

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

ПОДОПРИГОРА Н.В., ТРИФОНОВА О.М., САДОВИЙ М.І.

Математичні методи фізики

*навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів*

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Кіровоград – 2012

УДК 530.1

ББК 22.31

П 44

Подопригора Н.В., Трифонова О.М., Садовий М.І. Математичні методи фізики: навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закл.]. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2012. – 300 с.

Рецензенти: д.пед.н., проф. **Коновал О.А.**, завідувач кафедри фізики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету;
д.фіз.-мат.н., проф. **Кудін А.П.**, проректор з дистанційної освіти та інноваційних технологій навчання, професор кафедри експериментальної і теоретичної фізики та астрономії Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова;
д.пед.н., проф. **Сусь Б.А.**, професор кафедри загальної та теоретичної фізики Національного технічного університету України «КПІ».

Пропонований посібник для студентів вищих навчальних закладів складено у відповідності до програми курсу «Математичні методи фізики» згідно галузевого стандарту вищої освіти: Галузь знань 0402 Фізико-математичні науки. Напрямок підготовки 6.040203 Фізика*. Спеціалізація: Інформатика. Освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра. Навчальний матеріал охоплює всі розділи математичної теорії поля, а також основні типи диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку, які найчастіше зустрічаються у фізичних теоріях. Теоретичний матеріал доповнено значною кількістю задач з математичної теорії поля, які систематизовані як практикум з розв'язку фізичних задач.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-3130 від 06.03.2012 р.)*

ISBN 978-966-7406-71-4

© Н.В.Подопригора, О.М.Трифопова, М.І.Садовий 2012

Зміст

Передмова.....	6
1. Предмет математичної фізики	8
2. Математичні методи теорії поля	17
2.1. Скалярне поле і моделі фізичних систем.....	17
2.1.1. Скалярне поле.....	17
2.1.2. Похідна скалярного поля за напрямком	17
2.1.3. Лінії рівня	18
2.1.4. Градієнт скалярного поля.....	20
2.1.5. Векторне поле градієнта.....	21
2.1.6.* Моделі фізичних систем.....	23
2.2. Векторні поля	25
2.2.1. Аналітичне означення вектора	25
2.2.2. Векторні поля та їх диференціальна характеристика	27
2.2.3.* Приклади фізичних задач: Знаходження густини середовища. Стаціонарне поле швидкостей	28
2.3. Тензори та їх властивості	37
2.3.1. Тензори та їх властивості	37
2.3.2. Тензорна алгебра.....	39
2.3.3. Головні напрямки тензора. Інваріанти.....	41
2.4.* Ортогональні вектори і тензори в трьохвимірному і багатовимірному евклідових просторах	46
2.4.1. Вектори і тензори в n -вимірному просторі.....	46
2.4.2. Тензор деформації.....	48
2.4.3. Тензор напруг	50
2.4.4. Тензор інерції	53
2.5. Дивергенція векторного поля.	58
2.5.1. Векторне поле.....	58
2.5.2. Потік вектора.....	58
2.5.3. Дивергенція векторного поля	59
2.6. Ротор векторного поля.....	63
2.6.1. Циркуляція вектора по замкненому контуру	63
2.6.2. Вихор вектора навколо певного напрямку в даній точці. Інваріантне означення ротора	64
2.6.3. Ротор вектора в декартових координатах.....	65
2.7. Криволінійні координати	68
2.7.1. Криволінійні координати	68
2.7.2. Коефіцієнти Ламе.....	70

2.7.3. Основні диференціальні операції в криволінійних координатах	73
2.8. Диференціальні операції другого порядку	79
2.8.1. Оператор Гамільтона	79
2.8.2. Диференціальні операції другого порядку	81
2.8.3. Формули Гріна	82
2.9.* Оператори квантової фізики	84
2.9.1. Оператори і дії над ними. Лінійні оператори. Самоспряжені оператори	84
2.9.2. Комуруючі оператори. Умови можливості одночасного вимірювання різних квантово-механічних величин. Повний набір спостережуваних	85
2.9.3. Основні оператори квантової механіки в координатному зображенні.....	87
3. Математичні рівняння фізики.....	91
3.1. Класифікація лінійних рівнянь	91
3.1.1. Класифікація лінійних рівнянь у частинних похідних II порядку та їх зведення до канонічного вигляду	91
3.1.2. Канонічні форми лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	99
3.1.3.* Фізичні задачі, які приводять до рівнянь в частинних похідних. Приклади фізичних задач, що приводять до лінійних рівнянь	102
3.1.4.* Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними.	107
3.1.5.* Поняття про нелінійні рівняння математичної фізики.....	110
3.1.6.* Поняття про інтегральні рівняння у фізиці	111
3.2. Рівняння гіперболічного типу.....	116
3.2.1. Рівняння гіперболічного типу. Найпростіші фізичні задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу – коливання струни	116
3.2.2. Поперечні коливання струни. Хвильове рівняння.....	116
3.2.3. Коливання струни нескінченної довжини. Метод Д'аламбера. Окремий випадок задачі Коші	119
3.2.4. Коливання струни скінченної довжини. Метод Фур'є (метод відокремлення змінних). Загальний розв'язок хвильового рівняння.....	122
3.2.5. Стоячі хвилі	125
3.2.6. Плоскі і сферичні хвилі	126
3.3. Рівняння параболічного типу.....	128
3.3.1. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності, його окремі випадки.	128
3.3.2. Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу	134
3.3.3. Функція джерела	136
3.3.4. Рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня. Загальний розв'язок ..	138
3.4. Рівняння еліптичного типу.....	140
3.4.1. Рівняння еліптичного типу. Задачі, що приводять до рівняння Лапласа	141
3.4.2.* Рівняння Лапласа в криволінійній системі координат. Рівняння Лапласа в сферичних та циліндричних координатах	144

3.4.3.* Відтворювальна функція і поліноми Лежандра. Формула Родріга. Рекурентні співвідношення. Рівняння Лежандра. Розв'язування рівняння Лежандра	148
3.4.4.* Сферичні і кульові функції	154
3.4.5.* Поліноми Лагерра	156
3.4.6.* Метод функцій Гріна	158
3.4.7.* Рівняння Пуассона для електростатичного потенціалу та його загальний розв'язок	166
3.4.8.* Задача про одновимірний гармонічний осцилятор.....	171
3.5.* Застосування теорії груп у фізиці.....	181
3.5.1. Поняття теорії груп	181
3.5.2. Гармонічні коливання молекул	182
3.5.3. Правила відбору операторів квантової механіки.....	189
Практикум розв'язку задач з математичної теорії поля.....	197
Тема № 1. Скалярне поле. Поверхні рівня. Градієнт.....	197
Задачі для самостійного розв'язку	207
Тема № 2. Векторне поле. Векторні лінії поля. Дивергенція векторного поля.	212
Задачі для самостійного розв'язку	215
Тема № 3. Потік векторного поля. Формула Остроградського.	218
Задачі для самостійного розв'язку	227
Тема № 4. Ротор векторного поля.	230
Задачі для самостійного розв'язку	234
Тема № 5. Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля. Формула Стокса.....	235
Задачі для самостійного розв'язку	245
Тема № 6. Похідна скалярного поля за напрямком. Скалярне поле в циліндричних та сферичних координатах.....	248
Задачі для самостійного розв'язку	254
Тема № 7. Дивергенція і потік векторного поля в циліндричних і сферичних координатах.	255
Задачі для самостійного розв'язку	263
Тема № 8. Ротор і лінійний інтеграл векторного поля в циліндричних і сферичних координатах.	267
Задачі для самостійного розв'язку	276
Додатки	280
Бібліографічний список.....	293
Предметний покажчик.....	295
Іменний покажчик.....	299

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник з математичних методів фізики розроблений для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів, що навчаються за напрямом підготовки «Фізика» на освітньо-кваліфікаційному рівні бакалавр. Пропоноване видання призначено для допомоги студентам при вивченні одного із пропедевтичних курсів, що передує вивченню курсу теоретичної фізики – курсу «Математичні методи фізики», який як дисципліна, вивчається у циклі дисциплін професійної та практичної підготовки.

Добираючи матеріал для навчального посібника, автори враховували, що математичні методи фізики вивчаються після вивчення студентами математичного аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії, основ векторного та тензорного аналізу, диференціальних та інтегральних рівняння та являє собою інтегративний курс п'яти вказаних дисциплін природничо-математичного циклу підготовки.

Курс математичних методів фізики покликаний сформувати у студентів цілісне уявлення про основні математичні моделі, аналізу характеру їх поведінки в тих або інших фізичних умовах, якісному обговоренню проблем і завдань при вивченні деяких теоретичних математичних методів дослідження фізичних явищ і процесів, з'ясуванню перспектив розвитку фізики як науки з огляду застосування методів математичного аналізу її математичних моделей.

У педагогічних університетах фізика вивчається у два етапи. Спершу викладається курс загальної фізики, яка на основі вивчення передусім часткових феноменологічних законів і закономірностей експериментальної фізики готує фундамент для іншого методу пізнання природи – теоретичного у курсі теоретичної фізики. Теоретична фізика не тільки узагальнює у фундаментальних законах і теоріях те, що вивчено в курсі загальної фізики, а й формулює нові постулати і принципи, створює нові теорії. На відміну від курсу

загальної фізики, в якому основним методом дослідження є, передусім, експеримент, курс теоретичної фізики ґрунтується на іншому методі пізнання природи – теоретичному, що являє собою теоретичний аналіз математичних моделей, за допомогою яких виявляються їх властивості, особливості і зв'язки в тих або інших умовах. Математичні моделі – це знакові моделі, в яких об'єкти дослідження замінюються словами або символами.

Основне завдання математичної фізики полягає в аналітичному вивченні скалярних, векторних і тензорних полів фізичних величин. В математичній фізиці розглядаються дві проблеми. Одна з них займається вивченням диференціальних властивостей різноманітних полів, їй присвячений один з розділів курсу – математична теорія поля. Інша ж проблема полягає у відшуканні фізичної величини, якщо відомі умови, в яких перебуває фізичний об'єкт. Щоб невідомі функції було знайдено необхідно, виходячи із заданих фізичних закономірностей скласти функціональне рівняння і розв'язати його. Зазвичай ці функціональні рівняння являють собою диференціальні рівняння різних типів. Вивченням методів складання й розв'язанням рівнянь такого роду займається теорія диференціальних рівнянь у часткових похідних. Сукупність теорії поля і теорії диференціальних рівнянь у часткових похідних утворюють класичну математичну фізику, яка у повній мірі відображена у змістовній частині пропонованого посібника і допомагає розв'язати основне завдання вивчення дисципліни – розглянути ряд математичних понять і методів, що покладені в основу математичної теорії поля, та основні типи диференціальних рівнянь у часткових похідних фізичного змісту.

Автори посібника висловлюють свою вдячність рецензентам рукопису: д.ф.-м.н., проф. Кудіну А.П., д.пед.н., проф. Коновалу О.А. та д.пед.н., проф. Сусю Б.А. Їх слушні поради і пропозиції значно покращили якість пропонованого видання.

1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Математична фізика – загальна назва математичних методів дослідження і розв’язання диференціальних рівнянь фізики. Теорія математичних моделей фізичних явищ; займає особливе положення і у математиці, і у фізиці, перебуваючи на стику цих наук. Математична фізика тісно зв’язана з фізикою в тій частині, яка стосується побудови математичної моделі, і в той самий час математична фізика – розділ математики, оскільки методи дослідження моделей є математичними. У поняття методів математичної фізики включаються ті математичні методи, які застосовуються для побудови і вивчення математичних моделей, що описують великі класи фізичних явищ.

У *фізиці під моделлю розуміють* систему, що уявляється мислено або реалізується матеріально, яка відображаючи або відтворюючи об’єкт дослідження, здатна замінити його так, щоб її вивчення дало нову інформацію про цей об’єкт.

Якщо мова йде про *математичну модель* (рос. математическая модель; англ. mathematic model; нім. mathematisches model), то під нею розуміють систему математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище. Математична модель має важливе значення для таких наук, як: економіка, екологія, соціологія, фізика, хімія, механіка, інформатика, біологія, та ін.

При одержанні математичних моделей використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів, імітаційне моделювання за допомогою ЕОМ. Математичні моделі дозволяють передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Для створення математичних моделей використовують будь-які математичні засоби – мову диференційних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей, графи та інші. Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням. Це найзагальніший та найбільш використовуваний в науці, зокрема, в кібернетиці, метод досліджень.

Якщо відношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкнутому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкнутому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференційні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші.

Якщо не можна здобути точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні (обчислювальні) методи або інші види моделювання.

У залежності від того, якими є параметри системи та зовнішні збурення математичні моделі можуть бути детермінованими та стохастичними. Останні мають особливо важливе значення при дослідженні і проектуванні великих систем зі складними зв'язками і властивостями, які важко врахувати. Математичний опис неперервного процесу (наприклад, диференційними рівняннями) являє собою неперервну математичну модель.

Якщо ж математична модель описує стан системи тільки для дискретних значень незалежної змінної і нехтує характером процесів, які протікають у проміжках між ними, то така модель є дискретною (тут важливим є вибір кроку дискретності, від якого залежить точність опису реального об'єкта його математичної моделі). Якщо параметри об'єкта, для якого розробляють математичну модель, можна вважати незалежними від часу, то така система описується стаціонарною моделлю, характерна особливість якої – постійні коефіцієнти. У протилежному випадку математична модель є нестаціонарною.

При математичному моделюванні орієнтуються на моделі стандартного вигляду, які забезпечені відповідним математичним апаратом. Так фізичні процеси характеризуються просторово-часовими співвідношеннями і у загальному випадку описуються диференційними рівняннями у часткових похідних.

Важливим моментом структурування моделі є феноменологічний метод, коли субпроцеси можуть бути представлені окремими моделями, вихідні величини яких є вхідними для інших (наступних) субпроцесів. У

цьому випадку математична модель складного процесу являє собою систему моделей (рівнянь), знайдених для кожного субпроцесу.

Для розробки математичних моделей широко використовується диференційне числення, теорія множин, матриці і графи, а також планування експерименту. Відповідно розрізняють теоретико-множинні, матричні, топологічні та поліномні математичні моделі. Приклади математичних моделей:

Модель Мальтуса – закон про пропорційну залежність між швидкістю росту і розміром популяції.

Система хижак-жертва (Вольтера-Лотки) – показує залежність між чисельністю хижаків та жертв.

Модель оптимальної поведінки покупця – виражає вибір покупця між множиною продуктів при обмеженому бюджеті.

Модель Всесвіту – фізична модель будови і розвитку Всесвіту, наука, що її вивчає має назву «космологія».

Методи математичної фізики як теорії математичних моделей фізики почали створюватись наприкінці XVII ст. і інтенсивно розроблятися в працях І.Ньютона зі створення основ класичної механіки, всесвітнього тяжіння, теорії світла. Подальший розвиток (XVIII – I пол. XIX ст.) методів математичної фізики і їх успішне застосування до вивчення математичних моделей величезного обсягу різних фізичних явищ зв'язані з іменами Ж.Лагранжа, Л.Ейлера, П.Лапласа, Ж.Фур'є, К.Гауса, Б.Рімана, М.В.Остроградського й ін. учених. Великий внесок до розвитку методів математичної фізики внесли О.М.Ляпунов і В.А.Стеклов. З II пол. XIX ст. методи математичної фізики успішно використовувалися для вивчення математичних моделей фізичних явищ, зв'язаних з різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- й аеродинаміці та інших напрямках дослідження фізичних явищ у суцільних середовищах. Математичні моделі цього класу явищ найчастіше описуються за допомогою диференційних рівнянь з частинними похідними, що одержали назву рівняння математичної фізики. Крім диференційних рівнянь математичної фізики, при описі математичних моделей фізики застосовуються інтегральні рівняння та інтегро-диференціальні рівняння, варіаційні та теоретико-імовірнісні

методи, теорія потенціалу, методи теорії функцій комплексної змінної і низка інших розділів математики. У зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної математики особливе значення для дослідження, математичних моделей фізики здобувають прямі чисельні методи, що вони використовують комп'ютери, і в першу чергу скінченно-різницеві методи розв'язування крайових задач, що дозволило методами математичної фізики ефективно вирішувати нові задачі газової динаміки, теорії переносу, фізики плазми, у тому числі й зворотні задачі цих напрямків фізичних досліджень.

Фізика у своєму історичному розвитку постійно перетворювалась із науки емпіричної (описової) в науку більш точну – теоретичну. Для характеристики різноманітних явищ і процесів, які відбуваються у природі і техніці, фізики все частіше використовують математичні методи або, як прийнято говорити, відповідний математичний апарат.

З цією метою довелося, перш за все, ввести міру кожної фізичної властивості. До тих пір доки фізики мали справу з найпростішими властивостями тіл, в якості міри кожної з них можна було обмежитися *скалярними величинами*, які за звичай показують, у скільки разів міра даної властивості розглядуваного тіла більша за деяку одиничну величину. Так були введені скалярні величини такі як довжина, площа, об'єм, маса, час, температура, електричний заряд, енергія і т.п.

З часом з'ясувалося, що для кількісного опису швидкості руху, зміни швидкості, взаємодії тіл і т.п. скалярні величини не підходять. Для цих випадків виявились придатні більш складні математичні величини – *напрявлені відрізки*, або *вектори*.

Наприкінці ХІХ ст. фізикам стало зрозуміло, що для характеристики деформації, інерції при обертовому русі, зусиль в деформованих твердих тілах і т.п. необхідні величини ще більш складної математичної природи – *тензори*.

З іншого боку, розвиток кількісних методів показав, що одна і та ж фізична властивість у різних точках досліджуваного об'єкту може приймати різні значення, і тому для математичного опису необхідно знати сукупність значень відповідної фізичної величини у всіх точках досліджуваного об'єкту. Так у фізиці поступово склалося уявлення про

математичне поле – область простору, кожній точці якого відповідає певне значення деякої фізичної величини (поле температур, поле густин, поле швидкостей).

Поля бувають скалярні, векторні і тензорні. Кожне з них, в свою чергу, може бути стаціонарним (якщо фізична величина в кожній точці області з часом не змінюється) або нестаціонарним (якщо фізична величина виявляється залежною від часу). Зрозуміло, що стаціонарне поле, наприклад, у декартовій системі координат, є функцією трьох x , y , z точок простору, а нестаціонарне поле являє собою функцію чотирьох змінних: координат x , y , z і часу t .

Введення в фізиці поняття поля відіграло таку ж прогресивну роль, як у свій час виникнення в математиці поняття змінної величини.

Основне завдання математичної фізики – це аналітичне вивчення скалярних, векторних і тензорних полів фізичних величин.

Методи математичної фізики: в математичній фізиці розглядаються дві проблеми – пряма і зворотна.

Пряма проблема полягає у наступному. Якщо задано правило визначення деякої фізичної величини в будь-якій точці простору, тобто, якщо задано поле, потрібно встановити характер цього поля, тобто швидкість його зміни від точки до точки. Вивченням таких диференціальних властивостей різноманітних полів займається *математична теорія поля*.

Зворотна проблема полягає у знаходженні деякої фізичної величини, тобто конкретного вигляду математичного поля, якщо відомі умови, в яких перебуває фізичний об'єкт.

В загальному випадку будь-яке фізичне явище або процес являють собою зміни яких завгодно фізичних величин (скалярних, векторних, тензорних) в просторі і з часом. Тому математичне поле, взагалі кажучи, описується функціями чотирьох незалежних змінних x , y , z і t . І завдання полягає у відшуканні цих функцій.

Для відшукання невідомих функцій необхідно, виходячи із заданих фізичних закономірностей скласти функціональне рівняння, розв'язуючи яке можна знайти невідомі функції. Зазвичай ці функціональні рівняння

являють собою своєрідні диференціальні рівняння, в яких шукана функція залежить від декількох змінних.

Вивченням методів складання і, головне, розв'язанням рівнянь такого роду займається друга частина математичної фізики – *теорія диференціальних рівнянь у часткових похідних*.

Сукупність теорії поля і теорії диференціальних рівнянь у часткових похідних утворює так звану *класичну математичну фізику*.

Однак, за останні роки у зв'язку з успіхами теорії відносності і відкриттям якісно нових, квантових властивостей у мікрочастинок завдання математичної фізики значно розширилися: з'явилась необхідність у вивченні полів комплексних величин у комплексному просторі, у використанні для їх дослідження не лише математичного аналізу, а й лінійної алгебри.

Теоретичні дослідження в області квантової фізики і теорії відносності, широке застосування комп'ютерів у різних областях математичної фізики, включаючи і зворотні (некоректно поставлені) задачі, викликали значне розширення використовуваного математичною фізикою арсеналу математичних методів. Поряд із традиційними розділами математики стали широко застосовуватися теорія операторів, теорія узагальнених функцій, теорія функцій багатьох комплексних змінних, топологічні і алгебраїчні методи. Це інтенсивна взаємодія теоретичної фізики, математики і використання комп'ютерів у наукових дослідженнях призвело до значного розширення тематики, створення нових класів моделей і піднесло на новий рівень сучасну математичну фізику.

Постановка задач математичної фізики полягає в побудові математичних моделей, що описують основні закономірності досліджуваного класу фізичних явищ. Така постановка полягає у виводі рівнянь (диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних або алгебраїчних), яким задовольняють величини, що характеризують фізичний процес. При цьому виходять з основних фізичних законів, що враховують тільки найбільш істотні риси явища, відволікаючись від низки його другорядних характеристик. Такими законами є звичайно закони збереження, наприклад, імпульсу, енергії, числа частинок. Це призводить

до того, що для опису процесів різної фізичної природи, які проте мають загальні характерні риси, виявляється можна застосувати ті самі математичні моделі. Наприклад, математичні задачі для найпростішого рівняння гіперболічного типу, отриманого Ж.Д'Аламбером (1747 р.) для опису вільних коливань однорідної струни, виявляються придатними і для опису широкого кола хвильових процесів акустики, гідродинаміки, електродинаміки та ін. областей фізики. Аналогічно, рівняння, крайові задачі для якого спочатку вивчалися П.Лапласом (кін. XVIII ст.) у зв'язку з побудовою теорії тяжіння, надалі знайшло застосування при розв'язуванні багатьох проблем електростатики, теорії пружності, задач сталого руху ідеальної рідини тощо. Кожній математичній моделі фізики відповідає цілий клас фізичних процесів.

Для математичної фізики характерно також те, що багато загальних методів, які можна використати для розв'язування задач математичної фізики, розвилися з частинних способів розв'язування конкретних фізичних задач і у своєму первісному вигляді не мали строгого математичного обґрунтування і достатньої довершеності. Це відноситься до таких відомих методів розв'язування задач математичної фізики, як методи Рітца й Гальоркіна, до методів теорії збурень, перетворень Фур'є і багатьох інших, включаючи метод відокремлення змінних. Ефективне застосування всіх цих методів для розв'язування конкретних задач стало одним зі стимулів для їх строгого математичного обґрунтування й узагальнення, що призводить у деяких випадках до виникнення нових математичних напрямів.

Вплив математичної фізики на різні розділи математики виявляється й у тому, що розвиток математичної фізики, що відбиває вимоги природничих наук і запити практики, спричиняє переорієнтацію спрямованості досліджень у деяких вже сформованих розділах математики. Постановка задач математичної фізики, зв'язана з розробкою математичних моделей реальних фізичних явищ, призвела до зміни основної проблематики теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. Виникла теорія крайових задач, що дозволила згодом зв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних, з інтегральними рівняннями і варіаційними методами.

Вивчення математичних моделей фізики математичними методами не тільки дозволяє дослідити кількісні характеристики фізичних явищ і розрахувати із заданим ступенем точності хід реальних процесів, а й надає можливість глибокого проникнення до самої суті фізичних явищ, виявлення схованих закономірностей, передбачення нових ефектів. Прагнення до більш детального вивчення фізичних явищ призводить до все більшого ускладнення математичних моделей, які описують ці явища, що, своєю чергою, унеможлиблює застосування аналітичних методів дослідження цих моделей. Це пояснюється, зокрема, тим, що математичні моделі реальних фізичних процесів є, як правило, нелінійними, тобто описуються нелінійними рівняннями математичної фізики. Для детального дослідження таких моделей успішно застосовуються прямі чисельні методи з використанням комп'ютерів. Для типових задач математичної фізики використання чисельних методів зводиться до заміни рівнянь математичної фізики для функцій неперервного аргументу алгебраїчними рівняннями для сіткових функцій, заданих на дискретній множині точок (на сітці). Іншими словами, замість неперервної моделі середовища вводиться її дискретний аналог. Застосування чисельних методів у ряді випадків дозволяє замінити складний, трудомісткий і вартісний фізичний експеримент значно економічним математичним (чисельним) експериментом. Досить повно проведений математичний експеримент є основою для вибору оптимальних умов реального фізичного експерименту, вибору параметрів складних фізичних приборів, визначення умов виявлення нових фізичних ефектів тощо. У такий спосіб чисельні методи надзвичайно розширюють область ефективного використання математичних моделей фізичних явищ. Математична модель фізичного явища, як усяка модель, не може передати всіх рис явища. Встановити адекватність прийнятої моделі досліджуваному явищу можна тільки за допомогою критерію практики, зіставляючи результати теоретичних досліджень прийнятої моделі з даними експериментів.

У багатьох випадках про адекватність прийнятої моделі можна судити на підставі розв'язування обернених задач математичної фізики, коли про властивості досліджуваних явищ природи, недоступних для безпосереднього спостереження, робляться висновки за результатами їх

непрямих фізичних проявів. Для математичної фізики характерно прагнення будувати такі математичні моделі, які не лише дають опис і пояснення вже встановлених фізичних закономірностей досліджуваного кола явищ, а й дозволяють передбачити ще не встановлені закономірності. Класичним прикладом такої моделі є теорія всесвітнього тяжіння Ньютона, що дозволила не лише пояснити рух відомих до моменту її створення тіл Сонячної системи, але і передбачити існування нових планет. З іншого боку, нові експериментальні дані не завжди можуть бути пояснені в рамках прийнятої моделі. Для їхнього пояснення потрібне ускладнення моделі.

Наш курс являє собою матеріал для вивчення класичної математичної фізики і побудований таким чином, що відповідно має дві частини: перша присвячена математичній теорії поля, а друга – деяким рівнянням математичної фізики.

Запитання для самоконтролю:

1. Наведіть приклади скалярних фізичних величин.
2. Наведіть приклади векторних фізичних величин.
3. Наведіть приклади тензорних фізичних величин.
4. Що у фізиці називають математичним полем?
5. Яке основне завдання математичної фізики?
6. Що вивчає математична теорія поля?
7. З яких розділів складається класична математична фізика?

2. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

2.1. Скалярне поле і моделі фізичних систем

2.1.1. Скалярне поле.

2.1.2. Похідна скалярного поля за напрямком.

2.1.3. Лінії рівня.

2.1.4. Градієнт скалярного поля.

2.1.5. Векторне поле градієнта.

2.1.6.* Моделі фізичних систем.

2.1.1. Скалярне поле

Взагалі, *поле* – це функція координат і часу.

Щоб максимально спростити вивчення математичної теорії поля, ми обмежимося вивченням стаціонарних полів на площині і лише в декартових координатах, тобто:

Скалярним полем називають область площини, кожній точці якої відповідає деяке значення скалярної величини φ .

Оскільки на площині довільна точка задається координатами x, y , або радіус-вектором \vec{r} , то аналітично скалярне поле на площині можна подати у вигляді функції координат $\varphi = \varphi(x, y)$ або функції радіус-вектора $\varphi = \varphi(\vec{r})$.

Геометрично двовимірне скалярне поле $\varphi = \varphi(x, y)$ зображається як поверхня у просторі трьох вимірів (рис. 1), де кожній точці (x, y) площини xOy відповідає своя висота $\varphi = \varphi(x, y)$, бо $F(\varphi, x, y) = 0$.

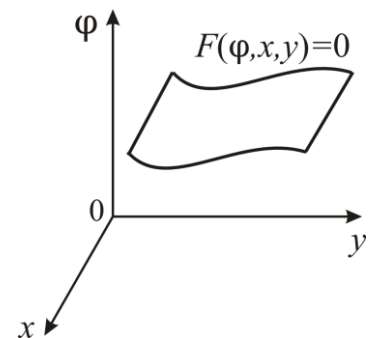


Рис. 1

2.1.2. Похідна скалярного поля за напрямком

Як відомо з математичного аналізу, важливою аналітичною характеристикою функції однієї змінної $f = f(x)$ є її похідна $\frac{df}{dx}$. Яка ж величина відіграє роль похідної у випадку скалярного поля? Ця величина також відома з математичного аналізу – це похідна за напрямком.

Нехай $\varphi(x, y)$ є неперервною, однозначною і диференційованою функцією координат x, y .

Похідною скалярного поля $\varphi(x, y)$ за деяким напрямком \vec{l} називають границю відношення приросту залежної змінної в цьому напрямку до переміщення, якщо це переміщення прямує до нуля:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta l}. \quad (2.1)$$

Зрозуміло, що $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ залежить від обраного напрямку (рис. 2). Отже, щоб охарактеризувати швидкість зміни φ від усіх x та y , потрібно знати безліч значень $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$.

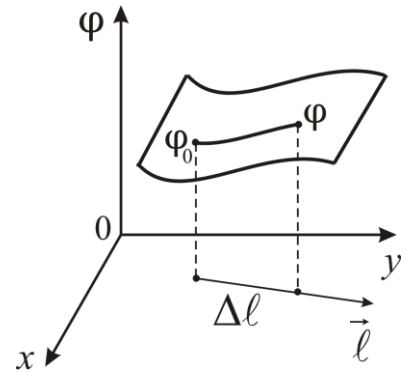


Рис. 2

2.1.3. Лінії рівня

Але тому, що $\varphi(x, y)$ неперервна і однозначна, то для характеристики швидкості зміни $\varphi(x, y)$ досить взяти дві похідні за двома взаємно перпендикулярними напрямками, наприклад $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Переконаємося в цьому, ввівши ще одну допоміжну характеристику поля – *еквіпотенціальну лінію* (лінію однакового рівня з точки зору геодезії або географії).

Еквіпотенціальна лінія – це геометричне місце точок площини, яким відповідає однакоке значення скаляру φ .

Зрозуміло, що рівняння еквіпотенціальної лінії має вигляд: $\varphi(x, y) = \varphi_0 = \text{const}$. Змінюючи значення сталої φ_0 , ми отримуємо сімейство ліній рівня. Необхідно мати на увазі й те, що при геометричній інтерпретації поля всі ці лінії належать не поверхні $\varphi = \varphi(x, y)$, а площині xOy , кожна з яких являє множину точок, яким відповідають рівні висоти φ (рис. 3).

У температурного поля лінії рівня називають ізотермами, у електростатичного – це лінії рівного потенціалу і т.і. Як відомо з електростатики, одержавши сімейство еквіпотенціальних ліній, можна за ними говорити про характер поля: де лінії рівня розміщені густо, там поле змінюється швидше, де рідко – змінюється мало, коли ж лінії паралельні прями – маємо однорідне поле.

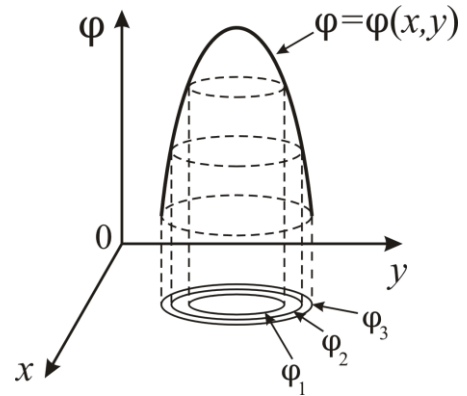


Рис. 3

Але якісних знань не досить. Нам необхідно знати більш точні характеристики. Нехай, нас цікавить швидкість зміни величини φ в околі точки M , що належить лінії рівня $\varphi = \text{const}$. Нехай, $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$, лінії дещо більшого рівня (рис. 4). Вектор $\vec{MM}' = MM' \cdot \vec{n}$ – спрямований вздовж нормалі \vec{n} в бік збільшення φ . Одночасно $\vec{MN}' = MN' \cdot \vec{\ell}$ – вектор спрямований вздовж довільного напрямку $\vec{\ell}$. Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\varphi' - \varphi}{MM'} \quad \text{і} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \ell} = \lim_{N' \rightarrow M} \frac{\varphi' - \varphi}{MN'}$$

Оскільки MM' і MN' – малі, $\Delta MM'N'$ – близький до прямокутного, тоді

$$MM' = MN' \cos\left(\widehat{\vec{\ell}, \vec{n}}\right)$$

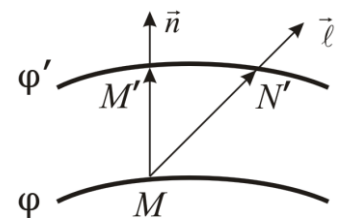


Рис. 4

Отже,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \ell} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos\left(\widehat{\vec{\ell}, \vec{n}}\right) \tag{2.2}$$

Таким чином: *в будь-якій точці поля похідна вздовж нормалі до лінії рівня більша похідної за будь-яким іншим напрямком.*

Тобто, щоб визначити всі $\frac{\partial\varphi}{\partial \ell}$ для характеристики зміни скалярного

поля, потрібно знати лише одну величину – $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ – похідну вздовж нормалі до лінії рівня в даній точці.

Відзначимо, що $\varphi(x, y)$ – однозначна, неперервна і диференційована, а тому можемо стверджувати, що через дану точку проходить лише одна лінія рівня, а $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ – також єдина!

2.1.4. Градієнт скалярного поля

Для характеристики скалярного поля в даній точці використовується особливий вектор, який називають *градієнтом* (градієнт – лат. *gradients* – крокуючий, ідучий).

Градiєнтом скалярного поля $\varphi(x, y)$ в точці M називають вектор, який спрямований вздовж нормалі \vec{n} до лінії рівня, що проходить через $t. M$ (в бік зростання φ) і чисельно рівний похідній від φ по цьому напрямку \vec{n} :

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (2.3)$$

Враховуючи (2.2), ми можемо дійти висновку, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \ell} = (\text{grad } \varphi)_\ell = \text{grad}_\ell \varphi. \quad (2.4)$$

Похідна за будь-яким напрямком $\vec{\ell}$ дорівнює проєкції градієнта на цей напрямок. Зокрема, похідні вздовж декартових осей координат

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \text{grad}_x \varphi; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \text{grad}_y \varphi. \quad (2.5)$$

Читаючи ці рівності справа наліво градієнт можна визначити й інакше: *Градiєнтом скалярної функції $\varphi(x, y)$ називають вектор, у якого проєкції на осі координат рівні відповідно частинним похідним φ за цими координатами. Тому:*

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j}. \quad (2.6)$$

Звідси випливає наступний вираз для абсолютного значення градієнта, тобто довжини вектора $\vec{\nabla} \varphi$:

$$|\text{grad } \varphi| \equiv |\vec{\nabla} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.7)$$

І нарешті, враховуючи (2.4), можна дати ще одне означення градієнта: *Градiєнт скалярного поля* $\varphi(x, y)$ в довільній точці – це вектор, що спрямований в бік найшвидшого зростання функції в цій точці і рівний похідній від функції за цим напрямком.

2.1.5. Векторне поле градієнта

Із усього, що було вище сказано випливає наступний наслідок: побудований в деякій точці скалярного поля вектор $\vec{\nabla}\varphi$ повністю характеризує аналітичні властивості функції $\varphi(x, y)$ в околі цієї точки. Таким чином, для аналітичної характеристики всього скалярного поля необхідно знати вектори $\vec{\nabla}\varphi$ у всіх точках цього поля, або інакше кажучи, необхідно знати *векторне поле градієнта*.

Якщо кожній точці $\vec{r}(x, y)$ деякої частини площини ставиться у відповідність певна величина \vec{a} , то говорять, що задане векторне поле $\vec{a}(\vec{r})$ або $\vec{a}(x, y)$.

Векторні поля графічно зображають у вигляді направлених відрізків, нанесеними в точках, що рівновіддалені одна від одної.

Відмітимо, що оскільки вектор \vec{a} на площині визначається двома скалярними проекціями a_x і a_y , тому аналітичне подання вектора матиме вигляд:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (2.8)$$

Тобто, векторне поле $\vec{a}(x, y)$ формально може бути заданим двома скалярними полями $(a_x(x, y), a_y(x, y))$.

Таким чином підходимо до висновку:

Диференціальною характеристикою («похідною») *скалярного поля*, що задане на площині, є векторне поле $\text{grad } \varphi(x, y)$, що визначене на тій же площині.

Розглянемо приклад:

Задане скалярне поле $\varphi = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}$, де $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ – довжина радіус-вектора. Визначити векторне поле градієнта поля φ .

Розв'язок.

Скористаємося аналітичним означенням градієнта (2.6):

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Оскільки $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, тому $\text{grad } \varphi = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j}$, а також те, що $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, тоді

$$\text{grad } \varphi = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

З'ясуємо зміст одержаного розв'язку.

1) Легко побачити, що екіпотенціальні лінії, розглянутого скалярного поля задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = \text{const}$, тобто являють собою кола з центром в початку координат.

2) Оскільки за умови φ залежить від відстані r , тоді в 3-х вимірному просторі ця функція геометрично буде зображати поверхню обертаня.

Якщо перетинати цю поверхню площиною $x = 0$, отримаємо лінію $\varphi = \frac{1}{y}$ – це правобічна гіпербола, асимптотами якої є вісі y і φ , тобто маємо гіперболоїд обертаня (рис. 5). Як видно з рисунку, в будь-якій точці площини xOy напрямок найбільшого зростання висоти спрямований до центру. При цьому, як

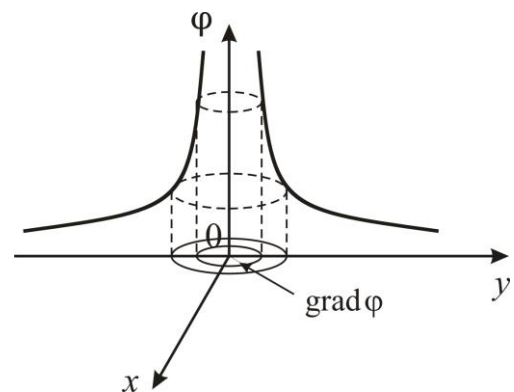


Рис. 5

видно із виду цієї поверхні, крутизна підйому φ при наближенні до центру зростає все швидше. Це відповідає тому, що довжина вектора $\vec{\nabla}\varphi$ буде обрахованою як

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Тобто, довжина вектора градієнта зростає обернено пропорційно квадрату радіус-вектора точки вздовж напрямку до початку координат:

$$|\vec{\nabla}\varphi| = \frac{1}{r^2}.$$

2.1.6.* Моделі фізичних систем

Фізична система – об’єкт фізичних досліджень, множина взаємопов’язаних елементів, відокремлена від навколишнього середовища й така, що взаємодіє з ним, як ціле. При цьому під елементами слід розуміти фізичні тіла або інші фізичні системи. Взаємодія фізичної системи з оточенням, а також зв’язок між окремими складовими фізичної системи реалізується за допомогою фундаментальних фізичних взаємодій (гравітаційна, електромагнітна, сильна, слабка), або взаємодій (сил), що зводяться до фундаментальних (тертя, пружність, вага тощо). Виокремлення конкретної фізичної системи із оточення залежить від конкретних мети й завдань дослідження.

Прикладами основних моделей фізичних систем є: атом; атомне ядро; галактика; ідеальний газ; коливальний контур, математичний маятник; Сонячна система, тверде тіло; телескоп тощо.

Класифікація фізичних систем можлива за різними ознаками:

За розділом фізики, що описує їх поведінку, фізичні системи поділяють на: механічні, термодинамічні, електричні, магнітні, електромагнітні, оптичні, квантові, атомні, ядерні тощо. Деякі складні фізичні системи потребують застосування законів та методів різних розділів фізики й не можуть бути зараховані до певного класу.

За характером взаємодії з оточенням виокремлюють ізольовані (замкнені) та відкриті системи.

При розгляді ізольованих фізичних систем часто передбачають, що система не має із середовищем зв'язків лише певного типу. Наприклад, передбачається, що на замкнену механічну систему не діють зовнішні сили й моменти сил (чи їх рівнодійна дорівнює нулю). Але допускається можливість теплообміну з навколишнім середовищем. Ізольована термодинамічна система не має теплообміну з навколишнім середовищем, але на неї можуть діяти механічні сили. Повністю ізольована фізична система є абстракцією, яка використовується при побудові моделей, призначених для розгляду внутрішніх процесів у фізичних системах, коли зовнішніми впливами можна знехтувати. Але, як випливає із загальної теорії систем, така система немає входів та виходів. Тому вона не може жодним чином впливати на навколишнє середовище, а зовнішній спостерігач не може тримати будь-якої інформації про таку систему.

За мінливістю властивостей фізичні системи поділяють на статичні й динамічні.

Властивості фізичних систем: Часто дія оточення на фізичну систему задається у вигляді полів: електричного поля, магнітного поля, тощо. Такі поля називаються зовнішніми на відміну від полів, які створюють тіла в самій фізичній системі.

Іншими видами дії на фізичну систему є зовнішнє опромінення, освітлення, тощо.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають скалярним полем?
2. Як аналітично задати скалярне поле на площині?
3. Що називають похідною скалярного поля за напрямом?
4. Що називають екіпотенціальною лінією? Записати її рівняння?
5. Дати інваріантне означення градієнта скалярного поля.
6. Дати аналітичне означення градієнта скалярної функції двох змінних.
7. Записати аналітичний вигляд оператора «набла».
8. Що розуміють під векторним полем градієнта?
9. Що називають фізичною системою?
10. Як класифікують фізичні системи?
11. Сформулюйте основні властивості фізичних систем.

2.2. Векторні поля

2.2.1. Аналітичне означення вектора.

2.2.2. Векторні поля та їх диференціальна характеристика.

2.2.3.* Приклади фізичних задач: Відшукання густини середовища. Стаціонарне поле швидкостей.

2.2.1. Аналітичне означення вектора

Для аналітичної характеристики скалярного поля мало знати його вигляд $\varphi(x, y)$, потрібно також визначити $\text{grad } \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$, як основну його диференціальну властивість. Здається, що вектор градієнта заданий аналітично введено лише для зручності (замість двох скалярів (чи трьох) введено одну величину). Але $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ – це не зовсім скаляри, а так звані псевдоскаляри, бо їх значення змінюються при виборі іншої системи відліку координат. Причина цього факту полягає в тому, що ці величини існують не незалежно, вони є проекціями єдиного вектора $\vec{\nabla} \varphi$ на осі координат. За істинний скаляр приймають лише той, що однаковий у всіх системах координат.

Аналітичний зміст, що визначає властивості скалярного поля, має лише вектор $\vec{\nabla} \varphi$, тоді як $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ залежать від вибору осей координат.

Вектори – це певні геометричні об'єкти – напрямлені відрізки.

Вектори додаються за правилом багатокутника векторів, їх можна перемножити на скаляр, множити один на один скалярно і векторно, проводити інші геометричні операції. Всі ці операції можуть бути зведеними до аналітичних операцій, якщо скористатись методом координат і використати проекції вектора на осі координат xOy :

$$\vec{a} = \{a_x, a_y\}.$$

Але, коли обрати нові вісі $x'Oy'$, повернувши їх відносно старих xOy на певний кут, то отримаємо нові проекції даного вектора \vec{a} в новій системі координат відносно старої:

$$\begin{cases} a'_x = a_x \cos(\hat{x}', x) + a_y \cos(\hat{x}', y), \\ a'_y = a_x \cos(\hat{y}', x) + a_y \cos(\hat{y}', y). \end{cases} \quad (2.9)$$

Але так або інакше головне те, що обравши певну систему координат, ми можемо всі операції з векторами подати як алгебраїчні операції з проєкціями векторів на ці вісі.

Наприклад:

$$\begin{aligned} 1. \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= \{a_x + b_x, a_y + b_y\}; \\ 2. \vec{b} = \lambda \vec{a} &= \{\lambda a_x, \lambda a_y\}; \\ 3. \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y; \\ 4. [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Введення скалярних проєкцій вектора дало змогу не лише спростити операції над ними, але й дозволило розглядати вектор не як геометричні, а як деякі алгебраїчні величини. Тому можна дати вектору й таке аналітичне означення:

$$\begin{cases} a'_x = \alpha_{xx} a_x + \alpha_{xy} a_y \\ a'_y = \alpha_{yx} a_x + \alpha_{yy} a_y \end{cases} \text{ або } \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} \text{ або } a'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} a_k \quad (2.10)$$

Вектором називають деяку величину \vec{a} , що характеризується в кожній системі координат xOy двома скалярами a_x і a_y , які при переході до іншої системи координат $x'Oy'$ перетворюються за допомогою формул, приведених вище, в нові скаляри a'_x і a'_y .

Це означення складніше геометричного, але має свої переваги:

1) Поняття вектора таким чином можна узагальнити на 3-вимірний і n -вимірний простори, а також на комплексний простір.

2) Можна абстрагуватись від геометричного образу вектора (напрявлений відрізок) і розглядати вектор як величину довільної фізичної природи, величину алгебраїчну.

3) Узагальнити поняття вектора і ввести більш складні математичні величини – тензори.

4) Проекції вектора в різних системах різні, але ϵ і незмінна величина – довжина вектора, що дорівнює $a_x^2 + a_y^2 = a'_x{}^2 + a'_y{}^2 = inv$.

2.2.2. Векторні поля та їх диференціальна характеристика

Якщо кожній точці площини $\vec{r}(x, y)$ (або її частині) відповідає деякий вектор $\vec{a}(\vec{r})$, то говорять, що задана векторна функція координат або ж *векторне поле* (векторна функція від векторного аргументу).

Швидкість зміни векторної величини \vec{a} в околі довільної точки M – важлива характеристика цього поля. Визначити цю швидкість означає відшукати похідну векторної функції \vec{a} за векторним аргументом \vec{r} .

Спочатку визначимо похідну від вектора в даному напрямі $\vec{\ell}$:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\ell}} = \lim_{\Delta \vec{\ell} \rightarrow 0} \frac{\vec{a}_{\ell} - \vec{a}_0}{\Delta \vec{\ell}}, \quad (2.11)$$

де \vec{a}_0 і \vec{a}_{ℓ} – значення векторної функції \vec{a} в точці M і близько розташованої до неї на прямій $\vec{\ell}$ в точці M_{ℓ} . Ця похідна є вектор. Для

іншого напрямку $\vec{\ell}'$ одержимо похідну $\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\ell}'}$ – інший вектор. Але це не

означає, що для повної характеристики швидкості зміни векторного поля в даній точці потрібно знати безліч таких величин. Як і для скалярного поля необхідно знати лише дві векторні похідні вздовж двох взаємно

перпендикулярних напрямків, наприклад, $\frac{d\vec{a}}{d\vec{x}}$ і $\frac{d\vec{a}}{d\vec{y}}$. Тоді похідна за

довільним напрямком буде просто пов'язана з цими похідними. Дійсно, \vec{a} має дві компоненти a_x і a_y , отже, векторне поле в даній системі координат може бути замінене двома скалярними полями: $a_x(x, y)$ і $a_y(x, y)$, а характеристикою зміни скалярного поля є градієнт. Тобто, два вектори градієнта $\vec{\nabla} a_x$ і $\vec{\nabla} a_y$, що побудовані в досліджуваній точці векторного поля \vec{a} , повністю в околі цієї точки характеризуватимуть зміну поля \vec{a} .

Але це не означає, що похідною векторного поля є два вектори, перш за все, ці вектори $\vec{\nabla} a_x$ і $\vec{\nabla} a_y$ – є псевдовекторами, не справжніми векторами, бо вони залежать як від \vec{a} , так і від вибору системи координат.

Коли обирати нову систему координат, наприклад, $x'0y'$ замість $x0y$, тоді одержимо нові проекції вектора $\vec{a} - a'_x$ і a'_y , а отже й інші вектори градієнта $\vec{\nabla}\vec{a} - \vec{\nabla}a'_x$ і $\vec{\nabla}a'_y$.

Тому поведінка векторної функції $\vec{a}(\vec{r})$ в будь-якій системі координат характеризується парою векторів $\vec{\nabla}a_x$ і $\vec{\nabla}a_y$; але тому що $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$, що характеризує $\vec{a}(\vec{r})$ і повинна бути незалежною від вибору системи відліку, тому потрібно $\vec{\nabla}a_x$ і $\vec{\nabla}a_y$ розглядати як деякі складові величини більш складної математичної природи ніж вектори, їх називають тензорами. (*Тензор* – лат *tendere* – натягати, напружити.)

Тензор – це новий тип математичних величин, більш складної математичної природи, ніж скаляр та вектор, він дорівнює похідній від векторної функції вздовж векторного напрямку, тобто $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$.

Тензор – інваріантна математична величина, що в кожній системі координат визначається парою (двовимірний простір) векторних складових (вектор же в свою чергу складається з пари скалярних величин).

2.2.3.* Приклади фізичних задач: Знаходження густини середовища. Стационарне поле швидкостей

Відшукання густини середовища. Найважливішим локальним параметром потоку є його густина. Якщо в процесі еволюції середовища маса кожної його порції зберігається, то густина і швидкість потоку пов'язані рівнянням неперервності:

$$(\rho v)'_x + \rho'_t = 0. \quad (2.12)$$

Припустимо, що поле швидкостей $v(x,t)$ задано, а також відомо розподіл густин у початковий момент часу:

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x). \quad (2.13)$$

Як знайти поле густин $\rho(x,t)$ в будь-який момент часу?

Якщо розкрити в рівнянні (2.12) дужки і переписати його у вигляді

$$v(x,t)\rho'_x + \rho'_t = -v'_x(x,t)\rho, \quad (2.14)$$

тоді зрозуміло, що воно є частинним випадком рівняння:

$$v(x,t)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = g(x,t,T), \quad (2.15)$$

де T – це температура, яку можна виміряти в будь-якій точці середовища у будь-який момент часу, $g(x,t,\rho)$ – неоднорідна функція координат, часу і температури відповідно. Цього слід було очікувати, оскільки густина порцій середовища в процесі його еволюції змінюється. Для розв’язку цього рівняння при початковій умові (2.13) необхідно перейти до лагранжевих координат (ξ, t) , тобто розглянути рівняння (2.14) вздовж його характеристик – графіків руху частинок в потоці. Це дає:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v'_x(\varphi(t; t_0; \xi), t)\rho. \quad (2.16)$$

Коли $\xi = \text{const}$ відокремимо змінні в рівнянні (2.16) і отримаємо з врахуванням умови (2.13):

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = -v'_x dt, \quad \ln \rho - \ln \rho_0 = -\int_{t_0}^t v'_x d\tau, \quad (2.17)$$

звідки матимемо:

$$\rho = \rho_0(\xi) \exp \left[-\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau; t_0; \xi), \tau) d\tau \right]. \quad (2.18)$$

Відповідь можна подати і в ейлерових координатах, підставивши $\xi = \varphi(t_0; t; x)$ і відмітивши, що $\varphi(\tau; t_0; \varphi(t_0; t; x)) \equiv \varphi(\tau; t; x)$. Отримуємо:

$$\rho = \rho_0(\varphi(t_0; t; x)) \exp \left[-\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau; t; x), \tau) d\tau \right]. \quad (2.19)$$

Цей розв’язок можна було б написати відразу, якщо відмітити, що

$$\exp \left[-\int_{t_0}^t v'_x(\varphi(\tau; t; x), \tau) d\tau \right] = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varphi'_x(t_0, t, x). \quad (2.20)$$

Таким чином (2.18) з урахуванням (2.20) можна записати й так:

$$\rho = \rho_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho_0(\xi) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} = \rho_0(\xi) [\varphi'_\xi(t; t_0; \xi)]^{-1}. \quad (2.21)$$

Зрозуміло, що в процесі еволюції мала порція середовища розтягується в $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ разів (рис. 6), тому густина множиться на $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

Покажемо, як зміниться форма розв'язку, якщо швидкість середовища задана в лагранжевих координатах, $v = v(\xi, t)$. Оскільки закон руху частинки має вигляд:

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v(\xi, \tau) d\tau, \text{ тоді } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \int_{t_0}^t v'_{\xi}(\xi, \tau) d\tau.$$

Тому формула (2.21) дає:

$$\rho = \rho_0(\xi) \left[1 + \int_{t_0}^t v'_{\xi}(\xi, \tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (2.22)$$

Розглянемо деякі *частинні випадки*:

а) У самому простому випадку, коли задано однорідне поле швидкостей, тобто $v = v(t)$, матимемо:

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau, \text{ тобто } \xi = x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau,$$

а тому розв'язок (2.21) набуває вигляду:

$$\rho = \rho_0(\xi) = \rho_0 \left(x - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right). \quad (2.23)$$

Загалом цей розв'язок є зрозумілим і безпосереднім: для однорідного поля швидкостей відстань між частинками залишається незмінною, тому густина середовища в точці x в момент t дорівнює густині в момент t_0 в точці ξ , що приходить в час t в координату x .

Зокрема, якщо додатково задано, що середовище в початковому стані було однорідним, тобто $\rho_0(\xi) \equiv \rho_0 = \text{const}$, тоді і $\rho(x, t) \equiv \rho_0$ – середовище залишається однорідним, його густина не змінюється.

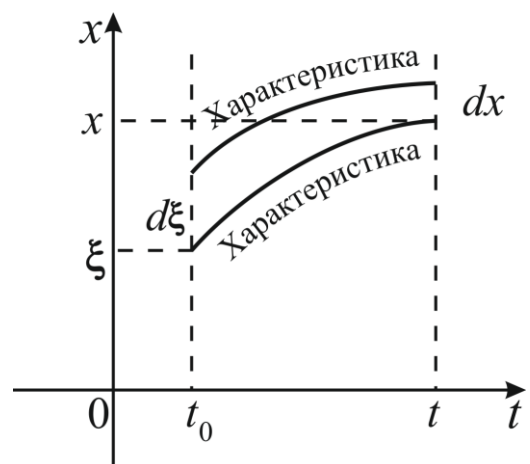


Рис. 6

б) Припустимо тепер, що середовище в початковому стані було однорідним, але поле швидкостей неоднорідне. Тоді із (2.21) отримуємо, що

$$\rho = \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho_0 \Phi'_x(t_0; t; x).$$

В процесі еволюції середовище перестає бути однорідним: в зоні зближення частинок густина зростає, а в зоні їх взаємного віддалення густина зменшується.

в) Розглянемо задачу про переміщення одиничної маси, яка спочатку сконцентрована на нескінченно малому інтервалі в точці ξ_0 . Для цього потрібно припустити, що $\rho_0(\xi) = \delta(\xi - \xi_0)$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки густина ρ лінійно залежить від її початкового значення $\rho_0(\xi)$, то розв'язок G у вказаному частковому випадку буде слугувати функцією впливу загальної задачі про побудову густини за її початковим розподілом.

Розв'язок можна записати в різних формах. Так, в силу формул (2.21) і (2.22) отримуємо розв'язок в лагранжевих координатах:

$$G = \delta(\xi - \xi_0) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}^{-1} = \delta(\xi - \xi_0) \left[1 + \int_{t_0}^t \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} dt \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Щоб отримати розв'язок в ейлерових координатах, відмітимо, що в процесі еволюції маса залишається одиничною і сконцентрованою на нескінченно малому інтервалі, але вже розташованому в точці $\varphi(t; t_0; \xi_0)$; таким чином,

$$G = \delta(x - \varphi(t; t_0; \xi_0)). \quad (2.25)$$

Права частина відмінна від нуля лише в нескінченно вузькій смузі, що заштрихована на рис. 7 і обмежена двома сусідніми характеристиками, тобто інтегральними кривими рівняння $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$, причому інтеграл від цієї функції за будь-якою прямою, що

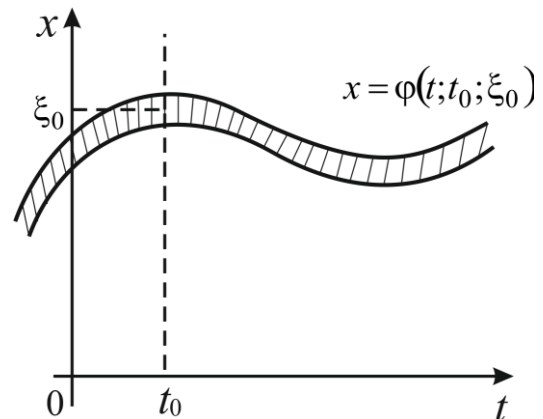


Рис. 7

паралельна вісі x , дорівнює 1. Справедливою є також формула, що випливає з (2.19) та (2.20):

$$G = \delta(\varphi(t_0; t; x) - \xi_0) \varphi'_x(t_0; t; x). \quad (2.26)$$

Стаціонарне поле швидкостей. Нехай задано стаціонарне поле швидкостей, тобто $v = v(x)$. Якщо поле густин стаціонарне, тобто $\rho = \rho(x)$, то ці дві функції пов'язані співвідношенням:

$$\rho(x) \cdot v(x) = \text{const},$$

тобто

$$\rho(x) = \frac{\text{const}}{v(x)}, \quad (2.27)$$

це випливає безпосередньо із закону збереження маси і формально з рівняння неперервності (2.12).

Із формули (2.27) видно, що стаціонарний розв'язок цієї задачі неможливий, якщо функція $v(x)$ змінює знак, тобто якщо поле швидкостей в різних точках вісі x може мати різний напрямок. Так буде, якщо в середовищі є стійкі та нестійкі точки рівноваги, з обох боків від яких поле швидкостей спрямовано до цієї точки або відповідно від неї.

Для загального – нестаціонарного – поля густин (але, як і раніше, стаціонарного в ейлеревих координатах поля швидкостей), має місце співвідношення вигляду (2.27) в лагранжевих координатах. Щоб перевірити це, помножимо обидві частини рівняння нерозривності (2.12) на $v(x)$; оскільки v не залежить від t , то отримане рівняння можна переписати у вигляді:

$$v(\rho v)'_x + (\rho v)'_t = 0.$$

Якщо тепер перейти до координат Лагранжа і згадати вираз $\frac{dT}{dt} = v \frac{dT}{dx} + \frac{dT}{dt}$ (для температури T) для похідної за часом в лагранжевих змінних, то останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\frac{d(\rho v)}{dt} = 0.$$

Значить, хоча ρ і v поодиноці залежать не лише від ξ , але й від t , потік маси ρv може залежати лише від ξ , тобто для кожної малої порції частинок в процесі її еволюції цей потік залишається незмінним.

Цю властивість легко пояснити, розглянувши відповідне сімейство характеристик. Для стаціонарного поля швидкостей це сімейство інваріантне відносно перенесення вздовж вісі t . Розглянемо (рис. 8) дві характеристики (l) , що отримані одна з одної перенесенням на малий проміжок часу τ . Оскільки маса середовища на інтервалі, що обмежений двома характеристиками, не залежить від часу, то з точністю до малих вищого порядку малості (див. рис. 8), $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$, звідки

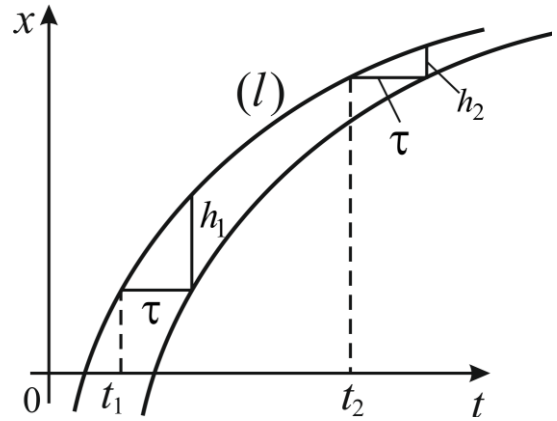


Рис. 8

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2/\tau}{h_1/\tau} = \frac{(dx/dt)_2}{(dx/dt)_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

тобто $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ і в силу довільності t_1 і t_2 отримуємо необхідну властивість.

За допомогою доведеної властивості легко розв'язати задачу про побудову поля густин, що задовольняє заданому початковому розподілу (2.27). І справді, в силу сказаного буде виконуватись умова:

$$\rho(x, t)v(x) = \rho_0(\xi)v(\xi),$$

звідки

$$\rho(x, t) = \frac{v(\xi)}{v(x)} \rho_0(\xi) = \frac{v(\varphi(t_0, t, x))}{v(x)} \rho_0(\varphi(t_0, t, x)). \quad (2.28)$$

Для стаціонарного поля швидкостей рівняння характеристик не складно виразити у квадратурах, так як в диференціальному рівнянні $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$ для характеристик розділяються змінні: $\frac{dx}{dt} = v(x)$, $\frac{dx}{v(x)} = dt$,

звідки, позначивши $\int \frac{dx}{v(x)} = \omega(x)$ (точніше $\omega(x)$ є будь-яка одна з

перетворених функцій від $\frac{1}{v(x)}$), отримаємо:

$$\omega(x) - \omega(\xi) = t - t_0, \quad \xi = \zeta(\omega(x) - t + t_0), \quad (2.29)$$

де під ζ розуміють обернену функцію до $\omega(x)$. Останній вираз для ξ можна підставити в (2.28).

Прослідкуємо за асимптотичною поведінкою розв'язку коли $t \rightarrow \infty$, прийнявши спочатку для спрощення, що середовище вздовж всієї вісі рухається в один й той саме бік, наприклад $v(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$), а коли $x \rightarrow -\infty$ (тобто в напрямку, звідки приходять частинки) середовище однорідне: $\rho_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \rho_0$, $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v_0$. Оскільки при будь-якому фіксованому x буде $\xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$, тоді із (2.28) отримуємо:

$$\rho(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{v(x)} \rho_0. \quad (2.30)$$

Таким чином, тут відбувається процес встановлення рівноваги, тобто потік на межі переходить в стаціонарний, для якого розподіл густини не залежить від її розподілу в початковий момент часу, а визначається лише полем швидкостей і значенням густини за умови, що $x \rightarrow -\infty$.

Корисно відмітити, що цей процес встановлення рівноваги не володіє властивістю рівномірності, тобто не потрібно вважати, що коли пройде багато часу, то розподіл густини буде відразу на всій вісі x близьким до граничного. Це особливо добре видно, якщо врахувати $v(x) \equiv v_0 = \text{const}$, а тому $\rho(x, t) = \rho_0(x - v_0 t)$. В цьому випадку лініями рівня функції $\rho(x, t)$ в площині x, t слугують лінії $x - v_0 t = \text{const}$, тобто характеристики. На рис. 9, б показано приклад графіків густини в послідовні моменти часу $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, а на рис. 9, а – відповідне сімейство характеристик, причому жирно позначена характеристика, що відповідає максимальному значенню густини. З ростом t відхилення ρ від граничного значення ρ_0 переміщуються в бік $x \rightarrow \infty$, не зменшуючись за амплітудою, так що якщо брати $x \rightarrow \infty$, то наближення ρ до ρ_0 в них буде відбуватися все пізніше і пізніше, для як завгодно великого t будь-де на вісі x та й знайдуться

точки, в яких відхилення ρ від ρ_0 буде кінцевим, немалим. Якщо в цьому прикладі використати перетворення Галілея $x \rightarrow \tilde{x} = x - v_0 t$, то в новій системі відліку буде $\tilde{v}(x) \equiv 0$, тобто ми отримуємо статичну картину, в якій $\rho(x') \equiv \rho_0(x')$ не змінюється з часом і, зокрема, не прямує до однорідного розподілу. Звідси також видно нерівномірність прямування поля $\rho(x, t)$ у вихідній системі відліку до однорідного поля. Якщо ж розглядати процес встановлення рівноваги не на всій вісі x , а на будь-якому фіксованому інтервалі вигляду $-\infty < x \leq x_0$, то на ньому цей процес буде рівномірним, оскільки область нерівномірності якби вимивається, зноситься потоком вправо.

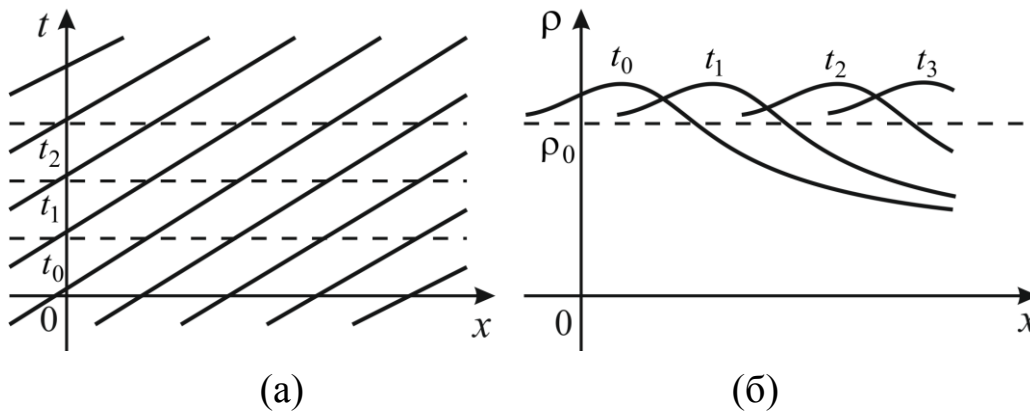


Рис. 9

Розглянемо тепер випадок, коли $v(x)$ не зберігає знаку. Тоді кожному значенню $x = a$, де $v(a) = 0$, відповідає точка спокою потоку, тобто положення рівноваги частинки. Якщо $v'(a) < 0$, тоді $v(x)$ змінює знак з плюса на мінус, коли x , зростаючи переходить через a ; тоді поблизу точки $x = a$ рух частинок по обидва боки від a напрямлений до a , тому розглядуване положення рівноваги буде асимптотично стійким. Іншими словами, частинки, розташовані в початковий момент часу поблизу точки a , будуть і при подальшому русі перебувати поблизу цієї точки a коли $t \rightarrow \infty$ будуть прямувати до неї. За умови $v'(a) > 0$, і, взагалі, при розподілі знаку функції $v(x)$ поблизу точки $x = a$, відмінного від описаного вище, положення рівноваги частинки в точці a буде нестійким.

На рис. 10 показано розподіл густини середовища в деякий момент часу $t > t_0$ при законі розподілу швидкостей, показаному на тому ж рисунку зверху, і початковому розподілі густин $\rho_0(x) \equiv \rho = \text{const}$. Із трьох положень рівноваги a_2 – асимптотично стійке, тоді як a_1 і a_3 – нестійкі.

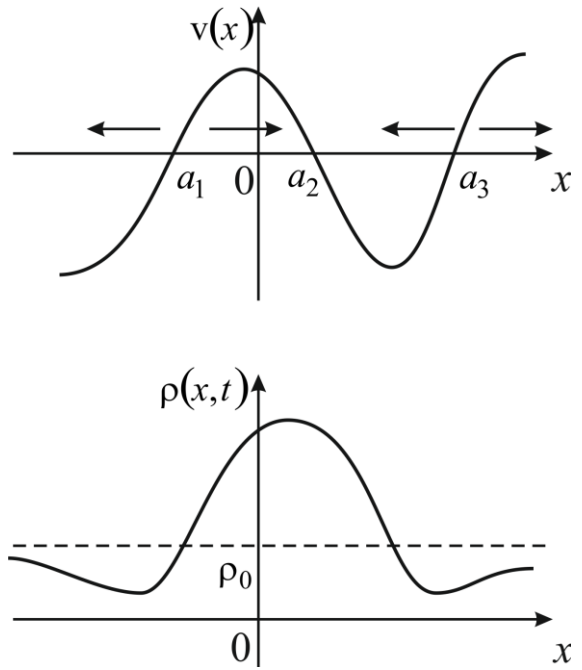


Рис. 10

Закон зміни густини середовища в точці рівноваги $x = a$ легко обчислити за формулою (2.19), враховуючи, що $\varphi(t_0, t, a) \equiv a$

$$\rho|_{x=a} = \rho_0(a) \exp \left[- \int_{t_0}^t v'(a) d\tau \right] = \rho_0(a) \exp [- v'(a)(t - t_0)].$$

Таким чином, при $v'(a) \neq 0$ отримується експоненціальне зростання густини у випадку стійкості точки рівноваги та експоненціального зникнення – у випадку нестійкої точки рівноваги.

Запитання для самоконтролю:

1. Дати геометричне означення вектора.
2. Дати аналітичне означення вектора.
3. Поясніть переваги аналітичного означення вектора.
4. Наведіть приклади алгебраїчних операцій над векторами.
5. Що називають векторним полем?
6. Дати означення похідної векторного поля за напрямом. Що є найважливішим локальним параметром потоку?
7. Запишіть вигляд рівнянням неперервності, що пов'язує густину і швидкість потоку.
8. Який вигляд мають стаціонарне поле густин і швидкостей?

2.3. Тензори та їх властивості

2.3.1. Тензори та їх властивості.

2.3.2. Тензорна алгебра.

2.3.3. Головні напрямки тензора. Інваріанти.

2.3.1. Тензори та їх властивості

Тензором називають величину \hat{P} , що характеризується в системі координат xOy двома векторами \vec{p}_x і \vec{p}_y , які перетворюються при переході до іншої системи координат $x'Oy'$ у нові вектори \vec{p}'_x і \vec{p}'_y згідно формул:

$$\begin{cases} \vec{p}'_x = \vec{p}_x \cos(\hat{x}', x) + \vec{p}_y \cos(\hat{x}', y); \\ \vec{p}'_y = \vec{p}_x \cos(\hat{y}', x) + \vec{p}_y \cos(\hat{y}', y). \end{cases} \quad (2.31)$$

Вектори \vec{p}_x і \vec{p}_y називають складовими тензора \hat{P} по осях Ox і Oy . Вектори – це частинки тензора, але характеризують його лише в розглядуваній системі координат.

Можна також записати, що:

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j}; \\ \vec{p}_y &= p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j}, \end{aligned}$$

Тобто тензор на площині можна описати за допомогою чотирьох скалярних величинами p_{xx} , p_{xy} , p_{yx} , p_{yy} , які називають *компонентами тензора*. Їх можна також записати у вигляді таблиці (матриці). Матриця – *лат. matrix* – джерело, початок.

$$\hat{P} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{vmatrix}.$$

Для спрощення запису (і для n -вимірному простору) координати x і y замінюють на номери 1 і 2. Тоді вектор і тензор в афінній системі координат матиме відповідний вигляд:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^2 a_i \vec{e}_i; \quad \hat{P} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.32)$$

Нагадаємо, що при переході до нової системи координат, елементи вектора змінюються за законом:

$$a'_i = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} a_j. \quad (2.33)$$

Тоді складові тензора будуть перетворюватись за законом:

$$\vec{p}'_i = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \vec{p}_j. \quad (2.34)$$

Якщо ж об'єднати обидві формули, тоді отримаємо для компонент тензора:

$$p'_{ij} = \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} p_{k\ell}. \quad (2.35)$$

«Нові» компоненти тензора – це лінійні комбінації «старих». Тому можна дати й інше означення тензора:

Тензором називають величину, що характеризується в системі координат x_0y_0 сукупністю чотирьох чисел p_{ij} , що записуються у вигляді

матриці $\hat{P} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{vmatrix}$ і перетворюються при переході до іншої системи

координат $x'_0y'_0$ за законом $p'_{ij} = \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} p_{k\ell}$.

Ми розглядаємо, поки що, лише прямокутні декартові системи координат на площині, а тому такі тензори називають *ортогональними афінними тензорами II рангу*. (Афінний – лат. *affinis* – суміжний, сусідній). Тому, виходячи з такого розгляду, *вектор* – це тензор першого рангу, *скаляр* – тензор нульового рангу.

Найпростіші типи тензорів, складові орти якого \vec{i}, \vec{j} :

$$1) \text{Нульовий } \hat{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.36)$$

$$2) \text{Одиничний } \hat{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.37)$$

Тензори, які мають однаковий вигляд у будь-якій системі координат:

$$3) \text{Симетричний } \hat{S}(s_{ik} = s_{ki}), \hat{S} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.38)$$

$$4) \text{ Антисиметричний } \hat{A}(a_{ik} = -a_{ki}), \hat{A} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

5) Окремий вид тензора – діада \hat{D} , складові якої в будь-якій системі координат є колінеарні вектори (колінеарні – паралельні одній і тій самій прямій):

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ \lambda d_{11} & \lambda d_{12} \end{vmatrix}. \quad (2.40)$$

2.3.2. Тензорна алгебра

Над тензорами, які є своєрідними математичними величинами і завжди характеризують певні фізичні властивості тіл, явищ, процесів, можна виконувати ряд алгебраїчних операцій (додавати, множити на число, множити тензор на тензор і т.п.). Тому множина тензорів утворює алгебру, що є узагальненням векторної алгебри.

Сумою двох тензорів $\hat{P}^{(1)}$ і $\hat{P}^{(2)}$ називають тензор $\hat{P} = \hat{P}^{(1)} + \hat{P}^{(2)}$, компоненти якого рівні сумах компонентів складових:

$$p_{ik} = p_{ik}^{(1)} + p_{ik}^{(2)}. \quad (2.41)$$

Добутком тензора \hat{P} на число λ називають тензор $T = \lambda P$, компоненти якого t_{ik} рівні добутку відповідних компонент p_{ik} на λ , тобто:

$$t_{ik} = \lambda p_{ik}. \quad (2.42)$$

Узагальненням цих двох операцій є *лінійна комбінація кількох тензорів*. Коли є сукупність n тензорів $\hat{P}^{(1)}, \hat{P}^{(2)}, \dots, \hat{P}^{(n)}$, тоді тензор \hat{T} називають лінійною комбінацією заданих, тобто

$$\hat{T} = \sum_i \lambda_i \hat{P}^{(i)}, \text{ якщо } t_{ik} = \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \lambda_2 p_{ik}^{(2)} + \dots + \lambda_n p_{ik}^{(n)}. \quad (2.43)$$

Перестановка індексів (*транспонування*) – це операція, що перетворює тензор \hat{P} з компонентами p_{ik} в трансформований тензор \tilde{P} , компоненти якого є p_{ki} . Тоді для симетричного і антисиметричного тензорів:

$$\hat{S} = \tilde{S}; \hat{A} = -\tilde{A}.$$

І як *наслідок*: Будь-який тензор \hat{P} можна подати і притому єдиним способом як суму його симетричного і антисиметричного тензорів: $\hat{P} = \hat{S} + \hat{A}$. Якщо

$$\left. \begin{array}{l} \hat{T} + \tilde{\hat{T}} = 2\hat{S} \\ \hat{T} - \tilde{\hat{T}} = 2\hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{T} + \tilde{\hat{T}}) \\ \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{T} - \tilde{\hat{T}}) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{S} = \hat{T} = \frac{1}{2}(\hat{T} + \tilde{\hat{T}}) + \frac{1}{2}(\hat{T} - \tilde{\hat{T}}).$$

Скалярним добутком тензора $\hat{P} = \bar{e}_1 \bar{p}_1 + \bar{e}_2 \bar{p}_2$ на вектор $\bar{a} = \bar{e}_1 a_1 + \bar{e}_2 a_2$ справа називають новий вектор

$$\bar{a}' = (\hat{P}, \bar{a}) = \bar{e}_1 (\bar{p}_1, \bar{a}) + \bar{e}_2 (\bar{p}_2, \bar{a}). \quad (2.44)$$

Компоненти нового вектора \bar{a}' дорівнюють відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_1 = p_{11} a_1 + p_{12} a_2 \\ a'_2 = p_{21} a_1 + p_{22} a_2 \end{array} \right\}, \quad (2.45)$$

або скорочено:

$$a'_j = \sum_k p_{jk} a_k. \quad (2.46)$$

Скалярним добутком тензора $\hat{P} = \bar{e}_1 \bar{p}_1 + \bar{e}_2 \bar{p}_2$ на вектор $\bar{a} = \bar{e}_1 a_1 + \bar{e}_2 a_2$ зліва називають вектор

$$\bar{a}'' = (\bar{a}, \hat{P}) = (\bar{a}, \bar{e}_1) \bar{p}_1 + (\bar{a}, \bar{e}_2) \bar{p}_2. \quad (2.47)$$

Компоненти вектора \bar{a}'' дорівнюють

$$\left. \begin{array}{l} a''_1 = a_1 p_{11} + a_2 p_{21} \\ a''_2 = a_1 p_{12} + a_2 p_{22} \end{array} \right\}, \quad (2.48)$$

або в скороченій формі:

$$a''_j = \sum_k a_k p_{kj}. \quad (2.49)$$

Легко бачити, що скалярний добуток тензора \hat{P} на вектор \bar{a} зліва дорівнює добутку транспонованого тензора $\tilde{\hat{P}}$ на той самий вектор справа і навпаки:

$$(\hat{P}, \bar{a}) = (\bar{a}, \tilde{\hat{P}}). \quad (2.50)$$

Для симетричного тензора: $(\hat{S}, \bar{a}) = (\bar{a}, \hat{S})$. (2.51)

Для антисиметричного тензора: $(\hat{A}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \hat{A})$. (2.52)

Для скалярного добутку вектора і тензора зручно користуватись правилом множення матриць. Подамо вектор \vec{a} як деяку матрицю – стовбець, або рядок, яка складається із компонентів вектора:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ або } \vec{a} = (a_1, a_2).$$

Тоді, скалярним добутком тензора \hat{P} на вектор \vec{a} справа називають новий вектор \vec{a}' , який визначають за правилом множення двох матриць – матриці, компоненти якої складають компоненти тензора співмножника і матриці із компонентами матриці-стовбця відповідного вектора:

$$\vec{a}' = (\hat{P}; \vec{a}) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Скалярним добутком тензора \hat{P} на вектор \vec{a} зліва називають новий вектор \vec{a}'' , який визначають за правилом множення двох матриць – матриці, компоненти якої складають компоненти вектора-строчки і матриці із компонентами тензора співмножника:

$$\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{P}) = (a_1, a_2) \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = (a_1p_{11} + a_2p_{21}, a_1p_{12} + a_2p_{22}). \quad (2.54)$$

Скалярним добутком двох тензорів \hat{P} і \hat{T} називають тензор \hat{F} , матриця компонентів якого дорівнюють добутку матриць тензорів співмножників, тобто $f_{kl} = \sum p_{kj}t_{jl}$:

$$\hat{F} = \hat{P} \cdot \hat{T} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}t_{11} + p_{12}t_{21} & p_{11}t_{12} + p_{12}t_{22} \\ p_{21}t_{11} + p_{22}t_{21} & p_{21}t_{12} + p_{22}t_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.55)$$

Існують ще більш складні операції над тензорами, але ми їх розглядати не будемо.

2.3.3. Головні напрямки тензора. Інваріанти

Як ми вже говорили, при скалярному добутку тензора на вектор отримується новий вектор, взагалі кажучи, відмінний від першопочаткового як за модулем, так і за напрямком.

У тензора існують на площині певні напрями, які мають властивість: коли діяти тензором на вектор \vec{a} , що взятий в цьому напрямі, одержимо

новий вектор \vec{a}' , що колінеарний до попереднього. Ці напрямки називають *головними*.

Інакше: якщо напрямок вектора \vec{a} співпадає з головним напрямком тензора \hat{P} , тоді $(\hat{P} \cdot \vec{a}) = \lambda \vec{a}$, причому скаляр λ називають *головним чи власним значенням тензора*, λ показує, в скільки разів тензор \hat{P} змінює довжину векторів, розміщених вздовж головного напрямку (λ ще називають коефіцієнтом розтягу).

З'ясуємо, скільки головних напрямків має даний тензор і як вони орієнтовані на площині. Коли скористатись формулою для скалярного добутку тензора на вектор справа, то одержимо:

$$\begin{cases} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 = \lambda a_1, \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 = \lambda a_2. \end{cases}$$

Цю систему рівнянь можна подати й так:

$$\begin{cases} (p_{11} - \lambda)a_1 + p_{12}a_2 = 0, \\ p_{21}a_1 + (p_{22} - \lambda)a_2 = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Отримана система однорідних лінійних рівнянь відносно a_1 і a_2 має ненульовий розв'язок лише у тому випадку, якщо визначник системи дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В розгорнутому вигляді це рівняння ще називають *характеристичним* і воно, після перетворень, має вигляд:

$$\begin{aligned} (p_{11} - \lambda)(p_{22} - \lambda) - p_{12}p_{21} &= 0, \\ p_{11}p_{22} - \lambda p_{11} - \lambda p_{22} + \lambda^2 - p_{12}p_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda(p_{11} + p_{22}) + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Із нього знаходять власні значення λ . У тому випадку, коли обидва корені λ_1 і λ_2 – дійсні, ми матимемо два головні напрямки. Дійсно, підставляючи послідовно значення λ_1 і λ_2 у вихідну систему рівнянь (2.56), одержимо дві системи рівнянь для одержання значень колінеарних векторів $\vec{a}^{(1)}$ і $\vec{a}^{(2)}$, тобто:

$$\begin{cases} (p_{11} - \lambda_1)a_1^{(1)} + p_{12}a_2^{(1)} = 0, \\ (p_{11} - \lambda_2)a_1^{(2)} + p_{12}a_2^{(2)} = 0. \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} p_{21}a_1^{(1)} + (p_{22} - \lambda_1)a_2^{(1)} = 0, \\ p_{21}a_1^{(2)} + (p_{22} - \lambda_2)a_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Із цих рівнянь знайдемо відношення $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(1)}$ і $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(2)}$ – компонентів векторів $\vec{a}^{(1)}$ і $\vec{a}^{(2)}$. І дістанемо висновку, що головні напрямки можна визначити через кути α_1 і α_2 між векторами $\vec{a}^{(1)}$ і $\vec{a}^{(2)}$ і віссю x :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(1)} = \frac{\lambda_1 - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_1 - p_{22}}, \quad (2.58)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(2)} = \frac{\lambda_2 - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_2 - p_{22}}. \quad (2.59)$$

Перелічимо деякі властивості тензора, які можна довести, але які ми обґрунтовувати не будемо:

1) Для 3-вимірного тензора характеристичне рівняння є кубічним, яке принаймні має один дійсний корінь (останні два корені можуть бути уявними). Тому у просторового тензора існує або один або три головних напрямки.

2) Для симетричних тензорів (найбільш важливий для практики клас, бо у них головні значення є дійсними числами):

а) коли $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то такі головні напрямки взаємно перпендикулярні (двохвимірний тензор). Ці напрямки називають ще осями симетричного тензора;

б) коли $\lambda_1 = \lambda_2$, то всі напрямки на площині є головними і в якості осей тензора можна взяти будь-які два взаємно перпендикулярні напрямки. (Чому так поведуть себе тензори з однаковими головними значеннями, стане зрозуміло із наступного прикладу.)

Приклад. В системі координат xOy тензор \hat{S} може бути зображений у вигляді матриці:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Відшукати його головні напрямки.

Розв'язок.

Складаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Звідси $\lambda = 2 \pm 1$. Тобто, головні значення тензора дорівнюють $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Зважаючи на те, що головні напрямки розглядуваного тензора можна визначити через кути α_1 і α_2 між векторами $\vec{a}^{(1)}$ і $\vec{a}^{(2)}$, що цим напрямкам колінеарні, і віссю x , скористаємось отриманими формулами (2.58) і (2.59):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{(1)} = \frac{\lambda_1 - p_{11}}{p_{12}} = \frac{3-2}{-1} = -1, & \alpha_1 &= 135^\circ, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{(2)} = \frac{\lambda_2 - p_{11}}{p_{12}} = \frac{1-2}{-1} = +1, & \alpha_2 &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Таким чином, головні напрямки перетинаються під прямим кутом (рис. 11)

Оскільки симетричний тензор завжди має два взаємно перпендикулярні напрямки, природно розглядати тензор в такій системі координат, вісі якої співпадають з головними осями цього тензора.

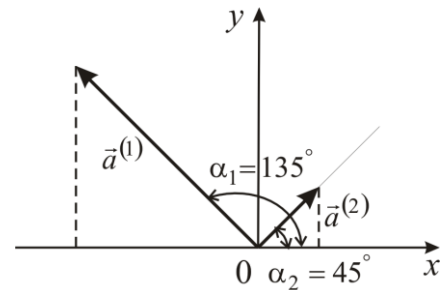


Рис. 11

Позначимо компонентами тензора \hat{S} в такій координатній системі через s_{ik}^0 . Перемножимо скалярно \hat{S} на орти $\vec{e}_1(1,0)$ і $\vec{e}_2(0,1)$ головних осей (справа), одержимо:

$$(\hat{S} \cdot \vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad (\hat{S} \cdot \vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2.$$

Тоді, скориставшись правилом обрахунку скалярного добутку тензора на вектор справа, отримаємо

$$1) (\hat{S} \cdot \vec{e}_1) = \begin{vmatrix} s_{11}^0 & s_{12}^0 \\ s_{21}^0 & s_{22}^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad \text{де } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} s_{11}^0 \cdot 1 + s_{12}^0 \cdot 0 \\ s_{21}^0 \cdot 1 + s_{22}^0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e}_1 \Rightarrow \begin{cases} s_{11}^0 = \lambda_1 \cdot 1 \\ s_{21}^0 = \lambda_1 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_{11}^0 = \lambda_1}, \boxed{s_{21}^0 = 0}.$$

$$2) (\hat{S} \cdot \vec{e}_1) = \begin{vmatrix} s_{11}^0 & s_{12}^0 \\ s_{21}^0 & s_{22}^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{e}_2, \text{ де } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} s_{12}^0 = \lambda_2 \cdot 0 \\ s_{22}^0 = \lambda_2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_{22}^0 = \lambda_2}, \boxed{s_{12}^0 = 0}.$$

Тому тензор, зображений вздовж головних осей, набуває діагонального вигляду:

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad (2.60)$$

і відповідно складові тензора вздовж координатних осей: $\vec{S}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$; $\vec{S}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2$.

Ми знаємо, що компоненти тензора в різних системах координат мають різні значення, але ж існують деякі інваріантні співвідношення між цими компонентами, що однакові у будь-якій системі.

Для встановлення виду цих інваріантів врахуємо, що кожний тензор має свої головні напрямки і відповідні їм головні значення λ_1 і λ_2 , які мають безпосередній геометричний або фізичний зміст, що не залежить від вибору системи координат.

Крім того, головні значення визначаються з характеристичного рівняння, коефіцієнтами в якому є функції компонент тензора. Для того, щоб значення λ_1 і λ_2 цього рівняння не залежали від вибору системи координат, необхідно, щоб коефіцієнти квадратичного рівняння, яким є характеристичне рівняння для двохвимірною випадку, були незмінними. Тоді, скориставшись теоремою Вієтта для розв'язку квадратичного рівняння, отримаємо два інваріанти:

$$p_{11} + p_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = inv; \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = inv. \quad (2.61)$$

Сума діагональних елементів тензора і визначник (детермінант) матриці його компонент не залежать від системи координат і є основними інваріантами двовимірного тензора.

Запитання для самоконтролю:

1. Дайте означення тензора?
2. Що називають компонентами тензора?
3. Запишіть вигляд тензора у матричному представленні.
4. Які тензори називають ортогональними афінними тензорами II рангу?
5. Наведіть найпростіші типи тензорів.
6. Наведіть приклади алгебраїчних операцій, які можна виконувати над тензорами.
7. Які напрямки тензора називають головними?
8. Що називають головним (власним) значенням тензора?
9. Що є інваріантами 3-х вимірного тензора?
10. Як задати тензор аналітично?

2.4.* Ортогональні вектори і тензори в трьохвимірному і багатовимірному евклідових просторах

2.4.1. Вектори і тензори в n -вимірному просторі.

2.4.2. Тензор деформації.

2.4.3. Тензор напруг.

2.4.4. Тензор інерції.

2.4.1. Вектори і тензори в n -вимірному просторі

Узагальнимо раніше одержані співвідношення на випадок реального 3-вимірного простору, а також n -вимірного, причому в прямокутній декартовій системі координат.

1. n -вимірний вектор \vec{a} – це величина, що характеризується в кожній системі координат n скалярними компонентами a_1, a_2, \dots, a_n , що при повороті осей координат перетворюються за певним лінійним законом:

$$a'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_k, \quad (2.62)$$

де α_{ik} – характеризують n -вимірний кут між k та i координатними осями.

Тоді n -вимірний вектор можна подати як $\vec{a} = \sum_{k=1}^n a_k \vec{e}_k$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – орти координатних осей.

Довжина вектора $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ не залежить від вибору системи координат.

Для 3-вимірного простору:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad \text{або} \quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad \text{або} \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

2. Тензор II рангу в n -вимірному просторі: n -вимірним тензором \hat{P} , називають величину, що характеризується в кожній системі координат n векторними складовими $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ або n^2 скалярними компонентами $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$ причому і складові і компоненти при повороті осей координат перетворюються згідно лінійного закону:

$$\vec{p}'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \vec{p}_k; \quad p'_{ik} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i\ell} \alpha_{kj} p'_{\ell j}. \quad (2.63)$$

n -вимірний тензор в даній системі координат виражається, згідно (2.63), або через складові:

$$\hat{P} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k \vec{e}_k, \quad (2.64)$$

або ж через матрицю:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Компоненти n -вимірного тензора утворюють n інваріантів, кожний з яких є сумою всіх можливих діагональних мінорів різних порядків $k = 1, 2, \dots, n$.

Для 3-вимірного простору тензор характеризується трьома складовими:

$$\hat{P} = (\vec{p}_1, \vec{e}_1) + (\vec{p}_2, \vec{e}_2) + (\vec{p}_3, \vec{e}_3) \quad \text{або} \quad \hat{P} = (\vec{p}_x, \vec{i}) + (\vec{p}_y, \vec{j}) + (\vec{p}_z, \vec{k}),$$

або ж дев'ятьма скалярними компонентами:

$$\hat{P} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.66)$$

Взагалі такий тензор має три взаємно перпендикулярні головні напрямки і три головні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Симетричному невласному тензору в 3-вимірному просторі відповідає центральна поверхня другого порядку (в системі головних осей):

$$\frac{x^2}{1/\lambda_1} + \frac{y^2}{1/\lambda_2} + \frac{z^2}{1/\lambda_3} = 1.$$

При цьому в залежності від знаків власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ця поверхня приймає наступні форми:

- 1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ – еліпсоїд;
- 2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ – однопорожній гіперболоїд;
- 3) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ – двопорожній гіперболоїд;
- 4) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ – уявний еліпсоїд.

На практиці найчастіше зустрічається перший випадок. Тому таку поверхню за домовленістю називають *тензорним еліпсоїдом* (хоча у тих випадках, коли мають місце умови (2) і (3), вона буде гіперболоїдом).

Інваріантами 3-вимірного тензора є:

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

$$I_3 = \det \hat{P} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Розглянемо тепер приклади різних фізичних тензорних полів у реальному трьохвимірному просторі.

2.4.2. Тензор деформації

У випадку реальних фізичних тіл, під час їх деформації, різні їх ділянки деформуються неоднаково (*неоднорідна деформація*). Тому слід

говорити про деформацію в даній точці, маючи на увазі зміну об'єму і форми елемента тіла в околі цієї точки.

Покажемо, що ні векторні, ні тим більш скалярні величини не можуть бути використані в якості міри деформації елемента тіла, для цього потрібні більш складні, тензорні величини.

Дійсно, нехай тіло, початкова форма якого зображена на рисунку 12, а, після деформації набуло форму, що зображена на рисунку 12, б. Для математичного описання цієї деформації зіставимо кожній точці тіла вектор зміщення $\vec{U} = \vec{r}' - \vec{r}$, (де \vec{r}' і \vec{r} – радіус-вектори точки після і до її переміщення).

Під час такої деформації ми маємо справу з векторним полем $\vec{U}(\vec{r})$, область якого співпадає з початковими розмірами тіла (рис. 13). Якщо відоме поле вектора зміщення $\vec{U}(\vec{r})$, ми можемо повністю визначити деформацію тіла. Але кожний окремо розглядуваний у даній точці вектор \vec{U} ніякої деформації охарактеризувати не може. Оскільки якщо і сусідні точки змістилися на таку ж саму величину \vec{U} , тобто якщо в околі даної точки $\vec{U} = \text{const}$, тоді розглядуваний елемент тіла взагалі не деформований, хоча вектор зміщення \vec{U} не дорівнює нулю.

Звідси зрозуміло, що ступінь деформації в кожній точці тіла визначається не вектором зміщення \vec{U} в даній точці, а відносною зміною цього вектора в її околі. Тому можна припустити, що шуканою характеристикою буде похідна від векторної функції $\vec{U}(\vec{r})$, яка являє собою тензор $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$. Але, легко, однак,

переконатись, що похідна $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$ не завжди характеризує деформацію.

Дійсно, якщо, наприклад, тіло, як ціле, повернути на деякий кут, то вектор зміщення \vec{U} не дорівнюватиме нулю і змінюватиметься від точки до

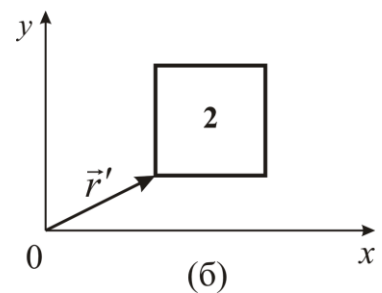
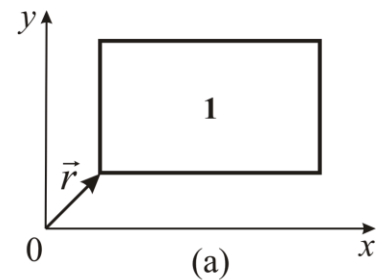


Рис. 12

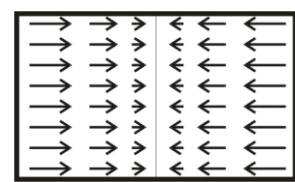


Рис. 13

точки; при цьому тензор $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$ завідомо буде відмінним від нуля, але при цьому ніякої зміни об'єму або форми тіла не відбулося. Щоб розібратися із проблемою, розкладемо тензор-похідну на його симетричну і антисиметричну складові:

$$\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} = \left(\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} \right)_S + \left(\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} \right)_A. \quad (2.67)$$

Антисиметрична частина тензора, що ми покажемо пізніше, співпадає з так званим *ротором* (або вихром) векторного поля $\vec{U}(\vec{r})$ і визначає поворот елемента об'єму у просторі. Симетрична ж частина похідної $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$ повністю визначає деформацію тіла, її називають тензором деформації:

$$\vec{U} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right\|. \quad (2.68)$$

2.4.3. Тензор напруг

В недеформованому тілі відсутні сили взаємодії між окремими його частинами. Якщо ж до цього тіла прикласти зовнішні сили, тоді воно розпочне деформуватися – молекули тіла будуть зміщуватись доти, доки внутрішні сили, пасивні за змістом, не почнуть себе проявляти. Такими силами можуть бути сили пружності, пропорційні за законом Гука лінійній деформації, що прагнуть повернути тіло в початковий стан, вони діятимуть до тих пір доки не будуть зрівноваженими зовнішніми силами.

В будь-якому деформованому тілі між сусідніми його частинами існують сили, що діють лише вздовж поверхні розділу (поверхневі сили), що обумовлені близькодіючою молекулярною взаємодією. Якщо всередині деформованого (наприклад, розтягнутого) тіла провести деяку площадку PQ (рис. 14, а), тоді на верхню частину 1 з боку нижньої 2

діятиме деяка сила \vec{f} , що залежить під час певного типу деформації від площі S цієї площадки. Тому прийнято розглядати деяку питому величину, що визначається відношенням сили \vec{f} до площі S . Це відношення позначають $\vec{\sigma}$ і називають *напругою*:

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{f}}{S}. \quad (2.69)$$

Вектор напруги $\vec{\sigma}$ не обов'язково повинен бути перпендикулярним площадці і в загальному випадку залежить як від точки, обраної всередині тіла, так і від орієнтації площадки. Розглядаючи певну точку тіла і напругу в ній, необхідно вказувати напрямок нормалі, що визначає орієнтацію площадки, і позначити це за допомогою відповідного індексу. Наприклад, $\vec{\sigma}_x$ – напруга для площадки, нормаллю якої є вісь Ox , $\vec{\sigma}_y$ – напруга для площадки, перпендикулярної до вісь Oy і т.п. (рис. 14, б).

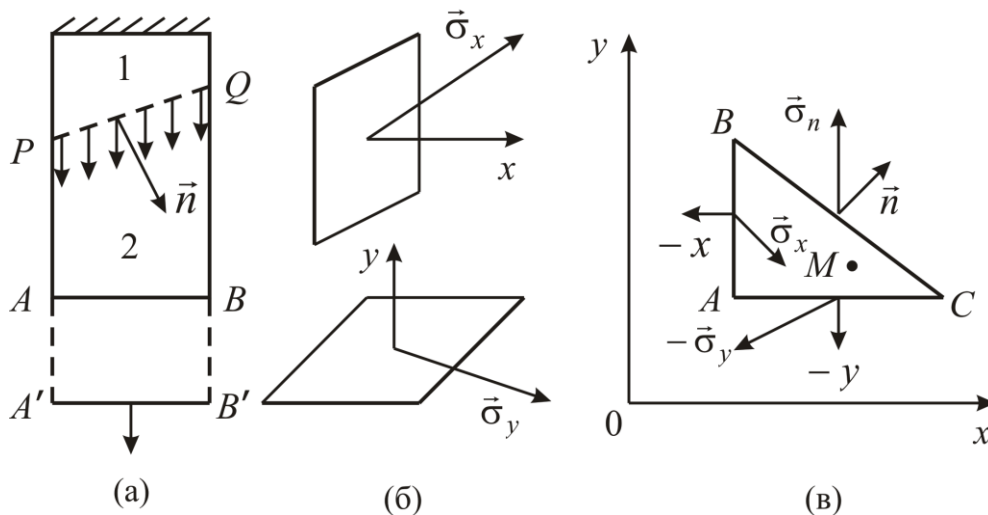


Рис. 14.

Оскільки через довільну точку всередині тіла можна провести нескінчену кількість площадок, тому отримується й нескінченна множина значень векторів $\vec{\sigma}$ для всіх цих площадок. Але виявляється, напруга в кожній точці утворює тензор і тому достатньо знати лише три напруги $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$, і $\vec{\sigma}_z$ вздовж трьох взаємно перпендикулярних площадок, щоб можна було обрахувати напругу $\vec{\sigma}_n$ для проведеної через цю точку довільно зорієнтованої площадки з нормаллю \vec{n} . Для того щоб зрозуміти, що напруга є тензорною величиною, розглянемо плоске деформоване тіло.

Вилучимо уявно навколо розглядуваної точки M всередині тіла нескінченно малий за розмірами трикутник ABC (рис. 14, в). Оскільки цей трикутник, так само як і все тіло, нерухомий, тому сума всіх сил, що прикладені до нього, дорівнює нулю. На грань AB діє сила, що дорівнює $-\bar{\sigma}_x \cdot |AB|$. Знак мінус біля цієї сили пояснюється тим, що нормаль до площадки AB спрямована в бік, протилежний вісі Ox . Аналогічно на грань AC діє сила $-\bar{\sigma}_y \cdot |AC|$, і, нарешті, на грань BC – сила $+\bar{\sigma}_n \cdot |BC|$. Таким чином,

$$\bar{\sigma}_n \cdot |BC| - \bar{\sigma}_x \cdot |AB| - \bar{\sigma}_y \cdot |AC| = 0.$$

Але, як видно з рисунку, $|AB| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, \hat{x})$ і $|AC| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, \hat{y})$.

Підставляючи значення $|AB|$ і $|AC|$ в попередню рівність, отримаємо:

$$\bar{\sigma}_n \cdot |BC| - \bar{\sigma}_x \cdot |BC| \cdot \cos(\hat{n}, \hat{x}) - \bar{\sigma}_y \cdot |BC| \cdot \cos(\hat{n}, \hat{y}) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) - \bar{\sigma}_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) = 0$$

або

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \bar{\sigma}_y \cos(\hat{n}, \hat{y}).$$

Оскільки напрямок площадки BC і нормалі \hat{n} було обрано довільно, то згідно отриманої рівності можна стверджувати, що $\bar{\sigma}_x$ і $\bar{\sigma}_y$ є складовими тензора $\hat{\sigma}$ (згідно аналітичного означення тензора через його векторні складові). Не потрібно звертати уваги на той факт, що вектори $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ і $\bar{\sigma}_n$ побудовані в різних точках – оскільки трикутник ABC є нескінченно малим.

Легко довести, що тензор напруг $\hat{\sigma}$ є симетричним тензором. Діагональні компоненти σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} називають *нормальними*, а недіагональні – σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} – *зсувом*. Якщо тензор привести до головних осей, тоді він набуде діагонального вигляду:

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.70)$$

Головні значення тензора $\lambda_1 = \sigma_{11}$, $\lambda_2 = \sigma_{22}$, $\lambda_3 = \sigma_{33}$ називають головними напругами. Рівняння поверхні напруг має вигляд:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1. \quad (2.71)$$

Оскільки значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можуть в цьому випадку бути як додатними, так і від'ємними, то ця поверхня являє собою або еліпсоїд, або гіперболоїд (одно- або двопорожній).

2.4.4. Тензор інерції

Важливою характеристикою механічних властивостей твердого тіла по відношенню до його обертання є тензор інерції \hat{I} . Відомо, що *моментом інерції* тіла відносно деякої вісі обертання називають суму добутків мас всіх його точок на квадрат відстані від кожної точки до вісі обертання:

$$I = \sum_k m_k r_k^2. \quad (2.72)$$

Момент інерції є мірою інертності тіла, що обертається, тобто відіграє подібну роль, як маса тіла під час його поступального руху. Формули механіки обертового руху аналогічні відповідним формулам поступального руху. Наприклад, кінетична енергія тіла, що обертається навколо деякої нерухомої вісі з постійною кутовою швидкістю дорівнює:

$$W_{об} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.73)$$

А кінетична енергія поступального руху тіла:

$$W_{пост} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.74)$$

Рівняння динаміки обертового руху подібно другому закону Ньютона,

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$, має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \vec{M}, \quad (2.75)$$

де \vec{M} – момент сили. Але, незважаючи на таку подібність, між динамікою поступального руху і динамікою обертового руху тіла мають місце суттєві відмінності: в той час як маса тіла є скалярною величиною, момент інерції I є величиною значно більш складної математичної природи. Для одного

й того ж тіла момент інерції може набувати нескінченної кількості значень в залежності від вибору вісі обертання.

Довільний рух тіла завжди можна подати як суму його поступального і обертального рухів. При цьому вигляд основних фізичних характеристик обертального руху буде найбільш простим, якщо початок координат розглядуваної системи відліку буде співпадати з центром інерції тіла, що виконує обертовий рух. Але через центр інерції можна провести безліч осей обертання, тобто існує й нескінченна кількість відповідних (центральної) моментів інерції.

Можна показати, що момент інерції – це симетричний тензор і тому достатньо знати шість його скалярних компонент в деякій системі координат, щоб визначити компоненти для будь-якої трійки взаємно перпендикулярних осей.

Загальний вигляд формули для відшукування кінетичної енергії системи матеріальних точок має вигляд:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2. \quad (2.76)$$

Абсолютну швидкість точки тіла, що виконує складний (довільний) рух можна подати як суму двох доданків: швидкості центру інерції і швидкості, що обумовлена обертанням тіла навколо нього, тобто

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_k]. \quad (2.77)$$

Підставимо швидкість k -ї матеріальної точки в формулу (2.76) для обрахунку кінетичної енергії всієї системи точок:

$$W = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_k m_k + \sum_k m_k (\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2. \quad (2.78)$$

Оскільки $\sum_k m_k$ дорівнює масі тіла m і за правилом мішаного добутку

$$(\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) = (\vec{r}_k, [\vec{v}_0, \vec{\omega}]),$$

тому другий доданок у перетвореній формулі (2.78) для кінетичної енергії можна переписати:

$$\sum_k m_k (\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) = [\vec{v}_0, \vec{\omega}] \cdot \sum_k m_k \vec{r}_k. \quad (2.79)$$

З механіки відомо, що радіус-вектор центра інерції визначається за формулою:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_k m_k \vec{r}_k. \quad (2.80)$$

Центр інерції (центр мас) системи матеріальних точок – це гіпотетична точка, по відношенню до якої маса системи розподілена рівномірно, тобто $\sum_k m_k \vec{r}_k = 0$, враховуючи цю умову і той факт, що центр обертання тіла співпадає з центром його інерції, остаточно отримаємо:

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2. \quad (2.81)$$

Цей вираз в механіці відображає зміст теореми Кеніга: *Кінетична енергія системи матеріальних точок може бути подана у вигляді суми двох доданків: кінетичної енергії поступального руху системи і кінетичної енергії руху системи по відношенню до її центру мас.*

Із векторної алгебри відомо, що

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2.$$

Тому

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k (\omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_k)^2), \quad (2.82)$$

де перший доданок $W_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_0^2$ – кінетична енергія системи точок, а другий $W_{\text{об}} = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_k)^2)$ – кінетична енергія обертового руху системи по відношенню до її центру інерції. Розглянемо останній доданок (2.82) більш детально. Оскільки

$$\begin{aligned} \omega^2 r_k^2 &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \\ (\vec{\omega}, \vec{r}_k)^2 &= (\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k)^2, \end{aligned}$$

тоді для кінетичної енергії обертового руху матимемо наступну рівність:

$$\begin{aligned} W_{\text{об}} &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\{ (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k)^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \times \\ &\times \left\{ (y_k^2 + z_k^2) \omega_x^2 + (x_k^2 + z_k^2) \omega_y^2 + (x_k^2 + y_k^2) \omega_z^2 - 2(x_k y_k \omega_x \omega_y + y_k z_k \omega_y \omega_z + x_k z_k \omega_x \omega_z) \right\}. \end{aligned}$$

Позначимо, як

$$I_{xx} = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad I_{yy} = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2); \quad I_{zz} = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

$$I_{xy} = -\sum_k m_k x_k y_k; \quad I_{xz} = -\sum_k m_k x_k z_k; \quad I_{yz} = -\sum_k m_k y_k z_k,$$

тоді

$$W_{об} = \frac{1}{2} \left(I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2I_{xy} \omega_x \omega_y + 2I_{xz} \omega_x \omega_z + 2I_{yz} \omega_y \omega_z \right),$$

або у скороченому вигляді

$$W_{об} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta, \quad (\alpha, \beta = x, y, z), \quad (2.83)$$

де індекси під знаком суми (α, β) є індексами осей симетрії системи координат, в якій відбувається обертання, а сукупність коефіцієнтів $I_{\alpha, \beta}$ утворюють симетричну матрицю

$$I_{\alpha, \beta} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{xy} & I_{zz} \end{vmatrix}, \quad (2.84)$$

яку називають *тензором інерції* тіла, що обертається.

Окремі елементи тензора – називають моментами інерції – вони є сталими величинами, які залежать лише від розподілу маси тіла, його форми, а також від вибору початку і напрямку осей системи координат, що пов'язана з тілом.

Тензор інерції є симетричним, тому він повністю визначається сукупністю лише шести елементів:

– трьох діагональних I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , що називають *осьовими моментами інерції*;

– трьох недіагональних I_{xy} , I_{yz} , I_{xz} , що називають *відцентровими моментами інерції* (співмножниками інерції).

Можна показати, що для будь-якої точки твердого тіла (*тверде тіло* – це сукупність матеріальних точок, віддалі між якими є незмінними – це одна із основних моделей класичної механіки тіла) існує така система координат з осями (1, 2, 3), в якій тензор інерції має діагональний вигляд.

$$I_{\alpha, \beta} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}. \quad (2.85)$$

Вісі такої системи координат називають головними осями інерції твердого тіла, а діагональні елементи тензора – головними моментами інерції.

В цьому випадку кінетична енергія обертового руху твердого тіла зводиться до канонічного вигляду:

$$W_{об} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2 + I_3 \omega_z^2). \quad (2.86)$$

Моменти інерції дають можливість прокласифікувати тверді тіла за їх інерціальними властивостями:

1) Якщо у твердого тіла всі три головних моменти інерції різні $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, то його називають *асиметричним вовчком*. Наприклад, однорідне тіло, що має форму прямокутного або похилого паралелепіпеду.

2) Якщо два головних моменти інерції рівні, а третій відмінний $I_1 = I_2 \neq I_3$ (або $I_1 \neq I_2 = I_3$, $I_1 = I_3 \neq I_2$), то тверде тіло називають *симетричним вовчком*. Прикладом симетричного вовчка є будь-яке однорідне тіло обертання або правильна прямокутна призма.

3) Якщо $I_1 = I_2 = I_3$ – це сферичний вовчок. Приклад – однорідна куля або куб.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають тензором?
2. Дайте означення n -вимірного вектора \vec{a} .
3. Дайте означення n -вимірного тензора \hat{P} .
4. Які напрямки тензора називають головними?
5. Що є інваріантами 3-х вимірного тензора?
6. Як задати тензор аналітично?
7. Що розуміють під тензором деформації?
8. Що розуміють під тензором напруг?
9. Що розуміють під тензором інерції?
10. Сформулюйте теорему Кеніга.
11. Що називають осьовими моментами інерції?
12. Що називають твердим тілом?
13. Прокласифікуйте тверді тіла за їх інерціальними властивостями.

2.5. Дивергенція векторного поля.

2.5.1. Векторне поле.

2.5.2. Потік вектора.

2.5.3. Дивергенція векторного поля.

2.5.1. Векторне поле

Векторне поле – це простір або частина простору, в кожній точці якого $M(x, y, z)$ задано вектор $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$. (2.87)

Будемо вважати, що проекції цього вектора є однозначні і неперервні функції координат x, y, z , а також мають неперервні похідні.

Векторна лінія поля – крива, в кожній точці якої вектор \vec{a} спрямований вздовж дотичної.

Диференціальне рівняння векторної лінії має вигляд:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (2.88)$$

Ця умова визначає умову паралельності елемента векторної лінії $d\vec{\ell}(dx, dy, dz)$ і вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

2.5.2. Потік вектора.

Нехай $d\vec{S}$ – елементарна площадка, \vec{n} – одиничний вектор нормалі до неї (рис. 15). Елементарний потік dN вектора \vec{a} через площадку $d\vec{S}$ у напрямі взятій нормалі є

$$dN = a_n dS, \quad (2.89)$$

де $a_n = \text{Pr}_{\vec{n}} \vec{a}$. Або

$$\begin{aligned} dN &= a_n dS = \vec{a} d\vec{S} = (\vec{a} \vec{n}) dS = (a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z) dS = \\ &= \left(a_x \cos(\hat{\vec{n}, \vec{x}}) + a_y \cos(\hat{\vec{n}, \vec{y}}) + a_z \cos(\hat{\vec{n}, \vec{z}}) \right) dS. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Коли поверхня велика, то просумуємо і відшукаємо повний потік вектора \vec{a} через поверхню S :

$$N = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS, \quad (2.91)$$

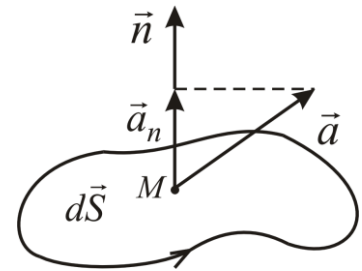


Рис. 15

причому \vec{n} вибирається так, що поверхня S змінювалась неперервно.

Коли поверхня замкнена і обмежує об'єм V , то потік вектора \vec{a} через неї рівний:

$$N = \oiint_S \vec{a} d\vec{S}. \quad (2.92)$$

Нехай в деякій частині простору задане векторне поле швидкостей плинної рідини $\vec{v}(\vec{r})$. Легко побачити, що через довільну малу площадку dS за 1 секунду протікає та кількість рідини, яка заповнює об'єм нахиленого циліндра з основою dS і твірною \vec{v} (рис. 16). Оскільки висота циліндра дорівнює проекції твірної на нормаль \vec{n} до площадки dS , то об'єм рідини, що витікає складає величину $dN = v_n dS$, яку називають потоком вектора \vec{v} через площадку dS .

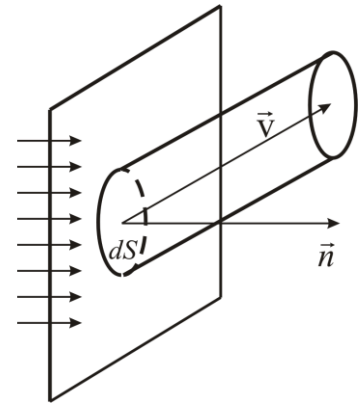


Рис. 16

Якщо поверхня dS замкнена і обмежує об'єм V , то потік вектора \vec{v} через неї, згідно (2.92), дорівнюватиме:

$$N = \oiint_S v_n dS$$

і визначає об'єм рідини, що витікає (коли $N > 0$) із V в оточуючий простір або навпаки, об'єм рідини що втікає (коли $N < 0$) в середину об'єму V за одиницю часу.

2.5.3. Дивергенція векторного поля

Із геометричних міркувань зрозуміло, що значення потоку через деяку замкнену поверхню S пов'язано з тим, як швидко змінюється величина вектора \vec{a} вздовж векторних ліній всередині розглядуваної області.

Відшукаємо швидкість зміни вектора \vec{a} вздовж векторних ліній. Але ми вже знаємо, що повною диференціальною характеристикою векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ є тензорне поле $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Як виявилось, швидкість зміни векторної функції \vec{a} можна ще визначити (хоча не так строго) за допомогою

інваріантів тензора $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тобто можна замість тензорних використовувати більш прості величини – скалярні і векторні.

Математичний апарат опису аналітичних властивостей векторних полів отримав назву векторного аналізу. Запишемо матрицю компонент тензора-похідної

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.93)$$

Перший інваріант цього тензора дорівнює сумі його діагональних елементів і називається *дивергенцією* (розбіжністю) векторної функції $\vec{a}(\vec{r})$:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.94)$$

З іншого боку неважко довести наступне твердження, відоме як *теорема Гауса-Остроградського*:

Потік N змінного вектора \vec{a} через довільну замкнену поверхню S дорівнює (потрійному) інтегралу від дивергенції цього вектора по об'єму V , обмеженому цією поверхнею:

$$N = \oiint_S a_n dS = \iiint_V \text{div} \vec{a} dV. \quad (2.95)$$

Для невеликого об'єму маємо:

$$\Delta N = \oiint_{\Delta S} a_n dS \approx \text{div} \vec{a} \Delta V \Rightarrow \text{div} \vec{a} \approx \frac{\Delta N}{\Delta V}.$$

Зрозуміло, що ця наближена рівність виконується тим точніше, чим менший розглядуваний об'єм ΔV . Виходячи з цього отримаємо інше означення дивергенції вектора.

Дивергенція векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в даній точці дорівнює границі відношення потоку ΔN через малу поверхню ΔS , що обмежує цю точку, до об'єму ΔV , обмеженому цією поверхнею, при прямуванні останнього до нуля:

$$\operatorname{div} \vec{a} \approx \frac{\Delta N}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{dN}{dV} \Rightarrow \quad (2.96)$$

$\operatorname{div} \vec{a}$ – є скалярною величиною.

Обчислимо $\operatorname{div} \vec{a}$ в декартових координатах.

Спочатку відшукаємо потік вектора \vec{a} через поверхню прямокутного паралелепіпеда (рис. 17), грані якого паралельні координатним площинам, а лінійні розміри мають dx, dy, dz . Через дві протилежні грані (1) і (2) (перпендикулярні до осі Ox):

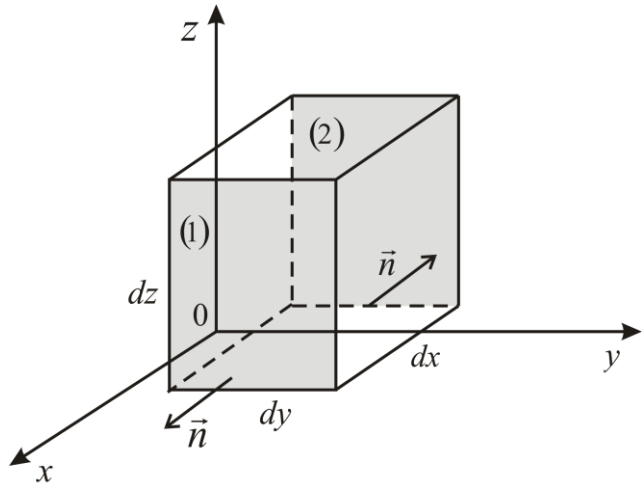


Рис. 17

$$\begin{aligned} dN_x &= (a_x dydz)_{x+dx} - (a_x dydz)_x = \\ &= (a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)) dydz = \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dydz \end{aligned}$$

(тут ми враховували, що нормаль до грані (1) є зовнішньою), тоді аналогічно маємо

$$dN_y = \frac{\partial a_y}{\partial y} dx dydz; \quad dN_z = \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dydz.$$

Тоді повний потік через всю (замкнену) поверхню:

$$dN = dN_x + dN_y + dN_z = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV \Rightarrow \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{dN}{dV} = \operatorname{div} \vec{a}.$$

Математичний оператор «набла» – $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ може бути

використаним для скороченої форми запису дивергенції векторного поля \vec{a} , тобто

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \vec{a}. \quad (2.97)$$

Якщо \vec{a} визначає швидкість плинної рідини, то $\operatorname{div} \vec{a}$ в даній точці дорівнює відношенню об'єму рідини dN , яка витікає за одиницю часу із нескінченно малого об'єму dV , до величини цього об'єму dV . Звідси і термін дивергенція (розбіжність) (точніше – витрата), бо рідина витрачається, розбігається з тих точок (джерел), де $\operatorname{div} \vec{a} > 0$, а стікає туди,

де $\operatorname{div} \vec{a} < 0$. Це стік поля (точки, де стікає рідина), отже: $\operatorname{div} \vec{a}$ – це потужність джерела.

В якості прикладів розглянемо наступні плоскі векторні поля:

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \vec{b} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}; \quad \vec{c} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Відшукаємо їх дивергенції:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y^2(x^2 + y^2)^{-1/2}}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{-1/2}}{x^2 + y^2} = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} > 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Кожна точка поля $\vec{a}(\vec{r})$ є джерелом, потужність якого зменшується пропорційно $\frac{1}{r}$ від початку координат.

$$\operatorname{div} \vec{b} = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

поле $\vec{b}(\vec{r})$ – не має джерел.

$$\operatorname{div} \vec{c} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{r^3} < 0,$$

а в кожній точці поля $\vec{c}(\vec{r})$ є стік, потужність якого зменшується пропорційно $\frac{1}{r^3}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Що розуміють під векторною лінією поля?
2. Що називають векторним полем?
3. Що називають потоком векторного поля через замкнену поверхню?
4. Сформулювати теорему Гауса про потік змінного вектора \vec{a} через довільну замкнену поверхню.
5. Дати інваріантне означення дивергенції векторного поля.
6. Дати аналітичне означення дивергенції векторного поля.

2.6. Ротор векторного поля

2.6.1. Циркуляція вектора по замкнутому контуру.

2.6.2. Вихор вектора навколо певного напрямку в даній точці.

Інваріантне означення ротора.

2.6.3. Ротор векторного поля.

2.6.1. Циркуляція вектора по замкнутому контуру

Нехай маємо векторне поле \vec{a} і $d\vec{l}$ – елемент довжини довільного замкнутого контуру L (рис. 18).

Циркуляція – це криволінійний інтеграл векторного поля \vec{a} по замкнутому контуру L , обчислений у певному напрямі:

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} d\vec{l}, \quad (2.98)$$

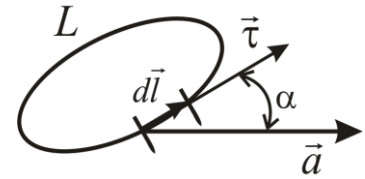


Рис. 18

$\vec{a} d\vec{l} = a dl \cos(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\tau}})$, де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор

дотичної до контуру L .

Якщо кут $\alpha = (\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\tau}}) < \frac{\pi}{2}$, тоді $\Gamma > 0$; якщо $\alpha = (\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\tau}}) > \frac{\pi}{2}$, тоді $\Gamma < 0$;

якщо ж $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \pi n$, то $\Gamma = 0$.

Якщо контур, вздовж якого обраховують скалярний добуток довільного векторного поля \vec{a} вздовж елемента розглядуваного контуру $d\vec{l}$, буде незамкненим, тоді мова йтиме не про циркуляцію такого поля, а про криволінійний інтеграл поля \vec{a} частини контуру:

$$W = \int_{l_1}^{l_2} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{l}.$$

або якщо радіус-вектор точки інтегрування буде задано параметрично, наприклад, через параметр t , тоді криволінійний інтеграл обраховуватиметься за формулою:

$$W = \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt,$$

де $\vec{r}'(t)$ – елемент довжини контуру, який з одиничним вектором дотичної до кривої, зв'язаний співвідношенням:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}.$$

2.6.2. Вихор вектора навколо певного напрямку в даній точці.

Інваріантне означення ротора

Розглянемо нескінченно малий плоский контур γ , що обмежує площадку S і точку M , що лежить в середині цього контуру γ , в його площині (контур – плоский (рис. 19)).

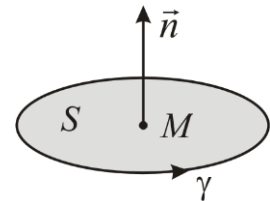


Рис. 19

Виберемо додатній напрям обходу контуру, що зв'язаний із нормаллю \vec{n} правилом правого гвинта.

Обчислимо циркуляцію вектора поля \vec{a} по контуру γ і поділимо її на величину площі S :

$$\frac{\oint \vec{a} d\vec{l}}{S} \Rightarrow \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{l}}{S} = R_n - \text{вихор поля.} \quad (2.99)$$

Якщо ми бажаємо знайти вихри поля навколо осей Ox , Oy , Oz , що проходять через т. M , то розкладемо цей вихор по відповідних осях:

$$R_x = R_n \cos(\vec{n}, \vec{x}); \quad R_y = R_n \cos(\vec{n}, \vec{y}); \quad R_z = R_n \cos(\vec{n}, \vec{z}), \quad (2.100)$$

R_x , R_y , R_z – вихри поля \vec{a} навколо осей в т. M .

Тобто можемо дістати висновку, що цей вихор R_n є проекцією деякого вектора \vec{R} на нормаль \vec{n} .

Цей вектор називають ротором векторного поля і позначають

$$\vec{R} = \text{rot} \vec{a} = \text{curl} \vec{a}. \quad (2.101)$$

Проекція ротора \vec{a} на який-небудь напрям \vec{n} рівний вихру поля навколо цього напрямку в даній точці.

Тоді ми можемо сформулювати *інваріантне означення ротора векторного поля \vec{a}* : Величина ротора рівна границі відношення

циркуляції $\oint_{\gamma} \vec{a} d\vec{l}$ вектора по нормально елементарному контуру γ до величини площі ΔS цього контуру, коли $\Delta S \rightarrow 0$:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \frac{d\Gamma}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}, \quad (2.102)$$

(але потрібно обирати відповідну орієнтацію цього контуру).

2.6.3. Ротор вектора в декартових координатах

Обчислимо $\operatorname{rot} \vec{a}$ в декартових координатах. Відшукаємо спочатку проекцію $\operatorname{rot} \vec{a}$ на вісь Ox в точці $M(x, y, z)$. Інакше, обчислимо вихор поля в т. M навколо напрямку паралельному вісі Ox .

Для цього спочатку обчислимо циркуляцію \vec{a} по контуру $A_1D_1C_1B_1A_1$, елементарного прямокутника із сторонами dy, dz . Точка M є центром цього прямокутника (рис. 20).

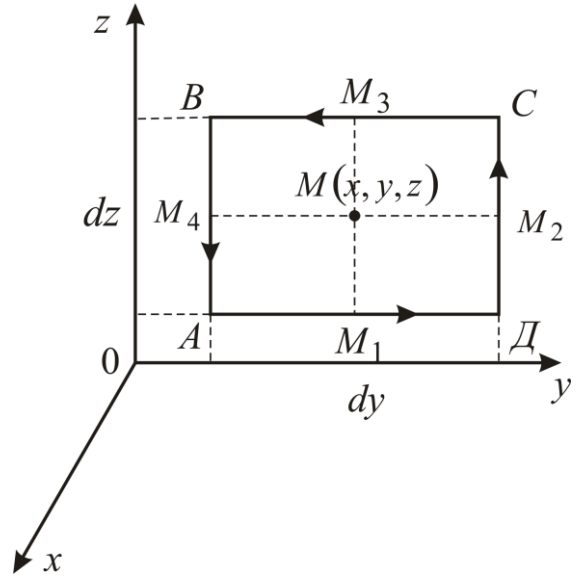


Рис. 20

Тоді:

$$\begin{aligned} \oint_{A_1D_1C_1B_1A_1} \vec{a} d\vec{l} &= \left((a_y dy)_{M_1} - (a_y dy)_{M_3} \right) + \left((a_z dz)_{M_2} - (a_z dz)_{M_4} \right) = \\ &= \left(a_{y, z - \frac{dz}{2}} - a_{y, z + \frac{dz}{2}} \right) dy + \left(a_{z, y + \frac{dy}{2}} - a_{z, y - \frac{dy}{2}} \right) dz = \\ &= -\frac{\partial a_y}{\partial z} dy dz + \frac{\partial a_z}{\partial y} dz dy = \left(-\frac{\partial a_y}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) dy dz, \end{aligned}$$

де $dy dz = S_{A_1D_1C_1B_1A_1}$. Отже, враховуючи (2.102), маємо, що

$$R_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

аналогічно

$$R_y = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right); \quad R_z = \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right).$$

Це і є проекції ротора на вісі декартової системи координат $0x, 0y, 0z$.

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \quad \text{rot}_y \vec{a} = -\frac{\partial a_x}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial x}; \quad \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x}.$$

Отже,

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(-\frac{\partial a_x}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right). \quad (2.103)$$

Інакше, у матричному представленні:

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (2.104)$$

Із означення ротора (2.102) випливає *теорема Стокса*: $\text{rot}_n \vec{a} = \frac{d\Gamma}{dS}$

$$\int_S \text{rot}_n \vec{a} dS = \int_S \frac{d\Gamma}{dS} dS = \Gamma, \quad (2.105)$$

тобто

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} d\vec{l}; \quad \Rightarrow \quad \oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot}_n \vec{a} dS = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}.$$

Теорема. Циркуляція змінного вектора \vec{a} по будь-якому замкненому контуру L дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню S , яка спирається на контур L .

Для з'ясування фізичного змісту ротора розглянемо спочатку плоскі векторні поля $\vec{v}(x, y)$, де \vec{v} – лінійна швидкість частинок суцільного середовища. В цьому випадку v_z і частинні похідні по z дорівнюють нулю, тоді:

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Звідси видно, що ротор в кожній точці направлений перпендикулярно площині векторного поля xOy .

Нехай, рух здійснює плоске тверде тіло (тонка пластинка). Як відомо із механіки, швидкість її переміщення завжди можна представити у вигляді суми поступального і обертального його рухів.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] ,$$

де \vec{v}_0 – швидкість поступального руху тіла, $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ – лінійна швидкість обертання навколо центра інерції довільної точки тіла, радіус-вектор якої \vec{r} , $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості напрямлений вздовж вісі обертання, однаковий для всіх точок тіла ($\vec{\omega} = \text{const}$).

Із курсу фізики відомо, що поступальна швидкість \vec{v}_0 для всіх точок також однакова, тоді:

$$\text{rot}\vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{v} = \text{rot}[\vec{\omega}, \vec{r}] .$$

Нехай Oz співпадає з віссю обертання, xOy – площина руху пластини, тоді

$$\omega_x = \omega_y = 0; \omega_z = \omega ,$$

а радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ – є функцією координат площини xOy , тоді згідно правилу векторного добутку:

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} .$$

Тоді ротор векторного поля лінійної швидкості обертання тіла визначатиметься як

$$\text{rot}[\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\omega x) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega y) \right) = \vec{k} (\omega + \omega) = 2\omega \vec{k} .$$

Тобто, $\text{rot}\vec{v} = 2\omega \vec{k}$.

Висновок: ротор лінійної швидкості твердого тіла є вектор, рівний подвійній кутовій швидкості його обертання.

Оскільки у твердого тіла кутова швидкість $\vec{\omega}$ постійна величина, тоді й ротор векторного поля його лінійних швидкостей є те ж величиною сталою.

Зпитання для самоконтролю:

1. Що називають циркуляцією вектора по замкненому контуру?
2. Що називають вихром вектора навколо певного напрямку в даній точці?
3. Дати інваріантне та аналітичне означення ротора змінного вектора \mathbf{s} .
4. Що називають лінійним інтегралом векторного поля?
5. Сформулювати теорему Стокса про циркуляцію змінного вектора \vec{a} .
6. Чому дорівнює ротор лінійної швидкості твердого тіла, що обертається навколо нерухомої вісі?

2.7. Криволінійні координати

2.7.1. *Криволінійні координати. Приклади криволінійних систем координат: циліндрична; сферична.*

2.7.2. *Коефіцієнти Ламе.*

2.7.3. *Основні диференціальні операції в криволінійних координатах.*

2.7.1. Криволінійні координати

Коли декартові координати є взаємно однозначними функціями інших довільних трьох змінних q_1, q_2, q_3 , тобто $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$, то змінні величини q_1, q_2, q_3 називаються криволінійними координатами.

Якщо $q_i = \text{const}$, а q_k, q_j – набувають всіх можливих значень, то одержимо поверхню, яку називається *координатною поверхнею*.

Існує три сім'ї координатних поверхонь в трьохвимірному просторі ($q_1 = \text{const}, q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}$). *Лінії перетину координатних поверхонь – це координатні лінії*, у координатній лінії, для якої $q_1 = \text{const}$ і $q_2 = \text{const}$ змінюється лише q_3 , а тому вона і є q_3 – лінією і т.і.

Через кожну точку проходять три координатні поверхні (вони в ній перетинаються), а отже й *три координатні лінії* (рис.21).

Розглянемо приклади криволінійних систем координат

1. *Циліндрична система координат* (рис. 22).

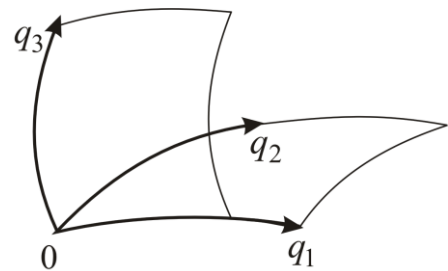


Рис. 21

Для такої системи маємо:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < +\infty \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases} \quad (2.106)$$

Координатні поверхні:

$\rho = \text{const}$ – коаксіальні циліндри з віссю Oz .

$\varphi = \text{const}$ – напівплощини, що обмежуються віссю Oz .

$z = \text{const}$ – площини, що перпендикулярні до Oz .

Координатні лінії:

ρ -лінії – півпрямі, що розпочинаються на осі Oz .

φ -лінії – кола в площині $z = \text{const}$ і центром на вісі Oz .

z -лінії – прямі, паралельні до Oz .

2. Сферична система координат (рис. 23).

Криволінійні координати r, θ, φ зв'язані з декартовими:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ z = r \cos \theta, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.107)$$

Координатні поверхні:

$r = \text{const}$ – концентричні сфери з центром в точці O .

$\theta = \text{const}$ – конуси з віссю Oz і вершиною в точці O .

$\varphi = \text{const}$ – півплощини обмежені віссю Oz .

Координатні лінії:

r - радіуси сфер, що проведені з точки O .

θ - лінії – паралельні кола, перпендикулярні до Oz .

φ - лінії – меридіани, дуги півкіл, що спираються на вісь Oz .

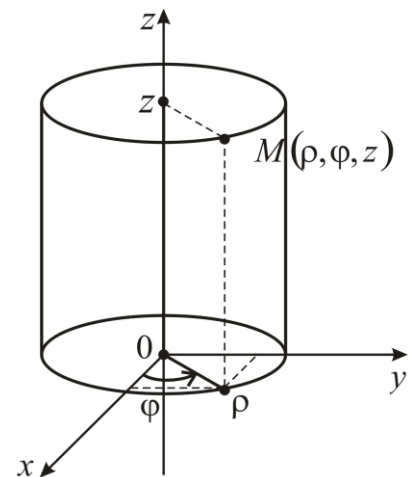


Рис. 22

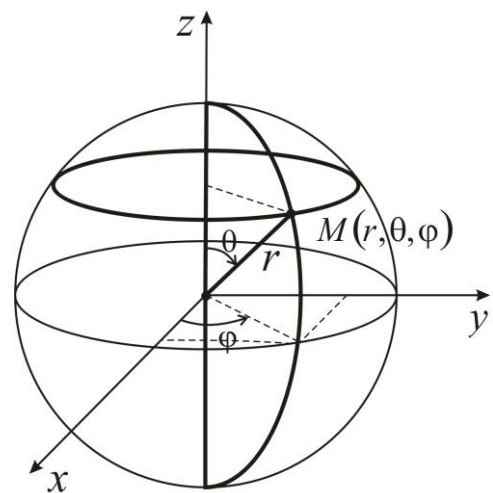


Рис. 23

2.7.2. Коефіцієнти Ламе

Якщо в криволінійній системі в будь-якій точці простору три координатні лінії або дотичні в точці взаємно перпендикулярні, то система координат називається *ортогональною*. Циліндрична та сферична система – ортогональні. В цих системах різні векторні і тензорні співвідношення більш прості, ніж в довільних криволінійних.

Умови, яким задовольняють функції $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$ в ортогональній системі:

Як відомо з геометрії дві прямі (взаємно перпендикулярні) з напрямленими кутами α, β, γ і α', β', γ' задовольняють умові:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Але ці косинуси пропорційні відповідним частинним похідним $\frac{\partial x}{\partial q_i}$, $\frac{\partial y}{\partial q_i}$, $\frac{\partial z}{\partial q_i}$, тоді умова взаємної перпендикулярності координатних кривих q_i і q_j :

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.108)$$

Отже, щоб криволінійна система q_1, q_2, q_3 була ортогональною, потрібно щоб функції $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$ задовольняли трьом таким умовам.

Відшукаємо елемент довжини дуги в криволінійній системі q_1, q_2, q_3 . Як відомо в декартовій системі координат:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}; \quad x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3. \end{cases} \quad (2.109)$$

Тоді

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 = \\
 & = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

матимемо

$$\begin{aligned}
 dS^2 & = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2 \right) dq_1^2 + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2 \right) dq_2^2 + \\
 & + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2 \right) dq_3^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) dq_1 dq_2 + \\
 & + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_3 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} \right) dq_2 dq_3.
 \end{aligned}$$

Врахуємо умову ортогональності (2.108) координатних ліній: q_1 і q_2 ; q_1 і q_3 ; q_2 і q_3 відповідно:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} &= 0, \\
 \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_3} &= 0, \\
 \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{— є виконання умови ортогональності.}$$

Тоді

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} \text{— перший коефіцієнт Ламе;}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2} \text{— другий коефіцієнт Ламе;}$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2} \text{— третій коефіцієнт Ламе.}$$

Або в загальному випадку:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}; \quad i=1,2,3. \quad (2.110)$$

Коефіцієнти Ламе встановлюють зв'язок між декартовими і криволінійними координатами; ці координати мають інваріантний характер і однозначно визначають розглядувану криволінійну систему.

За допомогою коефіцієнтів Ламе та відповідних криволінійних координат можна обрахувати:

Елемент довжини координатної лінії $dS_i = H_i dq_i$, отже $H_i = \frac{dS_i}{dq_i}$, тобто

H_i – характеризує швидкість зміни довжини дуги координатної лінії.

Елемент площі криволінійного «квадрата» $d\sigma = H_i H_j dq_i dq_j$.

Об'єм елементарного криволінійного «куба» $dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

Обрахуємо коефіцієнти Ламе в різних систем координат.

1. *Декартова система:*

$$H_x = H_y = H_z = 1; \quad d\sigma_{xy} = dx dy, \quad d\sigma_{xz} = dx dz, \quad d\sigma_{yz} = dy dz; \quad dV = dx dy dz.$$

2. *Циліндрична система:* $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1;$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2} = \rho;$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

$$d\sigma_{\rho\varphi} = \rho d\rho d\varphi, \quad d\sigma_{\rho z} = d\rho dz, \quad d\sigma_{\varphi z} = \rho d\varphi dz$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

3. *Сферична система:* $x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\cos \varphi \sin \theta)^2 + (\sin \varphi \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta} = 1;$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 0} =$$

$$= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = r \sin \theta;$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} =$$

$$= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta} = r.$$

$$d\sigma_{r\varphi} = r \sin \theta dr d\varphi, \quad d\sigma_{\varphi\theta} = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad d\sigma_{r\theta} = r dr d\theta.$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

2.7.3. Основні диференціальні операції в криволінійних координатах

1. Градієнт скалярної функції.

Градієнт скалярної функції φ – це вектор $\text{grad}\varphi$, проекція якого на довільний напрямок \vec{l} дорівнює похідній від φ по цьому напрямку:

$$\text{grad}_l \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l},$$

де Δl – приріст відрізка l вздовж напрямку \vec{l} .

Нехай вектор $\text{grad}\varphi$ задано в деякій точці M простору (рис. 24). Через цю точку проходить три взаємно перпендикулярні криволінійні лінії q_1, q_2, q_3 ; проведемо до цих ліній дотичні, відкладемо вздовж них (в напрямі зростання координат) одиничні орти $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Ця трійка ортів називається базисом (чи репером), вона утворює локальну (місцеву) прямокутну систему координат, зрозуміло, що в різних точках простору ці репери будуть різні.

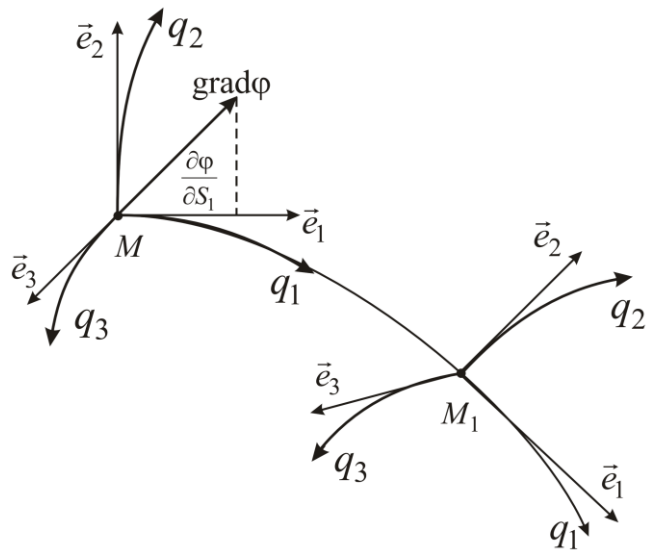


Рис. 24

Проекція вектора $\text{grad}\varphi$ на напрямки координатних ліній (на дотичні до цих ліній в точці M):

$$(\text{grad}\varphi)_{S_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial S_i},$$

dS_i – довжина дуги координатної кривої q_i . Але як відомо $dS_i = H_i dq_i$. Отже,

$$(\text{grad}\varphi)_{q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}.$$

Таким чином, градієнт скалярної функції в довільній точці простору в криволінійній системі координат визначається через три проекції на координатні лінії

$$\text{grad}\varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (2.111)$$

Обрахуємо градієнт скалярного поля в різних систем координат.

1. *Сферична система координат:* $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$.

$$\begin{aligned} \text{grad}_r \psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \varphi}, \\ \text{grad}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \varphi} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.112)$$

2. *Циліндрична система координат:* $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$.

$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (2.113)$$

3. *В декартовій системі:* $H_x = 1$, $H_y = 1$, $H_z = 1$, $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.114)$$

2. Дивергенція векторної функції.

Для векторного вигляду $\text{div} \vec{a}$ в криволінійних координатах використаємо інваріантне означення дивергенції:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{dN}{dV}, \quad (2.115)$$

де dN – потік вектора \vec{a} через поверхню dS , яку обмежує об'єм dV . За dV оборемо криволінійний елементарний «кубик» (рис. 25), границями якого є ділянки координатних поверхонь. Тоді: $dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$. Розглянемо потік вектора \vec{a} через грані перпендикулярні до q_1 (передня – (2), задня – (1)).

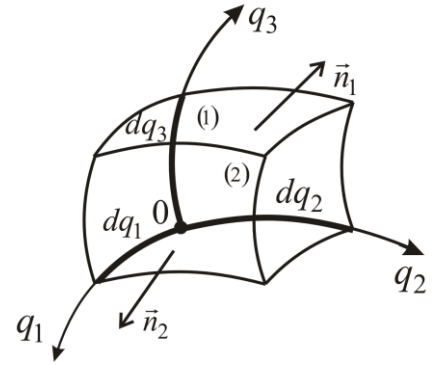


Рис. 25

$$dS_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3;$$

$$dS_2 = H_2 (q_1 + dq_1) H_3 (q_1 + dq_1) dq_2 dq_3.$$

Вектор \vec{a} в усіх точках грані (1) має значення $\vec{a}(q_1)$, а грані (2) – $\vec{a}(q_1 + dq_1)$. Напрям нормалі \vec{n}_1 – проти q_1 , а \vec{n}_2 – однаковий з q_1 , тому проекція на нормаль до цих граней: « $-a_{q_1}(q_1)$ » і « $+a_{q_1}(q_1 + dq_1)$ ».

Отже, результуючий елементарний потік вздовж q_1 має вигляд:

$$dN_{q_1} = -a_{q_1}(q_1) H_2(q_1) H_3(q_1) dq_2 dq_3 + a_{q_1}(q_1 + dq_1) H_2(q_1 + dq_1) H_3(q_1 + dq_1) dq_2 dq_3$$

Або розклавши в ряд Тейлора $a_{q_1}(q_1 + dq_1) \cdot H_2(q_1 + dq_1) H_3(q_1 + dq_1) dq_2 dq_3$, і обмежившись лише його лінійними членами одержимо:

$$dN_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.116)$$

Аналогічно визначаються елементарні потоки через іншу пару граней, а тому повний потік через всі грані дорівнює

$$dN = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 H_1 a_{q_3}) \right) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.117)$$

Тоді з формули для $\text{div} \vec{a}$ маємо:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 H_1 a_{q_3}) \right) \quad (2.118)$$

Для декартової системи координат: $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$; $\vec{a}(x, y, z)$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.119)$$

Для циліндричної системи координат: $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$, $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$; $\vec{a}(\rho, \varphi, z)$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_z) \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.120)$$

Для сферичної системи: $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$; $\vec{a} = \vec{a}(r, \theta, \varphi)$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \cdot a_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + r \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi) \right);$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2.121)$$

3. Ротор векторної функції.

Інваріантне означення ротора має вигляд:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \frac{d\Gamma}{dS} \quad (2.122)$$

де $d\Gamma$ – циркуляція \vec{a} по контуру dL , що обмежує площадку dS .

Виберемо за dS малий криволінійний чотирикутник $ABCD$ (рис. 26), де $A(q_1, q_2, q_3)$; $B(q_1, q_2 + dq_2, q_3)$; $C(q_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$; $D(q_1, q_2, q_3 + dq_3)$, сторонами якого є відрізки координат q_2 і q_3 . Нормаль до цієї площадки співпадає з q_1 (правий гвинт). Тоді

$$dS = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad \Gamma = \oint_L a_\ell dl, \quad \text{тому}$$

$$\oint_{\Delta L} a_\ell dl = \int_A^B a_\ell dl + \int_B^C a_\ell dl + \int_C^D a_\ell dl + \int_D^A a_\ell dl$$

Оскільки dq_2 і dq_3 – дуже малі, то \vec{a} в

усіх точках можна взяти однаковим, тоді:

$$(1) \int_A^B a_\ell dl_2 = a_{q_2}(q_3) H_2(q_3) dq_2$$

$$(2) \int_B^C a_\ell dl_3 = a_{q_3}(q_2 + dq_2) H_3(q_2 + dq_2) dq_3$$

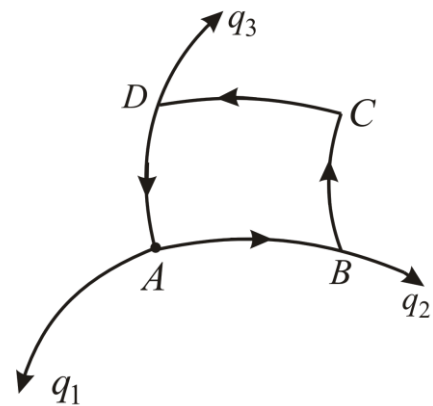


Рис. 26

$$(3) \int_C^D a_\ell dl_2 = -a_{q_2}(q_3 + dq_3)H_2(q_3 + dq_3)dq_2$$

$$(4) \int_D^A a_\ell dl_3 = -a_{q_3}(q_2)H_3(q_2)dq_3$$

Додавши (1) і (3) та (2) і (4),

$$(1) + (3): -\frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_2}H_2)dq_3dq_2$$

$$(2) + (4): \frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_3}H_3)dq_2dq_3$$

і врахувавши, що $dS = H_2H_3dq_3dq_2$, відшукаємо елементарну циркуляцію векторного поля \vec{a} вздовж елементарного контуру $ABCD$:

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_3}H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_2}H_2) \right) dq_2dq_3.$$

Тоді:

$$\text{rot}_{q_1} \vec{a} = \frac{d\vec{A}}{dS} = \frac{1}{H_2H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_3}H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_2}H_2) \right). \quad (2.123)$$

Отже, виконавши узагальнення, ми можемо дістати висновок, що $\text{rot} \vec{a}$ в ортогональній криволінійній системі з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{a} &= \text{rot}_{q_1} \vec{a} \cdot \vec{e}_1 + \text{rot}_{q_2} \vec{a} \cdot \vec{e}_2 + \text{rot}_{q_3} \vec{a} \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \frac{\vec{e}_1}{H_2H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_3}H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_2}H_2) \right) + \frac{\vec{e}_2}{H_3H_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_1}H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_3}H_3) \right) + \\ &\quad + \frac{\vec{e}_3}{H_2H_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_2}H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_1}H_1) \right). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Або звернути до матричного представлення:

$$\text{rot} \vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3} \begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1a_{q_1} & H_2a_{q_2} & H_3a_{q_3} \end{vmatrix}.$$

Тепер наше завдання отримати ці формули в конкретних ортогональних криволінійних системах координат: циліндричній та сферичній.

Для початку в декартовій: $H_1 = H_2 = H_3 = 1, \vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$;

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (2.125)$$

В циліндричній системі: $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$, $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$;

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{\vec{e}_\rho}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (a_z \cdot 1) - \frac{\partial}{\partial z} (a_\varphi \cdot \rho) \right) + \frac{\vec{e}_\varphi}{1 \cdot 1} \left(\frac{\partial}{\partial z} (a_\rho \cdot 1) - \frac{\partial}{\partial \rho} (a_z \cdot 1) \right) + \\ &\quad + \frac{\vec{e}_z}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (a_\varphi \cdot \rho) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\rho \cdot 1) \right) = \\ &= \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (a_\varphi \cdot \rho)}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right); \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}. \quad (2.126)$$

В сферичній системі:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{H_r H_\theta H_\varphi} \begin{vmatrix} H_r \vec{e}_r & H_\theta \vec{e}_\theta & H_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ H_r q_r & H_\theta q_\theta & H_\varphi q_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ q_r & r q_\theta & r \sin \theta q_\varphi \end{vmatrix}. \quad (2.127)$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають криволінійними координатами?
2. Доти означення криволінійної координатної поверхні?
3. Що називають криволінійною координатною лінією?
4. Записати формули зв'язку декартової та циліндричної системи координат, виконати малюнок.
5. Записати рівняння координатних поверхонь та координатних ліній у циліндричній системі координат.
6. Записати формули зв'язку декартової та сферичної системи координат, виконати малюнок.
7. Записати рівняння координатних поверхонь координатних ліній у сферичній системі координат.

8. Дати означення коефіцієнтів Ламе. Розрахувати коефіцієнти Ламе для декартової, циліндричної та сферичної систем координат.

9. Дати означення похідної скалярного поля у циліндричній та сферичній системах координат.

10. Дати означення градієнта скалярного поля у циліндричній та сферичній системах координат.

11. Дати означення потоку векторного поля у довільній криволінійній системі координат і як приклад, у циліндричній та сферичній системах координат.

12. Дати означення дивергенції векторного поля у довільній криволінійній системі координат і як приклад, у циліндричній та сферичній системах координат.

13. Дати означення лінійного інтегралу векторного поля у довільній криволінійній системі координат і як приклад, у циліндричній та сферичній системах координат.

14. Дати означення ротора векторного поля у довільній криволінійній системі координат і як приклад, у циліндричній та сферичній системах координат.

2.8. Диференціальні операції другого порядку

2.8.1. Оператор Гамільтона.

2.8.2 Диференціальні операції другого порядку.

2.8.3. Формули Гріна.

2.8.1. Оператор Гамільтона

Більшість диференціальних операцій в теорії поля спрощуються при введенні оператора Гамільтона, що називається ще символічним вектором «набла» ($\vec{\nabla}$):

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.128)$$

За його допомогою основні дії по диференціюванню скалярних та векторних функцій зводяться до відповідного множення оператора $\vec{\nabla}$ на ці

функції $\text{grad}\varphi = \vec{e}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ можна також подати як добуток вектора

$\vec{\nabla}$ на скаляр φ : $\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$.

Дивергенція векторного поля $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$. З іншого боку:

$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \vec{a}$ – скалярний добуток $\vec{\nabla}$ на \vec{a} .

Ротор векторного поля $\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$. З іншого боку $\operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{a}]$

– це векторний добуток $\vec{\nabla}$ на \vec{a} .

Тензорний добуток $\vec{\nabla}$ на вектор \vec{a} – це транспонований тензор-похідна:

$$\{\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Зручність застосування $\vec{\nabla}$ полягає в тому, що виконуючи дії над φ та \vec{a} , можна формально розглянути $\vec{\nabla}$ як вектор і застосувати до нього формули векторної алгебри. Потрібно лише враховувати, що $\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор, що володіє властивостями похідної.

Звідси випливає ряд наслідків:

1. $\vec{\nabla}$ – лінійний, а тому

$$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi. \quad (\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi);$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla}\vec{a} + \vec{\nabla}\vec{b} \quad (\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b});$$

$$[\vec{\nabla}, (\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{\nabla}, \vec{a}] + [\vec{\nabla}, \vec{b}] \quad (\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}).$$

2. Тому, що $\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор, то в цих випадках, коли φ чи \vec{a} є постійними $\varphi, \vec{a} = \text{const}$, тоді

$$\vec{\nabla}\varphi = 0, \quad \vec{\nabla}\vec{a} = 0 \quad \text{та} \quad [\vec{\nabla}, \vec{a}] = 0.$$

3. Результат дії диференціального оператора $\vec{\nabla}$ на добуток двох скалярних функцій чи на добуток скалярної функції і векторної рівний сумі добутоків кожного співмножника на результат застосування оператора до другого співвідношення:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\varphi\psi) &= \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi; \\ \vec{\nabla}(\varphi\vec{a}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi) + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \vec{a}\text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\vec{a};\end{aligned}\tag{2.130}$$

$$[\vec{\nabla}, (\varphi\vec{a})] = \varphi[\vec{\nabla}, \vec{a}] + [(\vec{\nabla}\varphi), \vec{a}] = \varphi\text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\varphi, \vec{a}].\tag{2.131}$$

2.8.2. Диференціальні операції другого порядку

Оператор Гамільтона допомагає легко обчислити різні другі похідні скалярних і векторних функцій.

Як ми вже встановили, в математичній теорії поля зустрічаються три перші похідні: $\text{grad}\varphi$, $\text{div}\vec{a}$, $\text{rot}\vec{a}$; ці нові поля будуть описуватись п'ятьма другими похідними $\text{div grad}\varphi$, $\text{rot grad}\varphi$, $\text{grad div}\vec{a}$, $\text{div rot}\vec{a}$, $\text{rot rot}\vec{a}$. Ці похідні зручно представити за допомогою оператора $\vec{\nabla}$.

$$1. \text{div grad}\varphi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi,$$

$$\text{де } \nabla^2 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 = \Delta \quad (\text{дельта}) -$$

оператор Лапласа або лапласіан. Отже,

$$\text{div grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi.\tag{2.132}$$

2. Для одержання $\text{rot grad}\varphi$ потрібно застосовувати оператор ∇ спочатку скалярно, а потім векторно:

$$\text{rot grad}\varphi = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi] = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}] \varphi = 0,\tag{2.133}$$

оскільки

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} = 0.\tag{2.134}$$

Отже, $\text{rot grad}\varphi \equiv 0$ – потенціальне поле, яке не має вихрів.

3. Величина $\text{div rot}\vec{a}$ є мішаним добутком трьох співмножників

$$\text{div rot}\vec{a} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}] \vec{a} = 0.\tag{2.135}$$

Отже, $\text{div rot}\vec{a} \equiv 0$ – вихрове поле, яке не має джерел (вихрові лінії замкнені, або йдуть на нескінченність).

$$4. \text{rot rot}\vec{a} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \text{grad div}\vec{a} = \Delta\vec{a}.\tag{2.136}$$

$$5. \text{grad div}\vec{a} = \text{rot rot}\vec{a} + \Delta\vec{a}.\tag{2.137}$$

$$\begin{aligned} \text{grad div } \vec{a} &= \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \\ &= \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} + \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial x} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial y}, \\ \text{де } \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} &= \Delta \vec{a}, \\ \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \vec{e}_1 \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial x} + \vec{e}_3 \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial y} &= \text{rot rot } \vec{a}. \end{aligned}$$

2.8.3. Формули Гріна

В математичній фізиці часто застосовуються формули Гріна. Їх легко одержати на основі одержаних вище результатів. Як відомо, для довільного векторного поля має місце теорема Гауса: $\int_V \text{div } \vec{a} dV = \int_S \vec{a} d\vec{S}$.

Покладемо $\vec{a} = \varphi \cdot \vec{b}$, де φ та \vec{b} – деякі скалярна та векторна функції координат. Але $\text{div}(\varphi \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div } \vec{b}$.

Припустимо, що векторне поле \vec{b} – потенціальне, а тому для нього: $\vec{b} = \text{grad } \psi$. Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{a} &= \text{div}(\varphi \cdot \text{grad } \psi) = \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div}(\text{grad } \psi), \\ \text{div}(\text{grad } \psi) &= \nabla^2 \psi. \end{aligned}$$

Тоді, $\text{div } \vec{a} = \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \nabla^2 \psi$, але $\vec{a} = \varphi \cdot \text{grad } \psi$, тому

$a_n = \varphi \cdot \text{grad}_n \psi = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$. Отже, формула Гауса може бути записаною так:

$$\int_V \left((\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) + \varphi \cdot \nabla^2 \psi \right) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (2.138)$$

Це і є перша формулі Гріна.

Якщо тепер взяти вектор \vec{a} у вигляді $\vec{a} = \psi \cdot \text{grad } \varphi$, тоді одержимо:

$$\int_V \left((\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) + \psi \cdot \nabla^2 \varphi \right) dV = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (2.139)$$

Скомпонували (віднявши почленно цю рівність від першої формули (2.138), одержимо другу формулу Гріна:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \cdot \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (2.140)$$

Можна довести, що для потенціального поля: умова потенціальності ($\vec{a} = \text{grad}\varphi$), безвихровості ($\text{rot}\vec{a} \equiv 0$) і безциркуляційності ($\oint \vec{a} d\vec{l} = 0$) векторного поля повністю еквівалентні.

Соленоїдальне (трубчасте) – це вихрове поле, для нього $\text{div}\vec{a} = 0$. Але як ми вже знаємо $\text{div rot}\vec{b} = 0$ для довільного вектора $\vec{b}(\vec{r})$. Тому \vec{a} можна подати як ротор будь-якого векторного поля, тобто $\vec{a} = \text{rot}\vec{b}$. Основна властивість вихрового поля $\oint_S \vec{a} d\vec{S} = 0$ – це рівність нулеві його потоку через замкнену поверхню, що його обмежує.

Але може бути поле, для якого $\text{div}\vec{a} = 0$ і $\text{rot}\vec{a} = 0$. Це одночасно потенціальне (безвихрове) і одночасно соленоїдальне (вихрове) поле.

$\text{rot}\vec{a} \equiv 0$, тому $\vec{a} = \text{grad}\varphi$, але $\text{div}\vec{a} = 0$, тоді $\text{div}\vec{a} = \text{div grad}\varphi = 0$; $\nabla^2\varphi = 0$.

Отже, це поле ($\text{div}\vec{a} \equiv 0$, $\text{rot}\vec{a} \equiv 0$) задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.141)$$

Для розв'язку практичних задач досить корисною є *теорема Гельмгольца*: будь-яке однозначне, неперервне і гладке векторне поле $\vec{a}(\vec{r})$ можна подати у вигляді суми потенціального та вихрового полів:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \text{grad}\varphi(\vec{r}) + \text{rot}\vec{b}(\vec{r}). \quad (2.142)$$

Поле \vec{b} називають векторним потенціалом, причому його можна завжди обрати так, щоб $\text{div}\vec{b} = 0$, $\text{div rot}\vec{b} \equiv 0$, а $\text{div grad}\varphi = \nabla^2\varphi$, тоді $\text{div}\vec{a} = \nabla^2\varphi$ і не залежить від поля \vec{b} .

Запитання для самоконтролю:

1. Що являє собою оператор Гамільтона?
2. Записати аналітичний вигляд вектора «набла» - $\vec{\nabla}$.
3. Як представити $\text{grad}\varphi$ за допомогою оператора $\vec{\nabla}$?
4. Як представити $\text{div}\vec{a}$ за допомогою оператора $\vec{\nabla}$?
5. Як представити $\text{rot}\vec{a}$ за допомогою оператора $\vec{\nabla}$?
6. Що являє собою тензорний добуток $\vec{\nabla}$ на вектор \vec{a} ?
7. Назвіть основні властивості оператора $\vec{\nabla}$ та наслідки, які з них випливають.

8. Чому дорівнюють: $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$?
9. Запишіть першу формулу Гріна.
10. Запишіть умови потенціальності, безвихровості, і безциркулярності векторного поля. Яке поле називається соленоїдальним (трубчастим)?
11. Сформулюйте теорему Гельмгольца.

2.9.* Оператори квантової фізики

2.9.1. *Оператори і дії над ними. Лінійні оператори. Самоспряжені оператори.*

2.9.2. *Комутуючі оператори. Умови можливості одночасного вимірювання різних квантово-механічних величин. Повний набір спостережуваних.*

2.9.3. *Основні оператори квантової механіки в координатному зображенні.*

2.9.1. Оператори і дії над ними. Лінійні оператори. Самоспряжені оператори

Оператор – це символ для позначення дії чи програми дій, яку треба виконати над певною функцією, щоб одержати іншу функцію.

Отже, таку операцію можна записати:

$$\hat{L}\psi = \varphi. \quad (2.143)$$

Лінійний оператор – це оператор, для якого виконується умова:

$$\hat{L}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\hat{L}\varphi_1 + c_2\hat{L}\varphi_2. \quad (2.144)$$

Символи операторів розглядаються як самостійні об'єкти, над якими можна виконувати певні математичні дії: додавання, множення, піднесення до степеня, розкладання у степеневий ряд.

Оператор \hat{C} рівний сумі операторів \hat{A} і \hat{B} , якщо виконується рівність

$$\hat{C}\varphi = \hat{A}\varphi + \hat{B}\varphi = (\hat{A} + \hat{B})\varphi,$$

тобто

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad (2.145)$$

Оператор \hat{C} є добутком операторів \hat{A} і \hat{B} , коли

$$\begin{aligned} \hat{C}\varphi &= \hat{A}(\hat{B}\varphi), \\ \hat{C} &= \hat{A} \cdot \hat{B}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

В загальному випадку множення не комутативне, тобто $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Але, коли $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то оператори називають *комутативними*.

Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ називають *комутатором* операторів \hat{A} і \hat{B} .

Комутатор позначається символом:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.147)$$

Для комутативних операторів $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Але не будь-які лінійні оператори використовуються в квантовій механіці, застосовними є лише певний клас операторів, які є самоспряженими.

Оператор називають *самоспряженим* чи *ермітовим*, якщо він задовольняє наступному інтегральному співвідношенню:

$$\int_V \psi^*(x) \hat{L} \varphi(x) dx = \int_V \varphi(x) \hat{L}^* \psi^*(x) dx,$$

або

$$\int_V \varphi^*(x) \hat{L} \psi(x) dV = \int_V \psi \hat{L}^* \varphi^* dV. \quad (2.148)$$

Сума ермітових операторів – ермітовий; добуток ермітових операторів – ермітовий, за умови, що оператори комутують.

В квантовій механіці використовують лише самоспряжені, тому, що вони описують лише дійсні величини. А фізичні динамічні параметри є лише дійсними величинами.

2.9.2. Комутуючі оператори. Умови можливості одночасного вимірювання різних квантово-механічних величин. Повний набір спостережуваних

Кожній фізичній величині в квантовій механіці ставиться у відповідність свій самоспряжений оператор:

$$\hat{A}\psi = A\psi, \quad (2.149)$$

де \hat{A} – оператор фізичної величини, A – власне значення оператора цієї фізичної величини, що вимірюється; ψ – власна хвильова функція оператора, яка зображає хвильове поле квантової частинки фізичної величини, що досліджується. Це твердження постулюється в квантовій механіці.

Теорема: Необхідною і достатньою умовою того, що дві фізичні величини мають одночасно точні (певні) значення є комутативність відповідних їм операторів.

I. Необхідність.

Нехай, є два оператори \hat{A} і \hat{B} , які мають спільну власну функцію, тобто:

$$\begin{aligned} \hat{A}\psi = A\psi; \hat{B}\psi = B\psi &\Rightarrow \\ \left. \begin{aligned} \hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}(A\psi) = A\hat{B}\psi = AB\psi \\ \hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}(B\psi) = B\hat{A}\psi = BA\psi \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \hat{B}\hat{A}\psi = \hat{A}\hat{B}\psi \Rightarrow \\ \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} &\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0 \end{aligned}$$

II. Достатність.

Нехай, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Потрібно довести, що існує хвильова функція Ψ , спільна для операторів \hat{A} і \hat{B} , тобто

$$\hat{A}\psi = A\psi \text{ і } \hat{B}\psi = B\psi.$$

Доведення: нехай оператор \hat{A} має власну функцію ψ , тобто $\hat{A}\psi = A\psi$. Або $\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}(A\psi) = A\hat{B}\psi$, але $\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}$, тоді маємо: $\hat{A}(\hat{B}\psi) = A(\hat{B}\psi)$. Отже, $\varphi = \hat{B}\psi$ – нова власна функція оператора \hat{A} . Але набір власних функцій оператора має бути повним, а тому $\hat{B}\psi = \varphi = B\psi \Rightarrow \hat{B}\psi = B\psi$, тобто ψ також власна функція оператора \hat{B} . Теорема доведена.

Отже, дві квантово-механічні величини можна виміряти одночасно точно, якщо вони мають спільні власні функції, тобто коли їх оператори комутують.

У квантовій механіці використовується поняття *повного набору спостережуваних*, які для даної системи можуть мати одночасно точні певні значення. Для вільної частинки – це імпульс \vec{p} та його енергія E . Знання повного набору спостережуваних дає змогу однозначно визначити хвильову функцію частинки.

В повний набір не входять всі величини, що характеризують стан відповідних класичних систем. Існують стани в центральном-симетричному полі з певною енергією і моментом імпульсу. Але в цьому стані ми не можемо, наприклад, точно встановити значення координат частинки та її

потенціальної енергії. Тому повний набір охоплює не більше половини тих параметрів, що описують відповідну класичну систему.

Відзначимо, що в повний набір спостережуваних часто входять такі величини, що не мають класичних аналогів (наприклад, спіні, парність і ін.).

2.9.3. Основні оператори квантової механіки в координатному зображенні

Між операторами квантової механіки існують такі ж зв'язки, як і між відповідними фізичними величинами.

Для випадку коли у повний набір спостережуваних звичайної квантової частинки входять її координати, тоді

$$\hat{L} = f(\hat{r}, \hat{p}), \quad (2.150)$$

бо як правило класичні величини є функціями координат та імпульсів (що повністю описує стан класичної частинки).

Отже, вихідні оператори квантової механіки – це оператори координати та імпульсу.

Постулюємо: оператор координати \hat{x} рівний самій координаті x :

$$\hat{x} = x, \quad (2.151)$$

а дія оператора \hat{x} на ψ – це звичайне множення.

Можна це знайти й інакше. Як відомо, середнє значення фізичної величини, що вимірюється може бути розрахованим за формулою:

$$\bar{L} = \int_V \psi^* \hat{L} \psi dV. \quad (2.152)$$

З іншого боку ми бачимо, що

$$\bar{x} = \int_V x |\psi|^2 dV = \int_V x \psi \psi^* dV = \int_V \psi^* x \psi dV.$$

Отже,

$$\hat{x} = x.$$

Для відшукання оператора проекції імпульсу \hat{p}_x скористаємось тим, що \hat{x} і \hat{p}_x – не комутують, бо $[x, \hat{p}_x] = i\hbar$.

Можна підібрати \hat{p}_x так, щоб

$$x\hat{p}_x - \hat{p}_x x = i\hbar.$$

Наприклад, \hat{p}_x може бути оператором наступного вигляду:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.153)$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1.$$

Дійсно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \psi = \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) = \psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = x \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тому, дійсно

$$\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi \quad \text{і} \quad \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1.$$

Отже,

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

Аналогічно для інших проекцій координат і проекцій імпульсу частинки:

$$\hat{y} = y; \quad \hat{z} = z; \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Інші оператори шукають як функції x, \hat{p}_x згідно співвідношень класичної механіки (коли внаслідок відповідних дій одержують самоспряжений оператор):

$\hat{r} = \hat{x}\vec{e}_x + \hat{y}\vec{e}_y + \hat{z}\vec{e}_z = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \vec{r}$ — векторний оператор координати.

$$\hat{p} = \vec{e}_x \hat{p}_x + \vec{e}_y \hat{p}_y + \vec{e}_z \hat{p}_z = -i\hbar \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \vec{\nabla} \quad \text{— векторний}$$

оператор імпульсу частинки.

$$\hat{L} = \left[\hat{r}, \hat{P} \right] = -i\hbar \left[\vec{r}, \vec{\nabla} \right] = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} \quad \text{— оператор моменту імпульсу}$$

частинки.

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right); \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad -$$

оператори відповідних проекцій моменту імпульсу частинки.

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = \frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta -$$

оператор кінетичної енергії частинки, де

$$\left(\hat{P}_x^2 = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = (-1)^2 i^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

$\hat{U} = U(\vec{r}, t)$ – оператор потенціальної енергії поля, в якому перебуває частинка.

$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + U(\vec{r}, t)$ – оператор Гамільтона (оператор повної механічної енергії частинки).

Отже, основне рівняння квантової механіки для випадку стаціонарного зовнішнього потенціального поля – стаціонарне рівняння Шредінгера:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(r)) \psi(\vec{r}) = 0,$$

може бути поданим, після перетворень, також і в операторному представленні:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}),$$

$$\boxed{\hat{H}\psi = E\psi} \quad (2.154)$$

Зв'язок між операторами і спостережуваними при вимірюванні фізичних величин встановлюється *постулатом*: фізична величина може набувати ті і лише ті значення, які співпадають з власними значеннями її оператора.

Вигляд операторів фізичних величин не залежить від властивостей квантових частинок та від тих фізичних умов, в яких вони перебувають. Тому спектр операторів завжди один і той же (за винятком повної енергії). Повна енергія залежить від вигляду зовнішнього силового поля, що діє на

частинку (але значення E шукають із стаціонарного рівняння Шредінгера).

Не всі фізичні величини описуються операторами. Такі фізичні характеристики частинки як маса, електричний заряд, фундаментальні фізичні константи нерелятивістської квантової механіки не є операторами, а є дійсними числами, що входять в формули і рівняння як параметри.

Інакше кажучи, квантово-механічна фізична величина побудована згідно принципу відповідності з її координатою та імпульсом і є сама оператором, інакше – це число. Виняток становить спін квантової частинки, що не має класичного аналога і є оператором.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають оператором?
2. Що називають лінійним оператором?
3. Які математичні дії можна виконувати над символами операторів?

Наведіть приклади.

4. Дайте означення самоспряженого оператора.
5. Що є необхідною і достатньою умовою того, що дві фізичні величини мають однаково точні (певні) значення?
6. Назвіть умови можливості одночасного вимірювання різних механічних величин.
7. Поясніть зміст поняття «повний набір спостережуваних».

3. МАТЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ФІЗИКИ

3.1. Класифікація лінійних рівнянь

3.1.1. Класифікація лінійних рівнянь у частинних похідних II порядку та їх зведення до канонічного вигляду.

3.1.2. Канонічні форми лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

3.1.3.* Фізичні задачі, які приводять до рівнянь в частинних похідних. Приклади фізичних задач, що приводять до лінійних рівнянь.

3.1.4.* Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними.

3.1.5.* Поняття про нелінійні рівняння математичної фізики.

3.1.6.* Поняття про інтегральні рівняння у фізиці.

3.1.1. Класифікація лінійних рівнянь у частинних похідних II порядку та їх зведення до канонічного вигляду

Переважає більшість задач математичної фізики зводяться до розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних. Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння II-го порядку. Розглянемо класифікацію цих рівнянь.

Для спрощення будемо вважати, що незалежних змінних дві, нехай x і y , тоді:

Рівняннями у частинних похідних II-го порядку з двома незалежними змінними x і y називають співвідношення між невідомою функцією $u(x, y)$ та її частинними похідними до II-го порядку включно:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) = 0. \quad (3.1)$$

Аналогічно можна записати рівняння і для більшої кількості незалежних змінних.

Рівняння називають лінійним відносно старших похідних, якщо воно має вигляд:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (3.2)$$

де a_{11} , a_{12} , a_{22} – є функціями від x і y .

Якщо коефіцієнти a_{11} , a_{12} , a_{22} залежать не лише від x і y , а є, подібно до F_1 функціями $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, то таке рівняння називають *квазілінійним*.

Рівняння називають *лінійним*, якщо воно лінійне як відносно старших похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, так і її перших похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ й відносно функції u тощо:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f(x, y) = 0, \quad (3.3)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ – функції лише від x і y .

Якщо коефіцієнти цього рівняння не залежать від x і y , то воно є *лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами*.

Рівняння називають *однорідним*, якщо $f(x, y) = 0$.

За загального перетворення змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, що допускають зворотне перетворення, ми зможемо отримати нове рівняння, яке еквівалентне вихідному. Якщо змінні ξ і η підібрати так, що це дозволить надати рівнянню найбільш простої (канонічної) форми, то за формою подання таке рівняння буде канонічним.

Звідси рівняння (3.2) за допомогою нових змінних ξ і η зведемо до канонічного вигляду.

Для початку перетворимо похідні до нових змінних, якщо $u = u(\xi, \eta)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Підставимо значення нових похідних у вихідне рівняння (3.2), отримаємо

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0, \quad (3.4)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{aligned}$$

а функція \bar{F} не залежить від других похідних.

Слід зазначити, що якщо вихідне рівняння (3.2) лінійне, тобто

$$F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f,$$

тоді $\bar{F} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u + \delta$ – те ж залишається лінійним.

Оберемо змінні ξ і η так, щоб коефіцієнт \bar{a}_{11} був рівний нулю.

Розглянемо рівняння у часткових похідних першого порядку:

$$a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Нехай $z = \varphi(x, y)$ – який-небудь частинний розв'язок цього рівняння.

Якщо припустити, що $\xi = \varphi(x, y)$, тоді коефіцієнт a_{11} , напевно буде рівний нулю. Тобто розглянута нами задача про вибір нових незалежних змінних пов'язана з розв'язком рівняння (3.5).

Можна довести, що:

1. Якщо $z = \varphi(x, y)$ – частинний розв'язок рівняння (3.5), тоді співвідношення $\varphi(x, y) = C$ є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (3.6)$$

і навпаки.

2. Якщо $\varphi(x, y) = C$ – загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння (3.6), тоді функція $z = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння (3.5). Рівняння (3.6) є *характеристичним* для рівняння (3.2), а інтеграли характеристичного рівняння називають його *характеристиками*.

Якщо $\xi = \varphi(x, y)$, де $\varphi(x, y) = \text{const}$ – загальний інтеграл рівняння (3.2), що не залежить від $\varphi(x, y)$, тоді якщо $\eta = \psi(x, y)$, тому ми можемо перетворити в нуль також і коефіцієнти біля $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

Рівняння (3.2) розпадається на два рівняння відповідно до:

$$\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + a_{22} &= 0, \\ D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} &= 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}), \\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{1,2} &= \frac{2a_{12} \pm 2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{2a_{11}}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння (3.2).

В деякій точці $M(x, y)$ це рівняння називають:

гіперболічного типу, якщо в цій точці $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

еліптичного типу, якщо в цій точці $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

параболічного типу, якщо в цій точці $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Розглянемо область G , у всіх точках якої рівняння має один і той же тип. Через кожну точку G проходять дві характеристики, зокрема у рівнянь гіперболічного типу характеристики дійсні й різні, у рівнянь еліптичного типу – комплексні й різні, а у рівнянь параболічного типу – обидві характеристики дійсні і співпадають між собою.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Для рівняння *гіперболічного типу* $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ і праві частини рівнянь системи (3.7) дійсні й різні.

Загальні інтеграли цих рівнянь $\varphi(x, y) = C$ і $\psi(x, y) = C$ визначають дійсні сімейства характеристик.

Припускаючи, що $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$ зведене рівняння (3.4), після того як поділимо його на коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ може бути зведеним до вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}},$$

позначимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (3.8)$$

(\bar{a}_{11} і $\bar{a}_{22} = 0$) як вже зазначалось! Тоді матимемо *канонічну форму рівняння гіперболічного типу*:

$$\Phi\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}. \quad (3.9)$$

Дуже часто користуються *другою канонічною формою* цього рівняння. Нехай, $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, тоді $\xi + \eta = 2\alpha$, $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\xi - \eta = 2\beta$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$, де α і β – нові змінні. Тоді:

$$1) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right). \end{aligned}$$

Тоді рівняння (3.4) відповідно до (3.8) набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1; \quad (\Phi_1 = 4\Phi). \quad (3.10)$$

Для рівнянь *параболічного типу* $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ система рівнянь (3.7) співпадає і ми отримаємо один загальний інтеграл рівняння (3.2) – (3.6) або (3.4), де $\varphi(x, y) = \text{const}$.

Нехай, у цьому випадку $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \eta(x, y)$, де $\eta = \eta(x, y)$ – будь-яка функція, що не залежить від φ .

За такого вибору змінних коефіцієнт

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2.$$

Врахуємо, що $a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \Rightarrow a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$,

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0.$$

Поділимо рівняння (3.4) на коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ та отримаємо канонічну форму для рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right) \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (3.11)$$

Для рівняння *еліптичного типу* $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ і праві частини системи рівнянь (3.7) – комплексні.

Нехай $\varphi(x, y) = \dot{N}$ – комплексний інтеграл першого рівняння системи (3.7).

$\varphi^*(x, y)$ – спряжена функція до $\varphi(x, y)$ і буде являти собою загальний інтеграл спряженого другого рівняння системи (3.7).

Перейдемо до комплексних змінних, вважаючи, що $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$.

При цьому рівняння еліптичного типу зводиться до такого ж самого вигляду, що й гіперболічні.

Щоб не мати справу з комплексними змінними, вводимо нові змінні:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \\ \xi &= \alpha + i\beta \\ \eta &= \alpha - i\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2i}. \end{aligned}$$

У такому випадку

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + \\ &+ a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 = a_{11} \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ &+ 2a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + a_{22} \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + 2i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ &= \left(a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right) - \left(a_{11} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) + \end{aligned}$$

$$+ 2i \left(a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + a_{22} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = 0,$$

тобто $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ та $\bar{a}_{12} = 0$.

Тоді рівняння (3.4):

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0,$$

після поділу на коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ набуде канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}, \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right), \quad \Phi = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (3.12)$$

або для інших змінних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \right) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} - i \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \left(-\frac{i}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{i}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ &+ \left(-\frac{i}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} - i \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{i}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{i}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + i \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} + i \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \frac{i}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{i}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{i}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}. \end{aligned}$$

II-а канонічна форма для еліптичного типу рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1 \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (\Phi_1 = 2\Phi). \quad (3.13)$$

Отже, в залежності від знаку виразу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ мають місце наступні канонічні форми рівнянь:

гіперболічний тип

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi;$$

еліптичний тип

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi;$$

параболічний тип

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi.$$

Можна також, виконуючи подібні перетворення, прокласифікувати диференціальні рівняння другого порядку за типами, якщо незалежних змінних буде не дві, а більше.

3.1.2. Канонічні форми лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У випадку двох незалежних змінних лінійне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f(x, y) = 0. \quad (3.14)$$

Йому відповідатиме характеристичне рівняння зі сталими коефіцієнтами, а його характеристики будуть прямими лініями, тобто $z = \varphi(x, y)$ – задовольняє рівнянню (3.14), тоді

$$a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

а характеристичне

$$a_{11} (dy)^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} (dx)^2 = 0$$

Тоді

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

а характеристики:

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_1,$$

$$y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_2.$$

За допомогою відповідного перетворення змінних рівняння (3.14) приводиться до однієї з канонічних форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0 \text{ – еліптичний тип}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cU + f, \text{ або} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0 \end{cases} \text{ – гіперболічний тип}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0 \text{ – параболічний тип.}$$

Для подальшого спрощення введемо замість u нову функцію v :

$$u = e^{\lambda \xi + \mu \eta} v,$$

де λ, μ – поки ще невизначені сталі. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \cdot e^{\lambda \xi + \mu \eta} \cdot \lambda = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + v \lambda \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + v \mu \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + v \lambda \right) \right) = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda v \right) e^{\lambda \xi + \mu \eta} \cdot \lambda = \\ &= e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda^2 v \right) = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda^2 v \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu^2 v \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu v \right) \right) = e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu v \right) e^{\lambda \xi + \mu \eta} \cdot \lambda = \\ &= e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu \lambda v \right). \end{aligned}$$

Підставимо отримані співвідношення для похідних у рівняння еліптичного типу:

$$\begin{aligned} e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda^2 v \right) + e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu^2 v \right) + \\ + b_1 e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda v \right) + b_2 e^{\lambda \xi + \mu \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu v \right) + C e^{\lambda \xi + \mu \eta} \cdot v + f = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu^2 v + b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + b_1 \lambda v + b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + b_2 \mu v + C v + f \cdot e^{-(\lambda \xi + \mu \eta)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (b_1 + 2\lambda) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (b_2 + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1 \lambda + b_2 \mu + C) v + f \cdot e^{-(\lambda \xi + \mu \eta)} = 0.$$

Параметри λ і μ оберемо так, щоб два коефіцієнти, наприклад, біля перших похідних, перетворювались в нуль:

$$b_1 + 2\lambda = 0; \lambda = -\frac{b_1}{2}; \lambda^2 = -\frac{b_1^2}{4},$$

$$b_2 + 2\mu = 0; \mu = -\frac{b_2}{2}; \mu^2 = -\frac{b_2^2}{4},$$

$$\gamma = \lambda^2 + \mu^2 + b_1 \lambda + b_2 \mu + C = \frac{b_1^2}{4} + \frac{b_2^2}{4} - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_2^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4} (b_1^2 + b_2^2 - 2b_1^2 - 2b_2^2 + 4C) = \frac{1}{4} (4C - b_1^2 - b_2^2),$$

$$f_1 = f e^{-(\lambda \xi + \mu \eta)}.$$

Як наслідок отримаємо *еліптичний тип* рівняння:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma v + f_1 = 0. \quad (3.15)$$

Виконуючи аналогічні операції для випадку рівнянь гіперболічного та параболічного типів отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v + f = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma v + f = 0 \end{cases} \quad - \text{гіперболічний тип}; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + f_1 = 0 \quad - \text{параболічний тип}. \quad (3.17)$$

Рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадку декількох незалежних змінних:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f = 0$$

та за допомогою лінійного перетворення зводиться до канонічного вигляду одночасно у всіх точках області його визначення.

Вводячи нову функцію v :

$$u = v e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n},$$

і обираючи необхідним чином λ_i , ми також зможемо спростити рівняння, що приводить нас до канонічних форм, схожих із випадком $n = 2$.

3.1.3.* Фізичні задачі, які приводять до рівнянь в частинних похідних. Приклади фізичних задач, що приводять до лінійних рівнянь

Задачі, розв'язок яких приводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, що містять похідні та диференціали невідомих функцій, досить різноманітні. В таких задачах шукається функція або залежність між змінними факторами якого-небудь фізичного, хімічного або технічного процесу, рівняння (форма) лінії або поверхні.

При розв'язку цих задач спочатку складається диференціальне рівняння задачі, яке потім розв'язується тим або іншим способом в залежності від його типу.

Диференціальне рівняння задачі складається за її умовою і в залежності від умови задачі воно отримується або як співвідношення між диференціалами змінних величин, або як співвідношення, що містить похідні невідомої функції.

При складанні диференціального рівняння задачі у вигляді співвідношення між диференціалами змінних можна робити різні припущення, що спрощують задачу і, разом з тим, не впливають на результат.

При складанні диференціального рівняння задачі у вигляді співвідношення між похідними використовується геометричний, фізичний або механічний зміст похідної.

Крім того, при складанні диференціального рівняння задачі, в залежності від її умови, використовуються відомі закони фізики, хімії, механіки та інших наук та різних математичних даних.

Виділяють фізичні задачі, які приводять до рівнянь в частинних похідних (прикладом може бути задача №1 та 2), а також фізичні задачі, що приводять до лінійних рівнянь (прикладом може бути задача №3). Розглянемо ці приклади.

Задача 1. Відшукати залежність швидкості падіння тіла в повітрі від часу, якщо сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості v і площі S найбільшого перерізу тіла, перпендикулярного до напрямку руху, $F = kSv^2$.

Знайти: 1) поведінку швидкості падіння тіла при зростанні часу та 2) радіус парашуту, щоб при загальній вазі парашута і пілота в 100 кг найбільша швидкість падіння не переважала 5 м/с, вважаючи $k=0,083$.

Розв'язок. Згідно з умовою задачі та другого закону Ньютона в механіці, диференціальне рівняння руху центру мас падаючого тіла буде:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kSv^2 \text{ або } \frac{dv}{dt} = g - av^2, \quad a = \frac{kS}{m},$$

де m – маса тіла, v – швидкість падіння тіла в момент часу t , g – прискорення сили тяжіння.

Відокремлюючи змінні в цьому рівнянні та інтегруючи його, отримаємо:

$$\frac{dv}{g - av^2} = dt; \quad t = \frac{1}{2\sqrt{ag}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}} + c. \quad (3.18)$$

Із початкової умови $v = 0$ при $t = 0$ визначаємо значення сталої $c = 0$, підставляємо його в рівняння (3.18) і, розв'язуючи цю рівність відносно v , знайдемо шукану залежність швидкості падіння тіла від часу:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{e^{2t\sqrt{ag}} - 1}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1}} = \sqrt{\frac{g}{a} \left(1 - \frac{2}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1} \right)}. \quad (3.19)$$

Отримана залежність виявляє цікавий і практичний факт: зі збільшенням часу швидкість падіння тіла у повітрі має межу:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Теоретично таку швидкість падаюче тіло набуває лише через нескінченно великий проміжок часу, але практично, як це впливає з формули (3.19), вже через декілька секунд після початку падіння величина швидкості тіла буде дуже близькою до її граничного значення, тобто практично можна сказати, що через декілька секунд після початку падіння тіла в повітрі рух стає рівномірним.

Підставляючи задані значення величин в наближену рівність:

$$v \approx \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{mg}{kS}},$$

знайдемо радіус парашута:

$$5 \approx \sqrt{\frac{100}{0,083\pi r^2}}, \quad r \approx \frac{1}{5} \sqrt{\frac{100}{0,083\pi}} \approx 3,92 \text{ м.}$$

Задача 2. Відшукати форму дзеркала, що відбиває всі промені, що виходять із даної точки, паралельно даному напрямку.

Розв'язок. Перетнемо поверхню дзеркала площиною, що проходить через дану точку паралельно даному напрямку. Оберемо дану точку за початок прямокутної системи координат, розташованої в даній площині, направимо вісь Oy у заданому напрямку відбитих променів і знайдемо рівняння кривої L , що отримана при перетині шуканої поверхні вказаною площиною (рис. 27).

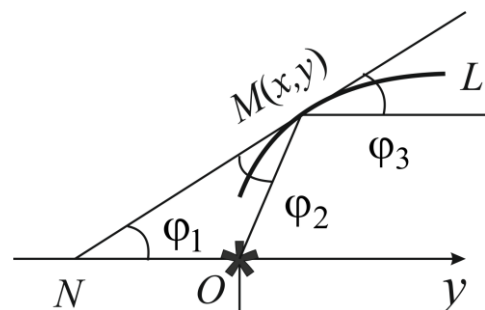


Рис. 27

Так як кут падіння дорівнює куту відбивання, то і $\angle\varphi_3 = \angle\varphi_2$. Але $\angle\varphi_3 = \angle\varphi_1$, тому трикутник MON – рівнобедрений і $OM = ON$.

Написавши рівняння дотичної MN :

$$Y - y = y'(X - x),$$

і, припускаючи в ньому $X = 0$, знайдемо $Y = -ON = y - xy' < 0$. Довжина відрізка $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Прирівнюючи знайдені вирази ON і OM , отримаємо диференціальне рівняння кривої L :

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{або} \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Розв'язуючи його як однорідне рівняння 1-го порядку, знайдемо його загальний інтеграл:

$$y = \frac{x^2 - c^2}{2c},$$

якому відповідає сімейство парабол, симетричних вісі Oy з загальним фокусом у заданій точці O .

Крива L буде однією з парабол цього сімейства і так як вона розташована в довільній площині, що проходить через вісь Oy , то шукана поверхня дзеркала є параболоїд:

$$y = \frac{x^2 + z^2 - c^2}{2c},$$

утворений обертанням кривої L навколо її вісі.

Такі параболічні дзеркала, які перетворюють пучок променів, що розходяться, в паралельний пучок променів, застосовуються для прожекторів.

Задача 3. Посудина об'ємом 100 л наповнена розсолем, що містить 10 кг розчиненої солі. За одну хвилину в неї втікає 3 л води і стільки ж суміші переганяється в іншу посудину того ж об'єму, що спочатку була наповнена водою, з якої надлишок рідини виливається.

В який момент часу кількість солі в обох посудинах буде однаковою?

Розв'язок. Нехай в момент часу t хв. В першій посудині містилося x кг соли і нехай в наступний малий проміжок часу dt кількість соли в цій посудині зменшилася на dx .

За час dt із посудини витече $3dt$ л розсолу. Концентрація розсолу (кількість соли в одному літрі розчину) в момент часу t буде $\frac{x}{100}$ кг/л.

Якщо припустити, що на протязі малого проміжку часу dt концентрація розсолу залишалася незмінною, то за цей час кількість соли зменшиться на

$$-dx = \frac{x}{100} \cdot 3dt \quad (\text{оскільки } dx < 0).$$

Розділяючи змінні в цьому рівнянні та інтегруючи, отримаємо:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100} \cdot dt; \quad \ln x = -0,03 \cdot t + c.$$

Виходячи з початкової умови $x = 10$ при $t = 0$, визначаємо значення сталої $c = \ln 10$.

Отже, залежність кількості соли x в першій посудині від часу t буде

$$\ln x = -0,03 \cdot t + \ln 10 \quad \text{або} \quad x = 10e^{-0,03t}. \quad (*)$$

Далі знайдемо залежність кількості соли y від часу t для другого сосуду. В другій посудині в момент t концентрація розсолу буде $\frac{y}{100}$ кг/л.

За час dt в нього віллється $3dt$ л розсолу, що містить $\frac{3x}{100} dt$ кг соли, а

виллється $3dt$ л розсолу, що містить $\frac{3y}{100} dt$ кг соли, тобто за час dt

кількість соли в другому резервуарі зміниться на величину:

$$dy = 0,03xdt - 0,03ydt \quad \text{або} \quad dy = 0,03(x - y)dt.$$

Замінюючи x в цьому рівнянні за формулою (*), отримаємо лінійне рівняння 1-го порядку:

$$dy = 0,03(10e^{-0,03t} - y)dt, \quad y' + 0,03y = 0,3e^{-0,03t},$$

загальний інтеграл якого

$$y = e^{-0,03t}(c_1 + 0,3t).$$

Значення сталої $c_1 = 0$ визначається з початкової умови: $y = 0$ при $t = 0$.

Отже, залежність кількості соли y в другій посудині від часу t буде

$$y = 0,3te^{-0,03t}.$$

Шуканий момент часу, в який кількість солі в обох посудинах буде однаковою, знайдемо, припускаючи $x = y$:

$$10e^{-0,03t} = 0,3te^{-0,03t}; \quad 10 = 0,3t; \quad t = 33\frac{1}{3} \text{ с.}$$

В цей момент в кожній посудині буде по $\frac{10}{e} \approx 3,68$ кг солі.

Багато фізичних процесів приводять до необхідності вивчення основних рівнянь математичної фізики. Тому виділяють деякі найпростіші задачі фізики, що приводять до основних рівнянь математичної фізики. Зокрема, це задачі про: розподіл тепла і дифузії; дифузія з розпадом і при ланцюговій реакції; потенціальний потік рідини, що не стискується; рівняння неперервності; рівняння газової динаміки та акустики; рівняння електростатики і стаціонарного електричного струму; рівняння магнітостатики, що приводять до рівнянь Пуассона та Лапласа, які детально будуть розглянуті нами нижче. А також рівняння гідродинаміки ідеальної рідини, що приводить до рівняння Ейлера; рівняння Максвелла; рівняння вільних електричних коливань в дротах; рівняння струни і рівняння мембрани; рівняння подовжніх коливань тонкого стержня та ін.

3.1.4.* Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними.

Для двох незалежних змінних ($n = 2$) будь-яке лінійне рівняння 2-го порядку в довільній точці області визначення відноситься до одного із типів: гіперболічного, еліптичного або параболічного. Якщо рівняння належить одному і тому ж типу в деякій області G , то за допомогою відповідного вибору змінних це рівняння може бути приведене до однієї з трьох канонічних форм в усій області. Остання обставина не має місця у випадку $n > 2$. При цьому класифікація рівнянь за найпростішими типами можлива лише у фіксовані точці. Зведення ж рівняння 2-го порядку з багатьма змінними в області G до найпростіших нормальних форм (аналогічно випадку $n = 2$) неможливе.

Розглянемо лінійне рівняння типу:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \quad (3.20)$$

де величини a, b, c, f є функціями x_1, x_2, \dots, x_n . Введемо нові незалежні змінні ξ_i , припускаючи, що:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тоді

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{ik},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

де

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Підставляючи вирази для похідних у вихідне рівняння (3.20), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

де

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl},$$

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Розглянемо квадратичну форму типу:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (3.21)$$

коефіцієнти якої дорівнюють коефіцієнтам вихідного рівняння в деякій точці $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Виконуючи над змінними y лінійні перетворення

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \eta_k,$$

отримаємо для квадратичної формули новий вираз

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

де

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Таким чином, коефіцієнти головної частини рівняння змінюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми при лінійному перетворенні. Вибором відповідного лінійного перетворення можна привести матрицю (a_{ij}^0) квадратичної форми до канонічного вигляду

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{ii}^0| &= 1, \text{ або } 0; \\ \bar{a}_{ij}^0 &= 0 \quad (i \neq j, i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Згідно закону інерції для квадратичних форм число додатних, від'ємних і рівних нулю коефіцієнтів \bar{a}_{ii}^0 інваріантно відносно лінійного перетворення, що приводить формулу (3.21) до нормального вигляду.

Назвемо рівняння (3.20) в точці M_0 рівнянням еліптичного типу, якщо всі n коефіцієнтів \bar{a}_{ii}^0 одного знаку; гіперболічного типу (або нормального гіперболічного типу), якщо $n-1$ коефіцієнтів \bar{a}_{ii}^0 мають однаковий знак. А один коефіцієнт протилежний їм за знаком; ультрагіперболічного типу, якщо серед \bar{a}_{ii}^0 є m коефіцієнтів одного знаку і $n-m$ протилежного знака; параболічного типу, якщо хоча б один з коефіцієнтів \bar{a}_{ii}^0 дорівнює нулю.

Таким чином, у фіксованій точці M_0 рівняння може бути приведено до однієї з наступних канонічних форм:

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} + \Phi = 0 \text{ (еліптичний тип),}$$

$$u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_i x_i} + \Phi \text{ (гіперболічний тип),}$$

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_i x_i} + \Phi \text{ (ультрагіперболічний тип),}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \text{ (} m > 0 \text{) (параболічний тип).}$$

Ми не зупиняємося детально на поділі рівнянь параболічного типу на рівняння еліптично-параболічного типу на рівняння еліптично-параболічні, гіперболічно-параболічні і т.д.

3.1.5.* Поняття про нелінійні рівняння математичної фізики

Точні розв'язки (в замкненому вигляді) диференціальних рівнянь математичної фізики завжди грали і продовжують грати велику роль у формуванні правильного розуміння якісних особливостей багатьох явищ і процесів у різних областях природознавства. Точні розв'язки нелінійних рівнянь наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі таких складних нелінійних ефектів, як просторова локалізація процесів перенесення, багатоманітність чи відсутність стаціонарних станів при визначених умовах, існування режимів з загостренням та ін. Навіть ті часткові точні розв'язки диференціальних рівнянь, які не мають зрозумілого фізичного змісту, можуть бути використаними в якості «тестових» задач при перевірці коректності та оцінці точності різних числових, асимптотичних та наближених аналітичних методів. Крім того, допускаючи точні розв'язки модельні рівняння і задачі слугують основою для розробки нових числових, асимптотичних та наближених методів, які, в свою чергу, дозволяють досліджувати вже більш складні задачі переносу тепла та маси речовини, що немає точного аналітичного розв'язку.

Більшість рівнянь прикладної та теоретичної фізики, хімії та біології містять параметри або функції, які знаходяться експериментально і тому не строго фіксовані. В той же час рівняння, що моделюють реальні явища і процеси, повинні бути досить простими для того, щоб їх можна було вдало проаналізувати і розв'язати. В якості одного з можливих критеріїв простоти можна прийняти вимогу, щоб модельне рівняння допускало розв'язок у замкнутому вигляді. При цьому особливий інтерес являють собою рівняння, що залежать від довільних функцій або такі, що містять багато вільних параметрів, які можна задати на розсуд дослідника.

Серед найважливіших слід відмітити такі три типи рівнянь:

- Рівняння, які зустрічаються в різних додатках (в теорії переносу тепла та переносу маси речовини, теорії води, гідродинаміці, теорії горіння, нелінійній оптиці, ядерній фізиці, хімічній технології, біології та ін.).
- Рівняння загального вигляду, які залежать від довільних функцій.
- Рівняння, які допускають точні розв'язки, що залежать від довільних функцій.

Ознайомитись із класифікацією нелінійних рівнянь можна у додатках.

3.1.6.* Поняття про інтегральні рівняння у фізиці

Диференціальним рівнянням називається рівність, що містить похідні або диференціали невідомої функції.

Якщо невідома функція залежить лише від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається звичайним, а якщо вона залежить від декількох аргументів і диференціальне рівняння містить її частинні похідні по цим аргументам, то воно називається рівнянням з частинними похідними.

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що міститься в цьому рівнянні.

Функція, що задовольняє диференціальному рівнянню, тобто перетворює його в тотожність, називається інтегралом (або розв'язком) цього рівняння.

Інтеграл диференціального рівняння називається загальним, якщо він містить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння, а функції, що отримуються із загального інтеграла при різних числових значеннях довільних сталих, називаються частинним інтегралами цього рівняння.

Геометрично кожному частинному інтегралу диференціального рівняння відповідає плоска лінія, його графік, яка називається інтегральною кривою цього рівняння, а загальному інтегралу відповідає сукупність (сімейство) всіх інтегральних кривих.

Нехай $K(s,t)$ – визначена в області $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ і неперервна в цій області функція двох змінних s і t , нехай λ – параметр. Нехай, надалі, $f(s)$ і $\varphi(s)$ – дві неперервні на інтервалі $a \leq s \leq b$ функції змінної s , пов'язані функціональним рівнянням:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt. \quad (3.22)$$

За допомогою функціонального рівняння (3.22), яке ми будемо називати *лінійним інтегральним рівнянням другого роду з ядром $K(s,t)$* , кожній неперервній функції $\varphi(s)$ віднесена друга $f(s)$, і до того ж лінійним чином, так що будь-якій лінійній комбінації $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$

відноситься відповідна комбінація $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Розв'язати інтегральне рівняння означає – визначити функцію $\varphi(s)$ за заданою $f(s)$.

Якщо функція $f(s)$ тотожно зникає, то говорять про *однорідне інтегральне рівняння*; в тому випадку, якщо останнє володіє, крім тривіального розв'язку $\varphi = 0$, ще й іншими розв'язками φ , то цей нетривіальний розв'язок можна помножити на постійний множник, а отже, його можна також вважати нормованим.

Одночасно з різними розв'язками $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ однорідного рівняння є також розв'язками всі лінійні комбінації $c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots$. Таке значення λ , для якого однорідне інтегральне рівняння має відмінний від нуля розв'язок, ми будемо називати власним значенням ядра, а відповідні розв'язки $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, які будемо вважати взаємно ортогональними, – власними або фундаментальними функціями ядра, що належать власному значенню λ . Їх число обмежене. Насправді, згідно нерівності Бесселя, застосованої до ядра $K(s, t)$ і ортогональним нормованим функціям $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$,

$$\lambda^2 \int K(s, t)^2 dt \geq \lambda^2 \sum_{i=1}^h \left[\int K(s, t) \varphi_i(t) dt \right]^2 = \sum_{i=1}^h \varphi_i(s)^2,$$

а отже, інтегруючи по s :

$$\lambda^2 \iint K(s, t)^2 ds dt \geq h,$$

тобто для h отримується верхня межа. Можна сказати: будь-яке власне значення має кінцеву кратність (тобто кінцеве число лінійно незалежних розв'язків).

Наше інтегральне рівняння являє собою природне узагальнення проблем лінійної алгебри. Його значення для математичного аналізу полягає в тому, завдяки його багато розпорошених думок об'єднуються спільною точкою зору.

Джерелоподібно представленні функції. Член, типовий для інтегрального рівняння (3.22), дається інтегралом типу:

$$g(s) = \int K(s, t) h(t) dt. \tag{3.23}$$

Про функцію g , що задана рівністю (3.23) за допомогою функції h і ядра K , говорять, що вона представлена *джерелоподібно*.

Якщо $h(t)$ – кусково-неперервна, то функція $g(s)$ напевне неперервна. Але про неї можна сказати ще більше: якщо $\int h(t)^2 dt \leq M$, M означає певне число, то функції, представлені рівнянням (3.23), рівноправно неперервні в своїй сукупності, тобто для будь-якого додатного числа ε існує, незалежно від спеціального виду функції $h(t)$, додатне число $\delta(\varepsilon)$ такого роду, що з нерівності $|\eta| < \delta$ витікає співвідношення:

$$g(s + \eta) - g(s) < \varepsilon.$$

Дійсно, з нерівності Шварца випливає, що

$$[g(s + \eta) - g(s)]^2 \leq M \int [K(s + \eta, t) - K(s, t)]^2 dt,$$

звідки, в силу рівномірної неперервності ядра, безпосередньо отримується наше твердження, так як незалежно від t , має місце нерівність:

$$|K(s + \eta, t) - K(s, t)| < \sigma$$

з доволі малим σ , хоч η досить мале.

Далі, якщо функції $K_n(s, t)$ рівномірно прямують до нескінченості:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s, t) = K(s, t),$$

то при заданій $h(t)$ справедливе співвідношення:

$$g(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int K_n(s, t) h(t) dt$$

в розумінні рівномірної збіжності відносно s , так як граничний перехід можна виконати під знаком інтегралу. Таким чином безпосередньо слідує, що всі функції виду:

$$g_n(s) = \int K_n(s, t) h(t) dt, \quad g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$$

рівноправно неперервні для всіх розглядуваних функцій $h(t)$, якщо тільки $\int h^2 dt \leq M$. Так само всі ці функції рівномірно обмежені, тобто всі вони за абсолютною величиною лежать нижче однієї спільної межі, що безпосередньо випливає з нерівності Шварца:

$$g_n(s)^2 \leq M \int [K_n(s, t)]^2 dt \text{ і відповідно } g(s)^2 \leq M \int [K(s, t)]^2 dt.$$

Вироджені ядра. Ядро, яке можна представити у вигляді кінцевої суми добутків функцій від s на функцію від t :

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^q \alpha_i(s) \beta_j(t). \quad (3.24)$$

ми будемо називати виродженим ядром. Можна при цьому допустити, що функції $\alpha_i(s)$, а також функції $\beta_i(t)$ лінійно незалежні між собою, так як в протилежному випадку можна було б одну із цих функцій виразити лінійно через інші і таким чином вдалося б представити ядро $A(s,t)$ у вигляді суми менше ніж p добутків вищевказаного типу. Із теореми про можливість рівномірного апроксимувати неперервну функцію $K(s,t)$ поліномами сліду, що ядро $K(s,t)$ можна, як завгодно точно, рівномірно апроксимувати виродженими ядрами, так як будь-який поліном відносно s і t представляє собою вироджене ядро.

Вироджене ядро допускає наступні перетворення в іншу, часто зручну форму. Уявимо собі, що $2p$ функцій від $s: \alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_p(s); \beta_1(s), \beta_2(s), \dots, \beta_p(s)$ виражені лінійно через систему нормованих ортогональних функцій $\omega_1(s), \omega_2(s), \dots, \omega_q(s)$, чого завжди можна досягнути ортогоналізацією заданих функцій. Тоді ядро $A(s,t)$ приймає вигляд подвійної суми:

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^q c_{ij} \omega_i(s) \omega_j(t). \quad (3.25)$$

Добуток $\omega_i(s) \omega_j(t)$ утворюють систему q^2 функцій від s і t , заданих в квадраті $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ і взаємно ортогональних, а отже і лінійно незалежних.

Якщо ядро $A(s,t)$ симетричне, тобто $A(s,t) = A(t,s)$ тотожна, то

$$\sum_{i,j=1}^q (c_{ji} - c_{ij}) \omega_i(s) \omega_j(t) = 0,$$

що в силу лінійної незалежності добутків $\omega_i(s) \omega_j(t)$ означає, що $c_{ji} = c_{ij}$.

Симетричне ядро $K(s,t)$ завжди можливо рівномірно апроксимувати симетрично виродженими ядрами. Щоб переконатися в цьому, досить лише, у випадку необхідності, замінити $A(s,t)$ функцією $\frac{1}{2}[A(s,t) + A(t,s)]$, яка одночасно з $A(s,t)$ рівномірно апроксимує ядро $K(s,t)$.

З а п и т а н н я д л я с а м о к о н т р о л ю :

1. Що називають рівняннями у частинних похідних II-го порядку з двома незалежними змінними x і y ?
2. Яке рівняння називають лінійним відносно старших похідних?
3. Яке рівняння називають лінійним, а яке квазілінійним?
4. Яке рівняння називають лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами?
5. Яке рівняння називають однорідним?
6. Яке рівняння є характеристичним для рівняння типу:
$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1 \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0?$$
7. Які рівняння називаються рівняннями гіперболічного типу?
8. Які рівняння називаються рівняннями еліптичного типу?
9. Які рівняння називаються рівняннями параболічного типу?
10. Запишіть канонічну форму рівняння гіперболічного типу.
11. Запишіть канонічну форму рівняння параболічного типу.
12. Запишіть канонічну форму рівняння еліптичного типу.
13. Запишіть рівняння гіперболічного типу із введенням сталих коефіцієнтів.
14. Запишіть рівняння еліптичного типу із введенням сталих коефіцієнтів.
15. Запишіть рівняння параболічного типу із введенням сталих коефіцієнтів. Які є типи рівнянь II-го порядку?
16. Назвіть найпростіші задачі фізики, що приводять до основних рівнянь математичної фізики.
17. Який алгоритм розв'язку задач, розв'язок яких приводиться до інтегрування диференціальних рівнянь?
18. Що дають можливість пояснити розв'язки нелінійних рівнянь? Які три типа рівнянь зустрічають найчастіше?
19. Що називають інтегрованими диференціальним рівнянням?
20. Яке диференціальне рівняння називається звичайним?
21. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з частинними похідними?
22. Що називають порядком диференціального рівняння?
23. Що називають інтегралом?
24. Який інтеграл називається загальним?
25. Які інтеграли називаються частинним?
26. Що називають лінійним інтегральним рівнянням другого роду з ядром?
27. Що означає розв'язати інтегральне рівняння?
28. Коли мають справу з однорідним інтегральним рівнянням?
29. Що називають джерелоподібною функцією?
30. Що називають ядром розв'язку диференціального рівняння?

3.2. Рівняння гіперболічного типу

3.2.1. Рівняння гіперболічного типу. Найпростіші фізичні задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу – коливання струни.

3.2.2. Поперечні коливання струни. Хвильове рівняння.

3.2.3. Коливання струни нескінченної довжини. Метод Д'аламбера. Окремий випадок задачі Коші.

3.2.4. Коливання струни скінченної довжини. Метод Фур'є (метод відокремлення змінних). Загальний розв'язок хвильового рівняння.

3.2.5. Стоячі хвилі.

3.2.6. Плоскі і сферичні хвилі.

3.2.1. Рівняння гіперболічного типу. Найпростіші фізичні задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу – коливання струни

Рівняння у часткових похідних II-го порядку гіперболічного типу найбільш часто зустрічаються у фізичних задачах, зв'язаних із процесами коливань.

Найпростіше рівняння гіперболічного типу для скалярної функції двох змінних $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.26)$$

за звичай називають *рівняннями коливань струни*.

3.2.2. Поперечні коливання струни. Хвильове рівняння

Постановка задачі. *Струна* – це тонка пружна нитка, закріплена в двох точках. Якщо її відхилити від положення рівноваги (рис. 28), то вона буде виконувати поперечні коливання. Положення рівноваги струни співпадає з віссю Ox , зміщення точок струни u залежить від координати і часу, тобто від $u = u(x, t)$.

Завдання: відшукати $u(x, t)$, якщо відхилили струни від положення рівноваги малі (рис. 28).

Розв'язок: Відхилимо елемент струни dS , що має спочатку довжину dx . Очевидно, що

$$dS^2 = du^2 + dx^2 \Rightarrow dS = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Ми розглядаємо малі коливання, тому для них відхил від положення рівноваги дуже незначний, тобто

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \ll 1,$$

тоді $dS \cong dx$. Отже, в процесі коливань струна додатково не розтягується, а тому сила натягу \vec{T} не змінюється під час коливань (або дуже мало змінюється).

Застосуємо до елемента дуги dS другий закон механіки матеріальної точки: $m\vec{a} = \vec{F}$. Для нашого випадку ми маємо: $dm = \rho dS = \rho dx$, де ρ – лінійна

густина струни – маса одиниці довжини; $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – прискорення елемента струни. Струна дуже тонка, а тому вага елемента довжини порівняно з натягом мала, а тому на елемент діють лише сили натягу \vec{T}_1 і \vec{T}_2 , що прикладені з обох боків.

Колівання поперечні, а тому нас цікавлять проекції сил натягу \vec{T}_1 і \vec{T}_2 на вертикальний напрямок (сума горизонтальних складових дорівнює нулю). Отже, $\rho dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_{2n} + T_{1n}$, але $T_{2n} = T \sin \theta_2$, $T_{1n} = -T \sin \theta_1$.

Але θ_1 і θ_2 – малі, а тому

$$\sin \theta_1 \approx \text{tg} \theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x, \quad \sin \theta_2 \approx \text{tg} \theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

Отже:

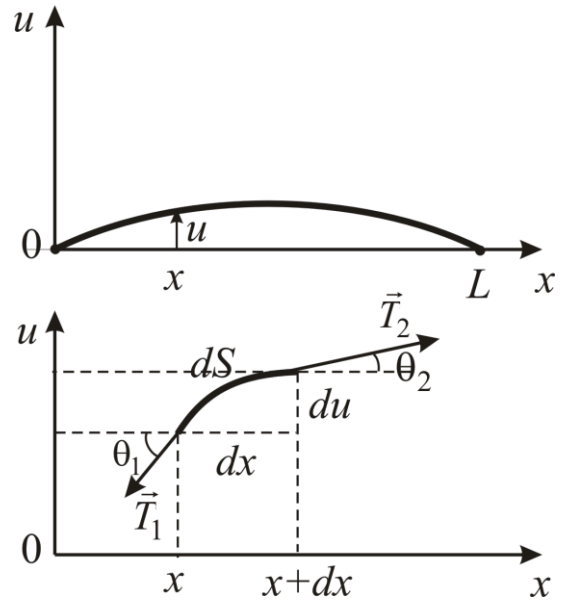


Рис. 28

$$T_{2n} + T_{1n} = T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = T \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right)$$

Розкладемо $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx}$ в ряд Тейлора:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + \frac{1}{2!} (dx)^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_x + \dots$$

Обмежимося лише лінійними членами для dx , тоді

$$\begin{aligned} T_{2n} + T_{1n} &= T \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right) = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx \Rightarrow \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx &= T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Позначимо за $v^2 = \frac{T}{\rho}$ і тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.27)$$

Це і є диференціальне рівняння гіперболічного типу, що описує малі поперечні вільні коливання струни.

Для відшукування $u(x, t)$, тобто для визначення формули струни в будь-який момент часу, диференціального рівняння не досить. Потрібно ще задати початкові умови, тобто положення точок струни та їх швидкості в початковий момент часу (початкові умови потрібні для відшукування частинного розв'язку задачі):

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (3.28)$$

Крім того, необхідно знати, що відбувається на кінцях струни, тобто знати граничні умови. Коли струна закріплена на кінцях, то граничні умови наступні:

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=\ell} = 0. \quad (3.29)$$

Отже, коливання струни (лінійного об'єкту) описується одновимірним лінійним хвильовим рівнянням (3.27).

Якщо ж поперечні коливання виконує деформована пружна плівка (мембрана (рис. 29), то відповідне хвильове рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Це мембрана, у якій швидкість хвилі не залежить від напрямку розповсюдження.

Для випадку акустичних коливань (суцільне середовище):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ або}$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Електромагнітні хвилі у вакуумі описуються подібними рівняннями:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

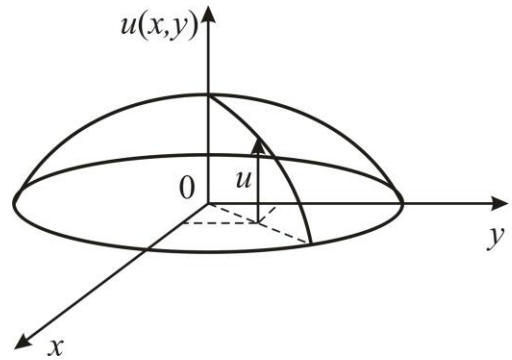


Рис. 29

3.2.3. Коливання струни нескінченної довжини. Метод Д'аламбера.

Окремий випадок задачі Коші

Будемо вважати, що пружна струна настільки довга, що її можна вважати нескінченною. Початкова форма і швидкість її точок в $t = 0$ відомі. Потрібно відшукати $u(x, t)$. Для цього потрібно розв'язати рівняння (3.27), якщо врахувати початкові умови (3.28): $u|_{t=0} = \varphi(x)$; $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$. Граничні умови (3.29) в цьому випадку не потрібні, бо коливання не дійде до кінців струни, а отже нам і неважливо, в якому стані перебувають кінці струни. Це окремий випадок так званої *задачі Коші*.

Загальний розв'язок $u(x, t)$ – це функція координат і часу, введемо нові змінні p і q , що зв'язані з x і t так:

$$\begin{cases} p = x + vt; \\ q = x - vt. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(p + q); \\ t = \frac{1}{2v}(p - q). \end{cases} \quad (3.30)$$

Тоді u є функцією p і q , обчислимо відповідні похідні від u по часу через нові змінні p і q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{dp}{dt} = v \left(-\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{dp}{dt} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\left(-\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \right) v \right) (-v) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\left(-\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \right) v \right) v = \\ &= -v^2 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} \right) + v^2 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \right) = v^2 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \right) = \\ &= v^2 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо відповідні похідні від u за відповідними координатними змінними:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} = 1$, згідно (3.30).

Підставляємо отримані співвідношення у рівняння хвилі (3.27) і одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} - \frac{1}{v^2} \left(v^2 \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \right) \right) &= 0; \\ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} &= 0 \quad \text{або} \quad 4 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} = 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} &= 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

це друга канонічна форма хвильового рівняння (гіперболічного типу). Цю форму (3.31) можна подати й так

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right) = 0,$$

тобто, $\frac{\partial u}{\partial p}$ не залежить від q , тоді можна позначити, що

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \alpha(p). \tag{3.32}$$

Проінтегрувавши (3.32) за параметром p , отримаємо

$$u(p, q) = \Phi(p) + C,$$

де C – довільна стала, що не залежить від p , але залежить від q , отже, $C = F(q)$. І остаточно,

$$u = \Phi(p) + F(q) = \Phi(x + vt) + F(x + vt). \quad (3.33)$$

Отже, ми одержали *загальний розв'язок* нашого хвильового рівняння (3.27) ($F(q)$; $\Phi(p)$ – довільні неперервні функції). Це, так званій, *розв'язок Д'аламбера*.

З'ясуємо фізичний зміст одержаного розв'язку.

Візьмемо для спрощення $\Phi(p) = 0$. Тоді $u_1(x, t) = F(x - vt)$. Коли на струні обрати довільну точку M з координатою x_0 в момент часу $t = 0$, зміщення від положення рівноваги цієї точки дорівнюватиме $F(x_0)$; очевидно, що коли взяти $x_1 = x_0 + vt$, тоді $F(x_1) = F(x_0 + vt - vt) = F(x_0)$, тобто точка з координатою $x_1 = x_0 + vt$ має таке ж саме зміщення; отже, відхил u розповсюджується від M вправо (вздовж додатнього напрямку Ox , причому v – це швидкість переміщення струни). Таким чином, на струні виникає хвиля (біжуча) – пряма хвиля. Відповідно розв'язок $u_2 = \Phi(x + vt)$ описує рух зворотної хвилі, що рухається вздовж струни вліво (проти Ox). Отже,

$$u = \Phi(x + vt) + F(x - vt), \quad (3.34)$$

описує рух одночасно *прямої і зворотної хвиль*, які спочатку можуть накладатись, але зрештою розходяться в протилежні напрямки з однаковими швидкостями.

Оберемо тепер серед довільних функцій (Φ і F) такі, які задовольняють початковим умовам (3.28) відповідно до одержаного загального розв'язку (3.34). Коли $t = 0$, тоді $u(x, 0) = \varphi(x)$, а

$$\Phi(x) + F(x) = \varphi(x). \quad (3.35)$$

Коли обчислити

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Тоді в момент часу $t = 0$ маємо:

$$v \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \right) = \psi(x). \quad (3.36)$$

Продиференціювавши співвідношення (3.35) одержимо:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0. \quad (3.37)$$

Отже, можна відшукати, скориставшись співвідношеннями (3.36) і (3.37), чому дорівнюють $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0$ і $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0$:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{v} \psi \right); \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{v} \psi \right).$$

Проінтегрувавши ці функції від 0 до $x+vt$ і від 0 до $x-vt$, одержимо розв'язок Д'аламбера задачі Коші:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (\varphi(x+vt) + \varphi(x-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\xi) d\xi. \quad (3.38)$$

3.2.4. Коливання струни скінченної довжини. Метод Фур'є (метод відокремлення змінних). Загальний розв'язок хвильового рівняння

Розглянемо два окремі випадки. Нехай, початкові швидкості точок струни в початковий момент часу рівні нулеві ($\psi=0$), а початкове зміщення мають точки на ділянці $(-\ell, +\ell)$: $\varphi(x)=0$, коли $|x| > \ell$ (рис. 30).

В такому разі $u(x,t)$ є сумою двох хвиль, що мають вдвічі меншу амплітуду і розповсюджуються в протилежних напрямках, причому вони розходяться в момент часу $t = \frac{\ell}{v}$.

Для розв'язування рівняння в частинних похідних досить часто застосовують метод Фур'є. Застосуємо цей метод до задачі про коливання струни скінченної довжини. Інакше: потрібно відшукати функцію $u(x,t)$, що задовольняє хвильовому рівнянню (3.27)

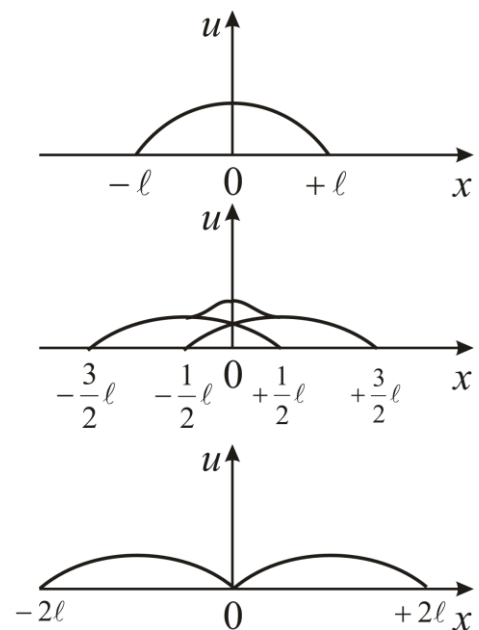


Рис. 30

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

а також крайовим і початковим умовам (3.28) і (3.29):

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x); \quad \text{і} \quad u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=\ell} = 0.$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді добутку двох функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X \frac{dT}{dt}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Тоді наше хвильове рівняння набуде вигляду:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = v^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

і, відокремлюючи змінні, остаточно матимемо:

$$\frac{1}{v^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (3.39)$$

Ця тотожна рівність (3.39) повинна виконуватись на всій довжині струни $0 \leq x \leq \ell$ в будь-який момент часу, а це можливо, і лише тоді, коли ліва і права частини (3.39) одночасно сталі і рівні одній і тій же величині (ліва частина функція часу, а права – координати, їх зміни не пов'язані між собою). Отже,

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ T'' + \lambda^2 v^2 T = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь II-го порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язки їх відомі:

$$\begin{cases} X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \\ T(t) = C \cos v \lambda t + D \sin v \lambda t \end{cases} \quad (3.41)$$

де A, B, C, D, λ – довільні сталі інтегрування системи рівнянь (3.40). Їх необхідно підібрати так, щоб ці розв'язки (3.33) задовольняли граничним (3.29) та початковим (3.28) умовам.

Якщо врахувати граничні умови, то з них випливає $x(0) = x(\ell) = 0$. Отже,

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0},$$

Таким чином, перше рівняння системи (3.33) спрощується і набуває вигляду:

$$X(x) = B \sin \lambda x. \quad (3.42)$$

Далі: $x(\ell) = 0$, $x(\ell) = B \sin \lambda \ell = 0$, $\boxed{B \neq 0}$ (бо це не має фізичного змісту).

Отже, $\sin \lambda \ell = 0$. Тоді:

$$\lambda \ell = (-1)^n \arcsin 0 + \pi n = \pi n, \text{ де } n = 1, 2, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell},$$

отже,

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (3.43)$$

Тоді і друге рівняння системи (3.33) набуде перетворення:

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t. \quad (3.44)$$

Оскільки, шуканий розв'язок, за рахунок відокремлення змінних, ми отримуємо у вигляді добутку двох функцій $u(x, t) = X(x)T(t)$, тоді:

$$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t \right) \cdot B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (3.45)$$

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що загальним розв'язком лінійних рівнянь є лінійна комбінація частинних розв'язків, яких є безліч ($0 \leq n \leq \infty$). Отже, розв'язок (3.45) набуває узагальнення у вигляді ряду:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + N_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (3.46)$$

де $M_n = C_n B_n$; $N_n = D_n B_n$.

Коли цей ряд (3.46) збіжний і двічі диференційований, то це і буде загальний шуканий розв'язок. Як правило друга умова завжди виконується, а першу необхідно аналізувати.

Підберемо коефіцієнти M_n і N_n так, щоб виконувались також і початкові умови (3.28), а саме:

$$t = 0: U|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{n\pi v}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x).$$

Зрозуміло, що це коефіцієнти Фур'є розкладу $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ в ряд Фур'є, а саме:

$$M_n = \varphi_n(x) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

$$N_n = \frac{1}{n\pi v} \psi_n(x) = \frac{2}{n\pi v} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

Підставивши M_n і N_n в наш ряд (3.38) шукана функція $u(x,t)$ набуде наступного вигляду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + \frac{\ell}{n\pi v} \psi_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (3.47)$$

Коли цей ряд збіжний і двічі диференційований (по x і по t), тоді сума (3.47) буде задовольняти рівнянню (3.27) та умовами (3.28) і (3.29) й буде шуканим розв'язком задачі. Розглянемо його фізичний зміст.

3.2.5. Стоячі хвилі

Кожний член одержаного загального розв'язку (3.39) хвильового рівняння скінченної струни можна подати і так:

$$u(x,t) = A_n \sin \left(\frac{n\pi v}{\ell} t + \beta_n \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (3.48)$$

Як відомо з курсу загальної фізики – це рівняння стоячої хвилі (або власних коливань): всі точки струни коливаються з однаковою частотою $\omega_n = \frac{n\pi v}{\ell}$ та змінною амплітудою $A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ і однаковою початковою фазою β_n ; вони одночасно (синфазно) досягають максимальних відхилень або положень рівноваги (рис. 31).

Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{\pi v}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ називається *частотою*

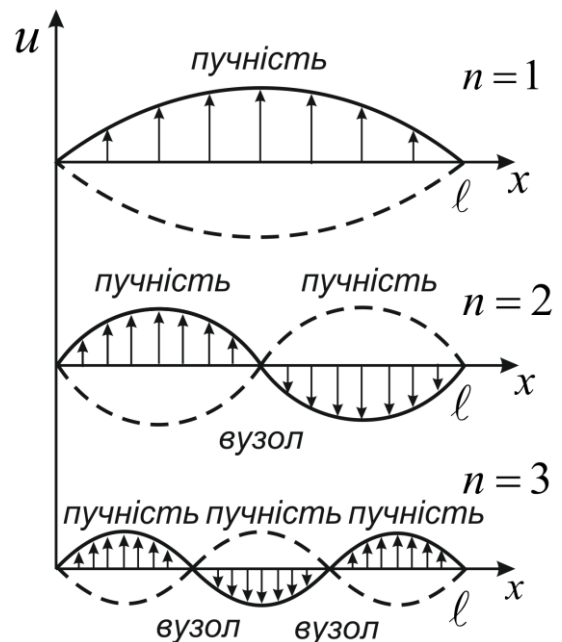


Рис. 31

основного тону, а $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$, (тони кратних частот) – гармоніки або обертони. Отже, загальний рух скінченої струни – це суперпозиція стоячих хвиль з кратними частотами.

Як відомо, звуки поділяються на музичні (або ноти) і немусичні (або завади); ноти породжуються періодичними коливаннями, а завади – неперіодичними. В ноті, що випромінюються музикальні інструменти завжди присутні декілька тонів – основний тон і обертони. За звичай амплітуди гармонік швидко спадають із зростанням їх номера, тому основний вклад в ноту вносить основний тон. Обертоном надають звуку той або інший тембр. Таким чином, фізичний розв’язок задачі, який ми отримали може бути записаний наступним чином:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (3.49)$$

стверджує, що струна випромінює музикальну ноту, частота якої дорівнює $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, яка визначається початковими умовами. Сукупність амплітуд $A_1, A_2 \dots$ характеризують спектр (тембр) цієї ноти.

3.2.6. Плоскі і сферичні хвилі

Повернемося до загального розв’язку хвильового рівняння (3.34):

$$u = \Phi(x + vt) + F(x - vt).$$

Оберемо, наприклад, хвилю, що рухається вздовж додатного напрямку вісі $0x$

$$u(x, t) = F(x - vt),$$

де фаза хвилі – це $\varphi = x - vt$.

Хвильова поверхня – це поверхня однакової фази (це поверхня, для всіх точок якої фаза однакова), тобто $\varphi = \text{const}$. Тоді в момент часу $t = 0$; $x = \text{const}$, а в момент часу $t = t_0$;

$$x = \varphi + vt_0 = \text{const}. \quad (3.50)$$

Але (3.50) – це рівняння площини. Отже, хвиля, що рухається вздовж $0x$ має хвильову поверхню, яка рухається вздовж $0x$ із середньою швидкістю $\nu_{cp} = v$ і має вигляд площини, перпендикулярної до $0x$. Такого роду хвилі

називаються *плоскими*. Довжина плоскої хвилі λ визначається за формулою:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega},$$

де T – період коливань хвилі, ν – її частота і ω – циклічна частота тощо – основні параметри хвилі.

Серед плоских хвиль найбільш прості – монохроматичні хвилі, у яких F - функція змінюється з незмінною частотою ω :

$$F = F(\omega t - kx) = F\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right)\right), \quad (3.51)$$

де k – хвильове число, яке зв'язане із параметрами хвилі за допомогою формул:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\pi v} \omega = \frac{\omega}{v}; \quad \frac{kx}{\omega} = \frac{\omega x}{v\omega} = \frac{x}{v}.$$

Окрім того хвильове число – це векторна характеристика хвилі, що вказує напрямок її поширення.

Монохроматичні хвилі $F = A \sin(\omega t - kx)$ – це плоскі хвилі.

А хвиля типу $F = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr)$ – сферична, бо її хвильовою поверхнею є сфера, центр якої співпадає з джерелом хвилі (що розходяться), а r – це віддаль від центру хвилі до її хвильової поверхні. Коли ж $F = \frac{A}{r} \sin(\omega t + kr)$

– то сферичні хвилі стягуються в центр, де перебуває джерело. Тоді хвильовий вектор \vec{k} і радіус-вектор \vec{r} , що входять у фазу хвилі перемножуються між собою скалярно:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = kr \cos\theta = kx,$$

у випадку поширення плоскої хвилі вздовж вісі Ox (рис. 32). Отже,

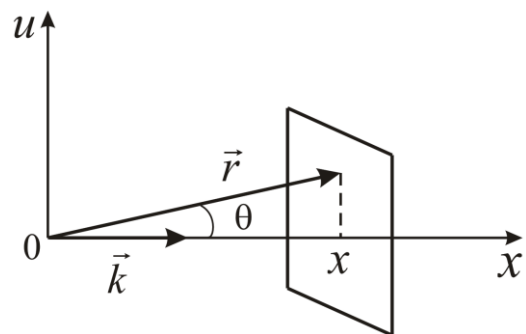


Рис. 32

$$\begin{cases} F = A \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \text{це рівняння плоскої монохроматичної хвилі.} \\ F = \frac{A}{r} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \text{це рівняння сферичної монохроматичної хвилі.} \end{cases}$$

Запитання для самоконтролю:

1. Наведіть приклад найпростішого рівняння гіперболічного типу для скалярної функції двох змінних $u(x, y)$.
2. Дайте означення струни.
3. Запишіть вигляд диференціального рівняння гіперболічного типу, що описує малі поперечні вільні коливання струни*.
4. Запишіть загальний розв'язок рівняння * (розв'язок Д'аламбера).
5. Запишіть розв'язок Д'аламбера задачі Коші.
6. В чому полягає суть методу Фур'є?
7. Що являє собою загальний рух скінченої струни?
8. Що називають хвильовою поверхнею?
9. Які хвилі називають стоячими?
10. Які хвилі називають плоскими?
11. Запишіть рівняння плоскої монохроматичної хвилі.
12. Запишіть рівняння сферичної монохроматичної хвилі.

3.3. Рівняння параболічного типу

3.3.1. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності, його окремі випадки.

3.3.2. Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу.

3.3.3. Функція джерела.

3.3.4. Рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня. Загальний розв'язок.

3.3.1. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності, його окремі випадки

Рівняння у частинних похідних II-го порядку параболічного типу найбільш часто зустрічається під час вивчення процесів теплопровідності та дифузії. Найпростіше рівняння параболічного типу має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad (y = \alpha^2 t) \quad (3.52)$$

і його називають, зазвичай, *рівняннями теплопровідності*.

У тому випадку, коли у середовищі (газ, рідина, тверде тіло) існує *градієнт температури* (її неоднаковість у різних точках простору), то у ньому відбувається *перерозподіл тепла*.

Емпірично закон перерозподілу тепла встановив Фур'є:

$$\delta Q = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt, \quad (3.53)$$

де δQ – кількість тепла, що протікає через площадку dS за час dt , $\frac{\partial T}{\partial n}$ – похідна від температури по нормалі до dS , k – коефіцієнт (внутрішній) теплопровідності речовини.

Цей закон можна записати ще й у векторному вигляді, а саме:

$$\vec{q} = -k \text{grad} T, \quad (3.54)$$

де $\vec{q} = \frac{\delta Q}{dS dt} \vec{n}$ – вектор густини теплового потоку, що співпадає з напрямком градієнта температури, а $\vec{n} = \frac{\text{grad} T}{|\text{grad} T|}$ – вектор одиничної нормалі до поверхні рівня (поверхня скалярного поля температур $T = \text{const}$, вектор нормалі \vec{n} вказує напрямком найшвидшої зміни такого поля в бік його зростання). Тому і знак « \rightarrow » виникає тут тому, що $\text{grad} T$ спрямований у бік зростання температури, а \vec{q} – в бік її спадання.

Складемо тепер відповідне диференціальне рівняння.

Нехай в середині неперервного середовища є $T = T(x, y, z, t)$ – скалярне поле температур.

Припустимо також, що в середині середовища є джерела тепла з питомою потужністю $Q(x, y, z, t)$, яка дорівнює кількості тепла, що виділяється за 1 с в одиниці об'єму.

Виділимо в середині тіла малий об'єм ΔV і складемо для нього рівняння теплового балансу (наслідок закону збереження і перетворення енергії).

За час dt в цьому об'ємі виділиться кількість тепла

$$\delta Q_1 = dt \int_{\Delta V_1} Q(x, y, z, t) dV. \quad (3.55)$$

Частина цього тепла $\delta Q'$ йде на підвищення температури об'єму ΔV (збільшення його внутрішньої енергії), а остання частина $\delta Q''$ перейде внаслідок теплопровідності в оточуюче середовище.

Відшукаємо $\delta Q'$. Згідно відомого співвідношення

$$\delta Q' = c dm dT. \quad (3.56)$$

Але $dm = \rho dV$, де ρ – густина середовища.

Відшукаємо dT , шляхом розкладу цієї малої зміни в ряд Тейлора за нескінченно малий проміжок часу dt , який оберемо за ступінь малості такого розкладу:

$$dT = T(t + dt) - T(t) = T(t) + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{dt=0} dt + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right|_{dt=0} dt^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n T}{\partial t^n} \right|_{dt=0} dt^n - T(t) \cong \frac{\partial T}{\partial t} dt.$$

Тоді співвідношення (3.56) набуде вигляду:

$$\delta Q' = c \rho dV \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (3.57)$$

Отже, інтегральна форма співвідношення (3.57) матиме наступний вигляд

$$Q' = dt \int_{\Delta V} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (3.58)$$

Згідно закону Фур'є у векторній формі (3.54) за 1 с через ΔS , що обмежує об'єм ΔV протікає кількість тепла Q'' , що визначається його потоком:

$$\oint_{\Delta S} \vec{q} d\vec{S} = \oint_{\Delta S} q_n dS.$$

Отже,

$$Q'' = dt \oint_{\Delta S} q_n dS. \quad (3.59)$$

Далі згідно закону збереження енергії маємо:

$$Q = Q' + Q''$$

і врахувавши (3.58), (3.59), матимемо

$$dt \int_{\Delta V} Q dV = dt \int_{\Delta V} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + dt \oint_{\Delta S} q_n dS$$

Поділимо праву і ліву частину цього рівняння на dt , що з фізичної точки зору допустимо, оскільки нескінченно малий проміжок часу нулю не дорівнює, тобто

$$\int_{\Delta V} Q dV = \int_{\Delta V} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{\Delta S} q_n dS.$$

Згідно теореми Остроградського-Гауса $\oint_{\Delta S} q_n dS = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV$, тому

$$\int_{\Delta V} \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right) dV = 0.$$

Отримана рівність справедлива для довільного об'єму, отже, й для одиничного, тому можна записати і диференціальну форму останнього співвідношення:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q = 0,$$

або враховуючи ще й (3.54)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - Q = 0. \quad (3.60)$$

Будемо вважати, що тіло однорідне і величина k , що являє собою *коефіцієнт теплопровідності речовини*, характеризує тіло як речовину, для якої k є сталим. Тоді,

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T = k \vec{\nabla} \vec{\nabla} T = k \Delta T.$$

Отже, (3.60) набуде більш простого вигляду:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T - Q(x, y, z, t) = 0, \text{ або } c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = Q(x, y, z, t). \quad (3.61)$$

Це і є диференціальне рівняння, що описує процес розповсюдження тепла у неперервному середовищі – *рівняння теплопровідності*.

Розглянемо окремі випадки рівняння теплопровідності.

А. Поширення тепла без тепловиділення.

Коли всередині тіла немає джерел тепла, тоді $Q(x, y, z, t) = 0$. Якщо це врахувати у рівнянні (3.61), тоді воно спрощується, а саме

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0 \text{ або } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \Delta T, \quad (3.62)$$

де $a = \frac{k}{c\rho}$ – *коефіцієнт температуропровідності*. Чим більший a , тим

сильніше змінюється T з часом (при однаковому ΔT).

Б. Потік тепла, що встановився.

Коли процес теплообміну стаціонарний (температура в кожній точці середовища не змінюється з часом), тоді $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ і рівняння (3.61) набуде вигляду:

$$\nabla^2 T = -q_0, \quad (3.63)$$

якщо позначити за $q_0 = \frac{Q}{k_0}$. Рівняння типу (3.63) є рівнянням Пуассона для стаціонарного потоку тепла.

В. Стаціонарний потік тепла без тепловиділення: $Q=0$; і $\frac{\partial T}{\partial t}=0$.

Тоді (3.64)

$$\nabla^2 T = 0.$$

і ми матимемо рівняння Лапласа.

Примітка: рівняння теплопровідності містить похідну першого порядку по часу і другого – по координатах. Тому для його розв'язання потрібно задати одну початкову умову і дві граничні умови.

Початкові умови.

Як правило, вони задають температуру всіх точок тіла в момент часу $t = 0$, тобто

$$T|_{t=0} = f(x, y, z). \quad (3.65)$$

Граничні (крайові) умови.

Перший тип: крайові умови першого роду – це температура на поверхні тіла в будь-який момент часу:

$$T|_S = \varphi(x, y, z). \quad (3.66)$$

Взагалі $T|_S$ може бути і функцією часу, але здебільшого вона від часу не залежить.

Другий тип: крайові умови другого роду – температура на поверхні невідома, але вказується тепловий потік q , що витікає або втікає через поверхню як функція координат точок поверхні:

$$q_n = \psi_1(x, y, z), \quad (3.67)$$

де \vec{n} – нормаль до поверхні. Але $q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n}$, тоді гранична умова (3.59)

матиме диференціальний характер:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \psi(x, y, z). \quad (3.68)$$

Третій тип: крайові умови третього роду – це узагальнення умов першого і другого роду:

$$\frac{\partial T}{\partial n} - hT|_S = F(x, y, z), \quad (3.69)$$

де h – коефіцієнт зовнішньої теплопровідності. Зазвичай, рівність (3.69) використовується під час дослідження процесів охолодження (теплопровідності) тіла, тобто коли відбувається перенесення тепла від тіла до оточуючого середовища. В такому разі використовується наступний закон Ньютона:

$$\delta Q = \alpha(T_0 - T_1)dSdt, \quad (3.70)$$

де δQ – кількість тепла, що віддається середовищем елементові поверхні тіла dS за час dt , якщо температура тіла T_1 , а оточуюче середовище має температуру T_0 . Множник α – коефіцієнт тепловіддачі. Коли $q = \frac{\delta Q}{dSdt}$,

тоді тепловий потік, що втікає в середину з нагрітого тіла є:

$$q = \alpha(T_0 - T_1).$$

Такий потік до поверхні тіла повинен підводитись із середини тіла

шляхом теплопровідності, тобто: $q = -k \frac{\partial T}{\partial n}$. Отже,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha}{k}(T_0 - T_1),$$

де $\frac{\alpha}{k} = h$; $T_1 = T|_S$. Перетворимо отримане співвідношення у відповідність до третьої крайової умови (3.69):

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -hT_0 + hT_1 \text{ або } \frac{\partial T}{\partial n} - hT_1 = -hT_0.$$

Відзначимо, що T_0 і h в різних точках середовища різні. Коли відома їх залежність від координат, тоді її можна вказати як $F(x, y, z) = -hT_0$ і остаточно отримати:

$$\frac{\partial T}{\partial n} - hT|_S = F(x, y, z). \quad (3.71)$$

Це і є третій тип граничної умови.

3.3.2. Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу

А. Однорідна крайова задача.

Перейдемо до розв'язку першої крайової задачі рівняння теплопровідності на відрізку:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (0 \leq x \leq \ell, \quad t > 0), \quad (3.72)$$

з початковою умовою:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (3.73)$$

та граничними умовами:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(\ell, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} (t \geq 0). \quad (3.74)$$

Вивчення загальної першої крайової задачі розпочнемо з розв'язку більш простої і відшукаємо у деякій неперервній замкненій області простору $(0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq t \leq T)$ розв'язок однорідного рівняння (3.72):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.75)$$

що задовольняє початковим умовам (3.73) та однорідним граничним умовам (3.74):

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(\ell, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq T). \quad (3.76)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді добутку двох нових функцій:

$$u(x, t) = X(x)\Gamma(t), \quad (3.77)$$

скориставшись методом Фур'є (методом відокремлення змінних). Тоді нам потрібно обрахувати

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= X(x) \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \Gamma(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

і підставити цей результат у вихідне рівняння (3.75),

$$X(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \alpha^2 \Gamma(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1}{\alpha^2 T(t)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.$$

Оскільки права і ліва частина отриманої рівності між собою рівні, тоді позначимо

$$\frac{1}{\alpha^2 T(t)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2,$$

де $\lambda = \text{const}$. Або у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\lambda\alpha)^2 T = 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

Граничні умови (3.68) дають $X(0)=0$ і $X(\ell)=0$. Таким чином, для відшукування функції $X(x)$ ми отримали задачу про власні значення (задачу Штурмана-Ліувілля), яку ми вже розв'язували для рівняння коливань струн скінченої довжини.

Тобто, ми отримали, що тільки для значень параметра λ , рівних:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{\ell}, \quad (n=1, 2, 3\dots)$$

існує нетривіальний розв'язок першого рівняння системи (3.78), рівний

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Цим значенням λ_n відповідатиме розв'язок другого рівняння системи (3.78), рівний:

$$T_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t},$$

де C_n – невизначені поки що коефіцієнти.

Тоді, якщо врахувати початок нашого розв'язку (3.77) відповідно отримуємо

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \quad (3.79)$$

частинний розв'язок однорідного рівняння (3.75), що задовольняє граничним умовам (3.76).

Тепер повернемося до розв'язку основної задачі (3.72), яка вимагає також виконання ще й початкових умов (3.73), тоді, враховуючи також (3.79), матимемо

$$\varphi(x) = u(x, t)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (3.80)$$

тобто C_n – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$ під час її розкладу в ряд за синусами на інтервалі $(0, \ell)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi d\xi. \quad (3.81)$$

Остаточно: якщо функція $\varphi(x)$ неперервна і має кусочконеперервну похідну та задовольняє умовам $\varphi(0)=0$ і $\varphi(\ell)=0$, тоді ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \quad (3.82)$$

визначає неперервну функцію, якщо $t \geq 0$. Оскільки $|u_n(x, t)| < |C_n|$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \ell$, то отриманий ряд є збіжним, і тому задача розв'язана, а (3.82) є її розв'язком.

3.3.3. Функція джерела

Перетворимо отриманий розв'язок (3.82), замінюючи C_n їх значеннями, згідно (3.81)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi d\xi \right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= \int_0^{\ell} \left(\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Зміна порядку сумування та інтегрування завжди допустима, за умови, якщо $t > 0$, бо ряд у дужках збіжний рівномірно за усіма змінними ξ .

Введемо позначення, нехай

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi, \quad (3.83)$$

тоді

$$u(x, t) = \int_0^{\ell} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.84)$$

Функція $G(x, \xi, t)$ називається *функцією миттєвого точкового джерела*, або якщо більш детально, то *функцією температурного впливу миттєвого точкового джерела тепла*.

Функція джерела $G(x, \xi, t)$ розглядувана як функція координати x являтиме собою розподіл температури у стержні $0 \leq x \leq \ell$ у момент часу t , якщо температура у початковий момент часу рівна нулю і в цей момент часу в точці $\xi = x$ миттєво виділятиметься деяка кількість тепла, а на кінцях стержня увесь час підтримуватиметься нульова температура.

Вираз «кількість тепла Q , що виділяється в точці ξ » означає те, що й завжди, що ми маємо справу з теплом, яке виділяється на «невеликому» інтервалі в околі точки ξ , що його випромінює. Зміна температури $\varphi_\varepsilon(\xi)$, викликана появою тепла біля точки ξ , буде дорівнювати нулю за межами інтервалу $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, на якому тепло виділяється, а у середині цього інтервалу $\varphi_\varepsilon(\xi)$ можна вважати додатньою, неперервною й диференційованою, для якої:

$$c\rho \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = Q. \quad (3.85)$$

Тоді процес розподілу температури на інтервалі від 0 до ℓ відповідає (3.83) і у граничному випадку, коли $\xi \rightarrow 0$ враховуючи, що $G(x, \xi, t)$ неперервна у момент часу $t > 0$, рівність (3.84), а також, застосовуючи теорему середнього значення при фіксованих x, t , матимемо:

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c\rho},$$

де ξ^* – деяка середня точка інтервалу $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Далі у граничному випадку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t) = \frac{Q}{c\rho} \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{\ell} \xi. \quad (3.86)$$

Фізичний зміст розв'язку (3.85): він означає, що $G(x, \xi, t)$ – визначає температуру в точці x у момент часу t , наявність цієї температури обумовлена впливом миттєвого точкового джерела, яке розміщене у момент часу $t = 0$ у точці ξ на проміжку $(0, \ell)$ і має потужність $Q = c\rho$.

Властивості функції джерела: $G(x, \xi, t) \geq 0$, при будь-яких $x, \xi, t > 0$ з інтервалу $0 \leq x, \xi \leq \ell$, і має простий фізичний зміст.

3.3.4. Рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня.

Загальний розв'язок

Нехай кінці тонкого теплопровідного стержня мають температуру $T(^{\circ}C) = 0^{\circ}C$ (занурені у лід). Інші точки стержня в момент $t = 0$ мають певну температуру $T = f(x)$. Стержень тонкий і довгий. Потрібно *відшукати*: температуру будь-якої точки стержня у довільний момент часу.

Аналогічно до попереднього аналізу:

1. Рівняння теплопровідності є однорідним (через бічну поверхню стержня теплота не виділяється), тепловиділення у стержні відсутнє. Тому рівняння (3.61):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = Q(x, y, z, t),$$

спрощується відповідно до (3.54):

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

(вісь Ox спрямована вздовж стержня), де c – теплоємність, ρ – густина, k

– коефіцієнт теплопровідності, $a = \frac{k}{\rho c}$ – коефіцієнт

температуропровідності.

2. Початкова умова: $T|_{t=0} = \varphi(x)$.

3. Граничні умови: $T|_{x=0} = 0$; $T|_{x=\ell} = 0$.

4. Відшукати потрібно: $T(x, t)$.

Для спрощення розв'язку введемо нову змінну $\tau = \frac{kt}{c\rho}$. Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

тоді (3.62) набуде вигляду:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Шукатимемо $T(x, t)$ методом Фур'є (методом відокремлення змінних).

Нехай

$$T(x, t) = X(x)\theta(\tau),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = X(x) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta(\tau) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.$$

Отже:

$$X \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \text{або} \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad (3.87)$$

де $0 \leq \tau \leq \infty$; $0 \leq x \leq \ell$. Виконання рівності (3.87) можливе лише тоді, якщо

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -\lambda^2 \quad \text{і} \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \lambda^2 \theta = 0. \end{cases}$$

Розв'язки подібної (3.78) системи рівнянь ми вже шукали (3.79), тобто

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \tau} \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (3.88)$$

Отриманий розв'язок задовольняє як диференціальному рівнянню, так і початковій й граничним умовам, де $C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx$ – коефіцієнт Фур'є. Отже, одержаний ряд є розв'язком нашої задачі.

Зауваження: Під час розв'язування конкретних задач, за звичай, ряд (3.80) є збіжним і почленно двічі диференційованим і обмежуються невеликим числом членів ряду (у відповідності до заданої точності).

Запитання для самоконтролю:

1. Наведіть приклад найпростішого рівняння параболічного типу.

2. Запишіть закон перерозподілу тепла у скалярному вигляді.
3. Запишіть закон перерозподілу тепла у векторному вигляді. Запишіть рівняння теплопровідності.
4. Запишіть рівняння поширення тепла без тепловиділення.
5. Запишіть рівняння для потоку тепла, що встановився.
6. Запишіть рівняння для стаціонарного потоку тепла без тепловиділення.
7. Сформулюйте початкові умови для рівняння теплопровідності.
8. Сформулюйте граничні (крайові) умови для рівняння теплопровідності.
9. Поясніть суть методу відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу.
10. Яку функцію називають функцією миттєвого точкового джерела (функцією температурного впливу миттєвого точкового джерела тепла).
11. Запишіть рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня.
12. Сформулюйте початкові умови для рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня
13. Сформулюйте граничні умови для рівняння теплопровідності для довгого тонкого стержня.

3.4. Рівняння еліптичного типу

3.4.1. Рівняння еліптичного типу. Задачі, що приводять до рівняння Лапласа.

3.4.2. Рівняння Лапласа в криволінійній системі координат. Рівняння Лапласа в сферичних та циліндричних координатах.*

3.4.3. Відтворювальна функція і поліноми Лежандра. Формула Родріга. Рекурентні співвідношення. Рівняння Лежандра. Розв'язування рівняння Лежандра.*

3.4.4. Сферичні і кульові функції.*

3.4.5. Поліноми Лагерра.*

3.4.6. Метод функцій Гріна.*

3.4.7. Рівняння Пуассона для електростатичного потенціалу та його загальний розв'язок.*

3.4.8. Задача про одновимірний гармонічний осцилятор.*

3.4.1. Рівняння еліптичного типу. Задачі, що приводять до рівняння Лапласа

Під час дослідження стаціонарних процесів різної фізичної природи (коливання, теплопровідність, дифузія та інші) за звичай приходять до рівнянь еліптичного типу. Найбільш поширеними рівняннями цього типу є *рівняння Лапласа*:

$$\Delta u = 0. \quad (3.89)$$

Функція u називається гармонічною в області V , якщо вона неперервна в цій області разом зі своїми похідними до 2-го порядку включно та задовольняє рівнянню Лапласа (3.89).

Під час вивчення гармонічних функцій були розроблені різноманітні математичні методи, які виявились корисними для застосування до рівнянь гіперболічного та параболічного типів.

Розглянемо основні задачі, що приводять до рівняння Лапласа.

Для початку розглянемо стаціонарне теплове поле й постановку крайових задач:

Розглянемо стаціонарне теплове поле. Для випадку нестационарного теплового поля його температура задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності (3.75):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left(\alpha^2 = \frac{k}{c\rho} \right).$$

Якщо процес стаціонарний, тоді встановлюється розподіл температури $o(x, y, z)$ такий, що не змінюється з плином часу та як наслідок, задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

За наявності джерел тепла матимемо рівняння:

$$\Delta U = -f, \quad (3.90)$$

де $f = \frac{F}{k}$, F – густина теплових джерел, k – коефіцієнт теплопровідності.

Це неоднорідне рівняння часто називають *рівнянням Пуассона*.

Розглянемо деякий об'єм V , який обмежений поверхнею Σ .

Задача про стаціонарний розподіл температури $U(x, y, z)$ в середині V формулюється так: знайти функцію $u(x, y, z)$, що задовольняє в середині V

рівнянню Пуассона $\Delta U = -f(x, y, z)$ та граничній умові, обраної одною з трьох крайових задач.

1. *Перша крайова задача* (задача Діріхле): $U = f_1$ на поверхні Σ .

2. *Друга крайова задача* (задача Неймана): $\frac{\partial U}{\partial n} = f_2$ на поверхні Σ .

3. *Третя крайова задача*: $\frac{\partial U}{\partial n} + h(U - f_3) = 0$, на поверхні Σ ,

де f_1, f_2, f_3 – задані функції, $\frac{\partial U}{\partial n}$ – похідна по зовнішній нормалі \vec{n} до поверхні Σ .

Якщо шукають розв'язок в області V_0 , всередині (зовні) по відношенню до Σ , тоді відповідно задачу називають внутрішньою (або зовнішньою) крайовою задачею.

I. В якості першого прикладу розглянемо *потенціальний рух рідини без наявності її джерел*. Нехай в середині об'єму V з межею Σ має місце стаціонарний рух рідини (нестисливої з $\rho = \text{const}$), швидкість якої $\vec{v}(x, y, z)$. Якщо плин рідини не вихровий, тоді швидкість \vec{v} є потенціальним вектором, тобто

$$\vec{v} = -\text{grad } \varphi,$$

де φ – скалярна функція, яку називають *потенціалом швидкості*.

Якщо відсутні джерела, тоді

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{і} \quad \text{div } (-\text{grad } \varphi) = 0;$$

$$\text{div } \text{grad } \varphi = 0;$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi = 0;$$

$$\Delta \varphi = 0,$$

тобто потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа.

II. Тепер, нехай в *однорідному провідному середовищі тече стаціонарний струм* з об'ємною густиною $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$. Якщо у середовищі відсутні об'ємні джерела струму, тоді

$$\text{div } \vec{j} = 0.$$

Електричне поле \vec{E} пов'язане з об'ємною густиною струму диференціальним рівнянням закону Ома:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ або } \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma},$$

де γ – питома провідність провідника.

Оскільки процес є стаціонарним, тоді електричне поле є безвихровим або потенціальним, тобто існує скалярна функція $\varphi(x, y, z)$, для якої $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ($\vec{j} = -\gamma \text{grad } \varphi$). Тоді, враховуючи, що $\text{div } \vec{j} = 0$:

$$\text{div}(-\gamma \text{grad } \varphi) = 0, \quad \gamma = \text{const};$$

$$\text{div grad } \varphi = 0;$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi = 0;$$

$$\Delta \varphi = 0,$$

тобто потенціал електричного поля стаціонарного струму задовольняє рівняння Лапласа.

III. Розглянемо наступний випадок: електричне поле стаціонарних зарядів.

Із означення стаціонарного процесу випливає, що $\text{rot } \vec{E} = 0$, тобто \vec{E} є потенціальним, тоді $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Нехай $\rho(x, y, z)$ – об'ємна густина зарядів, які присутні у середовищі з $\epsilon = 1$.

Виходячи з основного рівняння електростатики:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$

та теореми Остроградського-Гауса:

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} dV;$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

де $q = \sum_i q_i$ – сума всіх зарядів всередині об'єму V . І, враховуючи, що

$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, маємо:

$$-\text{div grad } \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

рівняння Пуассона для електричного потенціалу стаціонарних зарядів з густиною ρ .

Якщо об'ємні заряди відсутні ($\rho=0$), то потенціал ϕ задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta\phi=0$.

Основні крайові задачі для розглянутих процесів відносяться до трьох типів, розглянутих нами вище.

3.4.2.* Рівняння Лапласа в криволінійній системі координат.

Рівняння Лапласа в сферичних та циліндричних координатах

Виведемо вираз для оператора Лапласа в системі криволінійних ортогональних координат. Нехай в просторі замість декартових координат x, y, z введені криволінійні координати q_1, q_2, q_3 за допомогою співвідношень:

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (3.91)$$

розв'язуючи які відносно x, y, z , можна написати:

$$x = \phi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \phi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \phi_3(q_1, q_2, q_3). \quad (3.92)$$

Припускаючи, що

$$q_1 = C_1, \quad q_2 = C_2, \quad q_3 = C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – сталі числа, отримаємо три сімейства координатних поверхонь:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2, \quad f_3(x, y, z) = C_3. \quad (3.93)$$

Розглянемо елемент об'єму в нових координатах, обмежений трьома парами координатних поверхонь (рис. 33). Вздовж ребра AB $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, вздовж AD $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, вздовж AC $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. Направляючі конуси дотичної до ребер AB , AD і AC пропорційні відповідно:

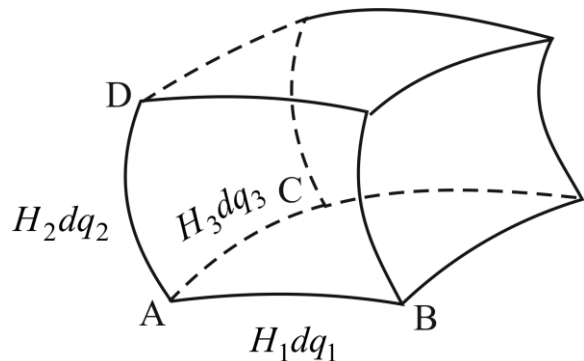


Рис. 33

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial\phi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial\phi_3}{\partial q_1}, \frac{\partial\phi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial\phi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial\phi_3}{\partial q_2}, \frac{\partial\phi_1}{\partial q_3},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Умова ортогональності ребер буде мати вигляд:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \quad (3.94)$$

Обчислимо елемент довжини в нових координатах:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} dq_3 \right)^2. \quad (3.95)$$

Розкриваючи дужки і враховуючи умови ортогональності (3.94), отримаємо:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (3.96)$$

де

$$\left. \begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} \right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} \right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} \right)^2. \end{aligned} \right\}$$

Вздовж кожного з ребер елементарного об'єму змінюється лише одна координата, тому для довжини цих ребер згідно формули (3.96) будемо мати:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3, \quad (3.97)$$

тоді елемент об'єму дорівнює:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (3.98)$$

Розглянемо тепер деяке векторне поле $\vec{A}(x, y, z)$. Обчислимо $\operatorname{div} \vec{A}$, що визначається відомою формулою з векторного аналізу:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V_M \rightarrow 0} \frac{\iint A_n dS}{V_M}, \quad (3.99)$$

де S – поверхня обмежена деяким об’ємом V_M , що містить точку M . Застосуємо цю формулу до елемента об’єму dV , зображеного на рис. 33.

Користуючись теоремою про середнє значення, можна подати різницю потоків вектора \vec{A} через протилежні грані, наприклад, через праву і ліву грані, у вигляді:

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3 \Big|_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3 \Big|_{q_1}.$$

Беручи до уваги формулу (3.97), отримаємо:

$$Q_1 = \left[H_1 H_2 A_1 \Big|_{q_1+dq_1} - H_2 H_3 A_1 \Big|_{q_1} \right] dq_2 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (3.100)$$

Аналогічно обраховуються дві інші різниці потоків через протилежні грані:

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_1) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (3.101)$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_1) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (3.102)$$

Підставляючи у формулу (3.99) значення

$$\iint_S A_n dS = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

і користуючись формулою (3.98), отримуємо вираз дивергенції в криволінійних ортогональних координатах

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) \right] \quad (3.103)$$

Припустимо, що поле \vec{A} потенціальне, тобто

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u. \quad (3.104)$$

Тоді

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (3.105)$$

Підставляючи у (3.103) вираз (3.105) для A_1 , A_2 і A_3 отримаємо вираз для оператора Лапласа в криволінійній системі координат (3.106):

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\}$$

Таким чином, рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в ортогональних криволінійних координатах q_1, q_2 і q_3 записується наступним чином:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\} = 0. \quad (3.107)$$

Розглянемо два часткових випадки:

1. *Сферичні координати.* В цьому випадку $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ і формули перетворення набувають вигляду:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Обчислимо ds^2 :

$$ds^2 = (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2;$$

після розкриття дужок і спрощення знаходимо:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

тобто

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

Підставляючи значення H_1, H_2, H_3 у формулу (3.107), отримаємо рівняння Лапласа у сферичних координатах:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

або

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.108)$$

2. *Циліндричні координати.* В цьому випадку:

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z,$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Рівняння Лапласа в циліндричних координатах приймає вигляд:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.109)$$

Якщо шукана функція u не залежить від z , то рівняння (33) спрощується:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.110)$$

3.4.3.* Відтворювальна функція і поліноми Лежандра. Формула Родріга. Рекурентні співвідношення. Рівняння Лежандра.

Розв'язування рівняння Лежандра

Поліноми Лежандра тісно пов'язані з фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа в криволінійній системі координат із типом симетрії вигляду $\frac{1}{R}$, де R –

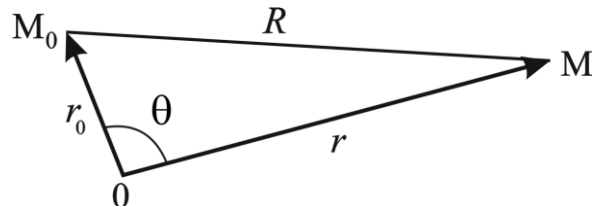


Рис. 34

відстань точки M до фіксованої точки M_0 . Нехай r і r_0 – радіус-вектори точок M і M_0 , а θ – кут між ними (рис. 34). Очевидно, що можна написати:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos\theta}} = \begin{cases} \frac{1}{r_0 \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} & \text{для } r < r_0, \\ \frac{1}{r \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} & \text{для } r > r_0, \end{cases} \quad (3.111)$$

де $x = \cos\theta$ ($-1 \leq x \leq 1$) і $\rho = \frac{r}{r_0} < 1$ або $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$ (в обох випадках ρ менше одиниці).

Функцію типу:

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} < 1 \quad (0 < \rho < 1, -1 \leq x \leq 1) \quad (3.112)$$

називають *відтворювальною функцією* шуканих *поліномів Лежандра*.

Розкладемо функцію $\Psi(\rho, x)$ в ряд за ступіннями ρ :

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \rho^n. \quad (3.113)$$

Коефіцієнти $P_n(x)$ розкладу (3.113) є поліномами n -ї степені і називаються *поліномами Лежандра*.

За теоремою Коші із формули (3.113) отримуємо, що

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n} \Big|_{\rho=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (3.114)$$

де C – будь-який замкнений контур в площині комплексної змінної $\zeta = \xi + i\eta$, що містить точку $\zeta = 0$. Припускаючи, що $\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2} = 1 - \zeta z$, відшукаємо:

$$\zeta = 2 \frac{(z-x)}{(z^2-1)}, \quad d\zeta = 2 \frac{(1-\zeta z)}{(z^2-1)} dz, \quad \Psi(\zeta, x) d\zeta = \frac{2dz}{(z^2-1)}.$$

Тоді формула (3.114) набуває вигляду:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz, \quad (3.115)$$

де C_1 – будь-який контур, що оточує точку $z = x$.

Враховуючи, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)} dz = (x^2-1)^n$$

і, користуючись формулою для похідної:

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)} dz = n! \int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

отримуємо із (3.115) формулу для $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n \right]. \quad (3.116)$$

Із формули (3.116) безпосередньо видно, що:

- 1) $P_n(x)$ є поліномом степені n ;
- 2) $P_n(x)$ містить лише степені x тієї парності, що й номер n , так що

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (3.117)$$

Припускаючи, що $x = 1$, знаходимо:

$$\Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \dots + \rho^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \rho^n,$$

тобто $P_n(1) = 1$ і враховуючи (3.117),

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad (3.118)$$

Формула (3.116) називається *диференціальною формулою для поліномів Лежандра* або *формулою Родріга*.

Відмітимо, що із (3.111) і (3.113) отримаємо розклад потенціалу типу

$\frac{1}{R}$ як

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при } r > r_0, \end{cases} \quad (3.119)$$

Рекурентні співвідношення. Диференціюючи $\Psi(\rho, x)$ за ρ і x , отримаємо дві тотожності:

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\Psi_{\rho} - (x - \rho)\Psi = 0, \quad (3.120)$$

$$(1 - 2\rho x + \rho^2)\Psi_x - \rho\Psi = 0. \quad (3.121)$$

Запишемо ліву частину формули (3.120) у вигляді степеневого ряду відносно ρ , підставимо в неї ряд (3.113) для Ψ і ряд $\Psi_{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)\rho^n$.

Коефіцієнт при ρ^n отриманого ряду, враховуючи (3.120), дорівнює нулю при всіх x :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (3.122)$$

Ця тотожність є рекурентною формулою, що пов'язує послідовних полінома. Вона дозволяє послідовно всі $P_n(x)$ ($n > 1$), якщо врахувати, що (3.116) дає:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Так, наприклад, припускаючи в (11), що $n=1$, знайдемо:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Введемо ще дві рекурентні формули:

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

або

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x) \quad (3.123)$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \quad (3.124)$$

Виключивши із (3.120) і (3.121) Ψ , отримаємо тотожність $\rho\Psi_\rho - (x - \rho)\Psi_x = 0$, із якої відразу випливає (3.123), якщо в ліву частину цієї тотожності підставити ряд (3.113) і прирівняти до нуля коефіцієнти при ρ^n . Диференціюючи потім (3.122) за x і виключаючи $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$, отримаємо:

$$P'_{n+1} - xP'_n - (n+1)P_n = 0$$

або (3.124) після заміни $n+1$ на n .

Рівняння Лежандра. Розв'язування рівняння Лежандра. Відшукаємо диференціальне рівняння, розв'язком якого є $P_n(x)$. Для цього виключимо P_{n-1} та P'_{n-1} із (3.123) і (3.124). Спочатку підставимо P'_{n-1} із (3.123) в (3.124):

$$P'_n - xP'_{n-1} - nP_{n-1} = (1-x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0,$$

потім продиференціюємо отриману тотожність за x і ще раз застосуємо формулу (3.123) для P'_{n-1} :

$$\left[(1-x^2)P'_n \right] + nxP'_n + nP_n - nP'_{n-1} = \left[(1-x^2)P'_n \right] + nxP'_n + nP_n - (nxP'_n - n^2P_n) = 0.$$

Як наслідок приходимо до рівняння типу:

$$\left[(1-x^2)P'_n \right] + n(n+1)P_n = 0. \tag{3.125}$$

Тим самим доведено, що поліноми Лежандра $P_n(x)$ є власними функціями, що відповідають власним значенням $\lambda_n = n(n+1)$, наступної задачі: відшукати такі значення λ , для яких на відрізку $-1 \leq x \leq 1$ існують нетривіальні розв'язки рівняння Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{3.126}$$

обмежені при $x = \pm 1$ і такі, що задовольняють умові нормування $y(1) = 1$.

Ортогональність поліномів Лежандра. Рівняння Лежандра (3.126) є частковим випадком (коли $q=0$, $\rho=1$, $k(x)=1-x^2$) рівняння:

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0. \tag{3.127}$$

Тому до нього можна застосувати загальну теорію рівняння типу (3.127). З цієї теорії випливає, що: поліноми Лежандра різних порядків ортогональні між собою:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ при } m \neq n;$$

другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Лежандра за умови, що $\lambda = n(n+1)$ прямує до нескінченності коли $x = \pm 1$ як $\ln(1 \pm x)$.

Система ортогональних поліномів є замкнутою. Тому рівняння Лежандра не має нетривіальних обмежених розв'язків за будь-яких $\lambda \neq n(n+1)$. Якби існував розв'язок $y(x)$ для $\lambda \neq n(n+1)$, то він би був ортогональним у всьому $P_n(x)$. Звідси, оскільки система ортогональних поліномів замкнута $\{P_n(x)\}$, то $y(x) \equiv 0$. Тим самим доведено, що ми знайшли обмежені нетривіальні розв'язки рівняння Лежандра.

Норма поліномів Лежандра. Обчислимо норму $\|P_n\|$ поліномів $P_n(x)$:

$$\|P_n\| = \left(\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

Застосуємо двічі рекурентну формулу (1.122): спочатку виразимо з неї (попередньо замінивши в (1.122) $n+1$ на n) P_n через P_{n-1} і P_{n-2} , а потім xP_n – через P_{n+1} та P_{n-1} . Враховуючи ортогональність поліномів P_n , P_{n-1} , P_{n-2} , отримаємо:

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 P_n(x) \{ (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2} \} dx = \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 (xP_n)P_{n-1} dx = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Послідовне застосування цієї формули дає

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \|P_0\|^2.$$

Підставимо сюди $\|P_0\|^2 = \|1\|^2 = 2$, й знаходимо квадрат норми:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ і } \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (3.128)$$

Таким чином,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}. \quad (3.129)$$

Нулі поліномів Лежандра. За допомогою формули Родріга (3.116) можна довести теорему: Поліном Лежандра $P_n(x)$ має n нулів, розташованих на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$, а його похідна k -го порядку $k \leq n$, має $n - k$ нулів всередині інтервалу $(-1, 1)$ і не перетворюється в нуль на його кінцях.

Дійсно, функція $\omega = (x^2 - 1)^n$ перетворюється в нуль на кінцях інтервалу $(-1, 1)$. Її похідна $\omega'(x)$ перетворюється в нуль при $x = 1$ і $x = -1$ і за теоремою про нуль похідної має хоча б один нуль в середині інтервалу $(-1, 1)$. Друга похідна $\omega''(x)$ має, принаймні два нулі всередині інтервалу і не перетворюється в нуль на його кінцях (рис. 35).

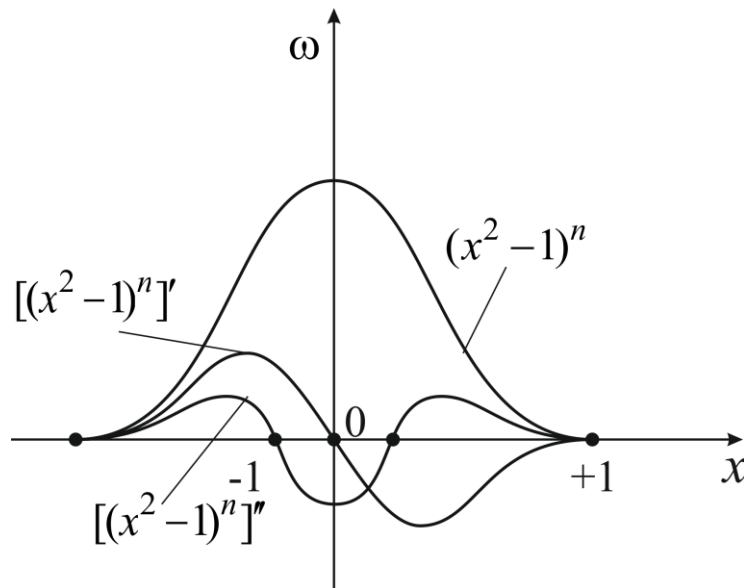


Рис. 35

Продовжуючи роздуми приходимо до висновку, що n -та похідна $\omega^{(n)}(x)$ має принаймні n нулів на інтервалі $(-1, 1)$ або, точніше, рівно n нулів, так як вона є поліномом n -го степеня. Перша частина твердження доведена. Похідна $P_n'(x)$ за тією ж теоремою повинна мати принаймні $n - 1$ нуль в середині $(-1, 1)$, але вона є поліномом $(n - 1)$ -го степеня і тому має рівно $n - 1$ нуль в середині інтервалу. Далі робимо висновок, що $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ маємо $n - k$ нулів у середині інтервалу $(-1, 1)$.

Обмеженість поліномів Лежандра. Покажемо, що поліноми Лежандра $P_n(x)$ рівномірно обмежені для всіх значень аргументу $-1 \leq x \leq 1$:

$$|P_n(x)| \leq 1.$$

Для цього нам знадобиться інтегральне представлення:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[x + i\sqrt{1-x^2} \sin \varphi \right]^n d\varphi. \quad (3.130)$$

Виведемо формулу (3.130). Візьмемо в (3.115) в якості контуру C_1 коло радіуса $R = \sqrt{1-x^2}$ ($|x| < 1$) з центром в точці $z = x$. Тоді

$$z = x + \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi}, \quad dz = i\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$(z-x)^{n+1} = (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} e^{i(n+1)\varphi},$$

$$\begin{aligned} z^2 - 1 &= x^2 - 1 + (1-x^2) e^{2i\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} = \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} \left[2x + \sqrt{1-x^2} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \right] = \\ &= 2\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} \left[x + i\sqrt{1-x^2} \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (3.115), отримаємо (3.130). Якщо $-1 \leq x \leq 1$, то $\left| x + i\sqrt{1-x^2} \sin \varphi \right| \leq 1$ і з (3.130) відразу випливає обмеженість $P_n(x)$.

3.4.4.* Сферичні і кульові функції

Узагальнене рівняння Лежандра має вигляд:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dV}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0. \quad (3.131)$$

Якщо ввести нову незалежну змінну $x = \cos \theta$ (при цьому $-1 \leq x \leq 1$) і позначимо $V(\theta) = y(x)$, тоді узагальнене рівняння Лежандра приймає вигляд:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y - \frac{m^2}{1-x^2} y = 0. \quad (3.132)$$

Оскільки рівняння (3.132) ми отримали з рівняння (3.131) шляхом заміни незалежної змінної $\cos \theta = x$, то рівняння (3.131) має кінцеві розв'язки лише в тому випадку, коли $\lambda = l(l+1)$. Це рівняння має при цьому форму:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dV}{d\theta} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0. \quad (3.133)$$

Інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$V(\theta) = P_l^{(m)}(\cos \theta). \quad (3.134)$$

Таким чином, щоб відшукати функцію $U(r, \theta, \varphi) = R(r)V(\theta)\Phi(\varphi)$, залишилось ще знайти $R(r)$, що є розв'язком «радіального» рівняння типу:

$$\frac{d}{dr}(r^2 R') - \lambda R = 0.$$

Розкриємо в цьому рівнянні дужки і замінимо λ добутком $l(l+1)$:

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0. \quad (3.135)$$

Це диференціальне рівняння типу Ейлера. Тому будемо шукати його розв'язки у вигляді:

$$R = r^s. \quad (3.136)$$

Підставимо в (3.135) R і його похідні $R' = sr^{s-1}$ та $R'' = s(s-1)r^{s-2}$, отримаємо:

$$s(s-1)r^s + 2sr^s - l(l+1)r^s = 0.$$

Скорочуючи на r^s і зробивши додавання спільних членів, отримаємо співвідношення:

$$s(s+1) = l(l+1),$$

звідки

$$s_1 = l, \quad s_2 = -(l+1).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.135) має вигляд:

$$R = C_1 r^l + C_2 r^{-(l+1)}.$$

Оскільки нас цікавлять лише кінцеві розв'язки для всіх внутрішніх точок кулі (в тому числі і центру, де $r=0$), то необхідно покласти $C_2 = 0$.

Тоді

$$R = C_1 r^l. \quad (3.137)$$

Отже, у відповідності з рівністю $Y = V(\theta)\Phi(\varphi)$, кінцевими розв'язками рівняння $\Delta Y - \lambda Y = 0$ є *сферичні функції*:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = V(\theta)\Phi(\varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}. \quad (3.138)$$

Зрозуміло, що для кожного $l \in 2l+1$ сферичних функцій, що відповідають $m = 0, 1, \dots, l$.

Добуток радіальної функції $R = r^l$ на будь-яку сферичну функцію $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$ згідно рівняння (що є розв'язком рівняння Лапласа в сферичних

координатах поданим у вигляді добутку двох функцій $U(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$) є частковим обмеженим розв'язком рівняння Лапласа (3.108):

$$U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = r^l P_l^{(m)}(\cos\theta) e^{\pm im\varphi}. \quad (3.139)$$

Функції $U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)$ називають *кульовими*. Загальний розв'язок рівняння Лапласа (3.108) має вигляд:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos\theta) (A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}). \quad (3.140)$$

3.4.5.* Поліноми Лагерра

Поліном Лагерра $L_n(x)$ ($a=0, b=\infty, p(x)=e^{-x}$), входить як множник при e^{-x} в похідну n -го порядку від функції $x^n e^{-x}$:

$$\begin{aligned} L_n &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = & (3.141) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\dots(k+1)x^k = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{[n(n-1)\dots(n-k+1)]^2}{k!} x^{n-k} = \\ &= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right). \end{aligned}$$

Наприклад,

$$L_0 = 1,$$

$$L_1(x) = -x + 1,$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

Через те, що

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{e^{-xt}}{1-t}, \end{aligned}$$

поліноми Лагерра також мають просту відтворювальну функцію, а саме

$$\phi(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}. \quad (3.142)$$

Із співвідношення:

$$(1-t)^2 \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = (1-t-x)\phi(x,t)$$

впливає рекурентна формула:

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.143)$$

Ця і та формула, що впливає із співвідношення:

$$(1-t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = -t\phi(x,t),$$

а саме формула:

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = -nL_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

приводять до формули:

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

і до однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (3.144)$$

для полінома Лагерра $L_n(x)$.

Властивість ортогональності:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad (n > m) \quad (3.145)$$

отримується із рівності:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = -k \int_0^\infty x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx = \\ &= k(k-1) \int_0^\infty x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^n e^{-x}) dx = \dots \\ &\dots = (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx = 0 \quad \text{коли } n > k. \end{aligned}$$

Для нормування необхідно обчислити інтеграл:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x) dx = \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2,$$

тоді функції:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_\nu(x)}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad (3.146)$$

являють собою ортогональну нормовану систему.

3.4.6.* Метод функцій Гріна

Одним із розповсюджених методів розв'язку диференціальних рівнянь в математичній фізиці є метод функцій Гріна. Він полягає в тому, що спочатку знаходять деякі спеціальні розв'язки задачі того ж типу, а потім через нього в квадратурах виражають інтеграл вихідної задачі.

Розглянемо метод Гріна розв'язку краєвих задач. Нехай необхідно відшукати функцію $\varphi(x, y, z)$ в області V і задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (3.147)$$

а також задовольняє на межі цієї області умові:

$$\varphi|_S = f(x', y', z'). \quad (3.148)$$

Візьмемо всередині області V деяку точку M_0 і оточимо її малою сферою s об'єму ν і радіуса r_0 (рис. 36). Застосуємо формулу Гріна:

$$\iiint_V (\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi) dV = \iint_S \left(\varphi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS$$

до області $V' = V - \nu$, обмеженої двома поверхнями S та s :

$$\int_V (\psi \cdot \Delta\varphi - \varphi \cdot \Delta\psi) dV = \iint_S \left(\psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS + \iint_s \left(\psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds. \quad (3.149)$$

Оскільки ця формула справедлива для довільних функцій φ та ψ , то підберемо в якості φ шукану функцію $\varphi(x, y, z)$, що задовольняє умовам (3.147) і (3.148), а під ψ будемо розуміти так звану *функцію Гріна* G , яка визначається рівністю:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r} + H(x, y, z), \quad (3.150)$$

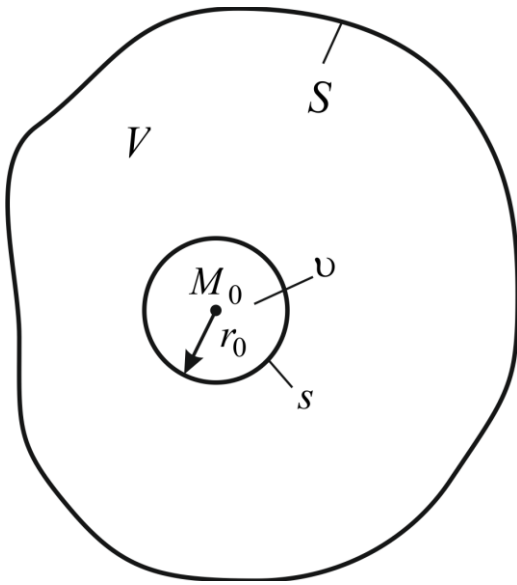


Рис. 36

де r – відстань довільної точки від M_0 .
Функція $H(x, y, z)$ задовольняє в області V рівнянню Лапласа:

$$\Delta H = 0$$

і приймає на поверхні $S = S(x', y', z')$ значення:

$$H(x', y', z') \equiv H(\vec{r}') = -\frac{1}{r'},$$

де r' – відстань точок поверхні S від точки M_0 .

Оскільки $\frac{1}{r}$ задовольняє рівнянню

Лапласа в усіх точках відмінних від M_0 ($r=0$), то згідно (3.150) і (3.151),

функція $\psi = G(x, y, z)$ є розв'язком рівняння Лапласа $\Delta\psi = 0$ в області V' , причому на поверхні S у відповідності з (3.150) і (3.152):

$$\psi|_S = G(x', y', z') = 0. \quad (3.153)$$

Тому співвідношення (3.149) приймає вигляд:

$$-\oint_S \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \oint_S \left(\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Оскільки згідно (3.148) $\varphi|_S = f(x', y', z')$, то цю рівність можна записати як:

$$\oint_S \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (3.154)$$

Обчислимо тепер ліву частину (3.154), яку для скорочення запису позначимо через I :

$$I = \oint_S \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (3.155)$$

Підставляємо сюди значення функції Гріна G із (3.150) і врахувавши, що радіус малої сфери s дорівнює r_0 , розіб'ємо I на два інтеграла I_1 та I_2 :

$$I = I_1 + I_2 = \oint_s \left\{ \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \right\} ds, \quad (3.156)$$

де

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \oint_s \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds, \\ I_2 &= \oint_s \left(H \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.157)$$

Застосуємо тепер до другого інтеграла I_2 формулу Гріна:

$$I_2 = \int_v (H \Delta \varphi - \varphi \Delta H) dv.$$

Але згідно (3.147) і (3.151) функції φ і H задовольняють рівнянню Лапласа в усій області V , в тому числі і v . Тому $I_2 = 0$ і в (3.156) залишається один доданок:

$$I = I_1 = \oint_s \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds, \quad (3.158)$$

Оскільки r_0 є радіусом сфери s тобто є величиною сталою, то

$$I = \frac{1}{r_0} \oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (3.159)$$

Розглянемо детальніше перший доданок:

$$\frac{1}{r_0} \oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (3.160)$$

За теоремою про середнє:

$$\oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 4\pi r_0^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle,$$

де $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle$ – значення $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в деякій точці сфери s . Тому вираз (3.160)

перетворюється в малу величину

$$4\pi r_0^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle,$$

яка при стягуванні сфери s до точки M_0 прямує до нуля пропорційно r_0 :

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} 4\pi r_0^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle = 0.$$

Тепер звернемося до другого доданку в (3.159):

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (3.161)$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) = \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0^2},$$

то застосування теореми про середнє до інтегралу (3.161) дає:

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = -\frac{1}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 \langle \varphi \rangle,$$

де $\langle \varphi \rangle$ – значення функції φ в деякій точці сфери s . В межах при $r_0 \rightarrow 0$ величина $\langle \varphi \rangle$ прямує до значення функції φ в точці M_0 . Отже,

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = -4\pi \varphi(M_0). \quad (3.162)$$

Повернемося тепер вихідної рівності (3.154). Оскільки інтеграл у правій частині поширюється по поверхні S , він не може залежати від радіуса малої сфери s . Отже, і ліва частина не залежить від r_0 . Підставляючи (3.162) в рівність (3.154), отримаємо:

$$4\pi \varphi(M_0) = -\oint_s f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

або

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_s f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (3.163)$$

Оскільки M_0 – довільна точка області V , то ця формула представляє собою розв'язок розглядуваної задачі, якщо відома функція Гріна G . Іншими словами, задача звелася до визначення функції $H(x, y, z)$, що задовольняє умовам (3.151) та (3.152):

$$\Delta H = 0 \text{ та } H|_s = -\frac{1}{r_0}.$$

Зрозуміло, що останнє не набагато простіше вихідних умов (3.147) і (3.148). Однак для деяких типів областей V та обмежуючих їх поверхонь

S функція Гріна може бути легко побудована і в цих випадках шуканий розв'язок зводиться до обчислення інтеграла в правій частині.

Нижче наводяться два приклади, коли вдається визначити функцію Гріна для задачі Дірихле.

Приклад 1. Функція Гріна для кулі. Нехай область V є кулею радіуса a , а точка M_0 лежить в середині кулі на вісі x , маючи координати $(x_0, 0, 0)$.

Побудуємо точку $M_0^* \left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0 \right)$, яку назвемо спряженою відносно сфери, що обмежує кулю (рис. 37). Нескладно переконатися, що для кожної точки N ,

що лежить на сфері, відношення $\frac{|NM_0|}{|NM_0^*|}$ є величина стала. Дійсно

трикутники OM_0N та ONM_0^* подібні (це випливає з того, що $\frac{|OM_0|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM_0^*|} = \frac{x_0}{a}$). Тому відношення

довжин та інших трьох сторін $|NM_0|$ до $|NM_0^*|$ також дорівнює $\frac{x_0}{a}$, тобто не залежить від положення N на сфері.

Тепер можна стверджувати, що для довільної точки M всередині кулі функція

$$G(M) = \frac{1}{r} - \frac{a}{x_0} \frac{1}{r^*} \tag{3.164}$$

(де $r = |MM_0|$, $r^* = |MM_0^*|$) є функцією Гріна.

Щоб перевірити це, достатньо показати, що $H(M) = -\frac{a}{x_0} \frac{1}{r^*}$ задовольняє в середині кулі V рівнянню $\Delta H = 0$, а на поверхні кулі $H|_S = -\frac{1}{r}$.

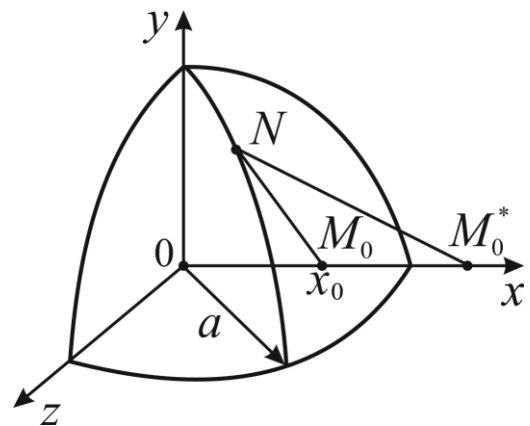


Рис. 37

Оскільки $r^* = |MM_0^*|$ для будь-якої точки всередині кулі є величина, відмінна від нуля, тоді в усій області V :

$$\Delta\left(\frac{1}{r^*}\right) = 0.$$

Що стосується другої умови, то зрозуміло, що

$$H|_S = H(N) = -\frac{a}{x_0} \frac{1}{|NM_0^*|}.$$

Але

$$\frac{|NM_0^*|}{|NM_0|} = \frac{a}{x_0}.$$

або

$$\frac{1}{|NM_0^*|} = \frac{x_0}{a} \frac{1}{|NM_0|} = \frac{x_0}{a} \frac{1}{r}.$$

Отже,

$$H|_S = -\frac{1}{r}.$$

Таким чином, функція (3.164) є функцією Гріна для розглядуваної задачі.

Щоб тепер ми могли скористатися загальною формулою (3.163), обчислимо ще похідну $\frac{\partial G}{\partial n}$ на сфері:

$$\frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{R=a} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{1}{r} \right) - \frac{a}{x_0} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]_{R=a},$$

де \vec{R} – радіус-вектор будь-якої точки M кулі, що відлічується від центру.

На рисунку 37 видно, що $r^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos\gamma$. Тому

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial R} (R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos\gamma)^{-1/2} = -\frac{R - x_0 \cos\gamma}{r^3}.$$

Припускаючи, що $R = a$, отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{a - x_0 \cos\gamma}{(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos\gamma)^{3/2}}. \quad (3.165)$$

Якщо замість x_0 підставити $\frac{a^2}{x_0}$, ми знайдемо значення похідної:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r^*} \right)_{R=a} = - \frac{ax_0 - a^2 \cos \gamma}{x_0 \left(a^2 + \frac{a^4}{x_0^2} - 2 \frac{a^3}{x_0} \cos \gamma \right)^{3/2}}.$$

Після спрощення приходимо до виразу:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r^*} \right)_{R=a} = - \frac{x_0^2}{a^2} \frac{x_0 - a \cos \gamma}{\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma \right)^{3/2}}. \quad (3.166)$$

Об'єднуючи (3.165) і (3.166), визначаємо похідну, що входить в (3.163):

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = - \frac{a^2 - x_0^2}{a} \left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma \right)^{-3/2}. \quad (3.167)$$

Підставимо тепер цей вираз в (3.163), отримаємо розв'язок задачі Дірихле для кулі у вигляді квадратури (шукану функцію замість φ позначимо через U):

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi a} \oint \frac{a^2 - x_0^2}{\left(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma \right)^{3/2}} f(R') dS. \quad (3.168)$$

В загальному випадку, коли точка M_0 володіє похідними сферичними координатами r_0, θ_0, φ_0 цей розв'язок зручніше представити у сферичній системі координат ($dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$):

$$U(M_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 - r_0^2}{\left(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \gamma \right)^{3/2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.169)$$

де нескладно показати,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (3.170)$$

Інтеграл (3.169) називається *інтегралом Пуассона* для кулі.

В цьому випадку, коли задача Дірихле є плоскою, а область визначення та область значення функції U представляє собою коло радіуса a , інтеграл Пуассона приймає більш простий вигляд:

$$U(M_0) = U(r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{\left(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\theta_0 - \varphi) \right)} f(\varphi) d\varphi. \quad (3.171)$$

Приклад 2. Функція Гріна для напівпростору. Нехай треба знайти функцію $U(x, y, z)$, що задовольняє в на півпросторі $z > 0$ рівнянню Лапласа $\Delta U = 0$ і приймає на площині xOy ($z = 0$) задане значення:

$$U|_{z=0} = f(x, y).$$

Як і у випадку кінцевої області V , представляємо функцію Гріна для довільної точки верхнього на півпросторі ($z > 0$) у вигляді двох доданків:

$$G(M) = \frac{1}{r} + H(M), \tag{3.172}$$

де $r = |\overline{MM_0}|$ є відстань довільної точки M від деякої фіксованої $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 38). Що стосується функції $H(M)$, то вона задовольняє двом умовам $\Delta H = 0$ та $H|_{z=0} = -\frac{1}{r'}$, де $r' = |\overline{NM_0}|$ – відстань від M_0 до будь-якої точки $N(x', y')$ на площині $z = 0$. Оскільки $G(N) = 0$, то розв'язок задачі є функцією:

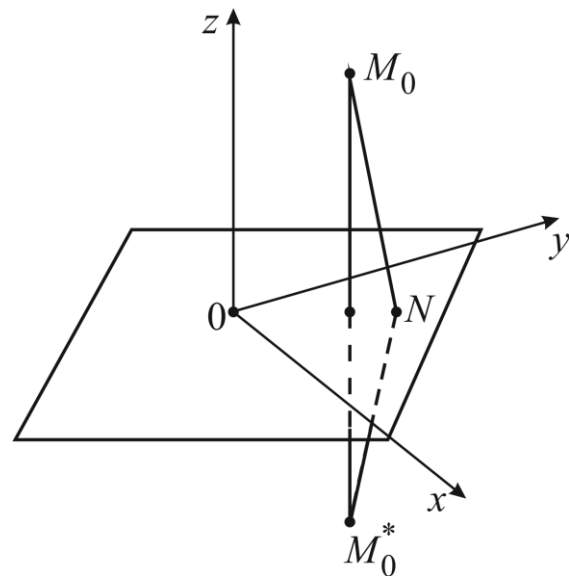


Рис. 38

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S f(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \tag{3.173}$$

Зрозуміло, що

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Тому

$$U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{+\infty}^{+\infty} f(x, y) \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} dx dy. \tag{3.174}$$

В якості функції $H(M) = H(x, y, z)$ оберемо величину

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{r^*}, \tag{3.175}$$

де $r^* = \left| \overrightarrow{MM_0^*} \right|$ є відстанню від точки M до точки $M_0^*(x_0, y_0, z_0)$, спряженої точці M_0 .

Нескладно переконатися, що функція (3.175) задовольняє і рівнянню Лапласа $\Delta H = 0$ та граничній умові:

$$H \Big|_S = H(N) = H(x, y, 0) = -\frac{1}{r'^*} = -\frac{1}{r'},$$

оскільки $r'^* = \left| M_0^*N \right| = \left| M_0N \right| = r'$. Підставляючи (3.175) в (3.173) і записуючи отриманий вираз у розгорнутому вигляді, знаходимо для функції Гріна наступні вирази:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \quad (3.176)$$

Диференціюючи цю функцію за z , отримаємо:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{2z_0}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2 \right]^{3/2}}. \quad (3.177)$$

Підставляючи (30) в (27), приходимо до кінцевого виразу:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2 \right]^{-3/2} dx dy, \quad (3.178)$$

що є розв'язком розглядуваної задачі.

3.4.7.* Рівняння Пуассона для електростатичного потенціалу та його загальний розв'язок

У вакуумі (чи в однорідному та ізольованому діелектрику) електростатичне поле, або точніше його скалярний потенціал ϕ , задовольняє рівнянню Пуассона для електростатичного потенціалу:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ або } \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (3.179)$$

де ρ – об'ємна густина розподілу електричного заряду у просторі, ϵ_0 – діелектрична стала, що дорівнює $8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$, її присутність у рівнянні обумовлена вибором системи одиниць вимірювання електродинамічних

величин, ϵ – діелектрична проникність діелектрика, яка у межах класичної електродинаміки вважається сталою скалярною величиною.

Безпосередньо отримати рівняння Пуассона можна з рівнянь Максвелла, які складають ядро класичної електродинаміки і є феноменологічним узагальненням її експериментальних законів, та встановлюють зв'язок між силовими характеристиками електромагнітного поля (\vec{E} – напруженість електричного поля, \vec{B} – індукція магнітного поля) з одним полем та зарядами (ρ) та струмами (\vec{j}) з іншого, що є джерелами цього поля. Рівняння Максвелла для електростатичного поля має вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon},$$

враховуючи рівняння зв'язку між силовою (\vec{E}) та енергетичною (φ) характеристиками електростатичного поля,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

можна відшукати рівняння для потенціалу φ електростатичного поля, а саме:

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}; \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi = \Delta \varphi; \Rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Досліджуючи електростатичне поле, завжди користуються загальними властивостями потенціалу:

1) *Потенціал точкових зарядів* $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ разом із своїми першими

похідними по координатах є однозначним і неперервним в усіх точках простору, за винятком точок, де перебувають заряди. В звичайних же точках поля ці потенціали задовольняють рівняння Лапласа, а саме, коли $\rho = 0$, то в цій області простору $\Delta \varphi = 0$.

2) *Потенціал об'ємних зарядів*, що розміщені в обмеженій частині простору, є скінченим, однозначним і неперервним в усіх точках простору, ті ж властивості мають і перші похідні по координатах.

Рівняння Пуассона має фундаментальне значення для розв'язання основної задачі електростатики – обчислення φ і \vec{E} для поля заданої системи зарядів на провідниках.

Є два можливі варіанти розв'язку цієї задачі:

I варіант. Задано значення потенціалів провідників. Потрібно відшукати напруженість поля в просторі між провідниками і розподіл зарядів на провідниках та величину φ . Якщо все поле перебуває у вакуумі (ідеальному діелектрику з $\varepsilon=1$), то задача зводиться до відшукування аналітичного вигляду φ , що 1) задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta\varphi=0$ в просторі між провідниками; 2) $\varphi|_{r\rightarrow\infty}=0$; 3) $\varphi_i=\varphi_{i0}$, де φ_{i0} – задане значення потенціалу i -го провідника.

II варіант. Задано розподіл зарядів на провідниках. Потрібно обчислити їх потенціали, густини зарядів на їх поверхнях і значення φ і \vec{E} в просторі між провідниками. Завдання зводиться до відшукування функції φ , що задовольняє рівняння Лапласа $\Delta\varphi=0$ в просторі між провідниками, на поверхні провідників набуває сталих значень φ_i , але невідомих, що задовольняють інтегральному співвідношенню:

$$-\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = q_i. \quad (3.180)$$

Важливе значення тут має *теорема єдності розв'язків*: При достатній повноті даних розв'язуваної задачі, доповненої певними граничними умовами, їй відповідає єдиний розв'язок. Або інакше: кожний знайдений розв'язок – єдиний.

Відшукаємо загальний розв'язок рівняння Пуассона. Для цього використаємо *метод функцій Гріна*. Для початку використаємо II формулу Гріна:

$$\oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV,$$

де функції φ, ψ – довільні неперервні функції, які мають неперервні перші та другі похідні в усій області, де відомий розподіл зарядів; n – модуль вектора нормалі до поверхні S .

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$, в якій необхідно знати потенціал $\varphi(x, y, z)$. Опишемо навколо неї сферу малого радіуса a і поверхню Σ , V_a – об’єм простору, що обмежений поверхнями S і Σ (рис. 39). Для сфери функція Гріна $G = \psi = \frac{1}{r}$, де r – віддаль від біжучої точки $N(x_0, y_0, z_0)$ об’єму V_a до точки $M(x, y, z)$. Тоді формула Гріна набуває вигляду:

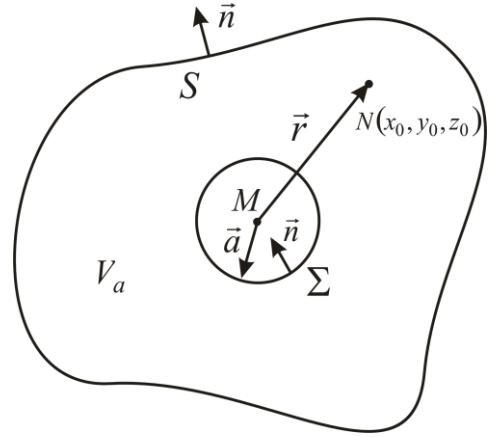


Рис. 39.

$$\oint_{S+\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \int_{V_a} \left(\varphi \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi \right) dV,$$

причому: \vec{n} – зовнішня нормаль, що обмежує об’єм V_a , $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна за напрямком зовнішньої нормалі поверхонь, що обмежують V_a . Крім того $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$. Довести це нескладно: $\nabla^2 = \nabla_r^2 + \nabla_{\theta, \varphi}^2$ – у сферичній системі

координат, $\nabla_{\theta, \varphi}^2$ – не залежить від $\frac{1}{r} \Rightarrow \nabla_{\theta, \varphi}^2 = 0$; $\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$, тому

$$\nabla_r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0.$$

Врахувавши це маємо:

$$\oint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma = - \oint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS - \int_{V_a} \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi dV. \quad (3.181)$$

Обчислимо інтеграл по поверхні сфери Σ лівої частини нашого виразу (3.181): в усіх точках на поверхні сфери Σ маємо, що $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ (нормаль \vec{n} спрямована по радіусу в середину поверхні Σ , тобто $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{r}$). Тому

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right|_{\Sigma} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right|_{\Sigma} = \left. \frac{1}{r^2} \right|_{\Sigma} = \frac{1}{a^2}. \quad (3.182)$$

Далі, згідно теореми про середнє значення функції:

$$\oint_{\Sigma} \varphi d\Sigma = \varphi_{\Sigma} \oint_{\Sigma} d\Sigma = 4\pi a^2 \varphi_{\Sigma}, \quad (3.183)$$

де φ_{Σ} – середнє значення потенціалу на поверхні Σ , тоді

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma} 4\pi a^2, \quad (3.184)$$

де $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma}$ – середні значення похідної від потенціалу на поверхні Σ . Тоді для лівої частини виразу (3.181), з урахуванням (3.182), (3.183) і (3.184), остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma &= \oint_{\Sigma} \varphi \frac{1}{a^2} d\Sigma - \oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma = \varphi_{\Sigma} \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma} 4\pi a^2 = \\ &= 4\pi \left(\varphi_{\Sigma} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma} \right). \end{aligned}$$

Тоді основна рівність (3.181) набуде вигляду:

$$\varphi_{\Sigma} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{V_a} \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi dV.$$

Якщо врахувати рівняння Пуассона (3.179), тоді інтеграл по об'єму v_a теж може бути спрощеним, а саме:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{V_a} \frac{\rho}{r} dV.$$

Тепер перейдемо до граничного випадку, коли $a \rightarrow 0$, а сфера Σ стягується в точку $M(x, y, z)$. При цьому маємо:

а) $\varphi_{\Sigma} \rightarrow \varphi(x, y, z)$, бо середнє значення неперервної функції на поверхні сфери є її значенням в одній із точок цієї сфери, що стягується в точку $M(x, y, z)$;

б) величина $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Sigma}$ – обмежена, бо вона характеризує напруженість поля ($\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$), а тому, якщо $a \rightarrow 0$, то й $a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rightarrow 0$.

Тому остаточно:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS. \quad (3.185)$$

Це і є загальний розв'язок рівняння Пуассона. Він визначає потенціал електростатичного поля у вакуумі (ідеальному діелектрику) в будь-якій точці довільно виділеного об'єму V , якщо в ньому задана густина розподілу зарядів $\rho(x, y, z)$, а на межі S виділеного об'єму відомі значення як самого потенціалу φ так і його похідна $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ вздовж напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до поверхні S .

Перший, об'ємний інтеграл загального розв'язку (3.185) визначає потенціал створений об'ємними зарядами, що розміщені в об'ємі V , обмеженому поверхнею S . Заряди, що знаходяться за межами об'єму V , в цю формулу не входять. Їх вплив на величину φ визначається значеннями φ та $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхні S .

Отже, об'ємний інтеграл загального розв'язку рівняння Пуассона – це частинний розв'язок рівняння Пуассона, а поверхневий – це загальний розв'язок відповідного йому однорідного рівняння (рівняння Лапласа).

Розглянемо окремі випадки.

I. Якщо в певному об'ємі зарядів немає, то потенціал поля однозначно визначається тільки граничними умовами на поверхні, що обмежує цей об'єм.

II. Якщо всі заряди розміщені в об'ємі V (за його межами немає вільних зарядів), то поверхневий інтеграл дорівнює нулю.

Отже, в багатьох випадках, коли заряди розміщені лише в частині простору, то $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV$, r – віддаль від елемента об'єму dV до точки,

де визначається електростатичний потенціал φ (точка спостереження).

Примітка: та частина поля, яку описує поверхневий інтеграл еквівалента полю, що створюється зарядами і диполями, розміщеними з певною густиною на поверхні S .

3.4.8.* Задача про одновимірний гармонічний осцилятор

Розглянемо найпростіший випадок руху частинки в потенціальному полі – гармонічний осцилятор.

В класичній механіці функція повної механічної енергії такої частинки (функція Гамільтона) має вигляд:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2},$$

де $\frac{p^2}{2m}$ – кінетична енергія частинки, $\frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ – її потенціальна енергія.

У фізиці означення одновимірного гармонічного руху визначається виглядом потенціального поля, в якому перебуває частинка.

Для класичної частинки, її рух можна описати, якщо вона змодельована матеріальної точки, яка рухається у зовнішньому одновимірному потенціальному полі типу $U = U(x)$. Рух точки вважається гармонічним, якщо її коливання обумовлені класичним законом Гука $F = -kx$, тоді диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки, згідно II закону Ньютона має вигляд: $ma = F$, де $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ –

прискорення точки, якого вона отримує за рахунок сили пружності Гука, якщо врахувати закон Гука: $ma = -kx$ або в канонічному представленні, виконуючи відповідні математичні перетворення:

$$ma + kx = 0; \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0;$$

$$x''(t) + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклічна частота коливань механічного осцилятора.

Розв'язок такого рівняння відомий:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Цей інтегральний розв'язок береться за основне означення гармонічних коливань у шкільному курсі фізики, оскільки методика розв'язування диференціальних рівнянь поза програмою математики середньої школи.

Можна також обрахувати вигляд потенціального силового поля, в якому перебуває така частинка, скориставшись рівнянням зв'язку між силовою та енергетичною його характеристикою, з урахуванням властивості його потенціальності, а саме

$$\vec{F} = -\text{grad } U.$$

Тоді

$$-kx\vec{i} = -\text{grad } U; \quad -kx\vec{i} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}; \quad dU = kx dx; \quad U = \int kx dx; \quad U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Тому у солідних послідовних курсах фізики основною ознакою гармонічних коливань обирається вигляд потенціального поля $U(x)$, в якому перебуває досліджуваний об'єкт. Тому що, врахування особливостей поведінки об'єкта, його параметрів та характеру руху у класичній, квантовій або релятивістській областях, дає можливість за основу розв'язку обрати те або інше диференціальне рівняння руху, що є ядром відповідної теорії.

Квантова частинка, що рухається в стаціонарному потенціальному полі типу

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \quad (3.186)$$

називається *лінійним одновимірним гармонічним осцилятором*. Ця модель годиться для пояснення руху атомів в молекулі; атомів, іонів, молекул в кристалі тощо.

Оскільки $U(x) \neq U(t)$, тобто одновимірне потенціальне поле є стаціонарним, тому для опису стану квантового осцилятора досить застосувати стаціонарне рівняння Шредінгера, яке є ядром квантової механіки. В операторному представленні це рівняння має найпростіше представлення:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (3.187)$$

де \hat{H} – оператор Гамільтона – оператор повної механічної енергії осцилятора, який для нерелятивістської області можна подати у вигляді

двох доданків: оператора кінетичної енергії частинки $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ та

оператора потенціальної енергії \hat{U} , що визначається виглядом потенціального поля, в якому перебуває досліджувана квантова частинка;

E – повна енергія частинки; ψ – її хвильова функція, вигляд якої являє собою образ того хвильового поля, яке пов'язується з частинкою.

Фізичного змісту хвильова функція не має, але квадрат її модуля має зміст – він пов'язується з густиною імовірності місця знаходження частинки,

тобто $|\psi|^2 = \psi\psi^* = \rho(x) = \frac{dW}{dV}$. Оскільки квадрат модуля хвильової функції має зміст густини імовірності, тому ψ -функція повинна ще задовольняти стандартним умовам: неперервності, однозначності і скінченності; інтеграл за всім нескінченим простором від $|\psi|^2$ за змістом цієї величини являє собою достовірність події, що реалізується, тобто $\int |\psi|^2 dV = 1$ (умова нормування хвильової функції). Отже, рівняння Шредінгера до умов поставленої нами задачі набуде вигляду:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \psi = E\psi. \quad (3.188)$$

Для спрощення вигляду рівняння врахуємо, що для одновимірного випадку $\nabla^2 = \nabla_x^2$, а також введемо безрозмірну змінну $\xi = \frac{x}{x_0}$, де

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}. \text{ Тоді}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x_0} \frac{d\psi}{d\xi};$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{x_0} \frac{d\psi}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x_0^2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{1}{x_0^2} \psi''.$$

Отже:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} \psi'' + \frac{m\omega_0^2}{2} x_0^2 \xi^2 \psi = E\psi.$$

Підставимо у рівняння x_0^2 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega_0}{\hbar} \psi'' + \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{\hbar}{m\omega_0} \xi^2 \psi = E\psi,$$

помножимо праву і ліву частину рівняння на $\frac{2}{\hbar\omega_0}$:

$$-\frac{\hbar\omega_0}{2} \psi'' + \frac{\hbar\omega_0}{2} \xi^2 \psi = E\psi,$$

далі поділимо відповідно на $\frac{\hbar\omega_0}{2}$:

$$-\psi'' + \xi^2 \psi = \frac{2E}{\hbar\omega_0} \psi.$$

Позначимо за $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$ і тоді:

$$\begin{aligned} -\psi'' + \xi^2 \psi &= \lambda \psi; \Rightarrow \psi'' - \xi^2 \psi = -\lambda \psi; \\ \psi'' + (\lambda - \xi^2) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Отже, ми отримали *безрозмірне рівняння Шредінгера для осцилятора*.

Дослідимо асимптотичний розв'язок рівняння для випадку, коли $\xi \rightarrow \pm\infty$, тобто при такому наближенні $\xi \gg \lambda$ і рівняння (3.189) спрощується, отже:

$$\psi'' - \xi^2 \psi = 0. \quad (3.190)$$

Це рівняння має особливі точки коли $\xi \rightarrow \pm\infty$, тому для їх усунення будемо шукати розв'язок рівняння (3.190) в такому вигляді:

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad (3.191)$$

($e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \rightarrow \infty$, а це дає можливість його не розглядати). Відшукаємо відповідні похідні від запропонованого розв'язку і підставимо їх у рівняння (3.190):

$$\begin{aligned} \psi' &= -\xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2}; \quad \psi'' = \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - e^{-\frac{1}{2}\xi^2}; \quad \text{підставляємо:} \\ \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} &= 0. \end{aligned}$$

Тут ми враховуємо, що $\xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \gg e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$. Тобто розв'язок рівняння (3.190) потрібно шукати у більш загальному вигляді, враховуючи й амплітуду біля функції (3.191), а саме як

$$\psi = f(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \quad (3.192)$$

Відшукаємо розв'язок рівняння (3.190), склавши спочатку рівняння для амплітуди $f(\xi)$:

$$\psi'(\xi) = -\xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) + f'(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2};$$

$$\psi''(\xi) = \xi^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \cdot f(\xi) - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \cdot f(\xi) - f'(\xi) \cdot \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + f''(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - f'(\xi) \cdot \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} =$$

$$= \xi^2 \cdot f(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - f(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - 2f'(\xi) \cdot \xi \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + f''(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

Підставимо похідні в рівняння (3.189):

$$\left(\xi^2 \cdot f(\xi) - f(\xi) - 2f'(\xi) \cdot \xi + f''(\xi) \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \cdot f(\xi) = 0,$$

поділимо праву і ліву частину рівняння на $e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$, що допустимо, тому що $e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \neq 0$, тобто

$$\begin{aligned} \xi^2 \cdot f(\xi) - f(\xi) - 2f'(\xi) \cdot \xi + f''(\xi) + \lambda f(\xi) - \xi^2 f(\xi) &= 0. \\ f''(\xi) - 2f'(\xi) \cdot \xi + (\lambda - 1)f(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Рівняння (3.193) вже особливих точок не має. Шукати його розв'язок $f(\xi)$ будемо у вигляді степеневого ряду:

$$f(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \xi^v. \quad (3.194)$$

Відшукаємо формулу для визначення коефіцієнтів ряду a_v . Для цього підставимо ряд (3.194) в рівняння (3.193):

$$\left| \begin{array}{l} f = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \xi^v \\ f' = \sum_{v=0}^{\infty} a_v v \xi^{v-1} \\ f'' = \sum_{v=0}^{\infty} (a_v \cdot v(v-1) \xi^{v-2}) \end{array} \right| \begin{array}{l} \times (\lambda - 1) \\ \times (-2\xi) \\ \times 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \sum_{v=0}^{\infty} (\lambda - 1) a_v \xi^v - \\ \sum_{v=0}^{\infty} 2\xi \cdot a_v \cdot v \xi^{v-1} + \\ \sum_{v=0}^{\infty} (a_v \cdot v(v-1) \xi^{v-2}) \end{array} \right| = 0. \Rightarrow$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} (a_v \cdot v(v-1) \xi^{v-2} - 2a_v \cdot v \xi^v + (\lambda - 1) a_v \xi^v) = 0.$$

Або запишемо коефіцієнт для члена ряду з ξ^v :

$$\sum_{v=0}^{\infty} (a_{v+2} \cdot (v+2)(v+1) - 2a_v \cdot v + (\lambda - 1) a_v) \xi^v = 0,$$

очевидно, що цей ряд при будь-якому ξ завжди рівний нулеві, у тому випадку, коли всі коефіцієнти біля ξ^v рівні нулю, тобто

$$a_{v+2} \cdot (v+2)(v+1) - 2a_v \cdot v + (\lambda - 1) a_v = 0,$$

звідси знайдемо рекурентну формулу для коефіцієнтів ряду:

$$a_{v+2} = \frac{2v - (\lambda - 1)}{(v+2)(v+1)} a_v, \text{ де } v = 0, 1, 2, \dots \quad (3.195)$$

Ця рекурентна формула дозволяє обчислити всі члени ряду, виражаючи його через один. Тобто, ряд (3.194) складається або тільки з парних членів (коли $a_0 \neq 0$), або ж з непарних (коли $a_1 \neq 0$). Скориставшись умовою нормування хвильової функції $\psi(\xi)$, можна визначити a_0 чи a_1 , а, отже й відшукати всі коефіцієнти ряду. Якщо відомо a_0 , тоді маємо:

$$a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

Коли ж відомо a_1 , то:

$$a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

Це і є частинні розв'язки нашого рівняння (3.193).

При великих значеннях $\xi \rightarrow \infty$, виявляється, що

$$f(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \xi^v \rightarrow e^{\xi^2} \rightarrow \infty,$$

а також і $\psi \rightarrow e^{\frac{1}{2}\xi^2} \rightarrow \infty$, тобто не задовольнятиме стандартним умовам, зокрема умові інтегрованості. Щоб цього не трапилось, необхідно, щоб починаючи з $v = n$ ряд $f(\xi)$ обірвався і перетворився у многочлен. Це можливо, коли покласти, що $v = n$, $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0 \Rightarrow a_{n+2} \equiv 0$, тобто з рекурентної формули (3.99) одержимо, що це можливо, коли:

$$2n - (\lambda - 1) = 0.$$

Звідси

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.196)$$

Якщо врахувати заміну для $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$ і формулу (3.196), то можна

зробити дуже важливий фізичний висновок задачі про кантовий гармонічний осцилятор, а саме:

$$\lambda = \frac{2E_n}{\hbar\omega_0} = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

або

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.197)$$

Висновок: *спектр енергій лінійного гармонічного осцилятора дискретний*.
Причому віддаль між сусідніми енергетичними рівнями:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_0 \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0.$$

є величиною сталою. Відзначимо також, що $E_{\min} = E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0$ – це нульова енергія осцилятора, яка в нього не може бути відібранаю ніяким існуючим у природі способом. Наявність нульової енергії у осцилятора підтверджується експериментально за величиною розсіювання світла кристалами при наднизьких температурах.

Отже, рівняння (3.193) з урахуванням (3.196) запишеться так:

$$f_n''(\xi) - 2\xi \cdot f_n'(\xi) + 2n \cdot f_n(\xi) = 0, \quad (3.198)$$

де з урахуванням (3.194) і (3.195),

$$f_n(\xi) = \sum_{v=0}^n a_v \xi^v, \quad (3.199)$$

буде його частинним розв'язком і являє собою поліном Чебишева-Ерміта, який позначається як $H_n(\xi)$. Тоді хвильова функція осцилятора, що задовольняє загальному безрозмірному рівнянню (3.189), матиме вигляд

$$\psi_n(\xi) = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi), \quad (3.200)$$

$$a_{v+2} = \frac{2v - (\lambda - 1)}{(v+2)(v+1)} a_v = 0, \quad \lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{v+2} = \frac{2v - (2n + 1 - 1)}{(v+2)(v+1)} a_v = -\frac{2(n-v)}{(v+2)(v+1)} a_v.$$

з математичної точки зору, отриманий розв'язок є многочленом, що зображає функції, які мають властивості неперервності і однорідності.

Поліном Чебишева-Ерміта можна обчислити за допомогою формули:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\xi^2} \right), \quad (3.201)$$

його можна відшукати як розв'язок диференціального рівняння, подібного до (3.198):

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2n H_n(\xi) = 0.$$

Обчислення поліномів Чебишева-Ерміта для $n=0,1,2,\dots$, згідно (3.201), дають:

$$n=0, \quad H_0(\xi) = (-1)^0 e^{\xi^2} \frac{d^0}{d\xi^0} \left(e^{-\xi^2} \right) = e^{\xi^2} \cdot e^{-\xi^2} = e^0 = 1;$$

$$n=1, \quad H_1(\xi) = (-1) \cdot e^{\xi^2} \frac{d \left(e^{-\xi^2} \right)}{d\xi} = (-1) \cdot e^{\xi^2} \cdot (-2\xi) \cdot e^{-\xi^2} = 2\xi;$$

$$\begin{aligned} n=2, \quad H_2(\xi) &= (-1)^2 e^{\xi^2} \frac{d^2 \left(e^{-\xi^2} \right)}{d\xi^2} = e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \cdot \left(-2\xi e^{-\xi^2} \right) = \\ &= e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi} (-2\xi) e^{-\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} \left(e^{-\xi^2} \right) \right) = e^{\xi^2} \left(-2e^{-\xi^2} - 2\xi \cdot \left(-2\xi e^{-\xi^2} \right) \right) = \\ &= -2 + 4\xi^2. \end{aligned}$$

Деякі властивості поліномів Чебишева-Ерміта:

$$1) \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi \cdot H_n(\xi) - 2n \cdot H_{n-1}(\xi).$$

Наприклад,

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \text{тому:}$$

$$H_2(\xi) = H_{1+1}(\xi) = 2\xi \cdot H_1(\xi) - 2 \cdot 1 \cdot H_0 = 2\xi \cdot 2\xi - 2 = 4\xi^2 - 2$$

$$\begin{aligned} H_3(\xi) = H_{2+1}(\xi) &= 2\xi \cdot H_2(\xi) - 2 \cdot 2 \cdot H_1(\xi) = 2\xi \cdot (4\xi^2 - 2) - 4 \cdot 2\xi = \\ &= 8\xi^3 - 4\xi - 8\xi = 8\xi^3 - 12\xi. \end{aligned}$$

Тобто, подібним способом можна обчислити будь-які $H_n(\xi)$, не користуючись безпосередньо формулою (3.105).

$$2) \quad \frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1};$$

$$3) \quad \xi\Psi_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\Psi_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\Psi_{n+1}; \quad \frac{d\Psi_n}{d\xi} = \sqrt{\frac{n}{2}}\Psi_{n-1} - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\Psi_{n+1};$$

$$4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(\xi)\Psi_{n'}(\xi)d\xi = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}$$

Запитання для самоконтролю:

1. Запишіть рівняння Лапласа.
2. Запишіть рівняння Пуассона.
3. Сформулюйте першу крайову задачу (Діріхле).

4. Сформулюйте другу крайову задачу (Неймана).
5. Сформулюйте третю крайову задачу.
6. За якої умови задачу називають внутрішньою (зовнішньою) крайовою задачею?
7. Запишіть вираз для оператора Лапласа в системі криволінійних ортогональних координат.
8. Запишіть вираз дивергенції в криволінійних ортогональних координатах.
9. Запишіть рівняння Лапласа в ортогональних криволінійних координатах.
10. Запишіть рівняння Лапласа у сферичних координатах.
11. Запишіть рівняння Лапласа в циліндричних координатах.
12. Яка функція називається відтворювальною функцією поліномів Лежандра?
13. Запишіть диференціальну формулу для поліномів Лежандра або формулу Родріга.
14. Запишіть рівняння Лежандра.
15. Чому дорівнює норма поліномів Лежандра?
16. Запишіть узагальнене рівняння Лежандра.
17. Запишіть рівняння для сферичної функції.
18. Які функції називають кульовими?
19. Який вигляд має поліном Лагерра?
20. Запишіть рекурентну формулу.
21. Запишіть властивість ортогональності для полінома Лагерра.
22. В чому полягає метод функцій Гріна?
23. Поясніть метод Гріна розв'язку краєвих задач.
24. Запишіть функцію Гріна для кулі.
25. Що називають інтегралом Пуассона для кулі.
26. Запишіть функцію Гріна для напівпростору.
27. Запишіть вигляд електростатичного поля (або точніше його скалярного потенціалу) у вакуумі (чи в однорідному та ізолюваному діелектрику), що задовольняє рівнянню Пуассона для електростатичного потенціалу.
28. Назвіть загальні властивості потенціалу.
29. Сформулюйте зміст основної задачі електростатики.
30. Поясніть два варіанта розв'язку основної задачі електростатики.
31. Сформулюйте теорему єдності розв'язків.
32. Запишіть загальний розв'язок рівняння Пуассона.
33. Дайте означення лінійного одновимірному гармонічного осцилятора.
34. Запишіть безрозмірне рівняння Шредінгера для осцилятора.
35. Запишіть чому дорівнює енергія лінійного гармонічного осцилятора.
36. Яким є спектр енергій лінійного гармонічного осцилятора?

3.5.* Застосування теорії груп у фізиці

3.5.1. Поняття теорії груп.

3.5.2. Гармонічні коливання молекул: Молекула як динамічна система. Рамановське розсіювання двохатомної молекули. Інфрачервоне поглинання і дипольний момент. Правила відбору для основних частот.

3.5.3. Правила відбору операторів квантової механіки: Атом у зовнішньому полі. Ефект Зеємана. Пара- і діаманітні властивості атомів і молекул. Правила відбору для дипольного випромінювання.

3.5.1. Поняття теорії груп

Теорія груп – розділ математики, який вивчає властивості груп.

Групою називається множина G , на якій визначена бінарна операція $G \times G \rightarrow G$, що звичайно називається множенням і позначається $(a, b) \rightarrow a \cdot b$ або $(a, b) \rightarrow ab$ і має такі властивості:

Асоціативність: для довільних елементів a, b, c групи G виконується $a(bc) \rightarrow (ab)c$.

Існування нейтрального елемента: існує такий елемент e , що для кожного елемента a групи G виконується $ea = ae = a$.

Існування оберненого елемента: для кожного елемента a групи існує елемент a^{-1} такий, що $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Якщо група також має властивість *комутативності*, то вона називається абелевою.

Коли елементи групи неперервно залежать від якихось параметрів, то група називається *неперервною*, або групою Лі. Також кажуть, що група Лі – це група, множина елементів якої утворює гладкий многовид. За допомогою груп Лі, як груп симетрій, знаходяться розв'язки диференціальних рівнянь.

Теорія груп має три історичні корені: теорія алгебраїчних рівнянь, теорія чисел та геометрія.

Основною задачею алгебри до XIX століття було розв'язання алгебраїчних рівнянь. В епоху Відродження були знайдені формули для рівняння третього та четвертого степенів. І були прикладені значні зусилля для пошуку формул для рівнянь п'ятого степеня та вище, але більше двох століть не було позитивного результату. В 1770 р. Жозеф-Луї

Лагранж та А.Вандермонд помітили, що розв'язок рівняння зводиться до вивчення перестановок з його коренів. З 1799 р. Паоло Руффіні в ряді робіт з цієї теми описав групу перестановок з п'яти елементів. В 1824 р. Нільс Абель довів теорему, що для рівнянь вище п'ятого степеня не існує загальної формули, що виражатиме корені через коефіцієнти в радикалах (теорема Абеля-Руффіні). Загальний розв'язок проблеми розв'язності алгебраїчних рівнянь був виконаний Еваристом Галуа в 1830 р. У роботах Галуа був введений термін «група» та використовувались властивості груп.

У геометрії в ХІХ столітті викликали інтерес геометричні перетворення. Їх вивчав Мебіус. Детально класифікував геометричні перетворення Артур Келі в 1854 р., він користувався терміном «група», використовував таблиці множення (таблиці Келі) і довів, що скінченну групу можна представити перестановками. В ерлангенській програмі Ф.Клейна (1872 р.) вивчення геометрії було пов'язано з вивченням відповідних груп перетворень. Наприклад, якщо задані фігури на площині, то групою рухів з'ясовується їхня рівність.

Третій історичний шлях до теорії груп – теорія чисел:

Леонард Ейлер, що вивчав остачі від ділення степенів.

Гаус займався пошуком коренів рівняння $x^{n-1}=0$ для побудови правильних багатокутників. Леопольд Кронекер вивчав скінченні абелеві групи мовою теорії чисел.

На початку ХХ століття теорією груп займались: Софус Лі, Давид Гільберт, Еммі Нетер, Еміль Артін, Людвиг Сілов.

Теорія груп сьогодні знайшла своє широке застосування в сучасних теоріях курсу теоретичної фізики, зокрема, квантовій механіці, квантовій теорії поля, квантовій хромодинаміці та ін. Розглянемо приклади застосування теорії груп у фізиці.

3.5.2. Гармонічні коливання молекул

Молекула як динамічна система. Кожну молекулу можна розглядати як систему частинок, а саме атомних ядер, які пов'язані одне з одним силами різних типів, що намагаються утримати систему в положенні стійкої рівноваги. З різними ядрами молекули пов'язані електронами, які

мають безпосереднє відношення до сил зв'язку в молекулі. Тому, якщо молекула перебуває в полі падаючого електромагнітного випромінювання, то вона різними способами взаємодії з цим полем. Детальне вивчення цієї взаємодії виявляє механізм, за допомогою якого випромінювання і речовина взаємодіють одне з одним. В першу чергу нас будуть цікавити два основних явища, а саме рамановське розсіювання та інфрачервоне випромінювання, оскільки в них найяскравіше проявляються ядерні коливання молекулярних систем. Рамановське розсіювання має додаткові переваги з експериментальної точки зору тому, що його легко спостерігати у видимій частині спектру.

Рамановське розсіювання двохатомної молекули. Вивчаючи найпростіші випадки двохатомної системи, можна легко зрозуміти принципи, що лежать в основі поведінки молекули, яка коливається в полі світлової хвилі. Припустимо, що рівноважна відстань між ядрами дорівнює r_0 . Тоді, якщо сили вважати гармонічними, то кінетичну і потенціальну енергії молекули при зміщенні положення ядер (коли відстань між ними дорівнює $r_0 + q$) можна подати у вигляді:

$$2T = \mu \dot{q}^2, \quad 2V = Kq^2, \quad (3.202)$$

де μ – зведена маса ядер, а K – константа, що характеризує зв'язок між ними, q – нормальна координата. У нашому випадку система в силу фізичних обмежень не може виконувати гармонічні коливання, а тому є потреба введення нормальної координати, яка отримується за допомогою формул зв'язку між узагальненою координатою гармонічного коливання молекули і нормальною координатою, яка дає можливість ангармонічне коливання подати через незалежні гармонічні коливання. В даному випадку є лише одна нормальна координата, а відповідна частота ν нормальних коливань визначається рівністю $4\pi^2\nu^2\mu = K$. Будемо вважати, що падаюче електричне поле $E_0 \sin 2\pi\nu_0 t$ індукує в молекули дипольний момент $\alpha E_0 \sin 2\pi\nu_0 t$. Тоді молекула веде себе як осцилятор Герца і випромінює енергію у вигляді електромагнітних хвиль частоти ν_0 . Якщо α є константою, що не залежить від часу, то нічого іншого і не відбувається. Якщо ж на величину α діють нормальні коливання молекули, то α сама періодично змінюється з нормальною частотою ν . В

цьому випадку дипольний момент осцилятора у будь-який момент часу t визначається за допомогою виразу:

$$E_0 \sin 2\pi\nu_0 t \left[\alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dq} \right)_0 \sigma \cos(2\pi\nu t + \varepsilon) \right], \quad (3.203)$$

де α_0 – дипольний момент, який індукується в молекулі (що перебуває в рівноважному положенні) одиничної напруженості поля падаючої хвилі, σ – амплітуда нормальної координати q , ε – фаза молекулярних коливань, яку можна вважати довільною. Написаний вище вираз (3.203) можна подати у вигляді суми трьох доданків:

$$\alpha_0 E_0 \sin 2\pi\nu_0 t + \left(\frac{d\alpha}{dq} \right)_0 \sigma \frac{E_0}{2} \{ \sin[2\pi(\nu_0 + \nu)t + \varepsilon] + \sin[2\pi(\nu_0 - \nu)t - \varepsilon] \}. \quad (3.204)$$

Перший з них дає випромінювання з частотою падаючого поля (релеєвське розсіювання), а друге і третє – випромінювання з частотами $\nu_0 + \nu$ і $\nu_0 - \nu$ відповідно (рамановське розсіювання).

Оскільки нормальні коливання незалежні, то цю просту картину можна формально поширити і на більш складні молекули, в яких є декілька нормальних коливань і відповідні їм нормальні частоти. Слід відмітити, що необхідною умовою того, щоб взаємодія такого типу між ядерною системою і випромінюванням приводило до рамановського розсіювання, є існування відмінної від нуля похідної $\left(\frac{d\alpha}{dq} \right)_0$.

Інфрачервоне поглинання і дипольний момент. Механізм явища перебування молекули в полі падаючого електромагнітного випромінювання є причиною того, що поле світлової хвилі індукує в молекулі дипольний момент. Періодичні коливання дипольного моменту з частотою світлової хвилі модулюються власними коливаннями молекули відносно рівноважної конфігурації. Зовсім інше спостерігається тоді, коли молекула, крім дипольного моменту, що індукується випромінюванням, має також постійний дипольний момент. У цьому випадку при певних умовах можливе пряме поглинання випромінювання. Постійний дипольний момент є вектором. Якщо в рівноважному стані молекула володіє постійним дипольним моментом, то при обертанні такої молекули (наприклад, HCl) в полі світлової хвилі енергія взаємодії між полем

випромінювання і дипольним моментом періодично змінюється у часі, а це в свою чергу приводить до поглинання. В деяких молекулах (наприклад, у CO_2) у рівноважному стані дипольний момент відсутній, однак він може виникнути при нормальних коливаннях у результаті несиметричного руху ядер. Такий дипольний момент періодично коливається біля нульового значення з частотою нормальних коливань. Поглинання енергії випромінювання можливо також і в цьому випадку. Область поглинутих частот виявляється порядку частоти молекулярних обертань або молекулярних коливань, тобто перебуває в інфрачервоній частині спектру електромагнітних коливань.

Правила відбору для основних частот. Розглянемо переходи, при яких змінюється лише коливальне квантове число молекулярної системи. Потенціальну енергію ми будемо вважати квадратичною функцією атомних зміщень. Для цього необхідно, щоб сили, що повертають частинки в положення рівноваги, були завжди пропорційні цим зміщенням. В даному випадку система здійснює прості гармонічні коливання біля положення рівноваги. Її власні функції містять нормовані поліноми Ерміта, в які нормальні координати входять як параметри. Наявність в спектрі поглинання лінії, пов'язаної з переходом молекули із коливального стану з квантовим числом ν_1 в стан з квантовим числом ν_2 , визначається матричним елементом $M_{\nu_1\nu_2}(Q)$, який дорівнює:

$$\int \Psi_{\nu_1}^*(Q) M(Q) \Psi_{\nu_2}(Q) dQ; \quad (3.205)$$

де $M(Q)$ – оператор, що відповідає лінійній комбінації загального вигляду з компонентів M_x, M_y, M_z вектора дипольного моменту молекули, що має конфігурацію Q . Оскільки оператор залежить лише від координат і не залежить від імпульсів, його можна помістити у будь-яке місце в підінтегральному виразі. Відповідна лінія поглинання наявна в спектрі, якщо інтеграл відмінний від нуля. Якщо інтеграл дорівнює нулю, то лінія відсутня. Функції Ψ_{ν_1} та Ψ_{ν_2} містять поліноми Ерміта відповідних степенів ν_1 та ν_2 . Якщо обмежитися випадком $\Delta\nu = \pm 1$, то числа ν_1 та ν_2 мають різну парність. Тому якщо в результаті перетворення симетрії R

молекули нормальна координата Q змінює знак, то добуток $\Psi_{\nu_1}^*(Q)\Psi_{\nu_2}(Q)$ також змінює знак. Оскільки R – перетворення симетрії, інтеграл в цілому повинен залишитися інваріантним, а отже, оператор $M(Q)$ також повинен змінити знак. Ця умова повинна виконуватися для всіх перетворень R точкової групи G молекули. Звідси ми можемо зробити висновок, що інтеграл (3.205) буде відмінний від нуля лише в тому випадку, якщо $M(Q)$ при різних операціях R групи симетрії перетворюється так само, як і нормальна координата Q .

Таким чином, щоб відшукати нормальні координати, які відповідають лінії поглинання або випромінювання, необхідно знайти лінійні комбінації складових M_x, M_y, M_z , що перетворюються при різних операціях симетрії, як певні сукупності нормальних координат. Інакше кажучи, необхідно відшукати такі незведені по відношенню до перетворень точкової групи сукупності, на які розпадається множина M_x, M_y, M_z . Нескладно помітити, що характер перетворень у представленні, визначеному цією множиною, дорівнює $\pm 1 + 2\cos\varphi$, тому що компоненти вектора M_x, M_y, M_z перетворюються так само як і декартові координати.

Число базисних елементів у кожній незведеній сукупності визначається формулою:

$$\frac{1}{N} \sum h_p (\pm 1 + 2\cos\varphi_R) \chi_j(R). \quad (3.206)$$

Якщо це число дорівнює нулю, то з компонент M неможна скласти лінійної комбінації, що перетворюється за тим самим незведеним представленням Γ_i , що і дана сукупність нормальних координат. Всі такі координати вважаються неактивними. Якщо ж число відмінне від нуля, то існують комбінації складових вектора M , що перетворюються як нормальні координати. В даному випадку всі такі координати вважаються активними. Ця умова є лише необхідною для існування лінії, але не достатньою, оскільки її інтенсивність визначається додатковими факторами. Розклавши $M(Q)$ в ряд Тейлора:

$$M(Q) = M_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_0 Q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2} \right)_0 Q^2 + \dots \quad (3.207)$$

і підставивши розклад у записаний вище інтеграл, знехтуємо членами з вищими степенями. Член, що містить M_0 , внаслідок ортогональності власних функцій дорівнює нулю, а інтенсивність тоді визначається виразом:

$$\int \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_0 Q \Psi_\nu(Q) \Psi_{\nu+1}^*(Q) dQ. \quad (3.208)$$

Підставимо сюди формулу для $\Psi_\nu(Q)$ і скористаємося відомим співвідношенням між поліномами Ерміта:

$$H_{\nu+1} - 2SH_\nu + 2SH_{\nu-1} = 0. \quad (3.209)$$

Після спрощення інтеграл (3.208) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2^\nu \nu! \pi^{1/2} \sqrt{2(\nu+1)}} \int \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_0 \frac{a e^{-s^2/2}}{2} H_{\nu+1}(S) H_{\nu+1}^*(S) dS, \quad (3.210)$$

де нова змінна $S = \frac{Q}{a}$. Підставляючи в (3.207) значення останнього

інтеграла (3.210), отримаємо, що інтенсивність поглинання пропорційна $\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_0^2 (\nu+1)$. Таким чином, лінія поглинання, що відповідає деякому

нормальному коливанню і дозволена правилами відбору, буде мати кінцеву інтенсивність лише в тому випадку, якщо перша похідна за нормальною координатою від дипольного моменту або від будь-якої його компоненти відмінна від нуля.

Компоненти M_x, M_y, M_z перетворюються так само, як і координати x, y, z . Тому, щоб відшукати лінійні комбінації M_x, M_y, M_z , що перетворюються зо даним одномірним незведеним представленням точкової групи молекули, необхідно написати загальний лінійний вираз $ax + by + cz$ і застосувати до нього ті самі прийоми, якими ми користувалися для знаходження нормальних координат. Те ж саме стосується і представлення більшої розмірності.

Так само наявність в спектрі рамановського розсіювання лінії, пов'язаної з переходом молекули із коливального стану з квантовим

числом ν_1 в коливальний стан з квантовим числом ν_2 , визначається виразом:

$$\int \alpha(Q) \Psi_{\nu_1}^*(Q) \Psi_{\nu_2}(Q) dQ; \quad (3.211)$$

де $\alpha(Q)$ – лінійна комбінація компонент $\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}, \alpha_{xy}, \alpha_{yz}, \alpha_{zx}$ симетричного тензора поляризованості молекули в конфігурації Q . Обмежимося випадком $\Delta\nu = \pm 1$. Тоді розмірковуючи так само як і раніше, ми приходимо до висновку, що задача з відшукування нормальних координат, пов'язаних з лініями рамановського спектру, зводиться до задачі знаходження відповідних лінійних комбінацій компонент α_{xx}, α_{yy} і ін., що перетворюються при різних операціях симетрії подібно деяким сукупностям нормальних координат. Для цього необхідно знайти характер перетворення R в представленні певного базису з шести компонент тензора. Якщо R є поворотом на кут φ навколо вісі Z , то компоненти тензора перетворюються за наступним законом:

$$\begin{aligned} R\alpha_{xx} &= \alpha_{xx} \cos^2 \varphi + \alpha_{yy} \sin^2 \varphi + 2\alpha_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ R\alpha_{xy} &= -\alpha_{xx} \sin \varphi \cos \varphi + \alpha_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2\alpha_{yy} \sin \varphi \cos \varphi \\ R\alpha_{xz} &= \alpha_{xz} \cos \varphi + \alpha_{yz} \sin \varphi \\ &\dots\dots\dots \\ R\alpha_{zz} &= \alpha_{zz} \end{aligned} \quad (3.212)$$

Якщо ж R – дзеркальний поворот на кут φ , то в цих рівняннях необхідно змінити знаки у членів з α_{xz}, α_{yz} .

З цих співвідношень випливає, що характер перетворення R в наведеному представленні, визначеному компонентами тензора поляризованості, дорівнює $2\cos\varphi_R (\pm 1 + 2\cos\varphi_R)$. Знак «+» або «-» залежить від того, чи R є простим або дзеркальним поворотом. Число базисних елементів у кожній незведеної сукупності визначається для нашого випадку формулою:

$$\frac{1}{N} \sum h_p 2\cos\varphi_R (\pm 1 + 2\cos\varphi_R) \chi_j(R). \quad (3.213)$$

Якщо це число дорівнює нулю, то з компонент α не можна скласти лінійної комбінації, що перетворюється за тим же незведеним

представленням Γ_i , що і дана сукупність нормальних координат. Всі такі координати вважаються неактивними в спектрі рамановського розсіювання. Якщо це число не дорівнює нулю, то можна знайти комбінації компонент α , що перетворюються як нормальні координати. В такому випадку всі нормальні координати вважаються активними. Як і при інфрачервоному поглинанні. Інтенсивність лінії рамановського спектру визначається додатковими факторами. Підставимо в інтеграл розклад $\alpha(Q)$ в ряд Тейлора:

$$\alpha(Q) = \alpha_0 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\right)_0 Q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial Q^2}\right)_0 Q^2 + \dots \quad (3.214)$$

і знехтуємо членами вищих степенів. Як і раніше, доданок, що містить α_0 , для простих гармонійних коливань перетворюється в нуль. Інтенсивність визначається виразом:

$$\int \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\right)_0 Q \Psi_\nu(Q) \Psi_{\nu+1}^*(Q) dQ \quad (3.215)$$

і так само, як і при інфрачервоному поглинанні, пропорційна

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\right)_0^2 (\nu+1). \quad (3.216)$$

Лінія рамановського спектру, дозволена правилами відбору, буде мати кінцеву інтенсивність лише в тому випадку, якщо перша похідна від поляризованості за нормальною координатою відмінна від нуля. Лінійні комбінації компонент тензора, що перетворюються за даним незведеним представленням точкової групи молекул, шукають так само, як і комбінації компонент вектора. Різниця полягає лише в тому, що тепер необхідно написати спочатку загальний однорідний вираз другого степеню в координатах x, y, z оскільки у такому разі ми маємо справу із симетричним тензором.

3.5.3. Правила відбору операторів квантової механіки

Атом у зовнішньому полі. Ефект Зеємана.

Розглянемо рух електрона в електромагнітному полі, враховуючи наявність спіна електрона. Електрон має спіновий магнітний момент:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{M}_s. \quad (3.217)$$

Завдяки наявності $\vec{\mu}_s$ електрон в зовнішньому магнітному полі $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ одержує додаткову потенціальну енергію:

$$\Delta U = -(\vec{\mu}_s \vec{B}). \quad (3.218)$$

Оператор цієї енергії:

$$\Delta \hat{U} = \frac{e}{m} (\hat{\vec{\mu}}_s \hat{\vec{B}}) = \frac{e\hbar}{2m} (\hat{\vec{\sigma}} \vec{B}) = \frac{e\hbar}{2m} (\hat{\sigma}_x B_x + \hat{\sigma}_y B_y + \hat{\sigma}_z B_z). \quad (3.219)$$

А тому гамільтоніан \hat{H} електрона в зовнішньому електромагнітному полі з урахуванням спіну повинен мати вигляд:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{P}} + e\vec{A})^2 - e\phi + U + \frac{e\hbar}{2m} (\hat{\vec{\sigma}} \vec{B}), \quad (3.220)$$

де e – заряд електрона.

Рівняння Шредінгера для такого електрона не підходить, тут слід використати рівняння Паулі:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{P}} + e\vec{A})^2 \Psi - e\phi \Psi + U \Psi + \frac{e\hbar}{2m} (\hat{\vec{\sigma}} \vec{B}) \Psi, \quad (3.221)$$

причому $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ – двох компонентна функція (рівняння Паулі).

Розглянемо атом у зовнішньому магнітному полі (однорідне поле $\vec{B} \uparrow \uparrow O_z$). Це означає, що $B_x = B_y = 0$ і $B_z = B$. Поле однорідне, тоді для такого поля оберемо векторний потенціал $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B} \vec{r}]$. Отже:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ B_x & B_y & B_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & B \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 \frac{1}{2} B_y + \vec{e}_2 \frac{1}{2} B_x. \quad (3.222)$$

Таким чином:

$$A_x = -\frac{1}{2} B_y, \quad A_y = \frac{1}{2} B_x, \quad A_z = 0. \quad (3.223)$$

Тепер потрібно записати рівняння Паулі та, розв'язавши його.

Обмежимося пошуком лише енергії E атома в зовнішньому магнітному полі, виконавши наближений класичний розрахунок цієї

енергії, враховуючи квантові особливості атома і квантовий характер взаємодії електрона в магнітному полі.

Візьмемо атом у нормальному стані. Тоді такий атом може мати магнітний момент, обумовлений спіновими і орбітальними магнітними моментами електронів. Його величина рівна:

$$\mu_J = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}, \quad (3.224)$$

де $g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ – фактор Ланде, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ – магнетон

Бора, J – повне квантове число ($|L-S| \leq J \leq |L+S|$), L – повне орбітальне число, S – повне спінове число атомів.

Проекція $\vec{\mu}_J$ на довільний напрямок (у нашому випадку навись Oz) дорівнює:

$$\mu_{Jz} = \mu_B g_J m_J, \quad (3.225)$$

де $m_J = -J, -J+1, \dots, J$, тобто всього $2J+1$ значень.

Якщо атом мав енергію E_0 , тоді в зовнішньому слабкому магнітному полі він матиме енергію:

$$E = E_0 + \Delta U,$$

де $\Delta U = -(\vec{\mu}_J \vec{B}) = -\mu_{Jz} \cdot B = -\mu_B g_J m_J B$. Тому

$$E = E_0 - \mu_B g_J m_J B. \quad (3.226)$$

При переході електронів атома зі стану 1 в стан 2 ми маємо появу чи поглинання кванта енергії, а саме:

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21} = E_{02} - E_{01} + \mu_B (g_{J1} m_{J1} - g_{J2} m_{J2}) B. \quad (3.227)$$

Але $E_{02} - E_{01} = \hbar\omega_0$, де $\hbar\omega_0$ – квант енергії, що поглинається чи випромінюється атомом при відсутності поля. Отже,

$$\omega_{21} = \omega_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} (g_{J1} m_{J1} - g_{J2} m_{J2}) B. \quad (3.228)$$

Таким чином, за наявності поля (слабке поле) спектральні лінії випромінювання і поглинання атома розщеплюються. Величина розщеплення $\Delta\omega = \omega_{21} - \omega_0$:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B}{\hbar} (g_{J1} m_{J1} - g_{J2} m_{J2}) B = (g_{J1} m_{J1} - g_{J2} m_{J2}) \frac{eB}{2m} = (g_{J1} m_{J1} - g_{J2} m_{J2}) \omega_L \quad (3.229)$$

де $\omega_L = \frac{eV}{2m}$ – ларморівська частота.

Висновок: у слабкому полі спектральні лінії атома розщеплюються на кілька близьких ліній, це явище називається *аномальним ефектом Зеємана*, причому розщеплення це менше природньої тонкої структури рівнів.

Наприклад, дві лінії жовтого дублета спектру *Na* розщеплюються під дією слабого поля на 10 близьких ліній.

Якщо тепер взяти такий атом, у якого $S=0$ (*He, Ne, Ag, Kr, Xe, Rn* в першу чергу), то $J=L$ і $g_J=1$. Тоді можна, використавши (3.229), записати, що:

$$\Delta\omega = (g_{J_1}m_{J_1} - g_{J_2}m_{J_2})\omega_L = (m_{J_1} - m_{J_2})\omega_L.$$

Експерименти і обчислення показують, що число m_J може змінюватися лише так:

$$\Delta\omega = 0, \pm 1. \tag{3.230}$$

Отже:

$$\Delta\omega = \begin{cases} \omega_L \\ 0 \\ -\omega_L \end{cases}$$

Розщеплення в такому разі дає лише три близькі лінії:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \omega_L \\ \omega_2 = \omega_0 \\ \omega_3 = \omega_0 + \omega_L \end{cases} \tag{3.231}$$

Це так званий *нормальний ефект Зеємана*.

Відзначимо, що при сильних полях спін-орбітальний зв'язок руйнується зовнішнім полем і тоді аномальний ефект Зеємана переходить в нормальний (це так званий *ефект Пашена-Бака*).

Пара- і діамагнітні властивості атомів і молекул.

Для того, щоб віднести атом чи молекулу до діа- чи парамагнетиків, необхідно обчислити величину магнітного моменту атома. Магнітний момент пов'язаний з енергією атома в магнітному полі. Дійсно, коли магнітний момент атома $\vec{\mu}_a$, то в зовнішньому полі у функції Гамільтона з'явиться доданок подібний до (3.218) і (3.219):

$$\Delta \hat{U} = -(\vec{\mu}_a \vec{B}) = -(\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z).$$

З цього співвідношення очевидно, що, наприклад, $\mu_z = -\frac{\partial H}{\partial B_z}$. Для

квантової системи $\hat{\mu}_z = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial B_z}$.

Якщо взяти атом у зовнішньому магнітному полі, то оператор Гамільтона має вигляд подібний до (3.220):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{P}} + e\vec{A} \right)^2 - e\phi + U + \frac{e}{m} \left(\hat{\vec{M}}_S \vec{B} \right), \quad (3.232)$$

де $e\phi = 0$ $U = 0$.

Візьмемо поле в напрямі вісі Oz : $B_x = B_y = 0$ і $B_z = B$. Поле однорідне і справджуються формули (3.222) і (3.223), враховуючи їх оператор Гамільтона в (3.232) набуде вигляду:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{P}_x + eA_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{P}_y + eA_y \right)^2 + \frac{e}{m} \left(\hat{M}_{S_z} B \right) + \frac{1}{2m} P_z^2. \quad (3.233)$$

А магнітний момент:

$$\hat{\mu}_z = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial B_z} = -\frac{2}{2m} \left(\hat{P}_x + eA_x \right) e \frac{\partial A_x}{\partial B} - \frac{2}{2m} \left(\hat{P}_y + eA_y \right) e \frac{\partial A_y}{\partial B} + \frac{e}{m} \hat{M}_{S_z},$$

якщо врахувати (3.223), тоді

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_z &= -\frac{2e}{2m} \left(\hat{P}_x + eA_x \right) \frac{1}{2} y - \frac{2e}{2m} \left(\hat{P}_y + eA_y \right) \frac{1}{2} z + \frac{e}{m} \hat{M}_{S_z} = \\ &= -\frac{e}{2m} \left(\hat{P}_x y + \hat{P}_y x \right) + e \left(A_y x - A_x y \right) - \frac{e}{m} \hat{M}_{S_z}, \end{aligned}$$

де $x\hat{P}_y - y\hat{P}_x = \hat{M}_{L_z}$, $A_x = -\frac{1}{2} B_y$, $A_y = -\frac{1}{2} B_x$.

Отже, остаточно:

$$\hat{\mu}_z = -\frac{e}{2m} \left(\hat{M}_{L_z} + 2\hat{M}_{S_z} \right) - \frac{e^2 B}{4m} (x^2 + y^2). \quad (3.234)$$

Перша частина (3.234):

$$\hat{\mu}'_z = -\frac{e}{2m} \left(\hat{M}_{L_z} + 2\hat{M}_{S_z} \right). \quad (3.235)$$

Цей оператор має власне значення $\mu_{zJ} = g_J m_J \mu_B$, що нам уже зустрічалося. Цей магнітний момент називають *парамагнітним моментом атома*, він існує і тоді, коли зовнішнє поле $\vec{B} = 0$.

Друга частина (3.234):

$$\hat{\mu}_z'' = -\frac{e^2(x^2 + y^2)}{4m} \cdot B; \quad (3.236)$$

його власне значення:

$$\mu_z'' = -\frac{e(x^2 + y^2)}{4m} \cdot B. \quad (3.237)$$

Цей магнітний момент існує лише тоді, коли $B \neq 0$. Він завжди спрямований проти поля зовнішнього поля і вважається *діамагнітним моментом атома*.

Експериментальні дослідження показують, що $|\mu_z''| < |\mu_z'|$.

Теорія добре пояснює магнітні властивості атома і підтверджується експериментом.

Правила відбору для дипольного випромінювання.

Коли атом перебуває в електричному полі і ми маємо випадок, коли деякі з електричних моментів D_{mn} дорівнюють нулю, то перехід в атомі $m \rightarrow n$ під дією світла не реалізується і відповідна частота ω_{mn} не поглинається і не випромінюється, не дивлячись на те, що рівні E_m і E_n існують. В такому випадку говорять про правило відбору, тобто про правило, яке якби відбирає з числа всіх можливих переходів $E_m \leftrightarrow E_n$ лише деякі, що дійсно реалізуються. Слід мати на увазі, що перехід неможливий лише під дією таких збурень W , матричні елементи яких пропорційні D_{mn} . Так, наприклад, який-небудь перехід $m \leftrightarrow n$, неможливий під дією світла, цілком може реалізовуватися в результаті зіткнення з електроном.

Розглянемо як приклад правило відбору для осцилятора.

Нехай ми маємо осцилятор масою μ , власною частотою ω_0 і зарядом e . Квантові рівні E_n такого осцилятора визначаються формулою:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Елементи матриці електричного моменту повинні дорівнювати:

$$D_{mn} = ex_{mn}e^{i\omega_{mn}t} = ex_{mn}e^{i\omega_0(m-n)t},$$

де x_{mn} величина елемента матриці координати. Елементи матриці координати відмінні від нуля лише для $m = n \pm 1$. Тому ми отримуємо правило відбору:

$$D_{mn} \neq 0 \text{ лише коли } m = n \pm 1, \quad (3.238)$$

а відповідні частоти будуть дорівнювати

$$\omega_{mn} = \omega_0(m - n) = \pm\omega_0, \quad (3.239)$$

тобто власній частоті осцилятора.

Скориставшись формулою для матриці координати і позначивши

$D_0 = ex_0 = e\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}$, ми можемо записати матрицю $D(t)$ у гейзенберзькому

представленні вигляду:

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & D_0 e^{i\omega_0 t} \sqrt{1/2} & 0 & 0 & \dots \\ D_0 e^{i\omega_0 t} \sqrt{1/2} & 0 & D_0 e^{i\omega_0 t} \sqrt{2/2} & 0 & \dots \\ 0 & D_0 e^{i\omega_0 t} \sqrt{2/2} & 0 & D_0 e^{i\omega_0 t} \sqrt{3/2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким чином осцилятор може поглинати і випромінювати лише власну частоту ω_0 (так само як і в класичній механіці).

Встановлене правило відбору справджується не завжди. Наші обчислення взаємодії атома зі світлом базувались на припущенні, що довжина хвилі світла λ набагато більша розмірів атомної системи a . Лише за цієї умови взаємодія зі світлом виражається через матрицю електричного моменту. Розміри осцилятора визначаються його

амплітудою. За порядком величини вони рівні $\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}} \sqrt{n + \frac{1}{2}}$. Тому правило відбору (3.238) можна застосовувати лише за умови

$$\lambda \gg \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}} \sqrt{n + \frac{1}{2}},$$

тобто для не дуже великих амплітуд коливань.

Варто відмітити, що реальні осцилятори при великих амплітудах коливань (більше n) стають ангармонічними, і це вже саме по собі слугує причиною порушення простого правила відбору.

Запитання для самоконтролю:

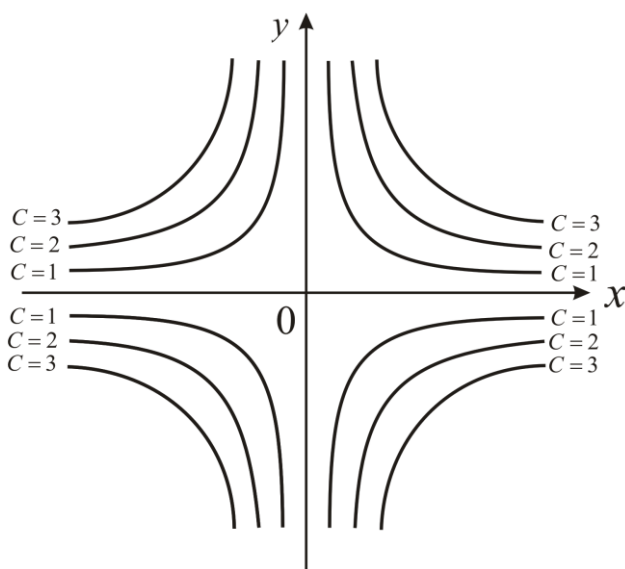
1. Що таке теорія груп? Що називають групою?
2. Де застосовується теорія груп у фізиці?
3. Чому дорівнює спіновий магнітний момент електрона? Запишіть математичний вигляд гамільтоніана електрона в зовнішньому електромагнітному полі з урахуванням спіну.
4. Запишіть рівняння Паулі.
5. Чому дорівнює магнітний момент атома?
6. Що розуміють під аномальним і нормальним ефектом Зеемана?
7. Що називають ефектом Пашена-Бака?
8. Назвіть пара- і діамагнітні властивості атомів і молекул.
9. Що називають правилом відбору?
10. Поясніть правила відбору для дипольного випромінювання.

ПРАКТИКУМ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

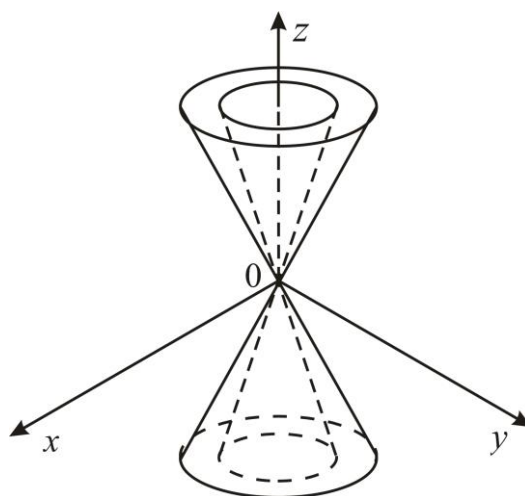
Тема № 1. Скалярне поле. Поверхні рівня. Градієнт.

Приклад 1.1. Відшукати лінію рівня плоского поля $u = xy$.

Розв'язок. Лінії рівня визначають рівнянням $xy = C$ і визначають собою рівносторонні гіперболи. При $C=0$ лінією рівня є сукупність координатних осей Ox та Oy . На рисунку зображені лінії рівня, що



До прикладу 1.1.



До прикладу 1.2.

відповідають значенням $C = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Приклад 1.2. Відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Розв'язок. Поверхні рівня визначають рівнянням:

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = C.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = a^2,$$

де $a = \operatorname{tg} c$, $-\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}$. З рисунка ми бачимо, що поверхнями рівня є колові конуси $x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$ з віссю Oz .

Приклад 1.3. Відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \frac{1}{2x + 3y - 4z + 1}.$$

Розв'язок. Скалярне поле визначене для всіх точок простору, крім точок, що розташовані на площині:

$$2x + 3y - 4z + 1 = 0.$$

Поверхні рівня визначають рівнянням:

$$2x + 3y - 4z + 1 = C,$$

що описує сімейство паралельних площин:

$$2x + 3y - 4z + C_1 = 0, \quad (C_1 = 1 - C).$$

Приклад 1.4. Відшукати поверхні рівня сферично симетричного поля:

$$u = \cos r, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Розв'язок. Очевидно, що всі сфери з центром на початку координат є поверхнями рівня (при $r = \operatorname{const}$ і $u = \operatorname{const}$). Для знаходження не просто поверхонь, на яких $u = \operatorname{const}$, а всієї множини точок із заданим значенням поля, треба розв'язати рівняння $\cos r = C$ ($-1 \leq C \leq 1$).

Маємо:

$$r = \pm \arccos C + 2\pi n, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Не враховуючи від'ємні значення r , знайдемо, що множина точок, для яких значення поля дорівнює C , складається з сукупності сфер радіусом $\arccos C$, $\pm \arccos C + 2\pi n$, де $n = 1, 2, 3, \dots$. Центри всіх сфер співпадають з початком координат.

Приклад 1.5. Відшукати поверхні рівня скалярного поля $u(P) = (\vec{A}, \vec{r})$, де $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ – постійний вектор, а $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор точки P .

Розв'язок. Розкриваючи скалярний добуток (\vec{A}, \vec{r}) і позначаючи константу в формулі $u(x, y, z) = C$ ($C = \text{const}$) через D , отримаємо:

$$ax + by + cz = D.$$

Таким чином, поверхнями рівня є площини, перпендикулярні вектору \vec{A} .

Приклад 1.6. Для скалярного поля $u(P) = \varphi(x^2 + y^2)$, що розглядається на площині і в просторі, відшукати лінії і відповідні поверхні рівня.

Розв'язок. Функція $u(P) = \varphi(x^2 + y^2)$ описує плоске скалярне поле. Позначаючи відстань точки P від початку координат через $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, отримаємо:

$$u(P) = \varphi(\rho^2).$$

Для поля, заданого на площині, рівняння $\varphi(\rho^2) = C$ визначає лінії рівня у вигляді кіл із спільним центром на початку координат. Для поля, заданого в трьохмірній області, рівняння $\varphi(\rho^2) = C$ визначає поверхні рівня у вигляді колових циліндрів із спільною віссю Oz . Такі поля називають циліндричними.

Приклад 1.7. Довести, що скалярне поле $u(P) = |\vec{A}|^2 \vec{r}^2 - (\vec{A}, \vec{r})^2$, де $\vec{A} = \text{const}$, є циліндричним.

Розв'язок. Позначимо $|\vec{A}| = a$, тоді, як видно з рисунку:

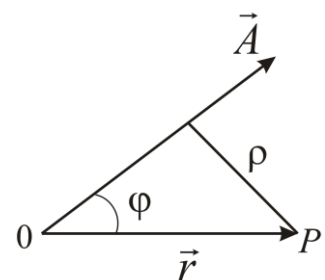
$$u(P) = a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2 \varphi = a^2 r^2 (1 - \cos^2 \varphi) = a^2 r^2 \sin^2 \varphi = a^2 \rho^2.$$

Таким чином, значення поля визначається лише відстанню точки P від прямої, що проходить через початок координат у напрямку вектора \vec{A} .

Рівняння $a^2 r^2 = C$ визначає поверхні рівня, що є коловими циліндрами з віссю, яка співпадає з вектором \vec{A} . Отже, дане поле є циліндричним.

Задачу можна розв'язати інакше.

Використовуючи формулу векторної алгебри:



До прикладу 1.7

$$([\vec{A}, \vec{B}], [\vec{C}, \vec{D}]) = (\vec{A}, \vec{C})(\vec{B}, \vec{D}) - (\vec{A}, \vec{D})(\vec{B}, \vec{C}),$$

знайдемо:

$$|\vec{A}|^2 r^2 - (\vec{A}, \vec{r})^2 = ([\vec{A}, \vec{r}])^2 = |[\vec{A}, \vec{r}]|^2 = a^2 r^2 \sin^2 \varphi = a^2 \rho^2.$$

Приклад 1.8. Відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u(P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2}.$$

Розв'язок. Очевидно, що функція $u(P)$ являє собою суму відстаней точки $P(x, y, z)$ до точок $N_1(0,0,0)$ та $N_2(8,0,0)$.

Тоді рівняння $u(x, y, z) = C$ ($C = \text{const}$) запишеться у вигляді:

$$N_1P + N_2P = C \quad (C \geq N_1N_2 = 8).$$

В будь-якій площині, що містить відрізок N_1N_2 це співвідношення визначає еліпс (при $C > N_1N_2$) з фокусами N_1 та N_2 і великою піввіссю, що рівна $\frac{C}{2}$. При $C = N_1N_2$ співвідношення визначає більшість точок відрізка N_1N_2 . Таким чином, при $C > N_1N_2$ поверхнею рівня є еліпсоїд, що утворюється обертанням еліпса з фокусами N_1 та N_2 навколо фокальної вісі. Еліпсоїд такого типу називають витягнутим еліпсоїдом обертання.

Розглянемо конкретний випадок. Нехай, наприклад, $C = 10$, тоді поверхню рівня можна записати у вигляді:

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2 + z^2}{9} = 1,$$

мала піввісь відповідного еліпсу дорівнює:

$$\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{N_1N_2}{2}\right)^2} = \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 3.$$

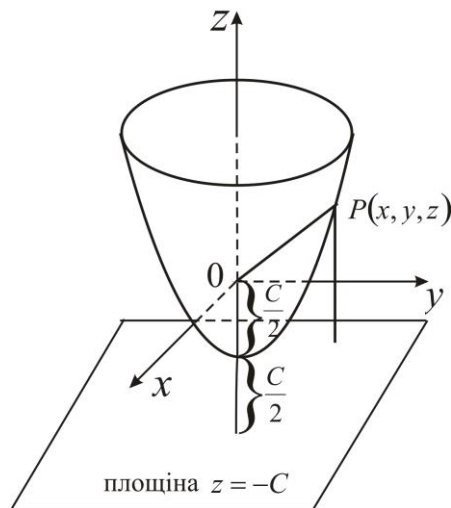
Приклад 1.9. Відшукати поверхню рівня скалярного поля:

$$u(P) = r - z, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Розв'язок. Рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z + C.$$

Оскільки $C = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z$, то $C \geq 0$. Випадок $C = 0$ нецікавий: відповідна поверхня рівня вироджується у току $O(0,0,0)$. Отже, $C > 0$. Очевидно також $z + C \geq 0$ і, отже, величину $z + C = z - (-C)$ можна розглядати як відстань точки $P(x, y, z)$, що знаходиться на поверхні рівня, від площини $z = -C$. Таким чином, поверхні рівня являють собою множену точок, що рівновіддалені від початку координат і площини $z = -C$. Звідси видно, що поверхні рівня є параболоїдами, що отримані в результаті обертання парабол (що лежать, наприклад, в площині yOz з фокусами на початку координат) відносно своїх осей, що співпадають з віссю Oz .



До прикладу 1.9

Нагадаємо, що парабола визначається як геометричне місце точок на площині, що рівновіддалені від деякої прямої (директриси) і точки (фокуса), що не лежить на цій прямій; парабола і фокус розташовані з однієї сторони від директриси.

Примітка. Очевидно, вірне і обернене: будь-який параболоїд обертання після вибору відповідним чином системи координат можна розглядати як поверхню рівня скалярного поля $u = r - z$.

Приклад 1.10. Відшукати градієнт скалярних полів:

а) $u(P) = x$; б) $u(P) = y$; в) $u(P) = z$.

Розв'язок. Застосуємо формулу $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$:

$$\text{а) } \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} x = \frac{\partial x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial x}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial x}{\partial z} \vec{k} = \vec{i}.$$

Аналогічно: б) $\vec{\nabla} u = \vec{j}$; в) $\vec{\nabla} u = \vec{k}$.

Приклад 1.11. Відшукати градієнт скалярного поля

$u(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точці $M(2; 1)$.

Розв'язок. Згідно аналітичного означення градієнта скалярного поля $u(x, y)$ на площині xOy запишемо:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}.$$

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ у зазначеній точці:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}} = \frac{1}{3},$$

тоді:

$$\text{grad } u = \frac{2}{3} \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j}.$$

Приклад 1.12. Відшукати $\text{grad}(\vec{c}, \vec{r})$, де \vec{c} – сталий вектор.

Розв'язок. Нехай $\vec{c} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$; тоді:

$$(\vec{c}, \vec{r}) = \alpha x + \beta y + \gamma z;$$

$$\text{grad}(\vec{c}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{c}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha \vec{\nabla}x + \beta \vec{\nabla}y + \gamma \vec{\nabla}z.$$

Враховуючи, що $\vec{\nabla}x = \vec{i}$, б) $\vec{\nabla}y = \vec{j}$, в) $\vec{\nabla}z = \vec{k}$, отримаємо (приклад 1.10):

$$\text{grad}(\vec{c}, \vec{r}) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} = \vec{c}.$$

Приклад 1.13. Визначити одиничний вектор нормалі до циліндра:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Розв'язок. За формулою:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|},$$

де $u = F(x, y, z)$.

Для відшукання $\text{grad } u$ обчислимо частинні похідні функції $u(x, y, z) = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Тоді:

$$\operatorname{grad} u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}, \quad |\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r.$$

Отже,

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r}.$$

Приклад 1.14. Доведіть формулу $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$.

Розв'язок. Зі змісту виразу $\vec{\nabla}uv$ маємо:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}uv &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) uv = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{i}uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{j}uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{k}uv) = \\ &= \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{k} = \\ &= v \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i}u + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}u + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}u \right) + u \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i}v + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}v + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}v \right) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v. \end{aligned}$$

Приклад 1.15. Відшукати $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

Розв'язок. Застосувавши формулу $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r}$, знаходимо:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

або

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}^0.$$

Приклад 1.16. Відшукати градієнт скалярного поля $u(P) = |\vec{r} - \vec{\rho}|$, де $\vec{\rho} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k}$ – радіус-вектор деякої фіксованої точки $N(\xi, \eta, \zeta)$.

Розв'язок. Величина $|\vec{r} - \vec{\rho}| = r_{NP}$ є відстань між точками N і P , тобто

$$|\vec{r} - \vec{\rho}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Використовуючи формулу $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{\rho}| &= \frac{2(x-\xi)}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\vec{i} + \frac{2(y-\eta)}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\vec{j} + \\ &+ \frac{2(z-\zeta)}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\vec{k} = \frac{(x-\xi)\vec{i}+(y-\eta)\vec{j}+(z-\zeta)\vec{k}}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} = \frac{\vec{r}_{NP}}{r_{NP}} = \vec{r}_{NP}^0, \end{aligned}$$

де \vec{r}_{NP} – вектор NP , а \vec{r}_{NP}^0 – одиничний вектор цього напрямку. Легко помітити, що отриманий результат є узагальненням формули $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Приклад 1.17. Відшукати градієнт скалярного поля

$$u(P) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_2|},$$

де $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ – радіус-вектори фіксованих точок N_1 та N_2 .

Розв'язок. Використовуючи формулу $\vec{\nabla}F(u) = F'(u)\vec{\nabla}u$ і розв'язок попереднього прикладу, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_2|}\right) &= \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_1|} + \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}_2|} = \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_{N_1P}|} + \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}_{N_2P}|} = \\ &= -\frac{1}{|\vec{r}_{N_1P}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{N_1P}}{|\vec{r}_{N_1P}|} - \frac{1}{|\vec{r}_{N_2P}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{N_2P}}{|\vec{r}_{N_2P}|} = -\frac{\vec{r}_{N_1P}}{|\vec{r}_{N_1P}|^3} - \frac{\vec{r}_{N_2P}}{|\vec{r}_{N_2P}|^3}. \end{aligned}$$

Приклад 1.18. Відшукати градієнт скалярного поля $u(P) = \frac{(\vec{C}, \vec{r})}{r}$, де \vec{C}

– сталий вектор.

Розв'язок. Використовуючи формули $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$, $\text{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ та результат прикладу 1.12, отримаємо:

$$\vec{\nabla}\frac{(\vec{C}, \vec{r})}{r} = (\vec{C}, \vec{r})\vec{\nabla}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\vec{\nabla}(\vec{C}, \vec{r}) = (\vec{C}, \vec{r})\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{r}\vec{C} = \frac{(\vec{C}, \vec{r})}{r^3}\vec{r} + \frac{\vec{C}}{r}.$$

Приклад 1.19. Відшукати градієнт скалярного поля $u(P) = (\vec{r}, \vec{a}(r))$, де $\vec{a}(r)$ – вектор, що залежить лише від $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тобто $\vec{a}(r) = A(r)\vec{i} + B(r)\vec{j} + C(r)\vec{k}$.

Розв'язок. Розпишемо скалярний добуток:

$$(\vec{r}, \vec{a}(r)) = xA(r) + yB(r) + zC(r).$$

Використовуючи формули $\vec{\nabla}(\alpha u + \beta v) = \alpha \vec{\nabla}u + \beta \vec{\nabla}v$, $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$, $\vec{\nabla}F(u) = F'(u)\vec{\nabla}u$, $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) і результат прикладу 1.10, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{r}, \vec{a}(r)) &= \vec{\nabla}(xA(r) + yB(r) + zC(r)) = \\ &= A(r)\vec{\nabla}x + x\vec{\nabla}A(r) + B(r)\vec{\nabla}y + y\vec{\nabla}B(r) + C(r)\vec{\nabla}z + z\vec{\nabla}C(r) = \\ &= A(r)\vec{i} + B(r)\vec{j} + C(r)\vec{k} + xA'(r)\frac{\vec{r}}{r} + yB'(r)\frac{\vec{r}}{r} + zC'(r)\frac{\vec{r}}{r} = \vec{a}(r) + \frac{(\vec{r}, \vec{a}'(r))}{r}\vec{r}, \end{aligned}$$

де $\vec{a}'(r)$ – похідна вектора-функції $\vec{a}(r)$ по аргументу r .

Приклад 1.20. Внутрішня поверхня видовженого еліпсоїда обертання дзеркальна. Довести, що будь-який промінь, що виходить з фокусу N_1 , після відбивання від поверхні пройде через фокус N_2 .

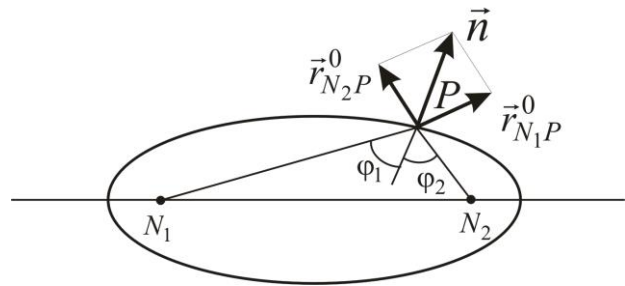
Розв'язок. Нехай P – точка еліпсоїда, в яку попав промінь, що йде із фокуса N_1 . Проведемо площину через фокальну вісь еліпсоїда і точку P і знайдемо вектор нормалі до еліпсоїда в цій точці. Еліпсоїд можна розглядати як поверхню рівня скалярного поля

$$u(P) = N_1P + N_2P = |\vec{r} - \vec{\rho}_1| + |\vec{r} - \vec{\rho}_2|,$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки P , а $\vec{\rho}_1$ та $\vec{\rho}_2$ – відповідно радіус-вектори точок N_1 та N_2 (порівняти з прикладом 1.8). В якості нормального вектора візьмемо

$$\text{grad } u(P) = \vec{r}_{N_1P}^0 + \vec{r}_{N_2P}^0,$$

де $\vec{r}_{N_1P}^0$, $\vec{r}_{N_2P}^0$ – одиничні вектори напрямлені від N_1 до P і від N_2 до P (див. приклад 1.16). Таким чином, проведена площина містить відрізок

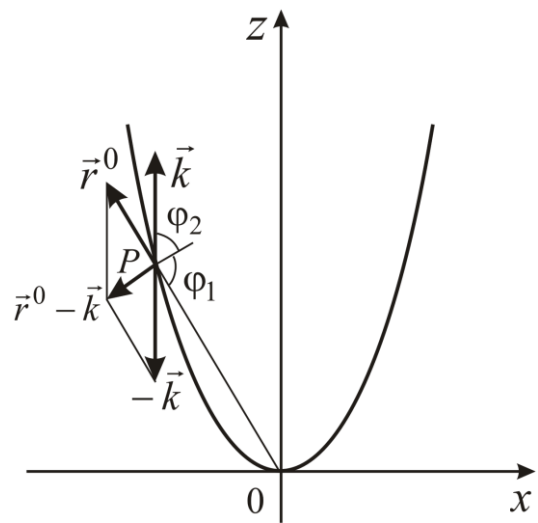


До прикладу 1.20

N_1P і нормаль до еліпсоїда в точці P . Отже, промінь після відбивання в точці P залишиться в цій площині. На рисунку показано переріз еліпсоїда цією площиною. Так як нормальний вектор є сумою одиничних векторів, він ділить кут між ними навпіл ($\varphi_1 = \varphi_2$), і, отже, промінь після відбивання в точці P піде у напрямку PN_2 .

Приклад 1.21. Нехай внутрішня поверхня параболоїда обертання дзеркальна. Довести, що промінь, що виходить з фокуса, після відбивання від параболоїда піде паралельно його вісі, і будь-який промінь, паралельний його вісі, що падає на внутрішню поверхню, після відбивання пройде через фокус.

Розв'язок. Помістимо початок координат у фокус параболоїда (фокус параболи, за допомогою обертання якої він утворився). Направимо вісь Oz вздовж вісі параболоїда в бік внутрішньої його частини. При вказаному виборі осей координат параболоїд є поверхнею рівня



До прикладу 1.21.

скалярного поля $u(P) = r - z$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (дивитись приклад 1.9).

Нехай P – точка параболоїда, в яку попав промінь, що виходить з фокуса (початок координат). Проведемо площину через вісь параболоїда і точку P . В якості вектора нормалі в точці P візьмемо:

$$\text{grad } u(P) = \vec{\nabla}(r - z) = \vec{\nabla}r - \vec{\nabla}z = \vec{r}^0 - \vec{k},$$

де \vec{r}^0 – одиничний вектор рівний, $\frac{\vec{r}}{r}$ (див. формулу $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) і приклад 1.10). Проведена площина містить відрізок OP і вектор, нормальний до параболоїда в точці P (адже \vec{r}^0 і \vec{k} належать площині). Отже, промінь, що йде у напрямку OP , після відбивання параболоїда залишиться в цій площині. розглянемо переріз параболоїда вказаною площиною відповідно до рисунку. Оскільки нормальний вектор

є сумою векторів однакової довжини, він ділить кут між ними пополам ($\varphi_1 = \varphi_2$), і, отже, промінь після відбивання в точці P піде у напрямку вектора \vec{k} (паралельно вісі Oz).

Обернене доводиться аналогічно, однак результат зрозумілий і без доведення в силу відомої з фізики оборотності падаючого і відбитого променів.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Відповідь: область визначення – коло $x^2 + y^2 \leq 9$; лінії рівня – сімейство концентричних кіл $x^2 + y^2 = 9 - c^2$, ($|c| \leq 3$).

2. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \frac{e}{r} \text{ (потенціал електричного поля).}$$

Відповідь: поле визначене в усьому просторі, за виключенням точки $r = 0$; поверхні рівня – сфери $r = c$ з центром в точці, де розташований заряд.

3. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Відповідь: поле визначено в області $y^2 + z^2 - x^2 \geq 0$; поверхні рівня – колові конуси $a^2(y^2 + z^2) - x^2 = 0$ ($|a| \leq 1$).

4. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \sin(x^2 - y^2).$$

Відповідь: лінії рівня $u = C$ являють собою сімейство гіпербол $x^2 - y^2 = \arcsin C(-1)^n + \pi n$, де n – будь-яке ціле число (прикладом 1.4).

5. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля:

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Відповідь: поле визначене в усьому просторі, за виключенням площини $z=0$; поверхні рівня – параболоїди обертання $x^2 + y^2 = Cz$, ($-\infty < C < \infty$).

6. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля: $u = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, де $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ – змішаний добуток векторів; $\vec{a} = const$, $\vec{b} = const$, вектори \vec{a} і \vec{b} не колінеарні.

Відповідь: паралельні площини, що містять вектори \vec{a} і \vec{b} .

Вказівка. Скористаємося рівністю $\vec{a}\vec{b}\vec{r} = \vec{r}\vec{a}\vec{b} = (\vec{r}, [\vec{a}, \vec{b}])$ (порівн. з прикладом 1.5).

7. Встановити область визначення і відшукати поверхні рівня скалярного поля: $u(P) = N_1P - N_2P$, де N_1, N_2 – фіксовані точки, що не співпадають (порівн. з прикладом 1.8).

Відповідь: двополосні гіперболоїди обертання. Ці гіперболоїди отримані обертанням гіпербол з фокусами N_1 та N_2 . Гіперболоїди лежать в якій-небудь площині, що проходить через пряму N_1N_2 , і обертаються відносно цієї прямої.

8. Відшукати градієнт скалярного поля:

а) $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 4x + 2y - 4z$ в точці $M(0,0,0)$;

б) $u(x, y, z) = 3x^2y - 3y^3 + y^4$ в точці $M(1,2,1)$;

в) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Відповідь: а) $-4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$; б) $12\vec{i} - \vec{j}$; в) $-\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$

9. Довести формулу $\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}$.

10. Відшукати $\operatorname{grad} \varphi(r)$, де $\varphi(r)$ має вигляд:

а) $\varphi(r) = \frac{1}{r^3}$; б) $\varphi(r) = r^n$, ($n > 0$).

Відповідь: а) $-3\frac{\vec{r}}{r^5}$; б) $nr^{n-2}\vec{r}$.

11. Відшукати градієнт скалярного поля:

а) $u(P) = \vec{a}\vec{b}\vec{r}$;

б) $u(P) = a^2 r - (\vec{a}, \vec{r})^2$;

в) $u(P) = r(\vec{a}, \vec{r})$,

де \vec{a}, \vec{b} – постійні вектори.

Відповідь: а) $[\vec{a}, \vec{b}]$; б) $2|\vec{a}|^2 \vec{r} - 2(\vec{a}, \vec{r})\vec{a}$; в) $\frac{(\vec{a}, \vec{r})}{r} \vec{r} + r\vec{a}$.

12. Відшукати градієнт скалярного поля:

$$u(P) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^2},$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки P , а $\vec{\rho}$ – радіус-вектор деякої фіксованої точки N .

Відповідь: $-2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3} \vec{r}_{NP}$.

13. Відшукати градієнт скалярного поля:

$$u(P) = (\vec{c}, \vec{a}(r))$$

де $\vec{a}(r) = A(r)\vec{i} + B(r)\vec{j} + C(r)\vec{k}$, а \vec{c} – постійний вектор.

Відповідь: $\frac{(\vec{c}, \vec{a}'(r))}{r} \vec{r}$, де $\vec{a}'(r)$ – похідна вектора – функція $\vec{a}(r)$ по аргументу r .

14. Визначить одиничний вектор нормалі до сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Відповідь: $\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R} = \frac{\vec{r}}{R}$.

15. Довести рівність:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v).$$

16. Для скалярних полів $u(P) = xy$ та $v(P) = x^2 + y^2 + z^2$ відшукати точки, в яких градієнт обертається в нуль. Пов'язати цю обставину в кожному випадку з трактуванням рівняння $u(x, y, z) = c$ ($c = const$).

Відповідь: Для обох полів це початок координат. Для поля $u(P)$ в околі точки $(0,0)$ рівняння $xy = 0$ не може бути розв'язане відносно однієї

змінної, воно розпадається на два рівняння: $x=0$ та $y=0$. Для поля $v(P)$ рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ не визначає звичайної поверхні, йому задовольняє лише одна точка $O(0,0,0)$.

17. На зовнішню дзеркальну поверхню параболоїда обертання падає промінь, паралельний вісь параболоїда. Відшукати напрямок променя після відбивання.

Відповідь: від фокуса параболоїда до точки падіння променя.

18. Довести, що пучок променів, що виходить із фокуса двохполосного гіперболоїда обертання, після відбивання від внутрішньої дзеркальної поверхні порожнини перетворюється в розбіжний пучок променів, що ніби виходять з другого фокуса.

19. Встановити область існування і відшукати лінії рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = \sqrt{9 - x^2 - 3y}.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; лінії рівня – сімейство парабол.

20. Встановити область існування і відшукати поверхні рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = \sqrt{9 - x^2 - 3yz}.$$

Відповідь: $x \in R$; поверхні рівня – циліндричні параболоїди.

21. Встановити область існування і відшукати лінії рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = \sin(y^2 - 4x).$$

Відповідь: сімейство парабол для $x \in (-1; 0)$.

22. Встановити область існування і відшукати поверхні рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Відповідь: колові конуси з вершиною в т. $(0;0)$.

23. Встановити область визначення і відшукати лінії рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = xy.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $y = \frac{c}{x}$ – сімейство гіпербол.

24. Встановити область існування і відшукати поверхні рівня плоского скалярного поля:

$$\varphi = x^2 + y^2 - 4z^2.$$

Відповідь: гіперболічні конуси з асимптотичним наближенням.

25. Відшукати градієнт скалярного поля $\varphi = \arccos(xyz + 1)$ в точці $M(2, -1, 1)$.

Відповідь: $\text{grad}\varphi = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

26. Відшукати градієнт скалярного поля $\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Відповідь: $\text{grad}\varphi = -\frac{2\vec{r}}{r^4}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

27. Відшукати градієнт скалярного поля $\varphi = (x^2 + y^2)^{3/2}$.

Відповідь: $\text{grad}\varphi = 3r\vec{r}$.

28. Відшукати одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Відповідь: $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$.

29. Відшукати одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

Відповідь: $\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}}{r}$.

30. Вздовж якого напрямку в точці $M(-3, -1, 2)$ скалярне поле $\varphi = xy + xz + yz$ змінюється найшвидше? Якою є максимальна швидкість цієї зміни?

Відповідь: напрямок $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$; $v = \sqrt{18}$.

31. Відшукати похідну плоского поля $\varphi = x^3 + xy + 3y^4$ в точці $M_0(-2, 1, 0)$ вздовж напрямку, що лежить в площині xOy і нахиленому під кутом $\frac{\pi}{6}$ до вісі Ox .

Відповідь: $v = -\frac{6}{\sqrt{5}}$.

32. Відшукати найбільшу швидкість зростання скалярного поля $\varphi = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ в точці $M_0(2,1,2)$.

Відповідь: $v = \sqrt{209}$.

33. Відшукати похідну скалярного поля $\varphi = \frac{xy}{z}$ вздовж напрямку \overline{MA} в точці $M(1,2,1)$, а $A(0,3,4)$.

Відповідь: $v = -\frac{7}{\sqrt{11}}$.

Тема № 2. Векторне поле. Векторні лінії поля. Дивергенція векторного поля.

Приклад 2.1. Відшукати векторні лінії поля:

$$\vec{F}(M) = ax\vec{i} - ay\vec{j} - 2az\vec{k}, \quad (a = \text{const}).$$

Розв'язок. Диференціальні рівняння векторних ліній в даному випадку мають вигляд:

$$\frac{dx}{ax} = -\frac{dy}{ay} = -\frac{dz}{2az}.$$

Інтегруючи рівняння $\frac{dx}{ax} = -\frac{dy}{ay}$, отримаємо:

$$\ln x + \ln y = \ln c,$$

або

$$xy = c_1.$$

Розв'язок рівняння $\frac{dy}{ay} = \frac{dz}{2az}$ приводить до результату:

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln c,$$

або

$$y^2 = c_2 z.$$

Отже, векторними лініями поля є лінії перетину гіперболічних циліндрів з параболічними:

$$\begin{cases} xy = c_1 \\ y^2 = c_2 z \end{cases}.$$

Приклад 2.2. Відшукати рівняння векторних ліній поля, заданого у сферичних координатах:

$$\vec{F} = -\frac{2a \cos \theta}{\rho^3} \vec{e}_\rho + \frac{a \sin \theta}{\rho^3} \vec{e}_\theta.$$

Розв'язок. Диференціальні рівняння векторних ліній в сферичних координатах мають вигляд:

$$\frac{d\rho}{F_\rho} = \frac{\rho \sin \theta d\varphi}{F_\varphi} = \frac{\rho d\theta}{F_\theta},$$

або в даному випадку:

$$\frac{\frac{d\rho}{2a \cos \theta}}{\rho^3} = \frac{\rho d\theta}{a \sin \theta \rho^3}.$$

Як бачимо: $d\varphi = 0$, отже, $\varphi = \text{const}$.

Далі:

$$\frac{\rho^3 d\rho}{2a \cos \theta} = \frac{\rho^4 d\theta}{a \sin \theta},$$

або

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}.$$

Інтегруючи рівняння, отримаємо:

$$\rho = C \sin^2 \theta.$$

Отже остаточно, рівняння векторних ліній має вигляд:

$$\begin{cases} \rho = C \sin^2 \theta, \\ \varphi = \text{const}. \end{cases}$$

Приклад 2.3. Відшукати дивергенцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ в точці $M(1, 2, 3)$.

Розв'язок. Обчислимо часткові похідні від координат вектора \vec{a} :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = x,$$

звідси:

$$\operatorname{div} \vec{a} = x + y + z.$$

В точці $M(1, 2, 3)$:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Приклад 2.4. Довести формулу $\operatorname{div}(u \vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \vec{a}$ для $\operatorname{div}(u \vec{a})$

Розв'язок. Згідно визначення дивергенції, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(uP) + \frac{\partial}{\partial y}(uQ) + \frac{\partial}{\partial z}(uR) = P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial Q}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial R}{\partial z} = \\ &= \left(P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \vec{a}. \end{aligned}$$

Дамо ще один розв'язок, який базується на формулі $\operatorname{div} \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \vec{a}) &= (\vec{\nabla}, u \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}, u \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{j}, u \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{k}, u \vec{a}) = \\ &= \left(\vec{i}, \frac{\partial u}{\partial x} \vec{a} \right) + \left(\vec{i}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right) + \left(\vec{j}, \frac{\partial u}{\partial y} \vec{a} \right) + \left(\vec{j}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \right) + \left(\vec{k}, \frac{\partial u}{\partial z} \vec{a} \right) + \left(\vec{k}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \right) = \\ &= \left\{ \left(\vec{a}, \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} u \right) + \left(\vec{a}, \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} u \right) + \left(\vec{a}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} u \right) \right\} + u \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}, \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{j}, \vec{a}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{k}, \vec{a}) \right\} = \\ &= (\vec{a}, \vec{\nabla} u) + u(\vec{\nabla}, \vec{a}). \end{aligned}$$

При розв'язку були використані правила диференціювання скалярного добутку двох векторів і добутку скалярної функції на векторну, сталість векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а також незалежність скалярного добутку від порядку співмножників.

Приклад 2.5. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = r^2 \vec{c}$, де \vec{c} – сталий вектор.

Розв'язок. Припускаючи

$$\vec{c} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad (A, B, C = \text{const}),$$

Отримаємо наступний вираз для вектора \vec{a} :

$$\vec{a} = (x^2 + y^2 + z^2)(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}).$$

Таким чином координати вектора \vec{a} дорівнюють $P = (x^2 + y^2 + z^2)A$,
 $Q = (x^2 + y^2 + z^2)B$, $R = (x^2 + y^2 + z^2)C$.

Обчислимо часткові похідні $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xA$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2yB$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 2zC$ і

підставляючи їх у формулу $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 2xA + 2yB + 2zC = 2(\vec{r}, \vec{c}).$$

Другий, більш короткий спосіб розв'язку цієї задачі полягає у використанні формули $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \vec{a}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(r^2\vec{c}) = (\vec{c}, \operatorname{grad} r^2) + r^2 \operatorname{div} \vec{c}.$$

Так як $\vec{c} = \text{const}$, то $\operatorname{div} \vec{c} = 0$.

За формулою $\vec{\nabla} \varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$, $\operatorname{grad} r^2 = 2\vec{r}$. Підставляючи ці значення у вираз для $\operatorname{div} \vec{a}$, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 2(\vec{r}, \vec{c}).$$

Приклад 2.6. Довести формулу $\operatorname{div} \varphi(r)\vec{r} = \varphi'(r)r + 3\varphi(r)$ для дивергенції сферично симетричного поля.

Розв'язок. Для обрахунку дивергенції поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ використаємо формулу $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \vec{a}$:

$$\operatorname{div} \varphi(r)\vec{r} = (\vec{r}, \operatorname{grad} \varphi(r)) + \varphi(r)\operatorname{div} \vec{r}.$$

Враховуючи, що за формулою $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ і за формулою $\vec{\nabla} \varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$

$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}$, отримаємо:

$$\operatorname{div} \varphi(r)\vec{r} = \varphi'(r)r + 3\varphi(r),$$

що і треба було довести.

Задачі для самостійного розв'язку

34. Відшукати векторні лінії сферично симетричного поля:

$$\vec{a} = f(\vec{r}) = kx\vec{i} + ky\vec{j} + kz\vec{k}.$$

Відповідь: прями, що проходять через початок координат.

35. Відшукати векторні лінії поля $\vec{a}(M) = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$.

Відповідь: $x^2 - y^2 = C$; $z = h$.

36. Відшукати векторні лінії поля $\vec{a}(M) = \frac{1}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{y^2}\vec{j} + \frac{1}{z^2}\vec{k}$.

Відповідь: $x^3 + y^3 = C_1$; $z^3 + y^3 = C_2$.

37. Відшукати рівняння сімейства векторних ліній поля $\vec{a}(M) = (x^2 - y^2 - z^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + 2xz\vec{k}$.

Відповідь: $y = C_1z$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2y$.

38. Відшукати векторні лінії поля $\vec{a} = [\vec{c}, \vec{r}]$, де \vec{c} – сталий вектор.

Відповідь: кола, що лежать в площинах, які перпендикулярні до прямої, що проходить через початок координат і має напрямок вектора \vec{c} ; центри цих кіл належать цій прямій.

39. Відшукати силові лінії: а) магнітного поля прямолінійного струму; б) гравітаційного поля точкового джерела.

Відповідь: а) кола перпендикулярні вісі, що співпадає з напрямком струму; б) радіальні прями з центром у джерелі поля.

40. Потік рідини, що не стискається, має потенціал $\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Відшукати траєкторії руху частинок рідини.

Відповідь: кола з центрами на вісі OY, що проходять через початок координат.

41. Обчислити дивергенцію векторного поля:

а) $\vec{a} = \alpha\vec{r}$, де $\alpha = \text{const}$;

б) $\vec{a} = (4x^2z + 3)\vec{i} + (2xy - 3)\vec{j} + (6xyz - 9)\vec{k}$.

Відповідь: а) $\text{div } \vec{a} = 3\alpha$; б) $\text{div } \vec{a} = 2x(4z + 3y + 1)$.

42. Обчислити дивергенцію векторного поля:

а) $\vec{a} = e^{xy} \cos z\vec{i} + \arctg \frac{x}{y} \sin z\vec{j} + \text{ctg } z\vec{k}$ в точці $M\left(-1, 1, \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\vec{a} = \ln \frac{xy}{z} \cos y \vec{i} + \arcsin \frac{y}{x} \vec{j} + \frac{1}{x} \ln \frac{x}{y} \vec{k}$ в точці $M\left(\frac{5}{9}\pi, -\frac{\pi}{3}, -2\right)$;

в) $\vec{a} = \sqrt{1 - \ln^2 xyz} \vec{i} + \arccos \frac{x}{5z} \vec{j} + \frac{\ln z}{\sqrt[5]{x}} \vec{k}$ в точці $M\left(e, 1, \frac{\pi}{\sqrt[5]{e}}\right)$.

Відповідь: а) $\operatorname{div} \vec{a}(M) = -\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{9}{4\pi}$; в) $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{3e-4}{3e}$.

43. Обчислити дивергенцію векторного поля:

а) $\vec{a} = r\vec{c}$, де $\vec{c} = \text{const}$;

б) $\vec{a} = r^4\vec{r}$;

в) $\vec{a} = \vec{b}(\vec{r}, \vec{c})$, де \vec{b}, \vec{c} – сталі вектори.

Відповідь: а) $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{(\vec{c}, \vec{r})}{r}$; б) $\operatorname{div} \vec{a} = 7r^4$; в) $\operatorname{div} \vec{a} = (\vec{b}, \vec{c})$.

44. Довести формули $\operatorname{div} \vec{c} = 0$, де $\vec{c} = \text{const}$ для дивергенції постійного векторного поля і $\operatorname{div}(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2) = c_1\operatorname{div}\vec{a}_1 + c_2\operatorname{div}\vec{a}_2$, де c_1, c_2 – сталі коефіцієнти для лінійної комбінації векторних полів.

45. Довести, що дивергенція сферично симетричного поля в усій області визначення поля рівна нулю тільки тоді, коли це поле кулонівське, тобто $\varphi(r)\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$.

46. Векторне поле задане в декартових координатах $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$.

Відшукати векторні лінії цього поля.

Відповідь: $y = \frac{C_1}{x}$, $y = C_2z$, $z = \frac{C_3}{x}$.

47. Визначити лінії напруженості поля сили тяжіння $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$.

Відповідь: радіальні криві з початком у центрі Землі.

48. Відшукати дивергенцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$.

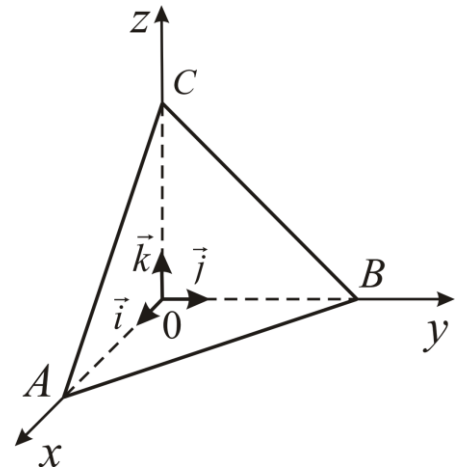
Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = y + z + x$.

49. Відшукати дивергенцію векторного поля $\vec{c}(M) = [\vec{a}[\vec{r}, \vec{b}]]$, де $\vec{a}, \vec{b} = \text{const}$

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{c} = 2(\vec{a}; \vec{b})$.

Тема № 3. Потік векторного поля. Формула Остроградського.

Приклад 3.1. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через трикутник ABC з вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ (згідно рисунку), припускаючи, що нормальний вектор складає гострі кути з координатними осями.



До прикладу 3.1.

Розв'язок. 1-й спосіб. Будемо обчислювати потік за формулою:

$$N = \iint_{(S)_{xy}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} dx dy.$$

Для знаходження одиничного нормального вектора \vec{n} запишемо рівняння площини трикутника:

$$F(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0,$$

яке отримане з рівняння площини у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Тут a, b, c – координати відрізків, що відтинає площина на осях координат; в нашому випадку $a = b = c = 1$. З цього рівняння знаходимо одиничний нормальний вектор \vec{n} . За формулою:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|},$$

де $u = F(x, y, z)$.

Звідси

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},$$

і, отже,

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Обчислимо скалярний добуток (\vec{a}, \vec{n}) , що входить у формулу

$$N = \iint_{(S)_{xy}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} dx dy:$$

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [(x - 2z) + (3z - 4x) + (5x + y)] = \frac{1}{\sqrt{3}} (2x + y + z).$$

Звідси

$$\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} = 2x + y + z.$$

Підставляючи сюди значення z виражене через x, y з рівняння площини трикутника, знаходимо:

$$\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} = x + 1.$$

Обчислимо тепер потік N як подвійний інтеграл по площині трикутника ABO на площині xOy :

$$N = \iint_{\Delta ABO} (x+1) dx dy = \int_0^1 (x+1) dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

2-й спосіб. Розв'яжемо цю задачу, використавши формулу

$$N = \iint_{(S)} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \quad \text{та} \quad \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(S)_{xy}} R[x, y, f(x, y)] dx dy :$$

$$\begin{aligned} N &= \iint_{\Delta ABC} (x - 2z) dy dz + (3z - 4x) dz dx + (5x + y) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta ABC} (x - 2z) dy dz + \iint_{\Delta ABC} (3z - 4x) dz dx + \iint_{\Delta ABC} (5x + y) dx dy. \end{aligned}$$

Перший інтеграл зводиться до подвійного по ΔOBC . При цьому x треба виразити через y, z із рівняння площини трикутника. Перед інтегралом треба поставити знак (+), так як $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta ABC} (x - 2z) dy dz &= \iint_{\Delta OBC} (1 - y - z - 2z) dy dz = \iint_{\Delta OBC} (1 - y - 3z) dy dz = \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - y - 3z) dz = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y)^2 dy = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Другий інтеграл зводиться до подвійного по площі трикутника AOC . Тут треба було б виразити y через x, z , але в нашому випадку підінтегральна функція не містить y , і це спрощує обчислення. Перед

подвійним інтегралом стоїть знак (+), так як $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$:

$$\iint_{\Delta ABC} (3z - 4x) dz dx = \iint_{\Delta AOC} (3z - 4x) dz dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3z - 4x) dz = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - 7x + \frac{11}{2} x^2 \right) dx = -\frac{1}{6}.$$

В третьому інтегралі інтегрування відбувається за площиною трикутника ABO . Тут потрібно було б виразити z через x, y , але підінтегральна функція не містить z , що спрощує обчислення. Так як $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, то перед подвійним інтегралом по трикутнику ABO ставиться знак (+):

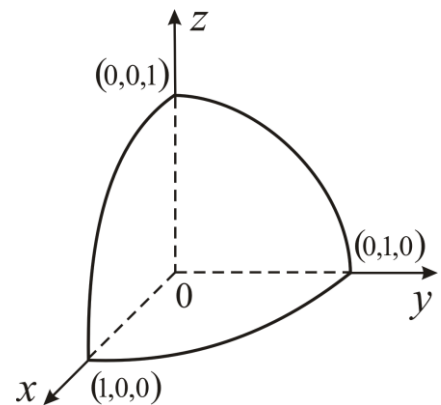
$$\iint_{\Delta ABC} (5x + y) dx dy = \iint_{\Delta ABO} (5x + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + y) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 4x - \frac{9}{2} x^2 \right) dx = 1.$$

Остаточнo знаходимо:

$$N = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{2}{3}.$$

В розглянутому прикладі перший метод розв'язку, тобто метод зведення потоку, що виражається поверхневим інтегралом першого роду, до подвійного інтегралу за формулою $N = \iint_{(S)_{xy}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} dx dy$ виявився більш простим, ніж другий (через поверхневий інтеграл другого роду). Але може так виявитися, що перший спосіб приведе до громіздкого інтегралу, і вигідніше обчислити три інтеграла за другим способом розв'язку, ніж один – за першим.

Приклад 3.2. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована в першому октанті (згідно рисунка). Додатня нормаль – верхня нормаль сфери.



До прикладу 3.2.

Розв'язок. В цій задачі вигідніше обчислювати потік векторного поля за допомогою поверхневого інтеграла другого роду, тобто за формулами $N = \iint_{(S)} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$ та

$$\iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(S)_{xy}} R[x, y, f(x, y)] dx dy .$$

Отже,

$$N = \iint_{(S)} xy dy dz + yz dz dx + xz dx dy = \iint_{(S)} xy dy dz + \iint_{(S)} yz dz dx + \iint_{(S)} xz dx dy .$$

Всі три інтеграла рівні між собою. Дійсно, проекції поверхні (S) на всі координатні площини однакові – це чверть кола одиничного радіуса, і будь-яка координата поверхні однаково виражається через останні. Отже,

$$N = 3 \iint_{(S)} xz dx dy .$$

Використаємо формулу $\iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(S)_{xy}} R[x, y, f(x, y)] dx dy$,

враховуючи, обрана нормаль складає гострий (або прямий) кут з осями координат i , таким чином, $\cos \gamma \geq 0$. Виразимо z через x, y для розглядуваної частини сфери:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} .$$

Тоді:

$$N = 3 \iint_{(D)} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy ,$$

де (D) – чверть кола $x^2 + y^2 \leq 1$, що знаходиться в першому квадранті.

Переходячи до повторного інтегрування, отримаємо:

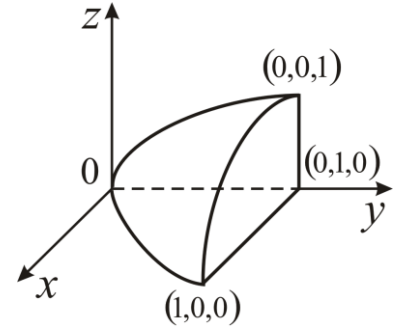
$$N = 3 \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \sqrt{1-x^2-y^2} dx = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy .$$

Застосовуючи до останнього інтеграла підстановку $y = \sin t$, $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$; $dy = \cos t dt$, отримаємо:

$$\int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt = \frac{3}{16} \pi .$$

Отже, кінцевий результат $N = \frac{3}{16} \pi$.

Приклад 3.3. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ через замкнуту поверхню (S) , що складається з поверхні (S_1) параболоїда обертання $y = x^2 + z^2$ і з площин (S_2) , (S_3) і (S_4) , що задані відповідно рівняннями $y=1$, $x=0$, $z=0$ (згідно рисунка).



До прикладу 3.3.

Розв'язок. Шуканий потік N можна подати у вигляді суми:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

де N_1, N_2, N_3, N_4 – потоки заданого векторного поля відповідно через поверхні (S_1) , (S_2) , (S_3) і (S_4) .

а) Обчислимо потік N_1 . Рівняння поверхні (S_1) має вигляд:

$$x^2 + z^2 - y = 0.$$

Для обчислення потоку використаємо поверхневий інтеграл першого роду, зводячи його до подвійного за формулою $N = \iint_{(S)_{xy}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\gamma|} dx dy$.

Проектування відбувається на площину yOz . Маємо:

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} - \vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + z^2) + 1}}; \cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{4(x^2 + z^2) + 1}}; \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\alpha|} = x^2 - \frac{1}{2} + z^2.$$

Використовуючи рівняння поверхні (S_1) , виразимо x^2 через y, z і, підставивши праву частину останньої рівності в інтеграл:

$$N_1 = \iint_{(S)_{yz}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\alpha|} dy dz,$$

отримаємо:

$$N_1 = \iint_{(D_1)} \left(y - \frac{1}{2} \right) dy dz,$$

де (D_1) – проекція (S_1) на площину yOz . Фігура (D_1) обмежена параболою $y = z^2$, прямою $y=1$ і координатною віссю $z=0$. Переходячи до повторного інтегрування, знайдемо:

$$N_1 = \int_0^1 dz \int_{z^2}^1 \left(y - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^2 - z^4) dz = \frac{1}{15}.$$

б) Обчислимо потік N_2 . Зовнішньою нормаллю до поверхні (S_2) є одиничний орт \vec{j} . Отже,

$$|\cos\beta| = 1; \quad \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\beta|} = x.$$

Звідси:

$$N_2 = \iint_{(S)_{xz}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\beta|} dx dz = \iint_{(D_2)} x dx dz,$$

(D_2) – чверть кола $x^2 + z^2 \leq 1$, що є проекцією (S_2) на площину xOz .

Останній інтеграл обчислимо в полярних координатах:

$$N_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}.$$

б) Обчислимо потік N_3 . На площині $x=0$ заданий вектор поля \vec{a} рівний нулю. Отже, $N_3 = 0$.

в) Обчислимо потік N_4 . На площині $z=0$ маємо:

$$\vec{a} = x^2 \vec{i} + x \vec{j}.$$

Зовнішньою нормаллю є вектор $\vec{n} = -\vec{k}$. Отже,

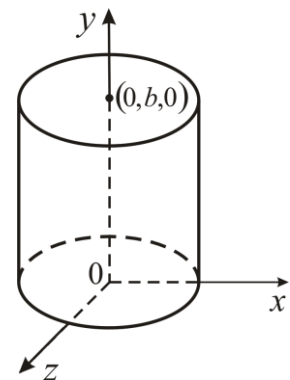
$$(\vec{a}, \vec{n}) = 0 \quad \text{і} \quad N_4 = 0.$$

Остаточно для повного потоку знаходимо:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{5}.$$

Приклад 3.4. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$ через частину циліндричної поверхні (S) $x^2 + z^2 = R^2$, обмеженої площинами $y=0$ і $y=b$ ($b > 0$) в сторону зовнішньої нормалі (згідно рисунку).

Розв'язок. Знаходимо одиничний вектор нормалі \vec{n} до циліндричної поверхні (S) :



До прикладу 3.4.

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Так як $\sqrt{x^2 + z^2} = R$, тому $\vec{n} = \frac{1}{R}(x\vec{i} + z\vec{k})$.

Обчислимо скалярний добуток (\vec{a}, \vec{n}) :

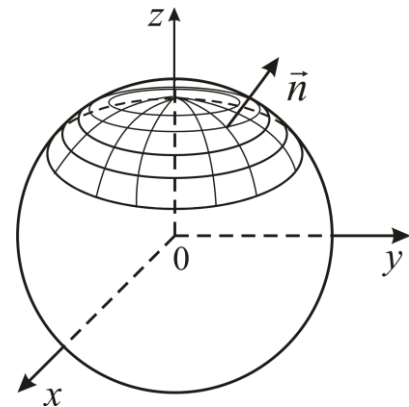
$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{R}[x(x-z) + z(x+z)] = \frac{1}{R}(x^2 + z^2) = R.$$

Для обчислення потоку використаємо формулу його означення $N = \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS$:

$$N = \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(S)} R dS = R \iint_{(S)} dS = RS,$$

де S – площа циліндричної поверхні (S) . Оскільки $S = 2\pi Rb$, тому $N = 2\pi R^2b$.

Приклад 3.5. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$ через частину сферичної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що відтинається площиною $z = \frac{3}{2}$ в сторону зовнішньої нормалі (згідно рисунку).



До прикладу 3.5.

Розв'язок. Одиничний вектор зовнішньої нормалі до сфери має вигляд:

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}.$$

Отже,

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) = 3,$$

$$N = \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = 3 \iint_{(S)} dS = 3S,$$

де S – площа кульового сегмента (S) .

Оскільки $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 9\pi$,

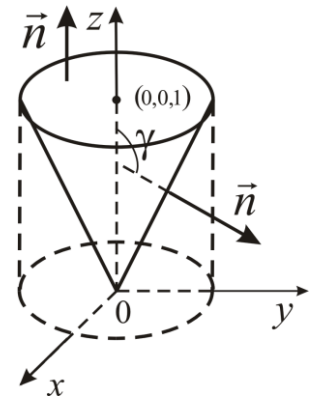
тому $N = 27\pi$.

Приклад 3.6. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнену поверхню (S), що складається з поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і площини $z = 1$ (згідно рисунка).

Розв'язок. Обчислимо спочатку потік N_1 через поверхню конуса (S_1). Використаємо вираз потоку через поверхневий інтеграл першого роду. Проектування відбувається на площину xOy . Маємо:

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}z}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{2}z}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

(Ми використали рівняння конуса $x^2 + y^2 = z^2$).



До прикладу 3.6.

Так як додатня нормаль до поверхні складає тупий кут з віссю Oz (згідно рисунка), то з двох можливих одиничних векторів в якості \vec{n} треба вибрати той, для якого коефіцієнт при \vec{k} (тобто $\cos\gamma$) від'ємний. Таким чином,

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0.$$

Знаходимо

$$\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\gamma|} = -z = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже,

$$N_1 = -\iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

де (D) – коло одиничного радіуса на площині xOy з центром на початку координат. При обчисленні потоку використаємо полярні координати:

$$N_1 = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dz = -\frac{2}{3}\pi.$$

Обчислимо тепер потік N_2 через верхню основу конуса (S_2). Очевидно, що в цьому випадку зовнішня нормаль $\vec{n} = \vec{k}$, тому $(\vec{a}, \vec{n}) = z = 1$.

Використовуючи формулу

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

знайдемо:

$$N_2 = \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(S_2)} dS = S_2 = \pi.$$

Повний потік через всю поверхню дорівнює:

$$N = N_1 + N_2 = -\frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{1}{3}\pi.$$

Приклад 3.7. Розв'язати попередню задачу, використовуючи формулу Остроградського.

Розв'язок. Маємо:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} (-x) + \frac{\partial}{\partial z} z = 1$$

Отже,

$$N = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_{(V)} dV = V$$

де V – об'єм конуса. Оскільки $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, тоді $N = \frac{1}{3}\pi$.

Простота розв'язку обумовлена тим, що $\operatorname{div} \vec{a}$ виявилась сталою величиною.

Приклад 3.8. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ через поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язок. В даному випадку поверхня (S) – замкнута, тому для обчислення потоку можна використати формулу Остроградського. Маємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2 = r^2,$$

$$N = \iiint_{(V)} r^2 dV.$$

Обчислимо інтеграл у сферичних координатах:

$$N = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{4}{5} \pi R^5.$$

Приклад 3.9. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + \vec{k}$ через частину поверхні параболоїда (згідно рисунка) $1 - z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$).

Розв'язок. Позначимо дану поверхню через (S_1) і розглянемо замкнуту поверхню $(S) = (S_1) + (S_2)$, де (S_2) – коло радіуса $R=1$ на площині xOy .

З формули Остроградського витікає, що потік через поверхню (S) дорівнює нулю; дійсно, для даного поля:

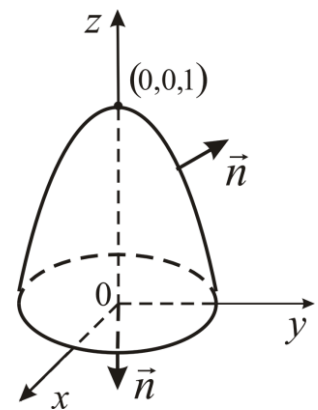
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} y^2 + \frac{\partial}{\partial y} x^2 + \frac{\partial}{\partial z} 1 = 0.$$

Отже,

$$\iint_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}) dS + \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = 0.$$

Звідси шуканий потік через поверхню (S_1) :

$$\iint_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = - \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(S_2)} dS = \pi.$$



До прикладу 3.9.

Задачі для самостійного розв'язку

50. Обчислити потік вектора $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (3y - z)\vec{j} + (2z - x)\vec{k}$ через трикутник, що отриманий при перетині площини $6x + 2y + 3z - 6 = 0$ з площинами координат (нормаль складає гострі кути з осями координат).

Відповідь: $N = \frac{11}{6}$.

51. Обчислити потік вектора $\vec{a} = (x - 2y)\vec{i} + z\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$ через частину сферичної поверхні одиничного радіуса з центром в початку координат, розташовану к першому октанті.

Відповідь: $N = \frac{1}{3}(\pi + 2)$.

52. Обчислити за допомогою формули Остроградського потік векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через повну поверхню конуса $(9 - z)^2 = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 9$).

Відповідь: $N = 81\pi$.

53. Відшукати потік радіус-вектора \vec{r} через замкнуту поверхню S , що обмежує об'єм V .

Відповідь: $N = 3V$.

54. Відшукати за допомогою формули Остроградського потік векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Відповідь: $N = \frac{12}{5}\pi R^5$.

55. Відшукати за допомогою формули Остроградського потік векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Відповідь: $N = 0$.

56. Відшукати за допомогою формули Остроградського потік вектора $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхню еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Відповідь: $N = 0$.

57. Обчислити двома способами потік векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}$ через повну поверхню піраміди $x + y + z \leq 2$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = 4$.

58. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$ через повну поверхню циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq H$. Обчислення зробити двома способами.

Відповідь: $N = 5\pi a^2 H$.

59. Відшукати потік радіус-вектора через бічну поверхню конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq 1$) в сторону внутрішньої нормалі.

Відповідь: $N = 0$.

60. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ через бічну поверхню конуса, обмеженого поверхнями $(z-4)^2 = x^2 + y^2$; $z=0$ у напрямку зовнішньої нормалі.

Відповідь: $N = 32\pi$.

61. Відшукати потік векторного поля $\vec{a} = zy\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ через верхню половину сфери $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9^2$; $(z \geq 0)$ в сторону зовнішньої нормалі.

Відповідь: $N = 27\pi$.

62. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = \frac{x}{3}\vec{i} + (z^2 - x^2)\vec{j} + \frac{2}{3}z\vec{k}$ через повну поверхню циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \leq z \leq 1$.

Відповідь: $N = 2\pi a^2$.

63. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + (1-2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню, що складається з частини параболоїда $x^2 + y^2 = 1 - 2z$, $y \geq 0$ і площини xOy .

Відповідь: $N = \frac{4}{9}$.

64. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню: $3x + 2y + z = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Відповідь: $N = -36$.

65. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - 2x\vec{j} - z\vec{k}$ через зовнішню поверхню півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = -\frac{16\pi}{3}$.

66. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$ через плоский трикутник, що одержується при перетині площини $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ з координатними площинами.

Відповідь: $N = -\frac{67}{34}$.

67. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ через замкнену поверхню, що утворюється перетином поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$ і площини $y=1$, $0 \leq y \leq 1$.

Відповідь: $N = \frac{1}{3}\pi$.

68. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (1-2x)\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню, що складається з частин – поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ і площини $z=4$.

Відповідь: $N = 24\pi$.

69. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = \frac{\pi}{10}(2 - \sqrt{2})R^5$.

70. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{j} + x^2\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2 = 1 - y^2 - z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = \frac{\pi}{2}$.

71. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = R$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = \frac{8R^3}{2 + \sqrt{2}}$.

72. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Відповідь: $N = 9\pi$.

Тема № 4. Ротор векторного поля.

Приклад 4.1. Використовуючи означення ротора, перевірити формулу $\text{rot } \vec{r} = 0$.

Розв'язок. Маємо:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Звідси згідно формули $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ отримаємо:

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0.$$

Приклад 4.2. Обчислити ротор векторного поля:

$$\vec{a} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}.$$

Розв'язок. Згідно формули

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x + y) \vec{k}.$$

Приклад 4.3. Перевірити формулу $\operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}]$ для ротора векторного поля \vec{a} .

Розв'язок. Доведемо, що $[\vec{\nabla}, \vec{a}] = \operatorname{rot} \vec{a}$.

Обчислимо векторний добуток

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}, \vec{a}] &= \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial y} [\vec{j}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}, \vec{a}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}] + \frac{\partial}{\partial y} [\vec{j}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}] + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}] = \\ &= \left[\vec{i}, \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial x} \vec{k} \right) \right] + \left[\vec{j}, \left(\frac{\partial P}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial y} \vec{k} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \left[\vec{k}, \left(\frac{\partial P}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \vec{k} \right) \right] &= \frac{\partial P}{\partial x} [\vec{i}, \vec{i}] + \frac{\partial Q}{\partial x} [\vec{i}, \vec{j}] + \frac{\partial R}{\partial x} [\vec{i}, \vec{k}] + \frac{\partial P}{\partial y} [\vec{j}, \vec{i}] + \frac{\partial Q}{\partial y} [\vec{j}, \vec{j}] + \\
 &+ \frac{\partial R}{\partial y} [\vec{j}, \vec{k}] + \frac{\partial P}{\partial z} [\vec{k}, \vec{i}] + \frac{\partial Q}{\partial z} [\vec{k}, \vec{j}] + \frac{\partial R}{\partial z} [\vec{k}, \vec{k}].
 \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що:

$$\begin{aligned}
 [\vec{i}, \vec{i}] &= 0; [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}; \\
 [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}; [\vec{j}, \vec{j}] = 0; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; \\
 [\vec{k}, \vec{i}] &= \vec{j}; [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}; [\vec{k}, \vec{k}] = 0,
 \end{aligned}$$

в результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}
 [\vec{\nabla}, \vec{a}] &= \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{k} - \frac{\partial R}{\partial x} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} + \frac{\partial R}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{i} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \\
 &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{a}
 \end{aligned}$$

При розв'язку була використана формула диференціювання векторного добутку, а саме:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\vec{q}, \vec{a}] = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial x}, \vec{a} \right] + \left[\vec{q}, \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right].$$

Зокрема, якщо \vec{q} не залежить від x , то:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\vec{q}, \vec{a}] = \left[\vec{q}, \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right].$$

Приклад 4.4. Довести формулу $\text{rot } u\vec{a} = [\text{grad } u, \vec{a}] + u \text{rot } \vec{a}$.

Розв'язок. Будемо виходити із рівності:

$$\text{rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}] = \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial y} [\vec{j}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}, \vec{a}], \text{ доведеної в попередньому}$$

прикладі. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } u\vec{a} &= [\vec{\nabla}, u\vec{a}] = \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, u\vec{a}] + \frac{\partial}{\partial y} [\vec{j}, u\vec{a}] + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}, u\vec{a}] = \\
 &= \left[\vec{i}, \frac{\partial}{\partial x} (u\vec{a}) \right] + \left[\vec{j}, \frac{\partial}{\partial y} (u\vec{a}) \right] + \left[\vec{k}, \frac{\partial}{\partial z} (u\vec{a}) \right] = \left[\vec{i}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{a} + u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\vec{j}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \vec{a} + u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \right) \right] + \left[\vec{k}, \left(\frac{\partial u}{\partial z} \vec{a} + u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \right) \right] = \left[\vec{i}, \frac{\partial u}{\partial x} \vec{a} \right] + \left[\vec{i}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right] + \\
 & + \left[\vec{j}, \frac{\partial u}{\partial y} \vec{a} \right] + \left[\vec{j}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \right] + \left[\vec{k}, \frac{\partial u}{\partial z} \vec{a} \right] + \left[\vec{k}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \right] = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right), \vec{a} \right] + \\
 & + u \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial y} [\vec{j}, \vec{a}] + \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k}, \vec{a}] \right\} = [\text{grad } u, \vec{a}] + u \text{rot } \vec{a}.
 \end{aligned}$$

При розв'язку м скористалися тим, що скалярний коефіцієнт у множника у векторному добутку може бути винесеним за знак векторного добутку або ж віднесений до іншого множника. Наприклад:

$$\begin{aligned}
 \left[\vec{i}, u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right] &= u \left[\vec{i}, \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \right] = u \frac{\partial}{\partial x} [\vec{i}, \vec{a}]; \\
 \left[\vec{i}, \frac{\partial u}{\partial x} \vec{a} \right] &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i}, \vec{a} \right].
 \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Обчислити ротор векторного поля
 $\vec{a} = \sin(x + 2y + 3z) \cdot (x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k})$ в точці $M(3, -3, 1)$.

Розв'язок. Використавши формулу $\text{rot } u\vec{a} = [\text{grad } u, \vec{a}] + u \text{rot } \vec{a}$,
отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{a} &= \sin(x + 2y + 3z) \text{rot}(x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) + \\
 &+ \left[\text{grad } \sin(x + 2y + 3z), (x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) \right]
 \end{aligned}$$

Обчислимо вектори $\text{rot}(x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k})$ і $\text{grad } \sin(x + 2y + 3z)$. Маємо:

$$\text{rot}(x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{grad } \sin(x + 2y + 3z) = \cos(x + 2y + 3z) (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}).$$

Таким чином,

$$\text{rot } \vec{a} = \left[\text{grad } \sin(x + 2y + 3z), (x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \cos(x + 2y + 3z).$$

В точці $M(3, -3, 1)$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 9 & 1 \end{vmatrix} \cos 0 = -25\vec{i} + 26\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Приклад 4.6. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \vec{b}(\vec{r}, \vec{c})$, де \vec{b} , \vec{c} – сталі вектори.

Розв'язок. Використовуючи формулу $\operatorname{rot} u\vec{a} = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot} \vec{a}$ і розглядаючи (\vec{r}, \vec{c}) як скалярну функцію u , отримуємо:

$$\operatorname{rot} \vec{b}(\vec{r}, \vec{c}) = [\operatorname{grad}(\vec{r}, \vec{c}), \vec{b}] + (\vec{r}, \vec{c}) \operatorname{rot} \vec{b},$$

Так як $\operatorname{grad}(\vec{r}, \vec{c}) = \vec{c}$ (див. приклад 1.12) і $\operatorname{rot} \vec{b} = 0$ (або $\vec{b} = \text{const}$), то

$$\operatorname{rot} \vec{b}(\vec{r}, \vec{c}) = [\vec{c}, \vec{b}].$$

Приклад 4.7. Довести формулу $\operatorname{rot} \varphi(r)\vec{r} = 0$ для ротора сферично симетричного поля.

Розв'язок. Для обчислення ротора поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ застосуємо формулу $\operatorname{rot} u\vec{a} = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot} \vec{a}$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = [\operatorname{grad} \varphi(r), \vec{r}] + \varphi(r) \operatorname{rot} \vec{r}$$

Так як $\operatorname{rot} \vec{r} = 0$ і $\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} \vec{r}$ (згідно формули $\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r}$), то

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\varphi'(r)}{r} \vec{r}, \vec{r} \right) = \frac{\varphi'(r)}{r} [\vec{r}, \vec{r}] = 0.$$

Задачі для самостійного розв'язку

73. Перевірити формули $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$, де $\vec{c} = \text{const}$,
 $\operatorname{rot}(c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2) = c_1 \operatorname{rot} \vec{a}_1 + c_2 \operatorname{rot} \vec{a}_2$, $\operatorname{rot} u\vec{a} = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot} \vec{a}$,
 користуючись безпосередньо визначенням ротора, а саме

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

74. Обчислити ротор векторного поля:

а) $\vec{a} = \sin(2x - y - z)(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k});$

б) $\vec{a} = xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k});$

в) $\vec{a} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k});$

г) $\vec{a} = r\vec{c}$, де \vec{c} – сталий вектор;

д) $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}.$

Відповідь: а) $\operatorname{rot} \vec{a} = -2\cos(2x - y - z)(\vec{i} + 2\vec{j});$

б) $\operatorname{rot} \vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k};$

в) $\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{1 + (x - y + z)^2};$ з) $\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r}[\vec{r}, \vec{c}];$ д) $\operatorname{rot} \vec{a} = 0.$

75. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = e^{x+2y+3z}(3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k})$ в точці $M_0(3, -3, 1).$

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{a}|_{M_0} = 20\vec{i} + 26\vec{j} - 24\vec{k}.$

76. Представити $[\vec{a}, \operatorname{grad} u]$, де \vec{a} – сталий вектор, у вигляді ротора деякого вектора.

Відповідь: $[\vec{a}, \operatorname{grad} u] = -\operatorname{rot}(u, \vec{a})$

Тема № 5. Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля. Формула Стокса.

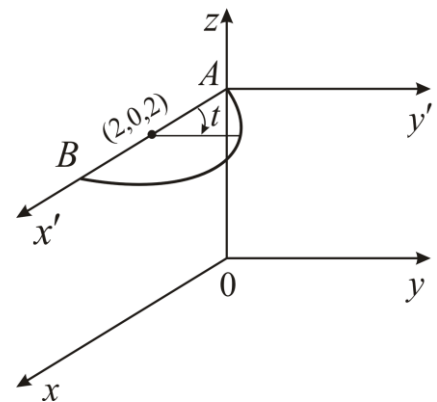
Приклад 5.1. Обчислити лінійний інтеграл вектора

$$\vec{a}(M) = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = r^2\vec{r}$$

вздовж лінії $(l): (x - 2)^2 + y^2 = 4; y \geq 0; z = 2$ від точки $A(0, 0, 2)$ до $B(4, 0, 2).$

Розв'язок. За формулою:

$$W = \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt,$$



До прикладу 5.1

де $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ - одиничний вектор дотичної до кривої. В якості параметра на лінії (l) приймаємо кут t (згідно рисунка), і, таким чином, $t_0 = 0$, $T = \pi$. Рівняння лінії (l) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x = 2 - 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t; \\ z = 2. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

Тоді маємо:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2 - 2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2 + 2^2 = 12 - 8 \cos t;$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= (12 - 8 \cos t) \left[(2 - 2 \cos t) \vec{i} + (2 \sin t) \vec{j} + 2 \vec{k} \right]; \\ \vec{r}'(t) dt &= 2 (\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt = 16 \int_0^{\pi} (3 - 2 \cos t) \left((1 - \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2 \vec{k}, \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \right) dt = \\ &= 16 \int_0^{\pi} (3 \sin t - 2 \sin t \cos t) dt = 96 \end{aligned}$$

Приклад 5.2. Обчислити циркуляцію вектора напруженості магнітного поля прямого нескінченно довгого струму $\vec{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j})$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \text{const}$ проти годинникової стрілки (вважаючи додатною нормаллю вектор \vec{k}).

Розв'язок. *1-й спосіб.*

Як і в попередньому прикладі, використовуємо формулу для відшукування криволінійного інтегралу, якщо вихідне поле задано параметрично:

$$W = \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt$$

Вводячи на колі параметричні представлення

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

знайдемо:

$$\vec{H}(t) = \frac{2I}{R} (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j});$$

$$\vec{r}'(t) = R(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}).$$

Отже:

$$\Gamma = \oint_{(l)} \vec{H} dr = \int_{(0)}^{2\pi} (\vec{H}(t), \vec{r}'(t)) dt = 2I \int_{(0)}^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2I \int_{(0)}^{2\pi} dt = 4\pi I.$$

2-й спосіб. В цій задачі зручно також безпосередньо використовувати визначення $W = \int_{(l)} (\vec{a}(M), \vec{\tau}(M)) ds$, де $\vec{\tau}(M)$ – одиничний дотичний вектор до

лінії (l) в точці M , так як вздовж кола

$$(\vec{a}(M), \vec{\tau}(M)) = (\vec{H}, \vec{\tau}) = C \quad (C = \text{const}),$$

і отже,

$$W = \int_{(l)} (\vec{a}(M), \vec{\tau}(M)) ds = \int_{(l)} C ds = C \int_{(l)} ds = Cl,$$

де $l = 2\pi R$ – довжина кола.

Покажемо, що на колі $(\vec{H}, \vec{\tau}) = C$, і знайдемо величину цієї сталої. Поле \vec{H} в векторній формі запишеться у вигляді:

$$\vec{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2} [\vec{k}, \vec{r}].$$

Звідси видно, що вектор \vec{H} перпендикулярний одночасно векторам \vec{k} , \vec{r} і напрямлений по дотичній до кола (згідно рисунка).

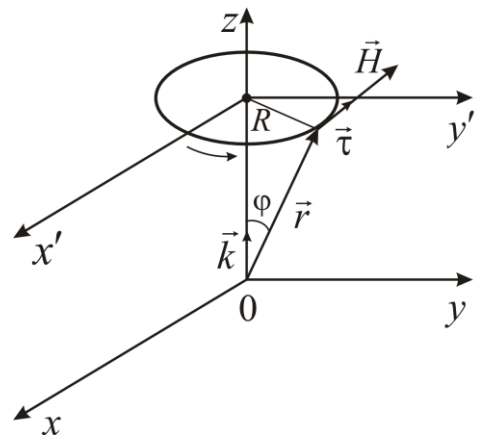
Із рисунка видно, що на колі

$$|\vec{r}| |\vec{k}| \sin \varphi = |\vec{r}| \sin \varphi = R.$$

Отже, довжина вектора \vec{H} дорівнює:

$$|\vec{H}| = \frac{2I}{R^2} |[\vec{k}, \vec{r}]| = \frac{2I}{R^2} |\vec{k}| |\vec{r}| \sin \varphi = \frac{2I}{R^2} R = \frac{2I}{R}.$$

Так як на колі вектор \vec{H} завжди співпадає за напрямком з одиничним дотичним вектором $\vec{\tau}$, тоді $C = (\vec{H}, \vec{\tau}) = |\vec{H}| = \frac{2I}{R}$.



До прикладу 5.2

Кінцевий результат: $\Gamma = \oint_{(l)} (\vec{H}, \vec{\tau}) ds = \frac{2I}{R} \cdot 2\pi R = 4\pi I$.

Приклад 5.3. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y + 1)\vec{k}$ вздовж прямолінійного відрізка AB , де $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$.

Розв'язок. При координатному заданні поля $\vec{a}(M)$ і лінії (l) зручно виходити з формули

$$W = \int_{(l)} \vec{a}(M) d\vec{r} = \int_{(l)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz;$$

$$W = \int_l P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} x dx + y dy + (x + y - 1) dz.$$

Рівняння прямої AB має вигляд:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Обираючи в якості параметра координату x ($1 \leq x \leq 2$), знаходимо:

$$y = 2x - 1; \quad z = 3x - 2; \quad dy = 2dx; \quad dz = 3dx.$$

Зводячи криволінійний інтеграл до звичайного, отримаємо:

$$W = \int_1^2 x dx + (2x - 1)2dx + [x + (2x - 1) - 1]3dx = 13.$$

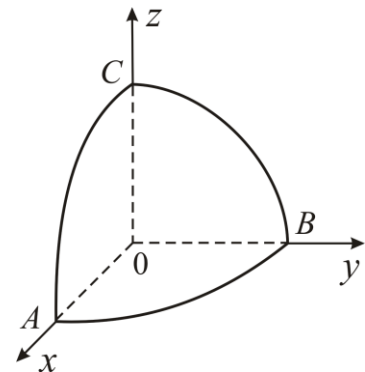
Приклад 5.4. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + \vec{k}$ вздовж замкнутої лінії $ABCA$, що утворена перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з координатними площинами (згідно рисунка).

Розв'язок. Лінія (l) складається з дуг трьох кіл:

$$\overset{\cup}{AB} = (l_1): z = 0, x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\overset{\cup}{BC} = (l_2): x = 0, y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0, z \geq 0$$

$$\overset{\cup}{CA} = (l_3): y = 0, x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, z \geq 0.$$



До прикладу 5.4

Отже,

$$\Gamma = \int_{(l)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(l_1)} \vec{a} d\vec{r} + \int_{(l_2)} \vec{a} d\vec{r} + \int_{(l_3)} \vec{a} d\vec{r}.$$

Для обчислення інтегралів, що входять у праву частину цієї рівності, зручно перейти до параметричного представлення і використати формулу

$$W = \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt :$$

$$W = \int_{(l)} \vec{a}(t) d\vec{r}(t) = \int_{(l)} (\vec{a}(t), \vec{r}'(t)) dt.$$

Обчислюємо спочатку інтеграл вздовж прямої (l_1) :

$$z = 0; \quad x = R \cos t; \quad y = R \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

або у векторній формі:

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}.$$

Тоді:

$$d\vec{r}(t) = (-R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}) dt$$

і

$$\vec{a}(t) = -R^2 \sin^2 t \vec{i} + R^2 \cos^2 t \vec{j} + \vec{k}.$$

Отже,

$$(\vec{a}(t), d\vec{r}(t)) = (R^3 \sin^3 t + R^3 \cos^3 t) dt.$$

Тепер знайдемо:

$$\int_{(l_1)} \vec{a} d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (\vec{a}(t), d\vec{r}(t)) = R^3 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = \frac{4}{3} R^3.$$

На лінії (l_2) :

$$(\vec{a}, d\vec{r}) = -y^2 dx + x^2 dy + dz = dz,$$

так як $x=0$ і $dx=0$. Отже, в якості параметра зручно прийняти координату z ($0 \leq z \leq R$).

Отже,

$$\int_{(l_1)} \vec{a} d\vec{r} = \int_0^R dz = R.$$

На лінії (l_2) також $(\vec{a}, d\vec{r}) = dz$, але напрямку від C до A відповідає зміна z від 1 до 0. Отже,

$$\int_{(l_2)} \vec{a} d\vec{r} = \int_R^0 dz = -R$$

Остаточно знаходимо:

$$\Gamma = \oint_{(l)} \vec{a} d\vec{r} = \frac{4}{3} R^3 + R - R = \frac{4}{3} R^3.$$

Приклад 5.5. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вздовж замкнутої лінії $ABOA$ (згідно рисунка), де AB – дуга астроїди, що визначається рівнянням:

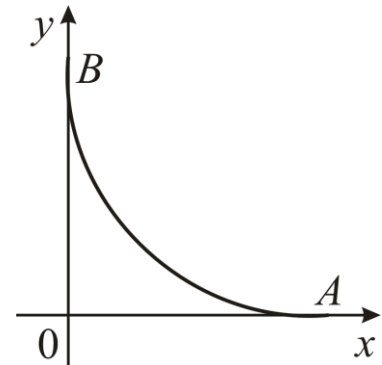
$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

або

$$x = R \cos^3 t, \quad y = R \sin^3 t.$$

Розв'язок. Застосуємо формулу Стокса:

$$\Gamma = \oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdx = \iint_{(s)} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) dS,$$



До прикладу 5.5

де (s) – поверхня, що натягнута на контур (l) . В якості (s) зручно обрати плоску фігуру $ABOA$ на площині XOY .

Обчислимо $\text{rot } \vec{a}$:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$

Так як додатня нормаль до даної поверхні співпадає з віссю Oz , тоді $\vec{n} = \vec{k}$

$$\Gamma = \iint_{(s)} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(s)} ((-2\vec{k}), \vec{k}) dS = -2 \iint_{(s)} dS = -2S,$$

де (s) – площа фігуру $ABOA$:

$$S = \int_0^R y dx = -3R^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{3}{32} \pi R^2.$$

Остаточно:

$$\Gamma = -2S = -\frac{3}{16} \pi R^2.$$

Приклад 5.6. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = xyz\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} - x^2y^2\vec{k}$ вздовж контура квадрата $ABCD$ (згідно рисунка), що визначається рівняннями:

$$-x + y = a; \quad x + y = a; \quad x - y = a; \quad x + y = -a; \quad z = 0.$$

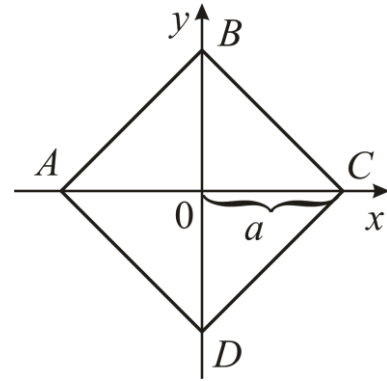
Обчислення привести двома способами: безпосередньо за визначенням циркуляції і за допомогою формули Стокса.

Розв'язок. *1-й спосіб.*

Маємо:

$$\vec{a}d\vec{r} = xyzdx + (x + y + z)dy - x^2y^2dz = (x + y)dy,$$

так як $z=0$ і $dz=0$. Розбиваємо шукану циркуляцію на чотири лінійних інтеграла, причому в якості параметра на кожній стороні квадрата обираємо координату y :



До прикладу 5.6

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{AB} \vec{a}d\vec{r} + \int_{BC} \vec{a}d\vec{r} + \int_{CD} \vec{a}d\vec{r} + \int_{DA} \vec{a}d\vec{r} = \\ &= \int_{AB} (x + y)dy + \int_{BC} (x + y)dy + \int_{CD} (x + y)dy + \int_{DA} (x + y)dy = \\ &= \int_0^a (2y - a)dy + \int_a^0 a dy + \int_0^{-a} (2y + a)dy + \int_{-a}^0 (-a)dy = -2a^2. \end{aligned}$$

2-й спосіб. Згідно формули Стокса:

$$\Gamma = \iint_{(S)} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) dS,$$

де (S) – поверхня, що натягнута на контур (l) .

Обчислюємо $\text{rot } \vec{a}$:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x + y + z & -x^2y^2 \end{vmatrix} = -(2x^2y^2 + 1)\vec{i} + (2xy^2 + xy)\vec{j} + (1 - xz)\vec{k}.$$

В якості поверхні (S) обираємо квадрат $ABCD$. Вектор нормалі \vec{n} , що фігурує у формулі Стокса, дорівнює $-\vec{k}$ (обхід контура відбувається за годинниковою стрілкою). Отже, $(\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) = xz - 1 = -1$, бо $z=0$. Остаточно:

$$\Gamma = - \iint_{(S)} dS = -S_{ABCD} = -2a^2.$$

Приклад 5.7. Чому для обчислення циркуляції вектора напруженості магнітного поля прямого струму $\vec{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \text{const}$ неможна використовувати формулу Стокса?

Розв'язок. За формулою Стокса перехід від лінійного інтеграла

$$\Gamma = \int_{(l)} (\vec{H}, \vec{\tau}) dl$$

до поверхневого

$$\iint_{(S)} (\text{rot } \vec{H}, \vec{n}) dS$$

і можливий за умови, що поверхня (S) , що натягнута на контур (l) , цілком поміщається в області (V) , де поле $\vec{H}(M)$ неперервне разом з першими частинними похідними. В даному випадку будь-яка поверхня (S) , що спирається на коло (l) :

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = \text{const},$$

перетинає вісь, вздовж якої поле \vec{H} зазнає розриву. Таким чином, не існує поверхні (S) , що натягнута на коло (l) і лежить в області неперервності поля \vec{H} . Отже, формулу Стокса застосовувати неможна. В даному випадку для обчислення циркуляції необхідно застосувати прямий метод (див. приклад 5.2).

Однак для обчислення циркуляції по контуру, що не охоплює вісь Oz , формула Стокса може бути застосована. В цьому випадку

$$\Gamma = \iint_{(S)} (\text{rot } \vec{H}, \vec{n}) dS = 0,$$

оскільки

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \vec{k} =$$

$$= \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0.$$

Приклад 5.8. Обчислити в точці $M(x, y, z)$ густину циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ відносно напрямку координатних осей.

Розв'язок. 1-й спосіб. Використовуємо пряме означення густини циркуляції. Знайдемо спочатку густину циркуляції відносно вісі Ox . Вектор \vec{i} є одиничним вектором цього напрямку. Площиною (P) , що фігурує в означенні густини циркуляції, є площина, що проходить через точку $M(x, y, z)$ і паралельна координатній площині yOz (згідно рисунка). Додатне обертання є обертанням у напрямку від $O'y'$ до $O'z'$.

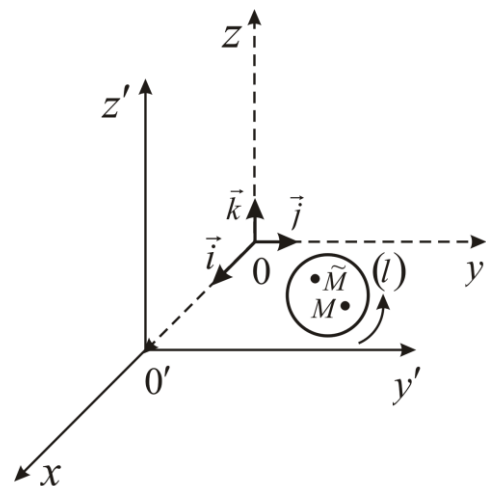
Циркуляцію по контуру (l) , в середині якого міститься точка M , записуємо у вигляді:

$$\Gamma = \int_{(l)} Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

Так як $x = \text{const}$ і $dx = 0$. Застосовуючи формулу Гріна, а потім теорему про середнє, знайдемо:

$$\Gamma = \iint_{(D_l)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{\vec{M}} D_l,$$

де (D_l) – площадка, межею якої є контур (l) , а D_l – площа (D_l) , \vec{M} – деяка точка, що належить (D_l) . Враховуючи, що P, Q, R неперервні разом з похідними, знаходимо величину густини циркуляції у напрямку вісі Ox :



До прикладу 5.8

$$\lim_{(l) \rightarrow M} \frac{\int Q dy + R dz}{D(l)} = \lim_{(l) \rightarrow M} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \Big|_{\tilde{M}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \Big|_M.$$

Таким чином, шукана густина циркуляції:

$$I_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

де похідні обчислені в точці $M(x, y, z)$.

Аналогічно проводяться обчислення густини циркуляції відносно осей Oy і Oz .

Густина циркуляції відносно напрямку вісі Oy :

$$I_2 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$

а густина циркуляції відносно напрямку вісі Oz :

$$I_3 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Безпосередньо видно, що

$$I_1 \vec{i} + I_2 \vec{j} + I_3 \vec{k} = \text{rot } \vec{a},$$

як це і повинно бути у відповідності за формулою $\text{rot } \vec{a}(M) = I_1 \vec{i} + I_2 \vec{j} + I_3 \vec{k}$.

2-й спосіб. Використовуємо формулу

$$I(M_0) = (\text{rot } \vec{a}(M_0), \vec{n}) = |\text{rot } \vec{a}(M_0)| \cos \varphi$$

тоді отримаємо:

$$I = (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}).$$

Маємо:

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k};$$

для напрямку Ox : $\vec{n} = \vec{i}$. Отже,

$$I_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Аналогічно обчислюють густину циркуляції відносно напрямків Oy і Oz .

Не дивлячись на складність першого способу розв'язку в порівнянні з другим, він має важливе значення, так як може бути застосованим до поля, що задане в криволінійних координатах.

Приклад 5.9. Обчислити густину циркуляції векторного поля $\vec{a} = \sin(x + 2y + 3z)(x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k})$ в точці $M_0(3, -3, 1)$ відносно напрямку, що йде із точки M_0 в точку $N(2, -1, -1)$.

Розв'язок. За формулою $I(M_0) = (\text{rot } \vec{a}(M_0), \vec{n}) = |\text{rot } \vec{a}(M_0)| \cos \varphi$:

$$I(M_0) = (\text{rot } \vec{a}(M_0), \vec{n}),$$

де $\text{rot } \vec{a}(M_0) = -25\vec{i} + 26\vec{j} - 9\vec{k}$ (див. приклад 4.5).

$$\overline{M_0N} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},$$

і, отже,

$$\vec{n} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Таким чином, густина циркуляції:

$$I(M_0) = (\text{rot } \vec{a}(M_0), \vec{n}) = (-25)\left(-\frac{1}{3}\right) + 26 \cdot \frac{2}{3} + (-9)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{95}{3}.$$

Задачі для самостійного розв'язку

77. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 2Rx)\vec{i} + R(x + y)\vec{j}$ вздовж дуги OA кола $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, де $O(0, 0)$ та $A(R, R)$.

Відповідь: $W = \frac{6 - \pi}{4} R^3$.

78. Відшукати роботу силового поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ по одному витку гвинтової лінії (l) :

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t; \\ z = bt \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

Відповідь: $A = 2\pi(a^2 + b^2)$.

79. Відшукати циркуляцію поля $\vec{a} = y\vec{i}$ по контуру кола $x = b \cos t$; $y = b + b \sin t$, що розташоване в площині xOy .

Відповідь: $\Gamma = -\pi b^2$.

80. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ вздовж контура (l) $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 1$ за напрямком, що відповідає додатному обходу проекції контура (l) на площину xOy .

Відповідь: $\Gamma = -\pi$.

81. Обчислити двома способами (безпосередньо і за допомогою формули Стокса) циркуляцію поля $\vec{a} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$.

Відповідь: $\Gamma = -\frac{1}{8}\pi R^6$.

82. Обчислити за допомогою формули Стокса циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$ вздовж кіл:

$$\text{а) } (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad x = 5$$

(вектор додатної нормалі $\vec{n} = \vec{i}$);

$$\text{б) } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4, \quad z = 0$$

(вектор додатної нормалі $\vec{n} = \vec{k}$).

Відповідь: а) $\Gamma = 2\pi$; б) $\Gamma = 0$.

83. Обчислити циркуляцію поля $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$ вздовж контура

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 1, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\Gamma = 0$.

84. Обчислити циркуляцію поля

$$\vec{a} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$$

вздовж лінії перетину площини $2x + 3y + 6z - 3 = 0$ з координатними площинами. Напрямок обходу контура відповідає додатному обходу проекції на площину xOy .

Відповідь: $\Gamma = -\frac{7}{4}$.

85. Обчислити густину циркуляції векторного поля $\vec{a} = y^2 z \vec{i} - 2xy z \vec{j} + z^2 \vec{k}$ в точці $M_0(1, \sqrt{2}, 1)$ за напрямком, що утворює з координатними осями Ox та Oy відповідно кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, а з віссю Oz кут γ , причому $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $I = 0$.

86. Обчислити густину циркуляції векторного поля $\vec{a} = e^{x+2y+3z} (3x \vec{i} + 2y \vec{j} + z \vec{k})$ в точці $M_0(3, -3, 1)$ за напрямком, що йде від точки M_0 до точки $N(4, -5, 3)$.

Відповідь: $I = -\frac{80}{3}$.

87. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xz \vec{i} + \vec{j} - y \vec{k}$ вздовж замкненого контуру $z = x^2 + y^2 - 10$, $z = -1$.

Відповідь: $\Gamma = 0$.

88. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x - 2z) \vec{i} + (x + 3y + z) \vec{j} + (5x + y) \vec{k}$ через контур трикутника ABC , де $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Відповідь: $\Gamma = -3$.

89. Обчислити лінійний інтеграл плоского поля $\vec{a} = (x + y) \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ вздовж дуги OA параболи $y^2 = x$, коли $O(0, 0)$, $A(1, 1)$.

Відповідь: $W = 1$.

90. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = (2a - y) \vec{i} + (y - a) \vec{j}$ вздовж першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Відповідь: $W = \pi a^2$.

91. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy \vec{i} + yz \vec{j} - xz \vec{k}$ вздовж замкненого контуру, що утворюється перетином: $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

Відповідь: $\Gamma = -\pi$.

92. Відшукати циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y \vec{i} + (1 - x) \vec{j} - z \vec{k}$ вздовж замкненого контуру, що одержується при перетині поверхні циліндра $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ і площини $x + y + z = 1$

Відповідь: $\Gamma = -2\pi$.

93. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контуру, що одержується при перетині поверхні $y^2 = 4 - z - x$ з координатними площинами.

Відповідь: $\Gamma = 16$.

Тема № 6. Похідна скалярного поля за напрямком. Скалярне поле в циліндричних та сферичних координатах.

Приклад 6.1. Відшукати градієнт скалярного поля $u(P) = \rho^2 \sin 2\varphi + \rho z$, заданого в циліндричних координатах, в точці $P_0\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$.

Розв'язок. Обчислюємо частинні похідні скалярного поля, що входять у формулу

$$\begin{aligned} \text{grad } u(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{h_z} \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z: \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} &= 2\rho \sin 2\varphi + z; \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 2\rho^2 \cos 2\varphi; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \rho. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\text{grad } u(P) = (2\rho \sin 2\varphi + z)\vec{e}_\rho + 2\rho \cos 2\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_z.$$

Підставляючи координати точки P_0 , знайдемо:

$$\text{grad } u(P_0) = 3\vec{e}_\rho + \vec{e}_z.$$

Приклад 6.2. Відшукати градієнт скалярного поля $u(P) = r^2 \sin \theta \sin \varphi + \varphi \cos \varphi$, заданого в сферичних координатах, в точці $P_0\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язок. Використовуючи формулу

$$\text{grad } u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{h_r} \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

отримаємо:

$$\text{grad } u(P) = 2r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + r \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \left(r \cos \varphi - \frac{4 \sin \varphi}{r \sin \theta} \right) \vec{e}_\varphi.$$

Підставляючи координати точки P_0 , знайдемо:

$$\text{grad } u(P_0) = 2\sqrt{3} \vec{e}_r + (1 - \sqrt{3}) \vec{e}_\varphi.$$

Приклад 6.3. Відшукати похідну скалярного поля $u(P) = \rho^2 z \cos \varphi$, заданого в циліндричних координатах, за напрямком гвинтової лінії

$\rho = a$, $\varphi = \frac{t}{a}$, $z = t$ в точці M , що відповідає значенню параметра $t = \frac{a\pi}{2}$.

Розв'язок. За формулою $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$ похідна скалярного

поля дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{u'_t}{s'(t)}.$$

Підставляючи значення ρ , φ і z у вираз скалярного поля, знайдемо:

$$u(P(t)) = a^2 t \cos \frac{t}{a},$$

звідки

$$u'_t = a^2 \cos \frac{t}{a} - at \sin \frac{t}{a}.$$

При $t = \frac{a\pi}{2}$ маємо:

$$u'_t = -\frac{a^2 \pi}{2}.$$

Величини ρ'_t , φ'_t і z'_t при $t = \frac{a\pi}{2}$ (фактично вони не залежать від t)

дорівнюють:

$$\rho'_t = 0, \varphi'_t = \frac{1}{a}, z'_t = 1.$$

Із формули $s'(t) = \sqrt{(\rho'_t)^2 + \rho^2(\varphi'_t)^2 + (z'_t)^2}$ при $t = \frac{a\pi}{2}$

$$s'\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \sqrt{0 + a^2 \cdot \frac{1}{a^2} + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Отже,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P=M} = -\frac{a^2 \pi}{2\sqrt{2}}.$$

Приклад 6.4. Відшукати похідну скалярного поля $u(P) = \frac{\cos \theta}{r}$, заданого в сферичних координатах, за напрямком лінії $r = 1 + \cos^2 t$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = 2t$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок. Координати точки M , в якій обчислюється похідна: $1, \frac{\pi}{3}, \pi$. Похідна скалярного поля дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u(M), \tau(M)).$$

Використовуючи

формулу

$$\text{grad } u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{h_r} \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

знайдемо:

$$\text{grad } u(M) = -\frac{\cos \theta}{r^2} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{r} \vec{e}_\theta \Big|_{P=M} = -\frac{1}{2} \vec{e}_r - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_\theta.$$

Дотичний вектор до кривої (формула

$h_r r'_t \vec{e}_r + h_\theta \theta'_t \vec{e}_\theta + h_\varphi \varphi'_t \vec{e}_\varphi = r'_t \vec{e}_r + r \theta'_t \vec{e}_\theta + r \sin \theta \varphi'_t \vec{e}_\varphi$) запишеться у вигляді:

$$r'_t \vec{e}_r + r \theta'_t \vec{e}_\theta + r \sin \theta \varphi'_t \vec{e}_\varphi = -2 \cos t \sin t \vec{e}_r + (1 + \cos^2 t) \sin \frac{\pi}{3} \cdot 2 \vec{e}_\varphi.$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ цей вектор дорівнює $\sqrt{3} \vec{e}_\varphi$, тобто $\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$.

Остаточно:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{1}{2} (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = 0$$

(в силу взаємної ортогональності векторів $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$).

Звичайно, можна було отримати розв'язок, використовуючи формулу

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

так само, як в прикладі 6.3 можна виходити із формули:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\text{grad } u(M_0), \vec{\tau}(M_0)).$$

Приклад 6.5. Довести формули

$$\text{grad } u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{h_r} \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

та

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

для $\text{grad } u(r, \theta, \varphi)$ і оператора $\vec{\nabla}$ в сферичних координатах.

Розв'язок. Оскільки

$$\text{grad } u(P) = \nabla u(P),$$

то достатньо довести формулу

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

За означенням:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – сталі одиничні вектори за напрямками координатних осей,

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ – оператори диференціювання за напрямками ліній, що мають

своїми дотичними векторами відповідно вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Це означення не залежить від вибору декартової системи координат.

Якщо вісі координат в точці P_0 направити за напрямками векторів $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$, то $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ заміняться відповідно $\frac{\partial}{\partial l_r}, \frac{\partial}{\partial l_\theta}, \frac{\partial}{\partial l_\varphi}$, і оператор прийме вигляд:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial l_r} \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial l_\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial l_\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Знайдемо $\frac{\partial}{\partial l_r}$, використовуючи правила диференціювання складних

функцій і формулу $h_r = \frac{ds_r}{dr} = 1$; $h_\theta = \frac{ds_\theta}{d\theta} = r$; $h_\varphi = \frac{ds_\varphi}{d\varphi} = r \sin \theta$. Маємо:

$$\frac{\partial}{\partial l_r} = \frac{\partial r}{\partial s_r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\frac{\partial s_r}{\partial r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{h_r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}.$$

(* Порядок множників має значення. Запис $\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s_r}$ означав би, що оператор диференціювання діє на похідну $\frac{\partial r}{\partial s_r}$, що неправильно).

Аналогічно встановлюється:

$$\frac{\partial}{\partial l_\theta} = \frac{1}{h_\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial l_\varphi} = \frac{1}{h_\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Таким чином доведено, що в сферичних координатах оператор $\vec{\nabla}$ має вигляд:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

В останньому виразі коефіцієнти при похідних і вектори $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ вважаються фіксованими в точці, де діє $\vec{\nabla}$. Це зауваження істотне, так як взагалі $r, \theta, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ змінюються від точки до точки.

Приклад 6.6. Довести формули

$$h_r r'_t \vec{e}_r + h_\theta \theta'_t \vec{e}_\theta + h_\varphi \varphi'_t \vec{e}_\varphi = r'_t \vec{e}_r + r \theta'_t \vec{e}_\theta + r \sin \theta \varphi'_t \vec{e}_\varphi$$

$$\text{і } s'(t) = \sqrt{(r'_t)^2 + r^2(\theta'_t)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\varphi'_t)^2}.$$

Розв'язок. Те, що вектор $h_r r'_t \vec{e}_r + h_\theta \theta'_t \vec{e}_\theta + h_\varphi \varphi'_t \vec{e}_\varphi$ – дотичний до лінії (l), не пов'язано з конкретною залежністю між (x, y, z) і (r, θ, φ) . Запишемо:

$$x = x(r, \theta, \varphi); \quad y = y(r, \theta, \varphi); \quad z = z(r, \theta, \varphi)$$

Позначимо дотичний вектор \vec{R} . В формулі дотичного вектора $\vec{R}'(t) = x'_t \vec{i} + y'_t \vec{j} + z'_t \vec{k}$ знайдемо x'_t, y'_t, z'_t , використовуючи правила диференціювання складної функції:

$$\begin{aligned} \vec{R}'(t) = & \left(\frac{\partial x}{\partial r} r'_t + \frac{\partial x}{\partial \theta} \theta'_t + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \varphi'_t \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial r} r'_t + \frac{\partial y}{\partial \theta} \theta'_t + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \varphi'_t \right) \vec{j} + \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial r} r'_t + \frac{\partial z}{\partial \theta} \theta'_t + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \varphi'_t \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Після перегрупування членів, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{R}'(t) = & r'_t \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right) + \theta'_t \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k} \right) + \\ & + \varphi'_t \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{k} \right) = r'_t \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} + \theta'_t \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} + \varphi'_t \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Так як $\vec{R}'(r) = s'(r) \vec{\tau}_r$ (див. формулу $\vec{R} = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{R'(t)}{s'(t)}$), то

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = \frac{ds_r}{dr} \vec{\tau}_r = h_r \vec{e}_r;$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} = \frac{ds_\theta}{d\theta} \vec{\tau}_\theta = h_\theta \vec{e}_\theta;$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = \frac{ds_\varphi}{d\varphi} \vec{\tau}_\varphi = h_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Після підстановки останніх виразів у формулу для $\vec{R}'(t)$ отримаємо:

$$\vec{R}'(t) = h_r r'_t \vec{e}_r + h_\theta \theta'_t \vec{e}_\theta + h_\varphi \varphi'_t \vec{e}_\varphi,$$

що і треба було довести.

Формула $s'(t) = \sqrt{(r'_t)^2 + r^2(\theta'_t)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\varphi'_t)^2}$ випливає із рівності $s'(t) = |\vec{R}'(t)|$ і взаємної ортогональності одиничних векторів $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.

Задачі для самостійного розв'язку

94. Відшукати градієнт скалярного поля, заданого в циліндричних координатах:

а) $u(P) = \rho^2 \varphi + z^2 \varphi^3 + \rho \varphi z + 3$;

б) $u(P) = \frac{z \sin \varphi}{1 + \rho^2}$ в точці $A\left(2; \frac{\pi}{6}; 5\right)$.

Відповідь: а) $(2\rho + z)\varphi \vec{e}_\rho + \left(\rho + \frac{3z^2 \varphi^2}{\rho} + z\right) \vec{e}_\varphi + (2z\varphi^2 + \rho)\varphi \vec{e}_z$;

б) $-\frac{2}{5} \vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{10} \vec{e}_z$.

95. Відшукати градієнт скалярного поля, заданого в сферичних координатах:

а) $u(P) = ar^2 \cos \theta$;

б) $u(P) = \frac{a \sin \varphi}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)$;

в) $u(P) = r^2 \cos \varphi \cos \theta + a^2 \sin \varphi$ в точці $A\left(a; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

У всіх випадках $a = \text{const}$.

Відповідь: а) $2ar^2 \cos \theta \vec{e}_r - ar \sin \theta \vec{e}_\theta$;

б) $\frac{3 \sin \varphi}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \vec{e}_r + \frac{3a \sin \varphi \sin 2\theta}{r^4} \vec{e}_\theta + \frac{a \cos \varphi}{r^4 \sin \theta} (1 - 3 \cos^2 \theta) \vec{e}_\varphi$;

в) $-a \vec{e}_r + \frac{a}{2} \vec{e}_\theta - \frac{a(2 + \sqrt{2})}{2} \vec{e}_\varphi$.

96. Відшукати похідну скалярного поля, заданого в циліндричних координатах:

а) $u(P) = \frac{\sin^2 \varphi}{\rho z^2}$ в точці $M\left(\frac{1}{13}; \frac{\pi}{2}; 1\right)$ за напрямком вектора

$\vec{l} = 2\vec{e}_\rho + 3\vec{e}_\varphi + 12\vec{e}_z$, де \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ , \vec{e}_z взяті в точці M ;

б) $u(P) = \frac{\cos 2\varphi \ln \rho}{z}$ за напрямком лінії $\rho = t^2$; $\varphi = \frac{\pi}{6}t$; $z = 2t$ при $t = 1$.

Відповідь: а) 10; б) $\frac{3}{\sqrt{288 + \pi^2}}$.

97. Відшукати похідну скалярного поля, заданого в сферичних координатах:

а) $u(P) = \frac{\sin 2\varphi \sin \theta}{r^2}$ в точці $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ за напрямком вектора

$\vec{l} = \vec{e}_r + 2\vec{e}_\theta + 2\vec{e}_\varphi$, де $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ взяті в точці M ;

б) $u(P) = r \cos \theta \sin^2 \varphi$ за напрямком лінії $r = 2t^2; \theta = \frac{\pi}{2}(1 + \cos^2 t); \varphi = \frac{t}{2}$

при $t = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: а) -27; б) 0.

98. Довести формули

$$\text{grad } u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{h_z} \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$$

та

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{h_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

для оператора $\vec{\nabla}$ і $\text{grad } u(\rho, \varphi, z)$ в циліндричних координатах.

Тема № 7. Дивергенція і потік векторного поля в циліндричних і сферичних координатах.

Приклад 7.1. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M) = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$, заданого в циліндричних координатах.

Розв'язок. Тут $A_\rho = \sin \varphi; A_\varphi = \cos \varphi; A_z = 1$.

Використаємо формулу

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\varphi h_z A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_z h_\rho A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\rho h_\varphi A_z) \right\} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sin \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \cdot 1 = \frac{1}{\rho} \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \sin \varphi + 0 = 0$$

Зазначимо, що в даному випадку векторне поле є постійним:

$$\vec{a}(M) = \vec{j} + \vec{k}.$$

Це випливає із формул

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Природно, що дивергенція виявилась рівною нулю.

Приклад 7.2. Обчислити дивергенцію векторного поля

$$\vec{a}(M) = \left(\frac{2\sin\theta}{r} - \cos\theta \right) \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta + r \sin^2\theta \cos\varphi \vec{e}_\varphi, \text{ заданого у сферичних}$$

координатах, в точці $N\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язок. Маємо: $A_r = \frac{2\sin\theta}{r} - \cos\theta$; $A_\theta = \sin\theta$; $A_\varphi = r \sin^2\theta \cos\varphi$.

Використаємо формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{a}(M) &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{a}(M) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (2r \sin\theta - r^2 \cos\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin^2\theta \cos\varphi) = \\ &= \frac{2\sin\theta}{r^2} - \frac{2\cos\theta}{r} + \frac{2\cos\theta}{r} - \sin\theta \sin\varphi = \frac{2\sin\theta}{r^2} - \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned}$$

Підставимо координати точки N , отримаємо:

$$\operatorname{div}\vec{a}(N) = \frac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Приклад 7.3. Показати, використовуючи сферичні координати, що дивергенція сферично симетричного поля дорівнює $\operatorname{div} \varphi(R)\vec{R} = \varphi'(R)\vec{R} + 3\varphi(R)$.

Розв'язок. За визначенням сферично симетричного поля

$$\vec{a}(M) = \varphi(R)\vec{R} = \varphi(R)R\vec{R}^0,$$

де \vec{R}^0 – одиничний вектор, напрямлений по радіус-вектору. В позначеннях, прийнятих для сферичних координат, $R = r$, $\vec{R}^0 = \vec{e}_r$. Отже,

$$\vec{a}(M) = \varphi(r)r\vec{e}_r,$$

Використовуючи формул

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

знайдемо:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\varphi(r)r^3] = \varphi'(r)r + 3\varphi(r),$$

що і треба було довести.

Зокрема, при $\varphi(R)=1$ отримаємо $\operatorname{div} \vec{R} = 3$.

Приклад 7.4. Довести, що потік електричного поля точкового заряду Q через замкнену поверхню (S), що оточує цей заряд, дорівнює $4\pi Q$.

Розв'язок. Для простоти обмежимося випадком, коли поверхня (S) взаємно однозначно проектується на сферу з центром в точці розташування заряду Q . В цю точку помістимо початок координат, тоді рівняння поверхні (S) в сферичних координатах набуде форми:

$$R = g(\theta, \varphi); \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Написану рівність можна розглядати також, як рівняння поверхні (σ) в просторі сферичних координат, відповідної (S) в просторі координат x, y, z .

Для кулонівського поля в сферичних координатах маємо:

$$\vec{a}(M) = \frac{Q}{R^3} \vec{R} = \frac{Q}{R^3} R \vec{R}^0 = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r.$$

За формулою

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS &= \iint_{(\sigma)} h_{\theta} h_{\varphi} A_r d\theta d\varphi + h_{\varphi} h_r A_{\theta} d\varphi dr + h_r h_{\theta} A_{\varphi} dr d\theta = \\ &= \iint_{(\sigma)} r^2 \sin \theta A_r d\theta d\varphi + r \sin \theta A_{\theta} d\varphi dr + r A_{\varphi} dr d\theta \end{aligned}$$

можна записати:

$$N = \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(\sigma)} r^2 \sin \theta \frac{\theta}{r^2} d\theta d\varphi = Q \iint_{(\sigma)} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Підінтегральна функція не залежить від ρ , отже останній інтеграл перетворюється в подвійний по прямокутнику ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Остаточно маємо:

$$N = Q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi Q.$$

Важливо підкреслити, що рівність $N = 4\pi Q$ справедлива для довільної замкнутої поверхні (S) , в середині якої знаходиться заряд Q . Вимоги взаємно однозначного проектування (S) на зазначену вище сферу лише спрощують доведення.

Приклад 7.5. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M) = \rho \vec{e}_{\rho} + \rho \sin \varphi \vec{e}_{\varphi} + z \vec{e}_z$, через замкнену поверхню, що утворена площинами $z = -2, z = 2$ і циліндром $\rho = 5$.

Розв'язок. Використовуючи циліндричні координати, запишемо:

$$\begin{aligned} N &= \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(\sigma)} \rho^2 d\varphi dz + \rho \sin \varphi dz d\rho + \rho z d\rho d\varphi = \\ &= \iint_{(\sigma)} \rho^2 d\varphi dz + \iint_{(\sigma)} \rho \sin \varphi dz d\rho + \iint_{(\sigma)} \rho z d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Перший інтеграл треба брати лише по бічній поверхні циліндра, оскільки на площинах маємо $dz = 0$.

Таким чином,

$$\iint_{(\sigma)} \rho^2 d\varphi dz = \int_{-2}^2 dz \int_0^{2\pi} 5^2 d\varphi = 25 \cdot 4 \cdot 2\pi = 200\pi.$$

Другий інтеграл дорівнює нулю, так як на поверхні циліндра $\rho = \text{const}(d\rho = 0)$, а на площинах $z = \text{const}(dz = 0)$.

Третій інтеграл треба брати лише по основам циліндра (на поверхні циліндра $\rho = \text{const}$ і $d\rho = 0$). Знак інтеграла по нижній основі протилежний знаку інтеграла по верхній основі (z дорівнює відповідно 2 і -2), і, отже, третій інтеграл також перетворюється в нуль.

В результаті отримуємо $N = 200\pi$.

Приклад 7.6. Встановити формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

для дивергенції векторного поля у сферичних координатах, вважаючи формулу для потоку векторного поля відомою, а саме

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS &= \iint_{(\sigma)} h_\theta h_\varphi A_r d\theta d\varphi + h_\varphi h_r A_\theta d\varphi dr + h_r h_\theta A_\varphi dr d\theta = \\ &= \iint_{(\sigma)} r^2 \sin \theta A_r d\theta d\varphi + r \sin \theta A_\theta d\varphi dr + r A_\varphi dr d\theta. \end{aligned}$$

Розв'язок. Будемо виходити із інваріантного визначення дивергенції:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS.$$

Перейдемо в правій частині рівності до сферичних координат, використавши для інтеграла формулу

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS &= \iint_{(\sigma)} h_\theta h_\varphi A_r d\theta d\varphi + h_\varphi h_r A_\theta d\varphi dr + h_r h_\theta A_\varphi dr d\theta = \\ &= \iint_{(\sigma)} r^2 \sin \theta A_r d\theta d\varphi + r \sin \theta A_\theta d\varphi dr + r A_\varphi dr d\theta, \end{aligned}$$

а потім формулу Остроградського

$$\left(\iint_{(S)} = P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{(V)} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) dx dy dz \right)$$

для замкнутої поверхні в просторі координат r, θ, φ . Маємо:

$$\iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{(\sigma)} h_\theta h_\varphi A_r d\theta d\varphi + h_\varphi h_r A_\theta d\varphi dr + h_r h_\theta A_\varphi dr d\theta =$$

$$= \iiint_{(\delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} dr d\theta d\varphi,$$

де (δ) – тримірна фігура в просторі координат r, θ, φ , обмежена поверхнею (σ) ; об'єм фігури (δ) будемо позначати δ (без дужок). Застосовуючи теорему про середнє, знайдемо:

$$\iint_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} \delta,$$

де фігурна дужка обчислена в деякій точці M_1 (з координатами $\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}$), що знаходиться в середині об'єму (V) .

Виразимо тепер об'єм V у сферичних координатах:

$$V = \iiint_{(\delta)} |I(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi,$$

де $I(r, \theta, \varphi)$ – якобіан переходу до сферичних координат:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta = h_r h_\theta h_\varphi,$$

Рівність $I = h_r h_\theta h_\varphi$ не випадкова. Визначник I за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k}; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k}; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{k},$$

а ці вектори взаємно перпендикулярні і їх довжини відповідно дорівнюють h_r, h_θ, h_φ . Застосовуючи теорему про середнє, знайдемо:

$$V = h_r h_\theta h_\varphi \delta,$$

де величина $h_r h_\theta h_\varphi$ обчислена в деякій точці M_2 (з координатами $\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}$), в середині об'єму (V) . Підставляючи значення $\iint_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n}) dS$ і V , знайдені за допомогою теореми про середнє, інваріантний вираз для дивергенції, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\},$$

де перший множник обчислений в точці M_2 , а другий – в точці M_1 . При стягуванні об'єму V до точки M , що знаходиться всередині об'єму, точки M_1 і M_2 прямують до M ; отже, на границі отримуємо формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Приклад 7.7. Отримати формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (h_\theta h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi h_r A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_r h_\theta A_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Використовуючи вираз для опертора $\vec{\nabla}$ – «набла» в сферичній системі координат:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Розв'язок. Виходячи із виразів:

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a})$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi_0}$$

індекс \circ вказує, що $r, \theta, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ вважаються фіксованими в точці, де діє оператор $\vec{\nabla}$).

$$\vec{a}(M) = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi;$$

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k};$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k};$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Маємо:

$$(\vec{\nabla}, \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial r} \{A_r(\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_r) + A_\theta(\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_\theta) + A_\varphi(\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_\varphi)\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \{A_r(\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_r) + A_\theta(\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\theta) + A_\varphi(\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\varphi)\} + \\
 & + \frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \{A_r(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_r) + A_\theta(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\theta) + A_\varphi(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\varphi)\}.
 \end{aligned} \tag{*}$$

Тут після обрахунку похідних необхідно покласти $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, так як похідна обчислена при вказаних значеннях координат. Оскільки точка довільна, то індекс \circ можна опустити. Відмітимо, що складність обрахунку пов'язана з тим, що орти \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ не є постійними.

Складемо формули для дев'яти скалярних добутків, що входять до формули (*), та їх похідних за відповідними аргументами.

Так як вектори \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ не залежать від r , то

$$\frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_r) = \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_\theta) = \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_\varphi) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_r) &= \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \cos \theta = \\
 &= \cos \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) - \sin \theta_0 \cos \theta,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_r) = \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \theta_0 \sin \theta,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_r) \right|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} = \cos \theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \sin \theta_0 = 1;$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\theta) &= \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta_0 \sin \theta = \\
 &= \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \theta_0 \sin \theta;
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\theta) = -\cos \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \theta_0 \cos \theta;$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\theta) \right|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} = -\cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0;$$

$$(\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\varphi) = -\cos \theta_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi = -\cos \theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0);$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_\varphi) = 0;$$

$$(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_r) = -\sin \varphi_0 \sin \theta \cos \varphi + \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \varphi = \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_0);$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_r) = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_r) \right|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} = \sin \theta_0;$$

$$(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\theta) = -\sin \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi + \cos \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi = \cos \theta \sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\theta) = \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\varphi) \right|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} = \cos \theta_0,$$

$$(\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\varphi) = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\varphi) = -\sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_{\varphi_0}, \vec{e}_\varphi) \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0.$$

Враховуючи взаємну ортогональність одиничних векторів $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ в кожній точці і опускаючи індекс \circ , отримаємо:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}, \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial r} A_r + \frac{1}{r} \left\{ A_r + \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta \right\} + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \right\} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} A_r + \frac{2}{r} A_r \right) + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_\theta \right\} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

Задачі для самостійного розв'язку

99. Обчислити дивергенцію векторного поля, заданого у циліндричних координатах $\vec{a} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \vec{e}_\rho + \sin \varphi \vec{e}_\varphi - \frac{z^3}{\rho} \vec{e}_z$ в точці $N\left(3, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a}(N) = \frac{1}{18}$.

100. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\varphi$, заданого у циліндричних координатах.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = 2$.

101. Відшукати вираз дивергенції векторного поля $\vec{a} = P(\rho, z)\vec{e}_\rho + R(\rho, z)\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{P}{\rho} + \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

102. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = (2r + \cos\theta)\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta + r\cos\theta\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = 6$.

103. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \cos^2\theta\vec{e}_r + \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_\theta + \sin^2\theta\sin\varphi\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{2\cos^2\theta + 2\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cos\varphi}{r}$.

104. Обчислити дивергенцію градієнта скалярного поля $u = ar^2\cos\theta$ ($a = \text{const}$), заданого у сферичних координатах.

Відповідь: $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 4a\cos\theta$.

105. Перевірити, що дивергенція електричного поля диполя $\vec{E} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$ (координати сферичні) рівна нулю.

106. Обчислити потік векторного поля, заданого в циліндричних координатах $\vec{a} = 6z\vec{e}_z + 2\rho\sin\varphi\vec{e}_\varphi$, через замкнену поверхню, що складається із наступних частин:

1) $\rho = 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 6$;

2) $\varphi = 0, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

3) $\varphi = \frac{\pi}{6}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

4) $z = 0, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$;

5) $z = 1, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $N = \frac{1 + \pi}{2}$.

107. Обчислити потік векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = 2r \sin \theta \cos^2 \varphi \vec{e}_r + \frac{\cos \theta}{r} \vec{e}_\theta + \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2} \vec{e}_\varphi$, через поверхню сфери $r = R$.

Відповідь: $N = \pi^2 R^3$.

108. Використовуючи сферичні координати, з'ясувати геометричний зміст потоку векторного поля $\vec{a} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ через поверхню (S) , що не проходить через початок координат, і таку, що будь-який промінь, що виходить з початку координат, перетинає її не більше ніж в одній точці (додатня нормаль складає гострий кут з радіус-вектором).

Відповідь: Потік чисельно дорівнює тілесному куту, під яким видно поверхню (S) з початку координат.

109. Довести формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (h_\varphi h_z A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_z h_\rho A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\rho h_\varphi A_z) \right\} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

для дивергенції векторного поля в циліндричних координатах, використовуючи вираз

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{h_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

для оператора $\vec{\nabla}$ в циліндричних координатах.

110. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в циліндричних координатах $\vec{a} = \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi - \frac{z^4}{\rho} \vec{e}_z$ в точці $N\left(3, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = -\frac{34}{81}$.

111. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в циліндричних координатах $\vec{a} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\rho^2} \vec{e}_\rho + \sin \varphi \vec{e}_\varphi - \frac{z^3}{\rho} \vec{e}_z$ в точці $N\left(1, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = -\sqrt{3}$.

112. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в циліндричних координатах $\vec{a} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2} \vec{e}_\rho + \cos\varphi \sin\varphi \vec{e}_\varphi - \frac{z^4}{\rho} \vec{e}_z$ в точці $N\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = -\frac{31}{27}$.

113. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = \left(\frac{\sin\theta}{r^2} + \operatorname{tg}\varphi\right) \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta - \frac{\sin\theta \sin\varphi}{r} \vec{e}_\varphi$ в точці $N\left(1, \pi, \frac{\pi}{6}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

114. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = \left(\frac{\sin\theta}{r} + 4\right) \vec{e}_r + r \cos\theta \vec{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r^3} \vec{e}_\varphi$ в точці $N\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} \approx 3,2$.

115. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = (r^5 + 4) \vec{e}_r + \sqrt{r} \cos\theta \vec{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r^2} \vec{e}_\varphi$ в точці $N\left(1, \pi, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} \approx 13,5$.

116. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = \left(\frac{\cos\theta}{r^2} + 1\right) \vec{e}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_\theta - \frac{\sin\theta \sin\varphi}{r} \vec{e}_\varphi$ в точці $N\left(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} \approx 0,32$.

117. Відшукати дивергенцію векторного поля, заданого в сферичних координатах $\vec{a} = (r^2 + 4) \vec{e}_r + \sqrt{r} \operatorname{ctg}\theta \vec{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r} \vec{e}_\varphi$ в точці $N\left(1, \pi, \frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{a} \approx 10,3$.

Тема № 8. Ротор і лінійний інтеграл векторного поля в циліндричних і сферичних координатах.

Приклад 8.1. Обчислити ротор векторного поля

$$a(\rho, \varphi, z) = \cos \varphi \vec{e}_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi - \rho z \vec{e}_z \text{ заданого в циліндричних координатах.}$$

Розв'язок. Використання формули

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \begin{vmatrix} h_\rho \vec{e}_\rho & h_\varphi \vec{e}_\varphi & h_z \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_\rho A_\rho & h_\varphi A_\varphi & h_z A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

безпосередньо дає:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & -\rho z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\left(-\frac{\partial(\rho z)}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sin \varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial \cos \varphi}{\partial z} + \frac{\partial(\rho z)}{\partial \rho} \right) \rho \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial \sin \varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right] = \\ &= \frac{1}{\rho} (\rho z \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \vec{e}_z) = z \vec{e}_\varphi + \frac{\sin \varphi}{\rho} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Приклад 8.2. Обчислити ротор векторного поля

$$a(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_r - (1+r) \cos \theta \vec{e}_\varphi, \text{ заданого у сферичних координатах в точці}$$

$$M \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right).$$

Розв'язок. Використання формули

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\theta \vec{e}_\theta & h_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix},$$

знайдемо:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ r & 0 & -r(1+r)\cos\theta \sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \vec{e}_r + \left(2 + \frac{1}{r}\right) \cos \theta \vec{e}_\theta,$$

в точці $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\operatorname{rot} \vec{a} = 3\vec{e}_r$.

Приклад 8.3. Відшукати роботу силового поля $\vec{F} = \rho\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$, заданого в циліндричних координатах, вздовж одного витка гвинтової лінії: $\rho = a$; $z = b\varphi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Розв'язок. Використання формули

$$W = \int_{(\ell)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_\rho A_\rho(\rho, \varphi, z) d\rho + h_\varphi A_\varphi(\rho, \varphi, z) d\varphi + h_z A_z(\rho, \varphi, z) dz =$$

$$= \int_{(\lambda)} A_\rho(\rho, \varphi, z) d\rho + \rho A_\varphi(\rho, \varphi, z) d\varphi + A_z(\rho, \varphi, z) dz$$

дає:

$$W = \int_{(l)} \vec{F} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} \rho^2 d\varphi + dz = \int_0^{2\pi} (a^2 + b) d\varphi = (a^2 + b) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(a^2 + b).$$

Приклад 8.4. Отримати формулу

$$W = \int_{(\ell)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_r A_r(r, \theta, \varphi) dr + h_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + h_z A_z(r, \theta, \varphi) d\varphi =$$

$$= \int_{(\lambda)} A_r(r, \theta, \varphi) dr + r A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + r \sin \theta A_\varphi(r, \theta, \varphi) d\varphi$$

для лінійного інтеграла векторного поля в сферичних координатах.

Розв'язок. Виходимо із формули $W = \int_{t_0}^T (\vec{a}(t), d\vec{R}'(t)) dt$, яку можна

записати у вигляді:

$$W = \int_{t_0}^T \vec{a}(t) d\vec{R}(t)$$

і розв'язку прикладу 6.6. в цьому прикладі встановлено, що

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = h_r r'_t \vec{e}_r + h_\theta \theta'_t \vec{e}_\theta + h_\varphi \varphi'_t \vec{e}_\varphi.$$

Так як

$$\vec{a}(t) = A_r[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \vec{e}_r + A_\theta[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \vec{e}_\theta + A_\varphi[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \vec{e}_\varphi$$

то

$$(\vec{a}(t), d\vec{R}(t)) = \{h_r A_r[r(t), \theta(t), \varphi(t)] r'_t + h_\theta A_\theta[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \theta'_t + h_\varphi A_\varphi[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \varphi'_t\} dt$$

Отже,

$$W = \int_{t_0}^T \{h_r A_r[r(t), \theta(t), \varphi(t)] r'_t + h_\theta A_\theta[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \theta'_t + h_\varphi A_\varphi[r(t), \theta(t), \varphi(t)] \varphi'_t\} dt$$

Отриманий вираз є результатом зведення до звичайного інтеграла криволінійного інтеграла:

$$\int_{(\lambda)} h_r A_r(r, \theta, \varphi) dr + h_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + h_\varphi A_\varphi(r, \theta, \varphi) d\varphi$$

в просторі координат r, θ, φ . Таким чином, формула

$$\begin{aligned} W &= \int_{(\ell)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_r A_r(r, \theta, \varphi) dr + h_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + h_z A_z(r, \theta, \varphi) d\varphi = \\ &= \int_{(\lambda)} A_r(r, \theta, \varphi) dr + r A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + r \sin \theta A_\varphi(r, \theta, \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

доведена.

Приклад 8.5. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(r, \theta, \varphi) = (2r + a \cos \theta) \vec{e}_r + a \cos \theta \vec{e}_\theta + (r + a \cos^2 \varphi) \sin \theta \vec{e}_\varphi$, заданого в сферичних координатах, вздовж кола $r = a, \theta = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язок. Skorистаємося виразом лінійного інтеграла в сферичних координатах (див. формулу):

$$\begin{aligned} W &= \int_{(\ell)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_r A_r(r, \theta, \varphi) dr + h_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + h_z A_z(r, \theta, \varphi) d\varphi = \\ &= \int_{(\lambda)} A_r(r, \theta, \varphi) dr + r A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + r \sin \theta A_\varphi(r, \theta, \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Для знаходження циркуляції треба обчислити лінійний інтеграл по замкнутому шляху.

За умовою $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, отже, $dr = d\theta = 0$.

Параметром на колі природно обрати кут φ . Отримаємо:

$$\Gamma = \oint_{(l)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} r(r + a \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta d\varphi.$$

Враховуючи, що при обході по замкненому шляху кут φ змінюється від 0 до 2π , отримаємо:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + a^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = a^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi + a^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} 2\pi + \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

Приклад 8.6. Вивести формулу

$$\text{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\theta \vec{e}_\theta & h_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

для ротора векторного поля в сферичних координатах.

Розв'язок. Будемо виходити з того, що за формулою:

$$\text{rot} \vec{a}(M) = I_1 \vec{i} + I_2 \vec{j} + I_3 \vec{k}.$$

Тут в якості векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ використаємо вектори $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$. За

означенням (формула $I(M_0) = \lim_{(l) \rightarrow M_0} \frac{1}{S_l} \oint_{(l)} (\vec{a}(M), \vec{\tau}(M)) ds$):

$$I_1(M) = \lim_{(l) \rightarrow M} \frac{1}{S_l} \oint_{(l)} \vec{a} d\vec{R},$$

де

$$\vec{a}(t) = A_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi,$$

а (l) – замкнутий контур на сфері $\rho = \text{const}$. Такий вибір контура допустимий, так як вектор \vec{e}_r перпендикулярний сфері. (S_l) – фігура на сфері $\rho = \text{const}$, що обмежена контуром (l) і містить точку, в якій обчислюється густина циркуляції. Тоді:

$$\oint_{(l)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_\theta A_\theta d\theta + r h_\varphi A_\varphi d\varphi,$$

де (λ) – малий замкнутий контур в просторі координат $\theta, \varphi, r = \text{const}$, що відповідає контуру (l) . Ми використали формулу

$$\begin{aligned} W &= \int_{(l)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_r A_r(r, \theta, \varphi) dr + h_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + h_z A_z(r, \theta, \varphi) d\varphi = \\ &= \int_{(\lambda)} A_r(r, \theta, \varphi) dr + r A_\theta(r, \theta, \varphi) d\theta + r \sin \theta A_\varphi(r, \theta, \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

і врахували, що $dr = 0$. Використовуємо тепер формулу Гріна і теорему про середнє значення:

$$\begin{aligned} \oint_{(\lambda)} h_\theta A_\theta d\theta + h_\varphi A_\varphi d\varphi &= \iint_{(\sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\theta A_\theta) \right] d\theta d\varphi = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\theta A_\theta) \right] \Bigg|_{\substack{\theta=\theta \\ \varphi=\varphi \\ r=\text{const}}} \iint_{(\sigma)} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Тут (σ) – площадка в просторі координат $\theta, \varphi, r = \text{const}$, що відповідає фігурі (S_l) . Площа S_l фігури (S_l) може бути обчислена за формулою:

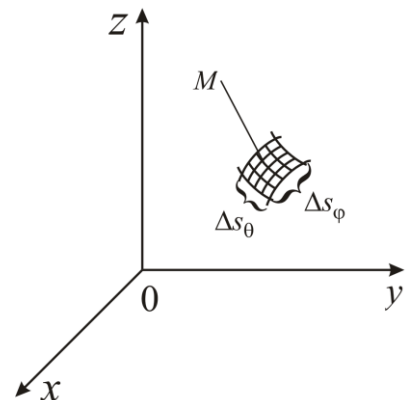
$$S_l = \iint_{(\sigma)} h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi (*).$$

Цю формулу (*) ми приймаємо без доведення. Аналогічні формули мають місце для площ фігур, що розташовані на поверхнях, де одна із криволінійних ортогональних координат є сталою.)

Використаємо теорему про середнє:

$$S_l = h_\theta h_\varphi \Bigg|_{\substack{\theta=\tilde{\theta} \\ \varphi=\tilde{\varphi} \\ r=\text{const}}} \iint_{(\sigma)} d\theta d\varphi.$$

Точки $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ і $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ знаходяться десь на (σ) .



До прикладу 8.6.

Зауважимо, що остання формула майже очевидна, якщо вважати, що контур (l) обмежений лініями s_θ і s_φ (згідно рисунка). Так як лінії s_θ і s_φ ортогональні, то для малої (S_l) :

$$S_l \cong \Delta s_\theta \Delta s_\varphi \cong \frac{ds_\theta}{d\theta} \Delta\theta \frac{ds_\varphi}{d\varphi} \Delta\varphi \cong h_\theta h_\varphi \Delta\theta \Delta\varphi,$$

але, з іншого боку, для вказаної $(S)_l$:

$$\iint_{(\sigma)} d\theta d\varphi = \Delta\theta\Delta\varphi.$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{(l) \rightarrow M} \frac{1}{S_l} \oint_{(l)} \vec{a} d\vec{r} = \lim_{(l) \rightarrow M} \frac{1}{(h_\theta h_\varphi)} \Big|_{\substack{\theta=\tilde{\theta} \\ \varphi=\tilde{\varphi}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (h_\theta A_\theta) \right] \Big|_{\substack{\theta=\tilde{\theta} \\ \varphi=\tilde{\varphi}}} = \\ &= \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (h_\theta A_\theta) \right]. \end{aligned}$$

Тут $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ і $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ прямують до θ і φ – сферичним координатам точки M , що знаходиться в середині контуру. Остання частина рівності, в якій всі величини беруть в точці обчислення циркуляції, отримана в силу неперервності (разом з першими похідними) коефіцієнтів h_θ , h_φ і векторного поля $\vec{a}(r, \theta, \varphi)$. Таким чином,

$$I_1 = \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (h_\theta A_\theta) \right].$$

Аналогічно знайдемо густину циркуляції I_2 відносно напрямку вектора \vec{e}_θ :

$$I_2 = \frac{1}{h_\varphi h_r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} (h_r A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (h_\varphi A_\varphi) \right]$$

і густину циркуляції I_3 відносно напрямку вектора \vec{e}_φ :

$$I_3 = \frac{1}{h_r h_\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (h_\theta A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} (h_r A_r) \right].$$

Підставляючи знайдені значення I_1 , I_2 , I_3 в формулу $\text{rot } \vec{a}(M) = I_1 \vec{i} + I_2 \vec{j} + I_3 \vec{k}$:

$$\text{rot } \vec{a}(M) = I_1 \vec{e}_r + I_2 \vec{e}_\theta + I_3 \vec{e}_\varphi,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a}(M) &= \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (h_\theta A_\theta) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{h_\varphi h_r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} (h_r A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (h_\varphi A_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \frac{1}{h_r h_\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (h_\theta A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} (h_r A_r) \right] \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

або

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \cdot \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\theta \vec{e}_\theta & h_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix},$$

що і треба було довести.

Приклад 8.7. Вивести формулу

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\theta \vec{e}_\theta & h_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

для ротора векторного поля в сферичних координатах із виразу $\operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}]$.

Розв'язок. За формулою

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

оператор диференціювання в сферичних координатах має вигляд:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

де r, θ, φ і вектори $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ фіксовані в точці, де діє оператор $\vec{\nabla}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}] &= \frac{\partial}{\partial r} [\vec{e}_r, \vec{a}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\vec{e}_\theta, \vec{a}] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\vec{e}_\varphi, \vec{a}] = \\ &= \left[\vec{e}_r, \frac{\partial \vec{a}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[\vec{e}_\theta, \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\vec{e}_\varphi, \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

де

$$\vec{a} = A_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

При диференціюванні вектора \vec{a} слід врахувати, що вектори $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ в останній рівності не є постійними. Тому нам знадобляться формули диференціювання векторів $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$. Із формул

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

впливає, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0; & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= 0; & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta; & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_\varphi; & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{e}_\varphi; & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \vec{e}_\varphi; & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta; \end{aligned}$$

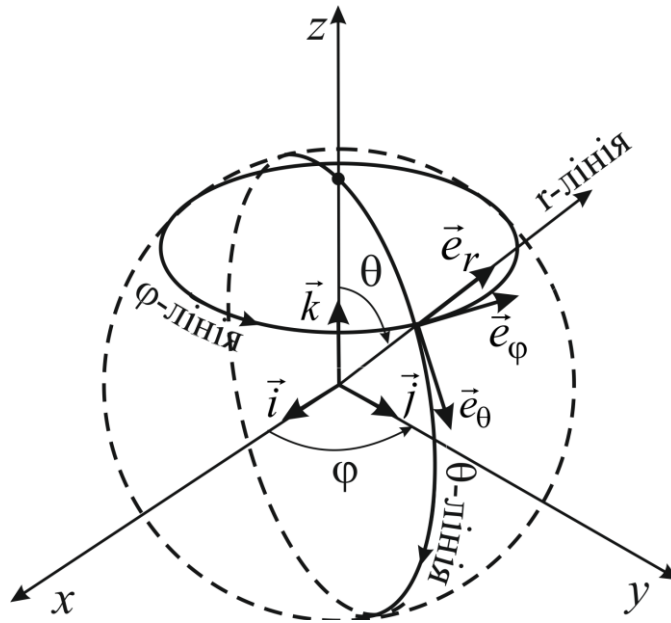
Перевірку цих формул рекомендуємо провести самостійно. З врахуванням вписаної таблиці похідних маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial r} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi + A_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi; \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} &= \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi + A_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - A_\theta \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi = \\ &= \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi; \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + A_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \sin \theta A_r \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + \cos \theta A_\theta \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) = \\ &= \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta A_\varphi \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta A_\varphi \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta \right) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Використовуючи знайдені вирази для похідних векторного поля, отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \left[\vec{e}_r, \frac{\partial \vec{a}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[\vec{e}_\theta, \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\vec{e}_\varphi, \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial A_r}{\partial r} [\vec{e}_r, \vec{e}_r] + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} [\vec{e}_r, \vec{e}_\theta] + \\ & + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} [\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi] + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - A_\theta \right) [\vec{e}_\theta, \vec{e}_r] + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) [\vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta] + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} [\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi] \right\} + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta A_\varphi \right) [\vec{e}_\varphi, \vec{e}_r] + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta A_\varphi \right) [\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta \right) [\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\varphi] \right\}. \end{aligned}$$

Так як одиничні вектори $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ортогональні і утворюють правий базис (згідно рисунка), то



До прикладу 8.7.

$[\vec{e}_r, \vec{e}_r] = 0;$	$[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta] = \vec{e}_\varphi;$	$[\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi] = -\vec{e}_\theta;$
$[\vec{e}_\theta, \vec{e}_r] = -\vec{e}_\varphi;$	$[\vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta] = 0;$	$[\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi] = \vec{e}_r;$
$[\vec{e}_\varphi, \vec{e}_r] = \vec{e}_\theta;$	$[\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta] = -\vec{e}_r;$	$[\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\varphi] = 0.$

Підставляючи значення векторних добутоків із цієї таблиці в попередню формулу, знайдемо:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta A_\varphi \right) \vec{e}_\theta - \\
 &\quad - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta A_\varphi \right) \vec{e}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + \cos \theta A_\varphi - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - r \sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \sin \theta A_\varphi \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi = \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right\} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right\} \vec{e}_\theta + \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Формула

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\theta \vec{e}_\theta & h_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

доведена.

Задачі для самостійного розв'язку

118. Обчислити ротор векторного поля, заданого в циліндричних координатах:

а) $\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\varphi$;

б) $\vec{a} = \rho^2 z \vec{e}_\varphi - \rho z^2 \vec{e}_z$;

в) $\vec{a} = (\rho + z^2) \vec{e}_\rho + z \cos \varphi \vec{e}_\varphi + (\rho \sin \varphi - z^3) \vec{e}_z$ в точці $M\left(\frac{1}{2}, \pi, 2\right)$;

г) $\vec{a} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\rho + z \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin \varphi \vec{e}_z$.

Відповідь: а) $\operatorname{rot} \vec{a} = -\vec{e}_\rho + \frac{z}{\rho} \vec{e}_z$; б) $\operatorname{rot} \vec{a} = -\rho^2 \vec{e}_\rho + z^2 \vec{e}_\varphi + 3\rho z \vec{e}_z$;

в) $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = 4\vec{e}_\varphi - \vec{e}_z$; г) $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

119. Обчислити ротор векторного поля, заданого в сферичних координатах:

a) $\vec{a} = cr\vec{e}_r + (d+r)\sin\theta\vec{e}_\varphi \quad (c, d = \text{const});$

б) $\vec{a} = (2r + c\cos\theta)\vec{e}_r - c\sin\theta\vec{e}_\theta + r\cos\theta\vec{e}_\varphi \quad (c = \text{const});$

в) $\vec{a} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta$ в точці $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right);$

г) $\vec{a} = 2r\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_r - r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_\theta + \left(\frac{b^2\cos\varphi}{r\sin\theta} - r\text{ctg}\theta\sin\varphi\right)\vec{e}_\varphi \quad (b = \text{const})$

Відповідь: а) $\text{rot}\vec{a} = 2\frac{d+r}{r}\cos\theta\vec{e}_r - \frac{d+2r}{r}\sin\theta\vec{e}_\theta;$

б) $\text{rot}\vec{a} = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\vec{e}_r - 2\cos\theta\vec{e}_\theta;$ в) $\text{rot}\vec{a}(M_0) = 9\vec{e}_\varphi;$ з) $\text{rot}\vec{a} = 0.$

120. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля

$\vec{a} = \rho z\vec{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$ вздовж лінії $\rho = 2\varphi + 1, z = \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi.$

Відповідь: $W = \frac{2}{3}\pi^3 + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi.$

121. Відшукати циркуляцію векторного поля

$\vec{a} = \frac{\sin\varphi}{\rho^2}\vec{e}_\rho + \frac{z}{\rho^2}\vec{e}_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\vec{e}_z$ вздовж кола $\rho = 2, z = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

Відповідь: $\Gamma = \pi.$

122. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля

$\vec{a} = 2\vec{e}_r + \frac{4\cos^2\theta}{r}\vec{e}_\theta - \frac{2\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi$ вздовж кола $r = 3, \theta = \frac{1}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi.$

Відповідь: $W = 0.$

123. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля

$\vec{a} = r\vec{e}_r + (2+r)\sin\theta\vec{e}_\varphi$ за колом $r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

Відповідь: $W = 4\pi.$

124. За аналогією з розв'язком прикладу 8.4 довести формулу

$$W = \int_{(l)} \vec{a} d\vec{R} = \int_{(\lambda)} h_\rho A_\rho(\rho, \varphi, z) d\rho + \int_{(\lambda)} h_\varphi A_\varphi(\rho, \varphi, z) d\varphi + \int_{(\lambda)} h_z A_z(\rho, \varphi, z) dz =$$

$$= \int_{(\lambda)} A_\rho(\rho, \varphi, z) d\rho + \rho A_\varphi(\rho, \varphi, z) d\varphi + A_z(\rho, \varphi, z) dz \quad \text{для лінійного інтеграла}$$

векторного поля в циліндричних координатах.

125. За аналогією з розв'язком прикладів 8.6 та 8.7 отримати двома способами вираз

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \begin{vmatrix} h_\rho \vec{e}_\rho & h_\varphi \vec{e}_\varphi & h_z \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_\rho A_\rho & h_\varphi A_\varphi & h_z A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

для ротора векторного поля в циліндричних координатах.

126. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi - \frac{z^4}{\rho} \vec{e}_z$,

заданого у циліндричній системі координат.

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\cos \varphi - \frac{z^4}{\rho^2} \right) \vec{e}_\varphi - \cos \varphi \vec{e}_z$.

127. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \cos \varphi \vec{e}_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \vec{e}_\varphi - \rho z^4 \vec{e}_z$,

заданого у циліндричній системі координат.

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{a} = z^4 \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\sin \varphi}{\rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho^3} \right) \vec{e}_z$.

128. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \operatorname{tg} \varphi \vec{e}_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi - \rho z \vec{e}_z$,

заданого у циліндричній системі координат.

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{a} = z \vec{e}_\varphi - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \vec{e}_z$.

129. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{\sin \theta}{r} \vec{e}_r + r \cos \theta \vec{e}_\theta - \frac{\sin \varphi}{r^3} \vec{e}_\varphi$,

заданого в сферичній системі координат в точці $N\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь: $\operatorname{rot} \vec{a} = -16\sqrt{2} \vec{e}_\theta$.

130. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = r\vec{e}_r + (r-1)\cos\theta\vec{e}_\theta - r^2\vec{e}_\varphi$, заданого в сферичній системі координат в точці $N\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\text{rot } \vec{a} = 3\vec{e}_\theta$.

131. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = (r+1)\vec{e}_r + (r-1)\sin\theta\vec{e}_\theta$, заданого в сферичній системі координат в точці $N\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\text{rot } \vec{a} = \frac{7\sqrt{2}}{8}\sqrt{2}\vec{e}_\varphi$.

132. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = r^2\vec{e}_r + (r\cos\theta - 1)\vec{e}_\theta - \sqrt{r}\vec{e}_\varphi$, заданого в сферичній системі координат в точці $N\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{e}_\theta$.

133. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = \rho^2\vec{e}_\rho - \sqrt{\rho}\cos\varphi\vec{e}_\varphi$, заданого в сферичній системі координат в точці $N\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $\text{rot } \vec{a} \Big|_M = -\frac{\sqrt{2}}{16}\vec{e}_\theta$.

ДОДАТКИ

Додаток А

Основні диференціальні операції математичної теорії поля

Градiєнт скалярної функції $\varphi(\vec{r})$ в довільній точці простору ортогональної криволінійної системи координат:

$$\text{grad}\varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \vec{e}_3.$$

Градiєнт скалярного поля в різних криволінійних системах координат:

Для сферичної системи координат: $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$.

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_3.$$

Для циліндричної системи координат: $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$.

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Для декартової системи координат: $H_x = 1$, $H_y = 1$, $H_z = 1$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$.

$$\text{grad}\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Дивергенція векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в довільній точці простору ортогональної криволінійної системи координат:

$$\text{div}\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 H_1 a_{q_3}) \right)$$

Дивергенція векторного поля в різних криволінійних системах координат:

Для сферичної системи координат: $\vec{a} = \vec{a}(r, \theta, \varphi)$

$$\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Для циліндричної системи координат: $\vec{a}(\rho, \varphi, z)$

$$\text{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Для декартової системи координат: $\vec{a}(x, y, z)$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Ротор векторної функції $\vec{a}(\vec{r})$ в довільній точці простору ортогональної криволінійної системи координат:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_{q_1} & H_2 a_{q_2} & H_3 a_{q_3} \end{vmatrix}$$

Ротор векторного поля в різних криволінійних системах координат:

Для сферичної системи координат: $\vec{a} = \vec{a}(r, \theta, \varphi)$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ q_r & r q_\theta & r \sin \theta q_\varphi \end{vmatrix}.$$

Для циліндричної системи координат: $\vec{a}(\rho, \varphi, z)$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

Для декартової системи координат: $\vec{a}(x, y, z)$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Додаток Б

Оператор Гамільтона

Оператор Гамільтона в декартовій системі координат:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

За його допомогою основні дії з диференціювання скалярних та векторних функцій зводяться до відповідного множення оператора $\vec{\nabla}$ на ці функції:

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi,$$

$$\text{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a},$$

$$\text{rot}\vec{a} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{a}].$$

Звідси випливає ряд наслідків:

1. $\vec{\nabla}$ – лінійний, а тому

$$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi. \quad (\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi);$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla}\vec{a} + \vec{\nabla}\vec{b} \quad (\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div}\vec{a} + \text{div}\vec{b});$$

$$[\vec{\nabla}, (\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{\nabla}, \vec{a}] + [\vec{\nabla}, \vec{b}] \quad (\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot}\vec{a} + \text{rot}\vec{b}).$$

2. Тому, що $\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор, то в цих випадках, коли φ чи \vec{a} є постійними $\varphi, \vec{a} = \text{const}$, тоді

$$\vec{\nabla}\varphi = 0, \quad \vec{\nabla}\vec{a} = 0 \quad \text{та} \quad [\vec{\nabla}, \vec{a}] = 0.$$

3. Результат дії диференціального оператора $\vec{\nabla}$ на добуток двох скалярних функцій чи на добуток скалярної функції і векторної рівний сумі добутків кожного співмножника на результат застосування оператора до другого співвідношення:

$$\vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi;$$

$$\vec{\nabla}(\varphi\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi) + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \vec{a}\text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\vec{a};$$

$$[\vec{\nabla}, (\varphi\vec{a})] = \varphi[\vec{\nabla}, \vec{a}] + [(\vec{\nabla}\varphi), \vec{a}] = \varphi\text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\varphi, \vec{a}].$$

Додаток В
Формули Гріна

Перша:
$$\int_V ((\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi) + \varphi \cdot \nabla^2\psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS.$$

Друга:
$$\int_V (\varphi \nabla^2\psi - \psi \cdot \nabla^2\varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Додаток Д

Диференціальні операції другого порядку

1. $\text{div grad}\varphi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$
2. $\text{rot grad}\varphi = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi] = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}] \varphi = 0$
3. $\text{div rot}\vec{a} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}] \vec{a} = 0$
4. $\text{rot rot}\vec{a} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \text{grad div}\vec{a} = \Delta\vec{a}.$
5. $\text{grad div}\vec{a} = \text{rot rot}\vec{a} + \Delta\vec{a}.$

Додаток Е

Оператор Лапласа

Оператор Лапласа: $\Delta = \nabla^2.$

Оператор Лапласа Δ в ортогональних криволінійних координатах q_1, q_2 і q_3 записується наступним чином:

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right\}.$$

Оператор Лапласа в різних криволінійних системах координат:

Для сферичної системи координат: $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$

$$\Delta(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Для циліндричної системи координат: $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$

$$\Delta(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для декартової системи координат: $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

$$\Delta(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Додаток Ж

Поліноми Лежандра

Диференціальною формулою для поліномів Лежандра або формулою Родріга є вираз:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right].$$

Поліноми Лежандра $P_n(x)$ є власними функціями, що відповідають власним значенням $\lambda_n = n(n+1)$, наступної задачі: відшукати такі значення λ , для яких на відрізку $-1 \leq x \leq 1$ існують нетривіальні розв'язки рівняння Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

обмежені при $x = \pm 1$ і такі, що задовольняють умові нормування $y(1) = 1$.

Рекурентна формула, що пов'язує три послідовних полінома з урахуванням формули Родріга:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Додаток З

Поліноми Лагерра

Поліном Лагерра $L_n(x)$ ($a=0, b=\infty, p(x)=e^{-x}$), входить як множник при e^{-x} в похідну n -го порядку від функції $x^n e^{-x}$:

$$L_n = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Наприклад,

$$L_0 = 1,$$

$$L_1(x) = -x + 1,$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

Додаток И

Поліноми Чебишева-Ерміта

Поліном Чебишева-Ерміта можна обчислити за допомогою формули:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\xi^2} \right),$$

його можна відшукати як розв'язок диференціального рівняння:

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0.$$

Деякі властивості поліномів Чебишева-Ерміта:

$$1) H_{n+1}(\xi) = 2\xi \cdot H_n(\xi) - 2n \cdot H_{n-1}(\xi).$$

Наприклад,

$$H_0(\xi) = 1, H_1(\xi) = 2\xi, H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \text{ тому:}$$

$$H_2(\xi) = H_{1+1}(\xi) = 2\xi \cdot H_1(\xi) - 2 \cdot 1 \cdot H_0 = 2\xi \cdot 2\xi - 2 = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = H_{2+1}(\xi) = 2\xi \cdot H_2(\xi) - 2 \cdot 2 \cdot H_1(\xi) = 2\xi \cdot (4\xi^2 - 2) - 4 \cdot 2\xi = \\ = 8\xi^3 - 4\xi - 8\xi = 8\xi^3 - 12\xi.$$

Тобто, подібним способом можна обчислити будь-які $H_n(\xi)$, не користуючись безпосередньо його означенням.

$$2) \frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1};$$

$$3) \xi \Psi_n = \sqrt{\frac{n}{2}} \Psi_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \Psi_{n+1}; \quad \frac{d\Psi_n}{d\xi} = \sqrt{\frac{n}{2}} \Psi_{n-1} - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \Psi_{n+1};$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(\xi) \Psi_{n'}(\xi) d\xi = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}$$

Додаток К

Класифікація нелінійних рівнянь

1. Рівняння параболічного типу з однією просторовою змінною

1.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями типу:

$$1.1.1. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(\omega);$$

$$1.1.6. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \omega^k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.1.2. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega);$$

$$1.1.7. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega^m \frac{\partial \omega}{\partial x} \right);$$

$$1.1.3. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g(x, t, \omega);$$

$$1.1.8. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + g(\omega);$$

$$1.1.4. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, \omega);$$

$$1.1.9. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.1.5. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

1.1.10. Інші рівняння.

1.2. Рівняння з експоненціальними нелінійностями типу:

$$1.2.1. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(\omega);$$

1.2.3. Інші рівняння.

$$1.2.2. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + f(x, t, \omega);$$

1.3. Рівняння з гіперболічними нелінійностями:

1.3.1. Рівняння, що містять гіперболічний косинус.

1.3.2. Рівняння, що містять гіперболічний синус.

1.3.3. Рівняння, що містять гіперболічний тангенс.

1.3.4. Рівняння, що містять гіперболічний котангенс.

1.4. Рівняння з логарифмічними нелінійностями типу: $\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega)$.

1.5. Рівняння з тригонометричними нелінійностями, що містять косинус, синус, тангенс котангенс.

1.6. Рівняння, що містять довільні функції типу:

$$1.6.2. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega);$$

$$1.6.4. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 +$$

$$1.6.3. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, \omega);$$

$$+ f(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g(x, t, \omega);$$

$$1.6.5. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + h(x, t, \omega);$$

$$1.6.6. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.7. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = f(x, t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.8. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g(x, t, \omega);$$

$$1.6.9. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = (a\omega + b) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + h(x, t, \omega);$$

$$1.6.10. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a\omega^m \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.11. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega^m \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.12. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.13. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.14. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = f(x, t, \omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2};$$

$$1.6.15. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = f(x, t, \omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$1.6.16. \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = f\left(x, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

1.6.17. Нелінійні рівняння теплового (дифузного) граничного шару.

1.7. Нелінійне рівняння Шредінгера і споріднені рівняння типу:

$$1.7.1. \quad i \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(|\omega|)\omega = 0, \text{ що містить довільні параметри.}$$

$$1.7.2. \quad i \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + f(|\omega|)\omega = 0, \text{ що містить довільні параметри.}$$

1.7.3. Рівняння з кубічною нелінійністю, що містять довільні функції.

1.7.4. Рівняння загального вигляду, що містять довільні функції.

2. Рівняння параболічного типу з двома і більше просторовими змінними

2.1. Рівняння з двома просторовими змінними

2.1.1. Рівняння, що містять довільні параметри.

2.1.2. Рівняння, що містять довільні функції.

2.2. Рівняння з трьома і більше просторовими змінними.

2.2.1. Рівняння, що залежать від трьох просторових змінних.

2.2.2. Рівняння, що залежать від n просторових змінних.

3. Рівняння гіперболічного типу з одною просторовою змінною

3.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями типу:

$$3.1.1. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega);$$

$$3.1.2. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right);$$

$$3.1.3. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right); \quad 3.1.4. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(\omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

3.2. Рівняння з експоненціальними нелінійностями типу:

$$3.2.1. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega); \quad 3.2.2. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

3.3. Інші рівняння, що містять довільні параметри

3.3.1. З гіперболічними нелінійностями.

$$3.3.4. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + a \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right].$$

3.3.2. З логарифмічними нелінійностями.

$$3.3.5. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right].$$

3.3.3. З тригонометричними нелінійностями.

3.4. Рівняння, що містять довільні функції типу:

$$3.4.1. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t, \omega).$$

$$3.4.5. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(x, \omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

$$3.4.2. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

$$3.4.6. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(t, \omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

$$3.4.3. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

3.4.7. Інші рівняння

$$3.4.4. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(\omega) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + g\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

3.5. Рівняння типу $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + f\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = 0$:

3.5.1. Рівняння, що містять довільні параметри.

3.5.2. Рівняння, що містять довільні функції.

4. Рівняння гіперболічного типу з двома просторовими змінними степеневою

4.1. Рівняння, що містять довільні параметри

4.1.1. Рівняння з квадратичною і степеневою не лінійністю.

4.1.2. Рівняння з експоненціальною не лінійністю.

4.2. Рівняння, що містять довільні функції.

$$4.2.1. \quad \text{Рівняння вигляду } \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right).$$

4.2.2. Інші рівняння.

5. Рівняння еліптичного типу з двома незалежними змінними

5.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями типу:

5.1.1. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f(x, y, \omega).$

5.1.3. $\frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = g(\omega).$

5.1.2. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f \left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y} \right).$

5.1.4. Інші рівняння, що містять довільні параметри.

5.2. Рівняння з експоненціальними нелінійностями типу:

5.2.1. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f(x, y, \omega).$

5.2.3. Інші рівняння, що містять довільні параметри.

5.2.2. $\frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = g(\omega).$

5.3. Рівняння, що містять інші нелінійності: гіперболічні, логарифмічні, тригонометричні.

5.4. Рівняння, що містять довільні функції типу:

5.4.1. $\Delta \omega = f(x, y, \omega).$

5.4.4.

5.4.2. $a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f \left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y} \right).$

$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(x, y, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = h(x, y, \omega)$

5.4.3. $\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(x) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = h(x).$

5.4.5. Інші рівняння.

6. Рівняння еліптичного типу з трьома і більше незалежними змінними

6.1. Рівняння з трьома незалежними змінними

6.1.1. Рівняння, що містять довільні параметри

6.1.2. Трьохмірні рівняння, що містять довільні функції

6.2. Рівняння з довільним числом незалежних змінних

6.2.1. Рівняння лінійні відносно старших похідних

6.2.2. Рівняння нелінійні відносно старших похідних

7. Рівняння змішаного типу

7.1. Рівняння лінійні відносно змішаної похідної

7.1.1. Рівняння Хохлова-Заболоцької

7.1.2. Рівняння нестационарного трансзвукового газового потоку

7.1.3. Інші рівняння

7.2. Рівняння квадратичні відносно старших похідних типу:

7.2.1. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f(x, y).$

7.2.3. $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = f(x, y) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + g(x, y).$

7.2.2. Монжа-Ампера

7.2.4. Інші рівняння.

$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = F(x, y).$

7.3. Рівняння Беллмана та споріднені рівняння: з квадратичною не лінійністю та зі степеневою не лінійністю.

8. Рівняння другого порядку загального вигляду

8.1. Еволюційні рівняння типу:

8.1.1. $\frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right).$

8.1.3. $\frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right).$

8.1.2. $\frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(x, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right).$

8.1.4. $F\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right) = 0.$

8.2. Рівняння, що містять другі похідні обох змінних:

8.2.1. Рівняння типу $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right).$

8.2.2. Рівняння нелінійні відносно старших похідних.

9. Рівняння третього порядку

9.1. Рівняння Кортевега-де Фріза та споріднені рівняння:

9.1.1. Рівняння Кортевега-де Фріза $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} - 6\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$

9.1.2. Циліндричне, сферичне та модифіковане рівняння Кортевега-де Фріза.

9.1.3. Узагальнене рівняння Кортевега-де Фріза $\frac{\partial \omega}{\partial t} + a \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + f(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$

9.1.4. Рівняння, що приводяться до рівняння Кортевега-де Фріза.

9.1.5. Рівняння вигляду $\frac{\partial \omega}{\partial t} + a \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + f\left(t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = 0$

9.2. Рівняння гідродинамічного граничного шару:

9.2.1. Рівняння стаціонарного граничного шару ньютонівської рідини.

9.2.2. Рівняння стаціонарного граничного шару неньютонівської рідини.

9.2.3. Рівняння нестаціонарного граничного шару ньютонівської рідини.

9.2.4. Рівняння нестаціонарного граничного шару неньютонівської рідини.

9.3. Рівняння руху ідеальної рідини (рівняння Ейлера): стаціонарні й нестаціонарні.

9.4. Інші нелінійні рівняння третього порядку

9.4.1. Рівняння, що містять другі й треті похідні по t .

9.4.2. Рівняння, що містять змішані похідні.

10. Рівняння четвертого порядку

10.1. Рівняння, що містять другу похідну по t

10.1.1. Рівняння Буссінеска та його модифікації

10.1.2. Інші рівняння з квадратичною не лінійністю

10.2. Рівняння гідродинаміки (рівняння Нав'є-Стокса)

10.2.1. Стаціонарні рівняння

10.2.2. Нестаціонарні рівняння

11. Рівняння старших порядків

11.1. Еволюційні рівняння, лінійні відносно старшої похідної типу:

11.1.1.
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f(x, t, \omega).$$

11.1.2.
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

11.1.3.
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \omega}{\partial x^{n-1}}\right)$$

.

11.1.4.
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \omega \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g(x, t, \omega)$$

.

11.1.5. Інші рівняння.

11.2. Еволюційні рівняння загального типу:

$$11.2.1. \frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n}\right).$$

$$11.2.2. \frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n}\right).$$

$$11.2.3. \frac{\partial \omega}{\partial t} = F\left(x, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n}\right).$$

11.3. Рівняння, що містять другу похідну $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ типу:

$$11.3.1. \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f(x, t, \omega).$$

11.3.3.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \omega}{\partial x^{n-1}}\right)$$

$$11.3.2. \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f\left(x, t, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

11.3.4.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a\omega \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} + f(x, t, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g(x, t, \omega)$$

11.4. Інші рівняння:

11.4.1. Рівняння гідродинамічного типу.

11.4.2. Рівняння загального вигляду, що містять $\frac{\partial^n \omega}{\partial x^n}$ та $\frac{\partial^m \omega}{\partial y^m}$.

Бібліографічний список

Основна література

1. Несис Е.И. Методы математической физики: [учебн. пособие для студентов физ–мат. фак. пед. ин–тов]. / Е.И.Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
2. Свізинський А. Математичні методи теоретичної фізики / А.Свізинський. – К. : Вищ. шк., 1998. – 162 с.
3. Семянистый В.И. Задачник–практикум по математической теории поля / В.И.Семянистый, В.В.Цукерман. – М. : Просвещение, 1976. – 136 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики: [в пяти томах] / В.И.Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. 2. – 1974. – 656 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики: [в пяти томах] / В.И.Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. 3. Часть первая. – 1974. – 324 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики: [в пяти томах] / В.И.Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. 3. Часть вторая. – 1974. – 671 с.

Рекомендована література

1. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г.Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И.Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики: учебное пособие / Д.И.Блохинцев. – М. : Наука, 1976. – 664 с.
4. Будаков Б.М. Сборник задач по математической физике / Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – М. : Наука, 1979. – 686 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
6. Голод П.І. Математичні основи теорії симетрій / П.І.Голод, А.У.Клімик. – К. : Наукова Думка, 1992. – 366 с.
7. Зельдович Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б.Зельдович, А.Д.Мышкис. – М. : Главная редакция физ–мат. лит. изд-ва «Наука», 1973. – 351 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р.Курант, [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1964. – 843 с.
9. Курант Р. Методы математической физики: в 2-х томах / Р.Курант, Д.Гильберт, [пер. с англ.]. – М. : Гостехиздат, 1951. – Т 1. –1951. – 525 с.
10. Курант Р. Методы математической физики: в 2-х томах / Р.Курант, Д.Гильберт, [пер. с англ.]. – М. : Гостехиздат, 1951. – Т 1. –1951. – 620 с.
11. Курош А.Г. Теория групп / А.Г.Курош. – М. : Наука, 1967. – С. 648.
12. Морс Ф. Методы теоретической физики: в 2-х томах /Ф.Морс, Г.Фешбах, [пер. с англ.]. – М. : Издательство иностранной литературы, 1958. – Т.1. –1958.– 975 с.

13. Морс Ф. Методы теоретической физики: в 2-х томах /Ф.Морс, Г.Фешбах, [пер. с англ.]. – М. : Издательство иностранной литературы, 1958. – Т.2. – 1960. – 897 с.
14. Плянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д.Плянин, В.Ф.Зайцев. – М. : Физматлит, 2002. – 432 с.
15. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики: [для вузов] / Под общ. ред. Г.И.Кручковича. – М. : Высшая школа, 1970. – 511 с.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. – М. : Наука, 1966. – 444 с.
17. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М. : Наука, 1983. – 728 с.
18. Шутц Б. Геометрические методы математической физики / Б.Шутц. – М. : Мир, 1995. – 304 с.

Предметний покажчик

вектор «набла»	66, 86, 284
вектори	27, 30, 40, 42, 50
векторна лінія поля	63
векторне поле	22, 23, 29, 62, 90
вихор	69
власне значення тензора	46
вовчок	
– асиметричний	61
– симетричний	61
гамільтоніан	206
гармонічний осцилятор	186, 192
головне значення тензора	45
градієнт	21, 22, 30, 79, 80, 140
група	197
густина середовища	30
дивергенція	65, 67, 81, 86
еквіпотенціальна лінія	20
ефект Пашена-Бака	209
ефект Зеємана	206, 209
задача Діріхле	154, 178
задача Неймана	154
задача Коші	130, 132
інваріанти тензора	49
інтеграл Пуассона	178
коефіцієнти Ламе	77
комутатор	93
координати	
– декартові	12, 22, 70, 74
– криволінійні	74
– сферичні	75
– циліндричні	75
координатні лінії	75
координатна поверхня	75
лінії рівня	20

математична теорія поля	12
математична фізика	8
математичне поле	12
– векторні	12, 22, 23, 29, 62
– скалярні	12, 18
– тензорні	12
математичне моделювання	9
математичні моделі	6, 8
метод функцій Гріна	171
метод Фур'є	133
методи математичної фізики	10
нерівності Шварца	122
оператор	92
– Гамільтона	86, 88, 97, 188
– Лапласа (лапласіан)	88
– лінійний	92
– самоспряжений (ермітовий)	93
– комутативні	93
ортогональний афінний тензор II рангу	41
поле	12, 18
поліном	
– Лагерра	169
– Лежандра	161, 163
– Чебишева-Ерміта	193
потік вектора	63
похідна скалярного поля	19
рівняння	
– гіперболічного типу	103, 104, 118, 126, 131
– еліптичного типу	103, 105, 107, 118, 153
– параболічного типу	103, 105, 119, 139
– інтегральне	121
– квазілінійне	100
– коливань струни	126
– Лапласа	143, 153, 155, 159, 160, 161, 169

– Лежандра	164
– лінійне	100
– нелінійні	120
– однорідне	100
– Паулі	206
– Пуассона	116, 143, 154, 156
– теплопровідності	140, 142
– частинних похідних II-го порядку з двома незалежними змінними	99
– Шредінгера	97, 98, 188, 189
розв'язок Д'аламбера	131, 132
ротор	54, 70, 73, 82, 86
система координат	12, 74, 75, 80
– декартова	12, 78, 80
– ортогональна	75, 83
– сферична	80, 85
– циліндрична	80, 84
скалярні величини	11
стаціонарне поле швидкостей	34
сферичний вовчок	62
тверде тіло	61
тензор	12, 29, 30, 40, 41
– антисиметричний	42
– діада	42
– деформації	52
– інерції	57, 61
– напруг	54, 56
– нульовий	41
– одиничний	42
– симетричний	42
тензорна алгебра	42
теорема	
– Абеля-Руффіні	197
– Гауса	89
– Гауса-Остроградського	65
– Гельмгольца	90
– Кеніга	59

Предметний покажчик

теорія груп	196
теорія диференціальних рівнянь у часткових похідних	13
умови ортогональності	77
фізична система	25
формули Гріна	89
формула Родріга	161
функція	
– кульова	169
– сферична	169
– Гріна	175, 179
– Гамільтона	186
хвилі	
– плоскі	138
– стоячі	136
– сферичні	138
циркуляція	68

Іменний покажчик

Абель Н.	197	Лаплас П.	10, 14, 88, 90, 116,
Артін Е.	198		143, 153
		Лежандр А.	161, 163, 164
Вандермонд А.	197	Лі С.	198
		Ляпунов О.М.	10
Галуа Е.	197		
Гамільтон У.Р.	86, 88, 97, 186, 188, 209	Мебіус А.	197
Гаус К.	10, 65, 89, 142, 156, 198	Нейман К.	154
Гельмгольц Г.	90	Нетер Е.	198
Гільберт Д.	198	Ньютон І.	10
Грін Дж.	89, 171, 172, 175, 179, 182	Остроградський М.В.	10
Д'Аламбер Ж.	14, 129, 131	Паулі В.	206
Діріхле Й.	154	Пуассон С.	116, 143, 154, 156, 178, 180
Ейлер Л.	10, 198		
		Ріман Б.	10
Зеєман П.	161, 206, 208, 209	Родріг О.	161, 163
		Руффіні П.	197
Келі А.	197	Сілов Л.	198
Кеніг Д.	59	Стеклов В.А.	10
Клейн Ф.	197		
Коші О.	129, 130, 132	Фур'є Ж.	10, 15, 133, 140,
Кронекер Л.	198		151
Лагерр Е.	169	Шварц Г.	122
Лагранж Ж.-Л.	10, 197	Щредінгер Е.	97, 188, 189, 206
Ламе Г.	75		

**ПОДОПРИГОРА НАТАЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА
ТРИФОНОВА ОЛЕНА МИХАЙЛІВНА
САДОВИЙ МИКОЛА ІЛЛІЧ**

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ФІЗИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

**СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО
ДЕРЖАВНОГО
РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ
ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.**

Підп. до друку 06.03.2012 р. Формат 60×90/16. Папір офсет.
Друк різнограф. Ум. др. арк. 17,34. Тираж 300. Зам. № 6742.

*РЕДАКЦІЙНО–ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1.
Тел.: (0522) 24–59–84.
Fax.: (0522) 24–85–44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua*