченно спадної геометричної прогресії. Отже, за відомою з курсу математичного аналізу ознакою Вейерштрасса ряд (4.1) є абсолютно та рівномірно збіжним при $\operatorname{Re} p > s_1$. Теорему доведено.

Аналогічним чином можна довести, що із розбіжності ряду (4.1) при $\operatorname{Re} p = s_1$ випливає його розбіжність при $\operatorname{Re} p < s_1$.

Означення 4.4. Число s_c , для якого при $\operatorname{Re} p > s_c$ ряд (4.1) збіжний, а при $\operatorname{Re} p < s_c$ є розбіжним, називають *абсцисою збіжності* цього ряду.

Наведемо теорему, яка визначає умови існування зображення при дискретному перетворенні Лапласа.

Теорема 4.2. Якщо функція f_n є оригіналом з показником зростання s_0 , то її зображення $F^*(p)$ існує у області $\operatorname{Re} p > s_0$ і є у цій області аналітичною функцією.

Доведення. Маємо $|f_n| < Me^{s_0 n}$. Абсциса збіжності s_c є нижньою межею значень s_0 , тобто $s_c < s_0$, тому ряд (4.1) є збіжним при $\operatorname{Re} p > s_0$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} (-nf_n)$, що отриманий шляхом диференціювання ряду (4.1), є рівномірно збіжним при $\operatorname{Re} p > s_0$, оскільки $|-nf_n e^{-pn}| < nMe^{-(s-s_0)n}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} nMe^{-(s-s_0)n}$ є збіжним при $s - s_0 > 0$. Тому, за властивістю рівномірно збіжного ряду, ряд $F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}$ можна почленно диференціювати і функція $F^*(p)$ є аналітичною у області $\operatorname{Re} p > s_0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що функція $F^*(p)$ залежить від періодичної показникової функції комплексної змінної e^p , тому $F^*(p) = F^*(p + 2\pi i)$, тобто $F^*(p)$ є періодичною з періодом $2\pi i$. Тому далі будемо розглядати $F^*(p)$ лише у смугі $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$.

У формулі (4.1) позначимо $e^p = z$. Тоді $F^*(p) = F(e^p) = F(z)$. Кожному оригіналу f_n можна поставити у відповідність зображення $F(z)$, що визначається рядом:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (4.2)$$

Означення 4.5. Відповідність $f_n \div F(z)$, де $F(z)$ визначається як ряд (4.2), називають *перетворенням Лорана* або *z-перетворенням* решітчастої функції f_n .

Функція $z = e^p$ взаємно однозначно відображає смугу $-\pi \leq \text{Im } p \leq \pi$ на всю комплексну площину z з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі. При цьому область $\text{Re } p > s_0$, $-\pi \leq \text{Im } p \leq \pi$ існування функції $F(z)$ взаємно однозначно відображається в область $|z| > e^{s_0}$.

Знайдемо зображення деяких решітчастих функцій.

Приклад 4.1. Знайти зображення при дискретному перетворенні Лапласа (D -перетворенні) одиничної функції $\eta_n = \begin{cases} 1, n \geq 0, \\ 0, n < 0. \end{cases}$

Розв'язання. За формулою (4.1) маємо: $\eta_n \div \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} = \frac{1}{1 - e^{-p}} = \frac{e^p}{e^p - 1}$,

$\text{Re } p > 0$. Тут для підсумовування ряду ми використали формулу нескінченно спадної геометричної прогресії.

Приклад 4.2. Знайти D -перетворення решітчастої функції $f_n = (-1)^n$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (4.1) та формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії, отримуємо:

$$(-1)^n \div \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-pn} = \frac{1}{1 + e^{-p}} = \frac{e^p}{e^p + 1}, \text{Re } p > 0.$$

Приклад 4.3. Знайти D -перетворення решітчастої функції $f_n = e^{\alpha n}$.

Розв'язання. За означенням D -перетворення маємо:

$$f_n \div \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(p-\alpha)n} = \frac{1}{1 - e^{-(p-\alpha)}} = \frac{e^p}{e^p - e^{\alpha}}, \text{Re}(p - \alpha) > 0.$$

Відомо, що коли нескінченно віддалена точка $p = \infty$ є правильною особливою точкою функції $F(p)$, то у околі нескінченно віддаленої точки розвинення $F(p)$ у ряд Лорана містить лише правильну частину:

$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} p^{-n}$, коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулою:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(p) p^{n-1} dp,$$

де γ – коло достатньо великого радіусу з центром у початку координат.

Якщо у останній формулі прийняти $c_{-n} = f_n$, то отримуємо формулу обернення z -перетворення:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad (4.3)$$

де γ – контур інтегрування у напрямку проти годинникової стрілки, що являє собою довільне коло з центром у початку координат, що розташоване у області збіжності функції $F(z)$.

Підставимо у (4.3) $z = e^p$. Тоді коло γ з формули (4.3) відобразиться на відрізок $[s - i\pi; s + i\pi]$, $s > s_0$, площини p . Отримуємо формулу обернення D – перетворення:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\pi}^{s+i\pi} F^*(p) \cdot e^{pn} dp. \quad (4.4)$$

Обернення z -перетворення та D -перетворення здійснюється за формулами (4.3) та (4.4) однозначно.

4.2 Властивості дискретного перетворення Лапласа

Властивості D -перетворення аналогічні властивостям перетворення Лапласа функцій-оригіналів неперервного аргументу. Їх доведення ґрунтується на означенні дискретного перетворення Лапласа та властивостях збіжних рядів. Наведемо тут ці властивості.

Теорема 4.3. (Теорема лінійності). Якщо $f_{1n} \div F_1^*(p)$, $f_{2n} \div F_2^*(p), \dots$, $f_{kn} \div F_k^*(p)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – задані комплексні числа, то

$$\sum_{m=1}^k \alpha_m f_{mn} \div \sum_{m=1}^k \alpha_m F_m^*(p).$$

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

Приклад 4.4. Знайти зображення функції $f_n = \sin \omega n$.

Розв'язання. Запишемо $f_n = \sin \omega n$ у вигляді лінійної комбінації експоненціальних функцій: $\sin \omega n = \frac{1}{2i}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})$. Оскільки $e^{i\omega n} \div \frac{e^p}{e^p - e^{i\omega}}$, $e^{-i\omega n} \div \frac{e^p}{e^p - e^{-i\omega}}$, то $\sin \omega n \div \frac{1}{2i} \left(\frac{e^p}{e^p - e^{i\omega}} - \frac{e^p}{e^p - e^{-i\omega}} \right) = \frac{e^p \sin \omega}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}$.

Аналогічно можна знайти наступні зображення: $\text{sh } \omega n \div \frac{e^p \text{sh } \omega}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } \omega + 1}$, $\cos \omega n \div \frac{e^p (e^p - \cos \omega)}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}$, $\text{ch } \omega n \div \frac{e^p (e^p - \text{ch } \omega)}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } \omega + 1}$.

Теорема 4.4. (Теорема запізнення). Якщо $f_n \div F^*(p)$ і $k > 0$ – ціле число, причому $k < n$, то $f_{n-k} \div e^{-pk} F^*(p)$.

Приклад 4.5. Знайти зображення функції $f_n = e^{\alpha(n-1)}$.

Розв'язання. Оскільки $e^{\alpha n} \div \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$, то за теоремою 4.4 при $k=1$ отримуємо: $e^{\alpha(n-1)} \div e^{-p} \cdot \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} = \frac{1}{e^p - e^\alpha}$.

Теорема 4.5. (Теорема випередження). Якщо $f_n \div F^*(p)$ і $k > 0$ – ціле число, то $f_{n+k} \div e^{pk} \left(F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-pm} f_m \right)$.

Приклад 4.6. Знайти зображення функції $f_n = \sin \alpha(n+1)$.

Розв'язання. Оскільки $\sin \alpha n \div \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$ (приклад 4.4), то згідно з теоремою випередження при $k=1$ отримуємо:

$$\sin \alpha (n+1) \div e^p \cdot \left(\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} - e^{-p \cdot 0} \sin(0 \cdot \alpha) \right) = \frac{e^{2p} \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Теорема 4.6. (Теорема зміщення). Якщо $f_n \div F^*(p)$ і p_0 – задане комплексне число, то $e^{\pm p_0 n} f_n \div F^*(p \mp p_0)$.

Приклад 4.7. Знайти зображення функції $f_n = e^{in} \sin \alpha n$.

Розв'язання. Використаємо зображення функції $\sin \alpha n$:

$$\sin \alpha n \div \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Застосувавши теорему 4.6 при $p_0 = i$, отримаємо:

$$\begin{aligned} e^{in} \sin \alpha n \div \frac{e^{p-i} \sin \alpha}{e^{2(p-i)} - 2e^{p-i} \cos \alpha + 1} &= \\ &= \frac{e^p \sin \alpha (\cos 1 - i \sin 1)}{e^{2p} (\cos 2 - i \sin 2) - 2e^p (\cos 1 - i \sin 1) \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Означення 4.6. Вираз $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ називають *різницею* (скінченною різницею) *першого порядку* функції f_n . Різниця k -го порядку визначається за формулою:

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

Різниці $\Delta^k f_n$ можна виразити через значення f_{n+m} , де $m=0, 1, \dots, k$.
Маємо:

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n.$$

Аналогічним способом знаходимо:

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n.$$

Для різниці k -го порядку виконується рівність:

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \quad (4.5)$$

де $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

У свою чергу, f_{n+k} можна виразити через скінченні різниці за допомогою формули:

$$f_{n+k} = \sum_{m=0}^k C_k^m \Delta^m f_n. \quad (4.6)$$

Теорема 4.7. (Теорема про різницю оригінала). Якщо $f_n \div F^*(p)$, то

$$\Delta^k f_n \div (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{m=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-1-m} \Delta^m f_0. \quad (4.7)$$

Ця теорема застосовується при розв'язанні різницевого рівняння.

Наведемо ще деякі властивості дискретного перетворення Лапласа, що використовуються при знаходженні зображень решітчастих функцій, а також знаходженні оригіналів за відомими зображеннями.

Теорема 4.8. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f_n \div F^*(p)$, то $\frac{dF^*}{dp} \div -n \cdot f_n$, $\frac{d^2 F^*}{dp^2} \div n^2 \cdot f_n$, ..., $\frac{d^k F^*}{dp^k} \div (-1)^k n^k \cdot f_n$.

Приклад 4.8. Знайти зображення функції $f_n = n^3$.

Розв'язання. Оскільки $1 \div \frac{e^p}{e^p - 1}$, то за теоремою про диференціювання зображення послідовно отримуємо:

$$n \div -\left(\frac{e^p}{e^p - 1}\right)' = -\frac{e^p(e^p - 1) - e^{2p}}{(e^p - 1)^2} = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2},$$

$$n^2 \div \left(\frac{e^p}{e^p - 1}\right)'' = \left(-\frac{e^p}{(e^p - 1)^2}\right)' = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3},$$

$$n^3 \div -\left(\frac{e^p}{e^p - 1}\right)''' = -\left(\frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}\right)' = \frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^4}.$$

Приклад 4.9. Знайти зображення узагальненої степеневі функції $n^{(m)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$.

Розв'язання. Оскільки $n \div \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}$, то за теоремою запізнення отримуємо:

$n-1 \div \frac{1}{(e^p - 1)^2}$. Послідовно застосовуючи цю теорему, а також теорему про

диференціювання зображення, відповідно знаходимо, що $n(n-1) \div 2! \frac{e^p}{(e^p - 1)^3}$,

$(n-1)(n-2) \div 2! \frac{1}{(e^p - 1)^2}$. Далі знаходимо:

$$n(n-1)(n-2) \div 3! \frac{e^p}{(e^p - 1)^4}, \quad (n-1)(n-2)(n-3) \div 3! \frac{1}{(e^p - 1)^4}.$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що виконується співвідношення:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = n^{(m)} \div \frac{m!e^p}{(e^p - 1)^{m+1}}.$$

Теорема 4.9. (Теорема про суму оригінала). Якщо $f_n \div F^*(p)$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \div \frac{F^*(p)}{e^p - 1}.$$

Приклад 4.10. Знайти суму $\sum_{k=1}^n k^3$.

Розв'язання. Застосуємо результат прикладу 4.8 та теорему про суму оригінала. Оскільки $n^3 \div \frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^4}$, то за теоремою 4.9 отримуємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 \div \frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^5}.$$

Запишемо вираз у правій частині даного співвідношення у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^5} &= e^{2p} \frac{e^p}{(e^p - 1)^5} + 4e^p \frac{e^p}{(e^p - 1)^5} + \frac{e^p}{(e^p - 1)^5} \div \frac{(n+2)^{(4)}}{4!} + \\ &+ 4 \frac{(n+1)^{(4)}}{4!} + \frac{n^{(4)}}{4!} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали, що $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$. Замінивши n на $n+1$,

знаходимо, що $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Теорема 4.10. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f_n \div F^*(p)$, $f_0 = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_\alpha}{\alpha} = 0$, то $\int_p^\infty F^*(q) dq \div \frac{f_n}{n}$. Якщо $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_\alpha}{\alpha} = a$, то

$$a + \int_p^\infty F^*(q) dq \div \frac{f_n}{n}.$$

Приклад 4.11. Знайти зображення для функції $f_n = \frac{\sin \beta n}{n}$.

Розв'язання. Використаємо теорему про інтегрування зображення. Оскільки $\sin \beta n \div \frac{e^p \sin \beta}{e^{2p} - 2e^p \cos \beta + 1}$ і $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta \alpha)}{\alpha} = \beta$, то за теоремою 4.10 маємо:

$$\frac{\sin \beta n}{n} \div \beta + \int_p^\infty \frac{e^q \sin \beta}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} dq = \beta + \operatorname{arctg} \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} \Big|_p^\infty =$$

$$= \beta + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \beta}{\sin \beta}.$$

4.3 Застосування формули обернення для дискретного перетворення Лапласа

Решітчасту функцію, що є оригіналом f_n для зображення $F^*(p)$, знаходять за формулами обернення (4.3) або (4.4). Контурні інтеграли у цих формулах можна обчислити за допомогою теорії лишків. Аналогічно до формули Рімана-Мелліна для перетворення Лапласа неперервних функцій, для оберненого z -перетворення або D -перетворення маємо:

$$f_n = \sum_k \operatorname{Res} \left[F(z) z^{n-1} \right] \Big|_{z=z_k}, \quad f_n = \sum_k \operatorname{Res} \left[F^*(p) e^{np} \right] \Big|_{p=p_k}, \quad z_k = e^{p_k}.$$

Нехай $F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$ – правильний раціональний дробовий вираз і при

цьому $F(\infty) = f_0 = 0$. Розглянемо наступні випадки.

1. Зображення $F(z)$ має прості полюси z_k , тоді формула обернення набуває вигляду:

$$f_n = \sum_k \frac{F_1(z_k)}{F_2'(z_k)} z_k^{n-1}. \quad (4.8)$$

2. Функція $F(z)$ має полюси z_k кратності m_k . Тоді маємо:

$$f_n = \sum_k \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \left[F(z) (z - z_k)^{m_k} z^{n-1} \right] \Big|_{z=z_k}^{(m_k-1)}. \quad (4.9)$$

Оригінал f_n можна знайти також безпосередньо, використовуючи розвинення дробу $F(z)$ на елементарні дроби, властивості z -перетворення та зображення основних елементарних функцій, наведені у додатку Б. Для оберненого D -перетворення слід враховувати, що при розвиненні зображення $F^*(p)$ можна отримати наступні елементарні дроби (наведемо також їх оригінали).

1. $\frac{A}{e^p - e^{p_k}} \div A e^{p_k(n-1)}$.
2. $\frac{A}{(e^p - e^{p_k})^m} \div A e^{p_k(n-m)} \frac{(n-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}$

Розглянемо приклади знаходження оригіналів при дискретному перетворенні Лапласа за їх заданими зображеннями.

Приклад 4.12. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \frac{e^p}{e^{4p} - 16}$.

Розв'язання. Нехай $e^p = z$. Отримуємо функцію комплексної змінної $F(z) = \frac{z}{z^4 - 16}$, особливими точками якої є прості полюси $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_{3,4} = \pm 2i$. За формулою (4.8) маємо:

$$f_n = \sum_{k=1}^4 \frac{z_k}{4z_k^3} \cdot z_k^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 z_k^{n-3}.$$

Підставляючи особливі точки функції $F(z)$ у останню суму, знаходимо:

$$f_n = \frac{1}{4} \left(2^{n-3} + (-2)^{n-3} + (2i)^{n-3} + (-2i)^{n-3} \right) = 2^{n-5} \left(1 + (-1)^{n-1} + i(i^n - (-i)^n) \right).$$

Оскільки $i(i^n - (-i)^n) = 2 \cdot \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = 2 \sin \frac{n\pi}{2}$, то вираз для f_n можна записати у наступному вигляді:

$$f_n = 2^{n-5} \left(1 + (-1)^{n-1} - 2 \sin \frac{n\pi}{2} \right).$$

Приклад 4.13. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 2)(e^p - 1)^2}$.

Розв'язання. Позначимо $e^p = z$. Функція $F(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ має простий полюс $z=2$ та полюс другого порядку $z=1$. Використовуючи формулу (4.9), отримуємо:

$$f_n = 2^n + \left(\frac{z^n}{z-2} \right)' \Big|_{z=1} = 2^n - 1 - n.$$

Приклад 4.14. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \frac{e^p}{3e^{2p} - 6ae^p + 4a^2}$.

Розв'язання. Для знаходження оригіналу f_n використаємо зображення функції $\sin \omega t$ та теорему зміщення (теорема 4.6). Запишемо задане зображення у наступному вигляді:

$$F^*(p) = \frac{1}{a\sqrt{3}} \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} e^p \cdot \frac{1}{2}}{e^{2p} - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} e^p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}} \right)^2}.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \omega = \cos \frac{\pi}{6}$, то, вибравши $\omega = \frac{\pi}{6}$, отримуємо:

$$F^*(p) \doteq \frac{1}{a\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^n \sin \frac{\pi n}{6}.$$

4.4 Розв'язання різницевих рівнянь

Означення 4.7. Різницевим рівнянням k -го порядку називають рівняння

$$F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0, \quad (4.10)$$

де $x_n = x(n)$ – шукана решітчаста функція.

Різницеве рівняння (4.10) можна записати також у вигляді:

$$F_1(n, x_n, \Delta x_n, \dots, \Delta^k x_n) = 0. \quad (4.11)$$

Тут $\Delta x_n, \dots, \Delta^k x_n$ – скінченні різниці від першого до k -го порядків функції x_n .

Рівняння (4.10) можна звести до вигляду (4.11) за допомогою формули (4.6), що виражає значення функції через її скінченні різниці. У свою чергу, рівняння (4.11) можна звести до (4.10), використавши формулу (4.5).

Означення 4.8. Різницеве рівняння (4.10) називають *лінійним*, якщо воно є лінійним відносно значень $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ решітчастої функції.

Лінійне різницеве рівняння k -го порядку має вигляд:

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n = f_n, \quad (4.12)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k, f_n$ – відомі решітчасті функції. Якщо у цьому рівнянні $f_n = 0$, то його називають *однорідним*.

Рівняння (4.11) є лінійним різницевим рівнянням, якщо воно є лінійним відносно решітчастої функції x_n та всіх її скінченних різниць. Задачі розв'язання лінійних різницевих рівнянь виникають при дослідженні імпульсних систем автоматичного регулювання.

Різницеве рівняння (4.10) є різницевим рівнянням k -го порядку, якщо воно містить x_n та x_{n+k} . Порядок різницевого рівняння (4.11) може не дорівнювати максимальному порядку скінченної різниці, що входить до цього рівняння, якщо це рівняння, записане у вигляді (4.10), містить лише значення решітчастої функції від x_n до x_{n+s} , $s < k$.

Аналогом різницевого рівняння є диференціальне рівняння відносно невідомої функції неперервного аргументу. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь є аналогічними до властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Якщо коефіцієнти лінійного різницевого рівняння (4.12) є сталими, для його розв'язання можна застосувати дискретне перетворення Лапласа. Для знаходження єдиного розв'язку даного рівняння, для нього повинні бути задані початкові значення: x_0, x_1, x_{k-1} . Тоді, застосувавши D -перетворення та теорему випередження для нього (теорема 4.5), переходимо до рівняння відносно зображення $X^*(p)$. При цьому, згідно з теоремою випередження, отримуємо:

$$x_{n+k} \div e^{pk} \left(X^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} x_m e^{-pm} \right). \quad (4.13)$$

Нехай лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами a_1, a_2, \dots, a_k задане у вигляді:

$$\Delta^k x_n + a_1 \Delta^{k-1} x_n + \dots + a_k x_n = f_n.$$

Для цього рівняння задаються початкові значення $x_0, \Delta x_0, \Delta^2 x_0, \dots, \Delta^{k-1} x_0$. При переході до рівняння відносно зображення $X^*(p)$ для знаходження зображення різниць використовують теорему про різницю оригінала (теорема 4.7), згідно з якою отримуємо:

$$\Delta^k x_n \div (e^p - 1)^k X^*(p) - e^p \sum_{m=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-1-m} \Delta^m x_0. \quad (4.14)$$

У результаті застосування D -перетворення отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно зображення $X^*(p)$

Якщо початкові значення розв'язку різницевого рівняння не задані, то їх можна вважати довільними сталими і у цьому випадку отримуємо загальний розв'язок різницевого рівняння. D -перетворення можна застосовувати і до розв'язання лінійних систем різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо приклади використання дискретного перетворення Лапласа до розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 4.15. Знайти розв'язок різницевого рівняння $\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 2x_n = 0$, якщо $x_0 = 1, \Delta x_0 = -1$.

Розв'язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$. Тоді за формулою (4.14) маємо:

$$\Delta x_n \div (e^p - 1) X^*(p) - e^p, \Delta^2 x_n \div (e^p - 1)^2 X^*(p) - e^p (e^p - 1) + e^p.$$

Підставивши ці значення у задане різницеве рівняння та звівши подібні доданки, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно зображення $X^*(p)$:

$$(e^{2p} - 5e^p + 6) X^*(p) = e^{2p} - 5e^p.$$

Звідси знаходимо зображення розв'язку:

$$X^*(p) = \frac{e^{2p} - 5e^p}{e^{2p} - 5e^p + 6}.$$

Перейшовши до z -перетворення, отримуємо:

$$X(z) = \frac{z^2 - 5z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)}.$$

Ця функція має дві особливі точки – прості полюси $z_1 = 2$ та $z_2 = 3$. Тому за формулою (4.8) знаходимо оригінал, тобто розв'язок заданого різницевого рівняння:

$$x_n = \frac{(z^2 - 5z)z^{n-1}}{2z - 5} \Big|_{z=2} + \frac{(z^2 - 5z)z^{n-1}}{2z - 5} \Big|_{z=3} = 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

Цей вираз є частинним розв'язком заданого рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

Приклад 4.16. Знайти розв'язок рівняння $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = n^2$, якщо $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$. Тоді за формулою (4.13) з врахуванням початкових умов отримуємо: $x_{n+1} \div e^p X^*(p)$, $x_{n+2} \div e^{2p} X^*(p)$, $x_{n+3} \div e^{3p} X^*(p)$.

За формулою 15 Додатку Б, маємо: $n^2 \div \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}$. Отже, після застосування

дискретного перетворення Лапласа, рівняння відносно зображення $X^*(p)$ набуває вигляду:

$$e^{3p} X^*(p) - 3e^{2p} X^*(p) + 3e^p X^*(p) - X^*(p) = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}.$$

З цього рівняння знаходимо:

$$X^*(p) = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^6}.$$

Перейшовши до z -перетворення ($e^p = z$), отримуємо зображення у вигляді: $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^6}$. $X(z)$ має одну особливу точку – полюс шостого порядку $z_1 = 1$. За формулою (4.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z^2 + z)(z-1)^6}{(z-1)^6} \cdot z^{n-1} \right)^{(5)} = \frac{1}{5!} (z^{n+1} + z^n)^{(5)} \Big|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{120} \left((n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^{n-5} \right) \Big|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{120} (2n^5 - 15n^4 + 40n^3 - 45n^2 + 18n). \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язком даного різницевого рівняння при заданих початкових умовах є решітчаста функція

$$x_n = \frac{1}{120} (2n^5 - 15n^4 + 40n^3 - 45n^2 + 18n).$$

Приклад 4.17. Розв'язати систему лінійних різницевих рівнянь

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2y_n = 0, \\ 2x_n - y_{n+2} = 0, \end{cases}$$

якщо $x_0 = y_0 = y_1 = 0$, $x_1 = 1$.

Розв'язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$, $y_n \div Y^*(p)$. З урахуванням початкових умов знаходимо зображення x_{n+2} , y_{n+2} : $x_{n+2} \div e^{2p}X^*(p) - e^p$, $y_{n+2} \div e^{2p}Y^*(p)$. Отримуємо рівняння відносно зображень $X^*(p)$, $Y^*(p)$:

$$\begin{cases} e^{2p}X^*(p) + 2Y^*(p) = e^p, \\ 2X^*(p) - e^{2p}Y^*(p) = 0. \end{cases}$$

Перейшовши до z -перетворення, останню систему запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} z^2X(z) + 2Y(z) = z, \\ 2X(z) - z^2Y(z) = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо зображення розв'язку системи:

$$X(z) = \frac{z^3}{z^4 + 4}, \quad Y(z) = \frac{2z}{z^4 + 4}.$$

Обидві функції мають чотири прості полюси: $z_{1,2} = \sqrt{2}e^{\pm \frac{\pi i}{4}}$ та $z_{3,4} = \sqrt{2}e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}$.

Оригінали x_n та y_n знаходимо за формулою (4.8): $x_n = \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^3}{4z_k^3} z_k^{n-1}$,

$y_n = \sum_{k=1}^4 \frac{2z_k}{4z_k^3} z_k^{n-1}$. Підставляючи сюди значення z_k , після перетворень знаходимо наступні вирази для оригіналів:

$$x_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi(n-1)}{4}, \quad y_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi(n+1)}{4}.$$

Таким чином, знайдено розв'язок заданої системи лінійних різницевого рівнянь.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які функції називають решітчастими? Наведіть приклади решітчастих функцій.
2. Сформулюйте означення D -перетворення решітчастої функції, оригіналу та зображення при D -перетворенні.
3. Наведіть означення перетворення Лорана (z -перетворення) та поясніть зв'язок між D -перетворенням та z -перетворенням.
4. Наведіть формули обернення для z -перетворення та D -перетворення.
5. Сформулюйте основні властивості дискретного перетворення Лапласа.
6. Що називають скінченною різницею для решітчастої функції?
7. Наведіть формули обернення для z -перетворення, коли зображення є раціональною функцією аргументу z .
8. Надайте означення різницевого рівняння k -го порядку.
9. Наведіть загальний вигляд лінійного різницевого рівняння.
10. Знайдіть зображення функцій: а) $(n-1)\sin \alpha n$; б) $n \cos \alpha n$; в) $n \cdot n^{(m)}$; г) n^4 .

11. Користуючись теоремою про суму оригіналів, знайдіть суми: а) $\sum_{k=1}^n k^2$;

б) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$.

12. Знайдіть оригінали наступних функцій: а) $\frac{e^p}{e^{2p} + a^2}$; б) $\frac{e^p}{e^{2p} + 2ae^p + 2a^2}$;

в) $\frac{e^{2p}}{e^{3p} - 1}$; г) $\frac{1}{(e^p - 1)(e^p + 4)}$.

13. Розв'яжіть лінійні різницеві рівняння:

а) $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$;

б) $x_{n+4} + x_n = 0$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$;

в) $3x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант № 1

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \sin 2t$.
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
 - $f(t) = \sin^2 t$; б) $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$; в) $f(t) = e^{-t} t^3$; г) $f(t) = \frac{|\sin 2t|}{\sin 2t}$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-2t} - e^{-4t}) \sin 2t}{t} dt$.
- Знайти оригінали для наступних зображень:
 - $F(p) = \frac{1}{p(p+1)(p^2+4)}$; б) $F(p) = \frac{p}{p^3-1} e^{-\frac{p}{2}}$.
- Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння $x'' + x' = 4 \sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
- Знайти розв'язок задачі Коші: $x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
- Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 0$.
- Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^t - t - 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$.
- Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 e^n$.
- Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = (-2)^n$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 2

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t^2$.
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
 - $f(t) = e^t \sin^3 t$; б) $f(t) = \frac{\sin t - t}{t}$; в) $f(t) = t^2 \operatorname{ch} 4t$; г) $f(t) = |\sin t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} \sin 6t}{t} dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
 а) $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 9)}$; б) $F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)} e^{-p}$.
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$.
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t}(1 - \eta(t - 1))$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 1$.
8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau$.
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 3

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos 5t$.
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
 а) $f(t) = \cos^4 t$; б) $f(t) = \int_0^t (\tau^5 + 1) \cos \omega \tau d\tau$; в) $f(t) = e^{-2t} t^{\frac{7}{2}}$; г) $f(t) = |\cos t|$.
3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \sin 3t dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
 а) $F(p) = \frac{2}{p^2(p^2 + 4p + 5)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p - 1)^2(p - 3)}$.
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 4x = \sin t(1 - \eta(t - \pi))$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = te^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau$.
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = \text{sh} 2n \cdot \sin n$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Варіант № 4

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
- а) $f(t) = \sin 2t \cos 4t$; б) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$; в) $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$; г) $f(t) = \{5t\}$.
3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-4t} - e^{-6t}}{t} dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
- а) $F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-p}}{(p^2 + 1)^2}$.
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння: $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
- $$x'' + 6x' + 8x = \sin t - \cos t \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \quad x(0) = x'(0) = 1.$$
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
- $$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = \sin t, \\ x(0) = -1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$
8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau) d\tau$.
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n^2 + 2n)(-2)^n$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Варіант № 5

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

$$\text{функції } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

$$\text{а) } f(t) = \sin^4 t; \text{ б) } f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}; \text{ в) } f(t) = e^{-t} \sqrt{t}; \text{ г) } f(t) = \frac{|\cos 5t|}{\cos 5t}.$$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\cos 8t - \cos 4t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}; \text{ б) } F(p) = \frac{e^{-p}}{(p-1)(p-2)^2}.$$

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta(t - 2\pi) \cdot \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t - \tau) x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cdot \sin^2 2n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = (-1)^n$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

Варіант № 6

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 2t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

$$\text{а) } f(t) = t(e^t + \operatorname{cht}); \text{ б) } f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}; \text{ в) } f(t) = \sin^2 t \cos^2 t; \text{ г) } f(t) = |\sin 2t|.$$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 4t \sin 6t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p-3)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-5p}}{p^3 + 2p^2 + p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t-1), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^t + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 + 2n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = n^2$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 7

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin 3t \cos 5t$; б) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$; г) $f(t) = \{3t\}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos 4t)e^{-2t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)}$; б) $F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p} e^{-p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' - 2x' + x = 4t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t-3)), \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \\ x(0) = y(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin t - \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau$.
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n-1)\sin n$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 8

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = te^{2t}$.
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = (t+1)\sin 2t$; б) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$; в) $f(t) = te^t \cos t$; г) $f(t) = e^{\{t\}}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2t dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{p^3+1}$; б) $F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{4}}}{7p - p^2 + p^3}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = t \cdot \eta(t) - (t-2) \cdot \eta(t-2) - (t-4) \cdot \eta(t-4) - \eta(t-4) + (t-5) \cdot \eta(t-5),$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = x'(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2n^2 - n^3$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$.

Варіант № 9

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 4, & t > 2. \end{cases}$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sqrt{5t} \cdot e^{4t}$; б) $f(t) = \int_0^t \tau^4 \operatorname{ch} 2\tau d\tau$; в) $f(t) = \cos 2t \sin 5t$; г) $f(t) = (\{t\})^2$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 4t - \sin 2t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{p^3 - 8}$; б) $F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)} e^{-2p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^{2t} + \int_0^t (t - \tau) e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n + 3) \sin 2n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Варіант № 10

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t \cdot e^t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^2 \sin^2 t$; б) $f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}$; в) $f(t) = e^{2t} t^5$; г) $f(t) = \frac{2|\sin 4t|}{\sin 4t}$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t \cos t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' - 2x' + x = 4t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 \cdot 3^n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Варіант № 11

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 4 \cdot \text{sh} 2t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin^2 3t$; б) $f(t) = \frac{e^{-2t} - 1}{t}$; в) $f(t) = 5^{-t} t^5$; г) $f(t) = \sin(\{t\})$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p-1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-p}}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1, \\ -2t + 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y + y' - x = e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = t + 2 - 2\cos t - \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = \sin 2n(1 - n\cos(n+1))$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Варіант № 12

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t^2 + 2t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = e^t \sin^4 t$; б) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$; в) $f(t) = t^2 e^{-t} \sin 2t$; г) $f(t) = e^t |\sin 2t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} \sin 4t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{p(p+3)(p^2+9)}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^3+1}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x' = 4\sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ 4, & t \geq 1, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння:

$$x(t) = 1 + t \cos t - \sin t + \int_0^t (t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cos 2n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n = 0$, $x_0 = x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Варіант № 13

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos 4t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = e^{5t} \cos 2t$; б) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos \omega \tau d\tau$; в) $f(t) = t^2 e^{8t}$; г) $f(t) = |\cos \pi t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \cos t dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{p^4 + p}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p^2 + 1)(p^2 + 6p + 10)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 9x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 \leq t < 2, \\ -t + 3, & 2 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \notin [1; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 5e^t, \\ y' - x = e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = t^2 + \int_0^t x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \sin 2n \cos 3n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 2x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$, $x_0 = 0$.

Варіант № 14

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

$$\text{функції } f(t) = \begin{cases} t+3, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t, & 1 < t \leq 2, \\ 8, & t > 2. \end{cases}$$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin 2t \cdot \operatorname{ch} 4t$; б) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$; в) $f(t) = e^{3t} \cos^2 t$; г) $f(t) = e^{-2t} |\sin 5t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)^2}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2 p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x''' + 2x'' + x' = -2e^{-2t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = x''(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' - 2x' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;1] \cup [2;3] \\ 0, & t \notin [0;1] \cup [2;3], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n+5) \cdot 2^n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 15

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

$$\text{функції } f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3, \\ -2, & 3 < t < 4, \\ 1, & t \geq 4. \end{cases}$$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin t \cdot \operatorname{sh} 2t$; б) $f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}$; в) $f(t) = t^3 e^{5t}$; г) $f(t) = 2\{t\}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{2p+3}{(p^2-4)(p-1)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-4p}}{(p^2+1)(p-2)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 16x = \eta(t-2) - \eta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^t (t-\tau)^3 x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cdot \cos 2n \cdot \cos 4n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 2x_n = n \cdot 2^n$, $x_0 = 0$.

Варіант № 16

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 5t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^2 (e^{2t} + \operatorname{sh} 4t)$; б) $f(t) = \frac{\sin 6t}{t}$; в) $f(t) = \sin t \cos 7t$; г) $f(t) = |\sin 3t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2t \sin 3t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{(p^2+9)^2}$; б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2(p-3)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - 2x = -2t, \\ x' - y = t + 1, \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 17

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \operatorname{sh} 2t \cdot \cos 5t$; б) $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$; в) $f(t) = \int_0^t \tau^5 e^{-4\tau} d\tau$; г) $f(t) = \left| \sin \frac{t}{2} \right|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos 2t) e^{-t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+25)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^3+2p^2+p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = 2 \sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 2t + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = \cos \frac{n\pi}{3}, x_0 = x_1 = 0.$

Варіант № 18

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

$$\text{функції } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^2 \sin 3t$; б) $f(t) = \frac{1 - e^{-5t}}{t}$; в) $f(t) = e^{4t} \cos^2 2t$; г) $f(t) = \{t\}^3.$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2tdt.$

4. Знайти оригінали для заданих зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p^2 + 2p + 5)^2}.$

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' - 2x' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;3] \cup [6;9], \\ 0, & t \notin [0;3] \cup [6;9], \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y'' = 0, \\ x'' + y' = -2 \sin t, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin 2t - \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau)d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (-1)^n \cdot n^2.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 19

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

$$\text{функції } f(t) = \begin{cases} 2t + 3, & 0 \leq t \leq 2, \\ 7, & t > 2. \end{cases}$$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

$$\text{а) } f(t) = t^4 e^{-5t}; \text{ б) } f(t) = \int_0^t \tau^2 \operatorname{sh} 2\tau d\tau; \text{ в) } f(t) = e^{-t} \sin 5t; \text{ г) } f(t) = \frac{|\sin 2\pi t|}{\sin 2\pi t}.$$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 8t - \sin 2t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p}{(p+4)^2(p-2)}; \text{ б) } F(p) = \frac{pe^{-2p}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = 2(\eta(t) - \eta(t-5)), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (-1)^n \cdot \sin \frac{n}{2}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 3x_n = n \cdot 3^n$, $x_0 = 1$.

Варіант № 20

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = e^{2t} \cdot \sin t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 2t$; б) $f(t) = \frac{e^{4t} - 1}{t}$; в) $f(t) = e^{4t} t^3$; г) $f(t) = \frac{|\sin \pi t|}{\sin \pi t}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{3p-1}{(p-2)^3}$; б) $F(p) = \frac{e^{-4p}}{(p+1)^2(p-3)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta\left(t - \frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(t - \frac{2\pi}{9}\right), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t e^{3(t-\tau)} x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cdot \cos^2 n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = (-1)^n$, $x_0 = x_1 = 0$.

Предметний покажчик

- абсциса збіжності, 52
- дискретне перетворення Лапласа, 52
- диференціальне рівняння з запізненням, 39
- диференціальне рівняння з відхиленням, 39
- диференціально – різницеве рівняння, 39
- згортка, 15
- зображення, 5
- зображення D – перетворення, 52
- твірна функція функціональної послідовності, 48
- інтеграл Лапласа, 6
- інтеграл ймовірностей, 18
- інтегральне перетворення, 5
- інтегро-диференціальне рівняння, 41
- інтегральне рівняння Вольтерра першого роду, 37
- інтегральне рівняння Вольтерра другого роду, 35
- інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки, 35
- інтегральне рівняння Абея, 38
- лема Жордана, 24
- лінійний диференціальний оператор n -го порядку, 33
- операційний метод, 5
- операційне числення, 5
- оригінал, 5
- оригінал D -перетворення, 52
- перетворення Лапласа, 5
- перетворення Лорана, 53
- показник зростання, 6
- різницеве рівняння, 61
- різниця (скінченна) першого порядку, 56
- різниця (скінченна) k -го порядку, 56
- решітчаста функція, 52
- теорема Ефроса, 16
- теорема Рімана-Мелліна, 23
- теорема про диференціювання оригінала, 12
- теорема про диференціювання зображення, 13
- теорема випередження, 11
- теорема запізнення, 10
- теорема зміщення, 9
- теорема про інтегрування зображення, 14
- теорема про інтегрування оригінала, 14
- теорема про існування зображення, 6
- теорема лінійності, 8
- теорема подібності, 9
- теорема про множення зображень, 16
- теорема про різницю оригінала, 56
- теорема про суму оригінала, 58
- теорема розвинення перша, 24
- теорема розвинення друга, 24
- формула Дюамеля, 33
- формула обернення Рімана-Мелліна, 23
- формула обернення D -перетворення, 54
- формула обернення z -перетворення, 54
- функції Бесселя, 19
- функція Хевісайда, 6
- D -перетворення, 52
- z -перетворення, 53

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
2. Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / И.К. Волков, А.Н. Канатников. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.
3. Волков И.К. Операционное исчисление [Текст] / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко, И.Д. Фаликова. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 197 с.
4. Гребенюк С. М. Операційне числення: навчально-методичний посібник для студентів математичного факультету [Текст] / С.М. Гребенюк,, О.О. Тітова, М.І. Клименко, С.І. Полюга. – Запоріжжя: ЗНУ, 2010. – 71 с.
5. Диткин В.А. Операционное исчисление [Текст] / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1966. – 406 с.
6. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения [Текст] / М.Л. Краснов, Л.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 215 с.
7. Краснов М.Л. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Задачи и упражнения [Текст] / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко. – М.: Высшая школа, 2002. – 207 с.
8. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики [Текст] / А.И. Лурье. – М.: Высшая школа, 1979. – 347 с.
9. Мартыненко В.С. Операционное исчисление [Текст] / В.С. Мартыненко. – К.: Вища школа, 1973. – 266 с.
10. Мартиненко М.А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення [Текст] / М.А. Мартиненко, І.І. Юрик. – К.: Слово, 2007. – 296 с.

Додаткова:

1. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.5. Ч.3: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость и фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа [Текст] / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. – М.: КомКнига, 2006. – 256 с.
2. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложения [Текст] / А.В. Ефимов. – М.: Высшая школа, 1980. – 290 с.
3. Кожевников Н.И. Ряды и интеграл Фурье. Преобразование Лапласа. Аналитические и специальные функции [Текст] / Н.И. Кожевников, Т.И. Краснощекова, Н.Е. Шишкин. – М.: Наука, 1964. – 204 с.

4. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестандартные явления в электрических цепях [Текст] / М.И. Конторович. – М.: Машиностроение, 1987. – 298 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.– С.-Пб.: Лань, 2005. – 689 с.
6. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы [Текст] / А.Д. Мышкис. – С.-Пб.: Лань, 2002. – 640 с.
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в теории упругости [Текст] / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1966. – 402 с.
8. Шостак Р.Я. Операционное исчисление [Текст] / Р.Я. Шостак. – М.: Высшая школа, 1972. – 252 с.
9. Штокало И.З. Операционное исчисление [Текст] / И.З. Штокало. – К.: Наукова думка, 1972. – 304 с.

ДОДАТОК А

ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	14	$e^{at} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	15	$t \sin \alpha t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	16	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
4	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	18	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	19	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
7	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	20	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
8	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	21	$J_n(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
9	$t^k, k > -1$	$\frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$	22	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$
10	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	23	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{p}}$
11	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	24	e^{-t^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \operatorname{Erf} \left(\frac{p}{2} \right)$
12	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p}{(p-a)^2 + \omega^2}$	25	$\operatorname{erf} t$	$\frac{1}{p} \cdot e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \operatorname{Erf} \left(\frac{p}{2} \right)$
13	$e^{at} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$	26	$\operatorname{Erf} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right)$	$\frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{p}$

ДОДАТОК Б

ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА (D-ПЕРЕТВОРЕННЯ)

№	Оригінал, f_n	Зображення, $F^*(p)$	№	Оригінал, f_n	Зображення, $F^*(p)$
1	$\eta_n = 1$	$\frac{e^p}{e^p - 1}$	9	$e^{p_0 n} \sin \alpha n$	$\frac{e^{p+p_0} \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^{p+p_0} \cos \alpha + e^{2p_0}}$
2	$(-1)^n$	$\frac{e^p}{e^p + 1}$	10	$e^{p_0 n} \operatorname{sh} \alpha n$	$\frac{e^{p+p_0} \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^{p+p_0} \operatorname{ch} \alpha + e^{2p_0}}$
3	$e^{\alpha n}$	$\frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$	11	$e^{p_0 n} \operatorname{ch} \alpha n$	$\frac{e^p (e^p - e^{p_0} \operatorname{ch} \alpha)}{e^{2p} - 2e^{p+p_0} \operatorname{ch} \alpha + e^{2p_0}}$
4	$a^{\alpha n}$	$\frac{e^p}{e^p - a^\alpha}$	12	$e^{p_0 n} \cos \alpha n$	$\frac{e^p (e^p - e^{p_0} \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^{p+p_0} \cos \alpha + e^{2p_0}}$
5	$\sin \alpha n$	$\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$	13	$n^{(m)}$	$\frac{m! e^p}{(e^p - 1)^{m+1}}$
6	$\operatorname{sh} \alpha n$	$\frac{e^p \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1}$	14	n	$\frac{e^p}{(e^p - 1)^2}$
7	$\cos \alpha n$	$\frac{e^p (e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$	15	n^2	$\frac{e^p (e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}$
8	$\operatorname{ch} \alpha n$	$\frac{e^p (e^p - \operatorname{ch} \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1}$	16	n^3	$\frac{e^p (e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^4}$

Навчальне видання

Гребенюк Сергій Миколайович
Тітова Ольга Олександрівна
Клименко Михайло Іванович
Полюга Світлана Ігорівна
Стреляєв Юрій Михайлович

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник
для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»

Рецензент *І.Г. Ткаченко*
Відповідальний за випуск *М.І. Клименко*
Коректор *О.О. Тітова*