Методи математичної фізики

Підручник для студентів
фізичних факультетів університетів

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів — 2011

УДК [517.5 + 517.4 + 517.9]
М 54
ББК В161я73 + В311я73

Рецензенти:
чл.-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф. **І. В. Стасюк**
(Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів)

д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Й. Вільчинський**
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Т. Швець**
(Одеська державна академія холоду)

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів фізичних факультетів університетів (лист №1/11-11378 від 14.12.2010).

Методи математичної фізики / *С. С. Піх, О. М. Попель, А. А. Ровенчак, І. І. Тальянський.* — Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. — 404 с.

Пропонований підручник містить виклад частини математичних методів, які необхідно засвоїти студентам фізичних і споріднених з ними спеціальностей, щоб мати змогу оволодіти усталеним університетським курсом теоретичної фізики. Матеріал складається з шести розділів: “Теорія функцій комплексної змінної”, “Елементи операційного числення. Інтеґральні перетворення”, “Узагальнені функції”, “Рівняння математичної фізики”, “Спеціальні функції”, “Елементи варіаційного числення”. Такий перелік, із незначними змінами, становить основу стандартного курсу з методів математичної фізики в більшості провідних університетів світу. Основна мета підручника — навчити користуватися методами математичної фізики для розв’язування різноманітних фізичних задач. Таке прагматичне спрямування зумовило відбір матеріалу. Водночас автори намагалися зробити виклад якомога дохідливішим і уникали заглиблення у суто математичні питання, які не є конче необхідними, щоб виконати завдання курсу.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів і для самоосвіти.

ISBN 978-966-613-...

Зміст

*“Методи математичної фізики —
надзвичайний предмет із ґрандіозними
задачами, де можна дати повну волю
найбільш вишуканій фантазії…”*

Ґ. Гарді, *Апологія математики*

Передмова

Сучасна теоретична фізика — це доволі широка галузь людського знання. Вона формувалась у міру того, як в історичному розвитку фізика трансформувалася з науки описової в науку точну. Відповідно, вчені використовували той математичний апарат, який творили “чисті” математики, а якщо його небуло, то такий апарат створювали фізики. Класичним прикладом є винахід диференціального числення Ісааком Ньютоном. Постійне прагнення фізиків формулювати найбільш загальні закони фізичних форм руху матерії у вигляді тих чи інших математичних співвідношень приводило до відповідних узагальнень і формалізацій математичних об’єктів та подальшого їх теоретичного обґрунтування. Характерним прикладом є створення теорії узагальнених функцій, започатковане уведенням відомої дельта-функції Дірака.

Коли йдеться про дисципліну з назвою “Методи математичної фізики”, можна було б уважати, що її зміст становить сукупність усіх тих математичних теорій, які сьогодні використовують у фізиці. Сам їх перелік зайняв би немало місця. У пропонованому підручнику викладено ту частину математичних методів, які необхідно засвоїти студентам фізичних і споріднених з ними спеціальностей, щоб мати змогу оволодіти усталеним університетським курсом теоретичної фізики. Підручник має шість розділів: “Теорія функцій комплексної змінної”, “Елементи операційного числення. Інтеґральні перетворення", "Узагальнені функції", "Рівняння математичної фізики", "Спеціальні функції" (сюди включено деякі факультативні параграфи, позначені "зірочкою"), "Елементи варіаційного числення". Цей перелік, із незначними змінами, становить основу курсу математичної фізики в більшості провідних університетів світу.

Зміст розділів та рівень викладення матеріалу апробовані багаторічним викладанням цієї дисципліни авторами у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Підручник орієнтовано на студентів усіх спеціальностей і спеціалізацій фізичних і споріднених з ними факультетів класичних університетів.

Основна мета курсу — навчити користуватися методами математичної фізики для розв'язування різноманітних фізичних задач. Таке прагматичне спрямування курсу зумовило відбір матеріалу. Водночас автори намагалися зробити виклад якомога дохідливішим і уникали заглиблення в суто математичні питання, які не є конче необхідними, щоб виконати завдання курсу. Що стосується підготовки майбутніх фізиків-теоретиків, то у навчальному процесі цей підручник треба доповнити іншими виданнями, передусім такими: *А. Свідзинський.* Математичні методи теоретичної фізики. Луцьк: Вежа, 2001; *Л. Шварц.* Математические методы для физических наук. Москва: Мир, 1965; *Р. Рихтмайер.* Принципы современной математической физики. Т. 1,2. Москва: Мир, 1982–1984.

Практичною частиною курсу є посібник *С. С. Піх, А. А. Ровенчак, Ю. С. Криницький.* 1001 задача з математичної фізики. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2006.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам, літературному редакторові та своїм колегам, зокрема Юрієві Криницькому й Романові Притулі за цінні поправки й зауваження, Віктору Дзіковському, який виконав більшість рисунків, та Олені Кіктєвій, яка взяла на себе обов'язок з комп'ютерного набору підручника і підготовку його до друку на високому професійному рівні.

Розділ I.

Теорія функцій комплексної змінної

Più di meno via più di meno, fà meno.
Più di meno via men di meno, fà più.
Meno di meno via più di meno, fà più.
Meno di meno via men di meno, fà meno.

Rafael Bombelli, *L'Algebra* (1572)

Вступ

Теорія функцій комплексної змінної як розділ математики є дієвим знаряддям застосування математичних методів у фізиці (механіці, електротехніці, радіотехніці, аеродинаміці, гідродинаміці, квантовій фізиці тощо).

Основи теорії закладено у XVIII ст., проте задачі, пов'язані з уявними величинами, вперше з'явилися у працях італійських математиків ще у XVI ст.[1]

Прийнято вважати, що комплексні числа виникли з потреб розв'язати квадратні рівняння на зразок $x^2 + 1 = 0$. Таке уявлен-

[1]Див. детальніше *А. А. Ровенчак, Ю. С. Криницький.* Історія виникнення комплексних чисел // Світ фізики № 3, С. 3–9 (2009).

ня неправильне, насправді поява комплексних чисел у математиці пов'язана з пошуком розв'язків кубічного рівняння, алгоритм розв'язування якого відкрив на початку XVI ст. Ш. дель Ферро[2]. Нам ці результати відомі як ***формула Кардано***:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}\ , \tag{I.1}$$

хоча насправді про метод розв'язування кубічних рівнянь Джероламо Кардано[3] дізнався від іншого математика, — Н. Фонтани, більше відомого як Тарталья[4], який, правдоподібно, винайшов його незалежно від Ш. дель Ферро. Наведена формула дає корінь рівняння $x^3 = px + q$, причому за певних значень коефіцієнтів можна натрапити на так званий незвідний випадок, коли рівняння має дійсні корені, але їхнє обчислення потребує добувати квадратний корінь із від'ємного числа...

Першим, кому піддалася проблема "незвідного" випадку кубічного рівняння, був, найімовірніше, Р. Бомбеллі[5]. У 1572 р. вийшло перше видання його праці *L'Algebra*, яку він готував протягом 1557–1560 рр. Саме у цій книзі вперше описано правила дій над тим, що ми нині називаємо уявними числами, які й винесено в епіграф: "più" означає "плюс", "meno" — "мінус", "via" — це множення, а "fà" — "дорівнює". У сучасних математичних позначеннях "più di meno" означає $+i$, а "meno di meno" — відповідно, $-i$. Р. Бомбеллі розглядав рівняння $x^3 = 15x + 4$, записуючи його так:

$$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}\ .\ \text{Egualeá 15.}\ \overset{1}{\smile}\ \text{p. 4.}$$

[2]Шіпіоне дель Ферро (Scipione del Ferro, 1465–1526) — італійський математик.

[3]Джероламо Кардано (Girolamo або Gerolamo Cardano, *лат.* Hieronymus Cardanus, 1501–1576) — італійський математик.

[4]Ніколо Тарталья (Niccolo Fontana Tartaglia, 1500–1557) — італійський математик.

[5]Рафаель Бомбеллі (Rafael Bombelli, 1526–1573?) — італійський інженер-гідравлік.

Це рівняння, як легко переконатися, має корінь 4, однак обчислення за формулою (I.1) потребує знаходження кореня $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$:

$$\mathrm{R.\,c.}\lfloor \mathrm{2.p.\,di\,m.121.} \rfloor\ .$$

Р. Бомбеллі зауважив, що кубічні корені містять $\sqrt{-121}$ з різними знаками, і припустив, що їх можна подати у вигляді — кажучи сучасною мовою — комплексно спряжених чисел. Такими числами є $2 \pm i$, які Р. Бомбеллі записав 2.p.di m.1. та 2.m.di m.1.

Проте насправді для того, щоб уявні числа стали звичними об'єктами, виявилися потрібними ще понад два століття. Самé означення “уявний” (imaginarius) належить Р. Декартові[6], який у праці *Geometria* (1659) так називав “неправильні” (недійсні) корені рівняння, тобто ті числа, які ми тепер називаємо комплексними.

Розвиток теорії у XVII–XVIII ст. пов'язаний з іменами Ґ. В. Ляйбніца[7], Й. Бернуллі I[8], А. Муавра[9].

Багато результатів, що стосуються комплексних чисел, отримав Л. Ейлер[10], який навів численні приклади застосування теорії функції комплексної змінної у різних математичних задачах та гідродинаміці. Л. Ейлер, зокрема, є автором позначення i для уявної одиниці, яке він уперше використав 1777 р. Вважають, що загальноприйнятим це позначення стало завдяки К. Ф. Ґауссу[11], який ужив його в праці *Disquisitiones aritmeticae* (1801).

[6]Рене Декарт (René Descartes, *лат.* Renatus Cartesius, 1596–1650) — французький філософ, математик і письменник

[7]Ґоттфрід Вільгельм Ляйбніц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) — німецький енциклопедист.

[8]Йоган Бернуллі I (Johann Bernoulli I, 1667–1748) — швейцарський математик

[9]Абрам Муавр (Abraham de Moivre, 1667–1754) — французький математик.

[10]Леонард Ейлер (Leonhard Paul Euler, 1707–1783) — математик і фізик, за походженням швейцарець, більшу частину життя провів у Росії та Німеччині. З огляду на німецьке походження, правильно це прізвище звучить “Ойлер”, проте більшість його публікацій виходила в Росії, звідки й форма “Ейлер”.

[11]Карл Фрідріх Ґаусс (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) — німецький математик, фізик, астроном.

Таке твердження можна прийняти із застереженнями. Можливо, насамперед популярним воно стало серед німецьких математиків. Принаймні у Франції і Британії щонайменше до 1820–30-х років зберігалося позначення $\sqrt{-1}$. К. Ф. Ґауссові також належить сам термін "комплексне число" (numerus complexus), який він запровадив у 1832 р.

До цього ж періоду належить і геометрична інтерпретація комплексних чисел. Правдоподібно, автором першої успішної спроби був К. Вессель[12], який 1797 р. виступив перед Данською Королівською Академією "Про аналітичне зображення напрямків...". Крім власне геометричного зображення, у цій праці встановлено аналогію між арифметичними операціями над комплексними числами і поворотами. Цікаво, що для позначення $\sqrt{-1}$ К. Вессель використав літеру ε.

Незалежно від К. Весселя аналогічних висновків дійшов 1806 р. Ж.-Р. Арґан[13]. Близько 1800 р. К. Ф. Ґаусс також розвинув ідею зображення комплексного числа на площині, однак ці результати він тоді не опублікував.

У 1833 р. В. Р. Гамільтон[14] аксіоматизував комплексні числа, розглядаючи їх як упорядковані пари дійсних чисел, так звані алґебраїчні пари (algebraic couples).

Ж. д'Аламбер[15] був одним із перших, хто фактично започаткував дослідження функцій комплексної змінної і дослідив умови, за яких функція є аналітичною. Сьогодні ці умови відомі як умови д'Аламбера–Ейлера–Коші–Рімана, або просто Коші–Рімана.

---

[12]Каспар Вессель (Caspar Wessel, 1745–1818) — норвезький непрофесійний математик, за професією земельний інспектор.

[13]Жан-Робер Арґан (Jean-Robert Argand, 1768–1822) — непрофесійний швейцарський математик.

[14]Вільям Рован Гамільтон (Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865) — ірландський математик.

[15]Жан лє Рон д'Аламбер (Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783) — французький математик, фізик, філософ.

О. Л. Коші[16] розвинув теорію функцій комплексної змінної. Він є автором теорії лишків. Йому, зокрема, належить термін "спряжені" (conjuguées) на позначення пари чисел $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Інтеґралом Коші називають інтеґральне зображення аналітичної функції.

У дисертації Ґ. Ф. Б. Рімана[17] "Основи загальної теорії функцій однієї комплексної змінної" (1851) послідовно викладено теорію аналітичних функцій з геометричного погляду, уведено поняття, відоме як "ріманова поверхня".

Імена О. Л. Коші та Ґ. Ф. Б. Рімана фактично символізують початок нового розділу математики комплексних чисел — комплексного аналізу.

§ 1. Комплексні числа, їхні послідовності

1.1. Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z називатимемо впорядковану пару дійсних чисел $z = (x, y)$. Перше число пари називатимемо ***дійсною частиною*** комплексного числа $x = \operatorname{Re} z$, а друге — ***уявною*** $y = \operatorname{Im} z$. Якщо $y = 0$, то $(x, 0) \equiv x$ — дійсне число. Отже, дійсні числа входять у множину комплексних чисел. Числа $(0, y)$ називатимемо ***уявними*** і позначатимемо їх iy, тобто $(0, y) = iy$, де i — так звана ***уявна одиниця***. Два комплексні числа $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ вважатимемо рівними тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

Визначимо основні операції над комплексними числами. Вони повинні бути такими, щоб у разі застосування їх до дійсних чисел, отримували такі ж числа, як і в арифметиці дійсних чисел.

---

[16] Оґюстен Луї Коші (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) — французький математик.

[17] Ґеорґ Фрідріх Бернгард Ріман (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) — німецький математик.

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ називатимемо комплексне число $z = (x, y)$, де $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Легко переконатись, що для дії додавання виконуються комутативність і асоціативність: $z_1+z_2 = z_2+z_1$, $z_1+z_2+z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. ***Нулем*** називатимемо комплексне число 0, для якого $z + 0 = z$; очевидно, що існує таке єдине комплексне число $0 = (0, 0)$.

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 називатимемо комплексне число z, для якого $x = x_1x_2 - y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$. Для операції множення виконуються властивості комутативності $z_1z_2 = z_2z_1$, асоціативності $z_1z_2z_3 = (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ та дистрибутивності щодо додавання $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$, у чому переконатися пропонуємо самостійно.

Число $(0, 1) = i$ в разі множення самого на себе дає такий результат:

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

або $i \cdot i = i^2 = -1$. Зокрема, квадратне рівняння $x^2 + 1 = 0$ має корені $x_{1,2} = \pm i$. Уведення символа i дає змогу ввести так звану ***алґебраїчну форму*** комплексного числа $z = (x, y)$, а саме: $z = x + iy$, і виконувати операції додавання і множення комплексних чисел за звичайними правилами алґебри поліномів.

Число $\bar{z} = x - iy$ називають ***комплексно-спряженим*** до числа $z = x + iy$. Операцію комплексного спряження часто позначають також “зірочкою”: $z^* = x - iy$.

Різницею $z = z_1 - z_2$ двох комплексних чисел є число z таке, що $z + z_2 = z_1$ або $x + x_2 = x_1$, $y + y_2 = y_1$, звідки $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ і, отже, $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Часткою чисел z_1 і z_2 є число $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ таке, що $zz_2 = z_1$. За правилами множення отримаємо систему рівнянь

$$xx_2 - yy_2 = x_1$$
$$xy_2 + yx_2 = y_1.$$

Частка існує, коли $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, що є умовою існування розв'язку системи рівнянь. Тоді

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

і, остаточно,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зазначимо, що цей результат легко отримати, якщо безпосередньо використати алґебраїчну форму для комплексних чисел z_1 і z_2: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$ і далі виконати дії за правилами алґебри.

Геометричне зображення комплексних чисел. Оскільки $z = (x, y)$, то природно зіставити числу z точку площини з декартовими координатами $M(x, y)$, тобто геометричним зображенням комплексного числа є точка площини. Точці $z = 0$ відповідає початок координат.

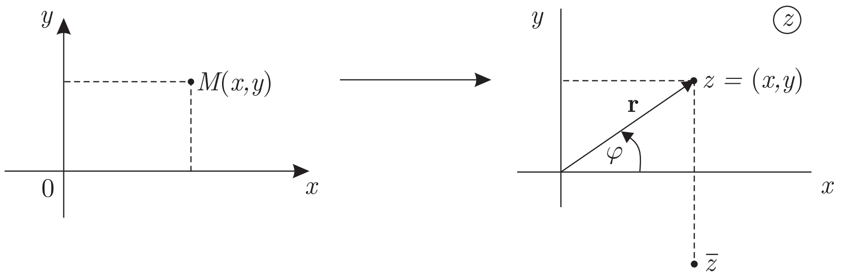


Рис. І.1.

Таку ***площину*** далі називатимемо ***комплексною***, вісь абсцис — ***дійсною віссю***, вісь ординат — ***уявною***. Існує взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок комплексної площини. Зазначимо, що комплексно-спряжене число зображають точкою, симетричною відносно дійсної осі (рис. І.1). Оскільки кожній точці на площині можна зіставити вектор, проведений з початку координат до цієї точки, то вводять векторне трактування комплексного числа, за яким довжину вектора $|\mathbf{r}| \equiv r$ називають ***модулем*** комплексного числа $r = |z|$. Кут φ (рис. I.1), що утворює вектор $\mathbf{r}$ з додатним напрямом осі OX, називають ***арґументом*** і позначають $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Він визначений не однозначно, а з точністю до числа, кратного 2π. Тому вводять поняття ***головного значення арґумента***, яке позначають $\arg z$. Його значення вибирають у межах $-\pi < \arg z \leq \pi$. Тоді

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{I.2}$$

Модуль і головне значення арґумента виражають через дійсну й уявну частини комплексного числа так:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{I.3}$$

а для $\arg z$ маємо

$$\begin{aligned} &x > 0: \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ &x < 0, y \geq 0: \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \\ &x < 0, y < 0: \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Для $z = 0$, $r = 0$, $\arg z$ невизначений.

Для $x = 0$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sign} y = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$.

Для $y = 0$, $x > 0$ — $\arg z = \arg \bar{z} = 0$, для $y = 0$, $x < 0$ — $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$ при $y \neq 0$ справджується співвідношення $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Відповідно дійсна й уявна частини комплексного числа очевидно виражаються через модуль r і арґумент φ: $x = r \cos \varphi$,

$y = r\sin\varphi$, що приводить до ***тригонометричної форми комплексного числа***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{I.5}$$

Рівність $z_1 = z_2$ означає, що $r_1 = r_2$, $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$.

Додавання комплексних чисел можна виконати за правилами додавання векторів (рис. I.2). З трикутника OMN випливають нерівності

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\ |z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2|. \end{aligned} \tag{I.6}$$

Зазначимо, що $|z_1 - z_2|$ має зміст відстані між відповідними точками комплексної площини.

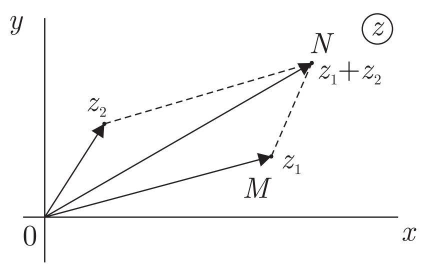


Рис. I.2.

Множення комплексних чисел у тригонометричній формі є таким:

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \Big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\Big] = \\ &= r_1 r_2 \Big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \end{aligned}$$

Отже, для $z = z_1 z_2$ маємо

$$r = r_1 r_2, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{I.7}$$

Піднесення до натурального степеня n є послідовним множенням числа z самого на себе відповідну кількість разів. Тобто

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n \\ &= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{aligned} \tag{I.8}$$

Для $|z| \equiv r = 1$ отримаємо відому ***формулу Муавра***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{I.9}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n, \\ \sin n\varphi &= \mathrm{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n. \end{aligned} \tag{I.10}$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} &\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, && \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi, \\ &\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, && \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \end{aligned}$$

і т. д.

Для ***ділення*** комплексних чисел у тригонометричній формі маємо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big],$$

тобто для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

у чому легко переконатись.

Розглянемо операцію ***добування кореня***. Корінь степеня n з числа z $\sqrt[n]{z} = \alpha$, якщо $\alpha^n = z$. Скористаємось тригонометричною формою комплексних чисел:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \alpha = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Тоді, згідно з (I.8)

$$\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

звідки

$$\rho^n = r, \qquad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \qquad \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Вибираючи якесь значення φ, зокрема, головне значення, отримаємо n різних головних значень $(\arg\alpha)_k = \dfrac{\arg z}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n{-}1.$$

Наприклад, $\sqrt[4]{1} = \alpha_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, причому $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $\alpha_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $\alpha_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. На комплексній площині ці корені зображають точками, які є вершинами правильного чотирикутника — квадрата, вписаного в коло одиничного радіуса. У загальному випадку корені n-го степеня з числа z є вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Уведемо ще ***показникову (експоненціальну) форму*** комплексного числа. Скористаємось формулою розкладу у ряд показникової функції e^x, а саме —

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots .$$

Приймемо $x = i\alpha$ (α — дійсне), тоді

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \ldots = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots\right) \\ &+ i\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots\right) = \cos\alpha + i\sin\alpha. \end{aligned}$$

Отримане співвідношення

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{I.11}$$

називають ***формулою Ейлера***.

З (I.11) маємо

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{I.12}$$

Комплексне число $z = re^{i\varphi}$ є числом у показниковій формі. Така форма зручна для виконання операцій множення, ділення, піднімання до степеня, добування кореня:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Додавати і віднімати комплексні числа зручно з використанням алґебраїчної форми комплексних чисел.

Логарифмування комплексних чисел. Уведемо цю дію як обернену до дії e^z. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

і

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \qquad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y.$$

Наприклад, для $z = ia$, a — дійсне, маємо

$$e^{ia} = \cos a + i\sin a,$$

що є формулою Ейлера.

Зокрема, для $a = \frac{\pi}{2}$, $e^{i\pi/2} = i$, для $a = \pi$, $e^{i\pi} = -1$ тощо.

Число w називають ***логарифмом*** z і позначають $w = \operatorname{Ln} z$, якщо $e^w = z$. Запишемо $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, тоді $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$, звідки $e^u = r$, $u = \ln r$, $v = \arg z + 2k\pi$. Отже,

$$w = \ln r + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{I.13}$$

або

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln r + i \operatorname{Arg} z.$$

Оскільки $\operatorname{Arg} z$ неоднозначний, то отримуємо безмежну кількість значень $\operatorname{Ln} z$. Одне з них, для $k = 0$, вибирають як головне значення і позначають $\ln z$:

$$\ln z = \ln r + i \arg z \tag{I.14}$$

і

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi.$$

Наприклад, $\operatorname{Ln}(-1) = i\pi(2k+1)$, $\ln(-1) = i\pi$; $\operatorname{Ln} i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $\ln i = i\frac{\pi}{2}$.

Можна переконатись, що для логарифмів маємо властивості

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \\ &\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \end{aligned}$$

Однак $\operatorname{Ln} z^n \neq n \operatorname{Ln} z$, оскільки сукупність чисел справа є лише підмножиною множини чисел у лівій частині цього співвідношення. Справді,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z^n &= \operatorname{Ln}(\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}) = \underbrace{\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z + \ldots + \operatorname{Ln} z}_{n} = \\ &= n \ln r + ni \arg z + 2\pi(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)i = \\ &= n \ln r + ni \arg z + 2\pi k i, \\ &\qquad \text{де} \quad k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{aligned}$$

Для $n \operatorname{Ln} z$ маємо

$$n \operatorname{Ln} z = n(\ln r + i \arg z + 2\pi k i) = n \ln r + in \arg z + 2\pi nki.$$

Оскільки множина чисел nk є лише підмножиною чисел k, то $\operatorname{Ln} z^n \neq n \operatorname{Ln} z$.

Ще введемо поняття ***стереографічної проекції*** комплексного числа. Для цього на площині комплексних чисел z розташуємо сферу довільного радіуса, яка дотикається до площини z у єдиній точці $z = 0$ (рис. I.3).

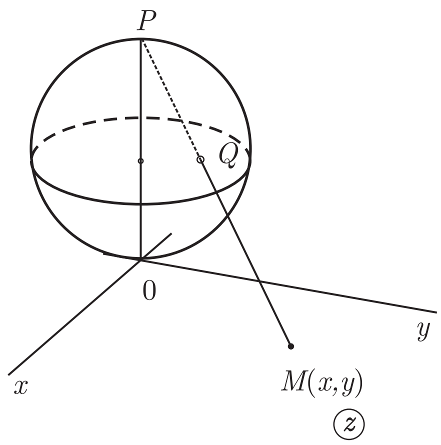


Рис. I.3.

З точки $M(x, y)$ проведемо пряму, що сполучає цю точку з полюсом P сфери. Точку перетину Q цієї прямої з поверхнею сфери називають стереографічною проекцією точки $z = (x, y)$. Легко бачити, що існує взаємно однозначна відповідність між точками площини і сфери, за винятком її полюса P. Саму точку P приймемо як зображення точки $z = \infty$, причому вважаємо, що така точка єдина. Приєднуючи її до площини z, отримаємо повну (замкнену, розширену) комплексну площину. Зазначимо, що безмежно віддалена точка, подібно до $z = 0$, не має визначеного арґумента. Сферу, точки якої зображають комплексні числа, називають ***комплексною числовою сферою***, або ***сферою Рімана***. Стереографічна проекція є ще одним геометричним зображенням комплексних чисел.

1.2. Послідовність та границя послідовності. Критерій Коші

Поняття збіжної послідовності та границі послідовності є фундаментальними поняттями аналізу функцій дійсної змінної. Відповідні поняття безпосередньо переносять у теорію функцій комплексної змінної.

Послідовністю комплексних чисел називають множину комплексних чисел, яку можна пронумерувати за деяким правилом натуральними числами:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots, \qquad \text{де} \;\; z_n = x_n + iy_n. \tag{I.15}$$

Часто послідовність комплексних чисел позначають $\{z_n\}$.

Число z називають ***границею послідовності*** (далі — просто границею), якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що при $n \geq N(\varepsilon)$ справджується нерівність $|z_n - z| < \varepsilon$.

Якщо існує границя z послідовності $\{z_n\}$, то таку послідовність називають збіжною до числа z, що записують у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \text{або} \qquad \{z_n\} \to z. \tag{I.16}$$

Для геометричної інтерпретації граничного переходу введемо поняття ε-околу точки z_0 комплексної площини, а саме: ε-околом точки z_0 називають множину усіх точок z, які лежать усередині кола радіусом ε з центром у точці z_0, тобто задовольняють умову $|z - z_0| < \varepsilon$. Тоді говоримо, що z є границею $\{z_n\}$, якщо в ε-околі точки z лежать усі елементи послідовності $\{z_n\}$, починаючи з деякого, залежного від ε, номера $N(\varepsilon)$: $|z_n - z| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$.

Для $|z_n - z|$ маємо

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon,$$

звідки

$$|x_n - x| \leq |z_n - z| < \varepsilon, \qquad |y_n - y| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

і $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, тобто коли послідовність $\{z_n\}$ збігається до границі z, то послідовності дійсних чисел $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є збіжними і отже, коли $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \to z$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \to y$. Збіжній послідовності $\{z_n\}$ комплексних чисел відповідають дві збіжні послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ дійсних чисел.

З іншого боку, якщо $\{x_n\} \to x$ і $\{y_n\} \to y$, то $\{z_n\} \to z$. Справді,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = x + iy = z$$

і z є границею $\{z_n\}$.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності $\{z_n\}$ є збіжності послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$.

Ця теорема дає змогу перенести всі правила і закономірності теорії границь у множині дійсних чисел на множину комплексних чисел.

Зокрема, справеджуються такі означення і теореми.

Означення. Послідовність $\{z_n\}$ називають ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число M, що для всіх елементів z_n з $\{z_n\}$ правильна нерівність $\{z_n\} < M$.

Теорема. У будь-якій обмеженій послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Критерій Коші. Послідовність $\{z_n\}$ збіжна тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$ таке, що $|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$ і довільному $m \geq 0$. Подібно до випадку послідовностей дійсних чисел дамо означення безмежної границі.

Нехай маємо послідовність $\{z_n\}$ таку, що для довільного як завгодно великого $R > 0$ існує номер $N(R)$ такий, що для $n \geq N(R)$ $|z_n| > R$. У цьому випадку послідовність $\{z_n\}$ називають необмежено зростаючою. Якщо ввести комплексне число $z = \infty$, то запишемо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Зважаючи на те, що для $z = \infty$, $|z| = \infty$ і арґумент не визначений, для необмежено зростаючої послідовності маємо $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Уведемо поняття R-околу точки $z = \infty$ як множини всіх z, які лежать зовні кола радіусом R з центром у точці 0, тобто усіх z, для яких $|z| > R$. Тоді говоримо, що $z = \infty$ є границею $\{z_n\}$ (тобто послідовність $\{z_n\}$ необмежено зростає), коли всі елементи $\{z_n\}$, починаючи з $N(R)$, лежать в R-околі точки $z = \infty$, тобто $|z_n| > R$ для $n \geq N(R)$. Нагадаємо, що точка $z = \infty$ єдина на повній комплексній площині.

§ 2. Диференціювання функцій комплексної змінної

2.1. Функція комплексної змінної. Неперервність

Нехай E — деяка множина комплексних чисел. Говорять, що на множині E задана ***функція комплексної змінної*** z, якщо кожному z множини E ставиться у відповідність за деяким законом комплексне число w, що записують $w = f(z)$.

Насамперед уведемо поняття, які стосуються ***області***:

- Точку z_0 називають ***внутрішньою*** точкою множини E, якщо існує такий окіл точки z_0, усі точки якого належать множині E. Наприклад, для множини $|z| \leq 1$ точка z_0 є внутрішня, якщо $|z_0| < 1$ (точки $|z_0| = 1$ не є внутрішні).

- Множину E називають ***відкритою***, якщо всі точки $z \in E$ внутрішні для E.

- Множину E називають ***областю***, коли виконуються такі дві умови:

  а) E — відкрита множина;

  б) дві довільні точки множини E можна з'єднати ламаною, всі точки якої належать E (умова зв'язності). Наприклад, на рис. I.4 множина $r < |z - a| < R$ відкрита і зв'язна, тому є областю, а множина $|z+1| < 1$ і $|z-1| < 1$

не є областю (хоча є відкритою), бо умова зв'язності не виконується (точка $z = 0$ не належить E).

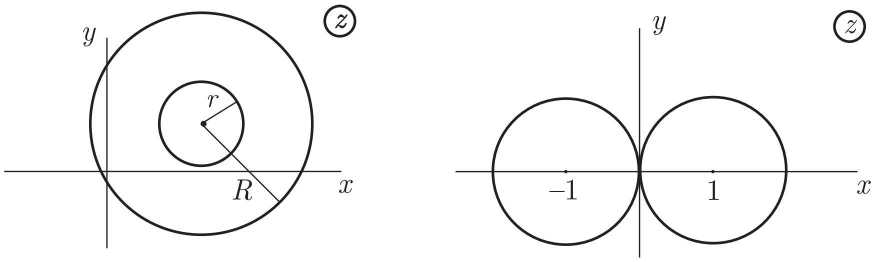


Рис. I.4.

- Точку z називають ***зовнішньою*** для множини E, якщо існує такий її окіл, усі точки якого не належать E.

- Точку z називають ***граничною*** для E, якщо в довільному її околі є точки, які належать E, і точки, які не належать E. Наприклад, точки $|z| = 1$ є граничні для множини $|z| < 1$.

- Множину граничних точок називають ***границею*** області. Границею може бути лінія, однак може бути і дискретна множина точок. Наприклад, для області $z \neq 0$ границею є єдина точка $z = 0$.

- Надалі область позначатимемо D. Якщо до області D приєднати всі її граничні точки, то отримаємо ***замкнену область*** $\bar{D}$.

- Область D називають n***-зв'язною***, якщо її границя складається з n ізольованих частин. На рис. I.5 ліворуч маємо 3-зв'язну область, праворуч — дві однозв'язні області.

- Ламану лінію, яка з'єднує дві відокремлені границі області, називається ***розрізом*** області. Очевидним є твердження: будь-яку n-зв'язну область за допомогою $n - 1$ розрізу

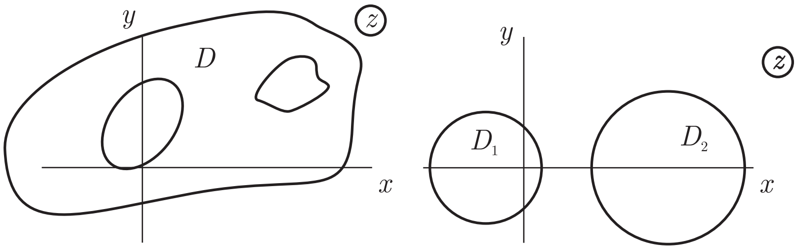


Рис. I.5.

можна перетворити в однозв'язну (тобто всю границю можна обійти неперервно); у цьому разі, зрозуміло, розрізи обходитимуться двічі в протилежних напрямах.

На рис. I.6 показана 4-зв'язна область, яка за допомогою трьох розрізів стала однозв'язною.

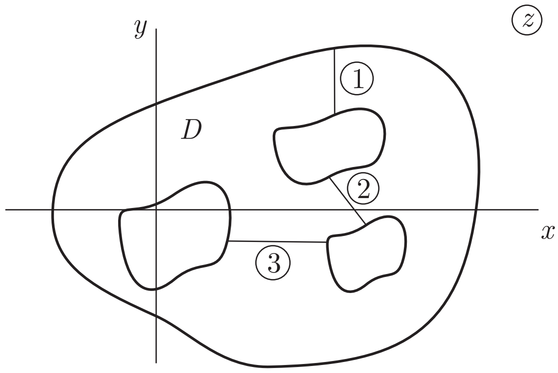


Рис. I.6.

- Область D називають ***обмеженою***, якщо існує коло з центром у точці $z = 0$ таке, що всі точки області D містяться всередині цього кола. В іншому випадку область D є необмеженою.

- Повернемось до функції комплексної змінної $w = f(z)$. Надалі множина значень z, для яких задана функція $w = f(z)$,

> буде областю D або замкненою область $\bar{D}$, її називатимемо ***областю значень арґументу***. Множину комплексних чисел $w = f(z)$, які відповідають усім $z \in D$ (або $\bar{D}$), називають ***множиною значень функції*** $f(z)$. Ця множина може мати різну структуру. Далі матимемо справу з випадками, коли цією множиною є область G або $\bar{G}$.

Функцію комплексної змінної $w = f(z)$ можна геометрично уявляти як ***відображення*** області D комплексної площини z на область G комплексної площини $w = u + iv$ (рис. I.7).

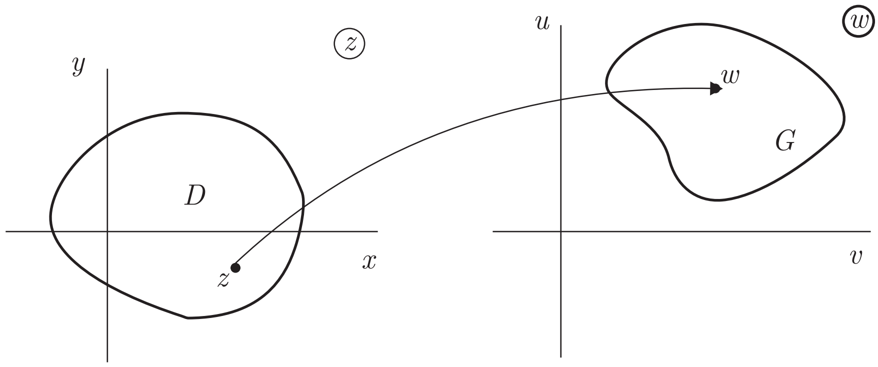


Рис. I.7.

Таке відображення буде взаємно однозначним, якщо функція $f(z)$ і обернена функція $z = \varphi(w)$ є однозначними. У цьому випадку функцію $f(z)$ називають ***однолистою***.

Розглянемо приклади відображень, які реалізують окремі функції:

1) $w = f(z) = az + b$, $a \neq 0$, a, b — комплексні числа. Область значень арґумента — повна комплексна площина ($f(\infty) = \infty$). Кожному z відповідає лише одне w; обернена функція $z = \dfrac{1}{a}w - \dfrac{b}{a} = a_1 w + b_1$ має такі ж властивості. Отже, $f(z) = az + b$ однолиста на повній комплексній площині. Розглянемо $\zeta = az = |a||z|e^{i(\arg z + \arg a)}$. Модуль $|\zeta|$ в $|a|$ разів більший від $|z|$, а $\arg \zeta$

одержують додаванням $\arg a$ до $\arg z$. Отже, перетворення $\zeta = az$ є розтягом (стиском) площини z в $|a|$ разів і поворот її як цілого навколо точки $z = 0$ на кут $\arg a$. Для $w = \zeta + b$ ще додається зсув площини z на вектор, який відповідає комплексному числу b. Отже, функція $w = az + b$ перетворює комплексну площину z шляхом подібного (однакового для всіх z) розтягу (стиску), повороту і зсуву;

2) $w = f(z) = \frac{1}{z}$. Область значень арґумента — повна комплексна площина ($f(\infty) = 0$), обернена функція $z = \frac{1}{w}$ така ж. Очевидно, що функція $f(z) = \frac{1}{z}$ — однолиста. Запишемо $z = re^{i\varphi}$, тоді $w = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \rho e^{i\vartheta}$. Перетворення $\vartheta = -\varphi$ є дзеркальним відображенням відносно дійсної осі x, а $\rho = \frac{1}{r}$ — інверсією відносно одиничного кола. Отже, для всіх z таких, що $|z| < 1$, $|w| > 1$ і навпаки, причому для $y > 0$, $\vartheta < 0$, а для $y < 0$, $v > 0$. Тому всі точки площини z, які лежать за межами одиничного круга, переходять у точки, які лежать усередині одиничного круга площини w і навпаки, що супроводжується дзеркальним відбиванням відносно дійсної осі.

Уведемо поняття границі функції $f(z)$ при $z \to z_0$.

Число $A = a + ib$ називають ***границею*** $f(z)$ при $z \to z_0$, тобто $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для $|z - z_0| < \delta$, $|f(z) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку для z, що належать δ-околу точки z_0, значення $f(z)$ потрапляють в ε-окіл точки A.

Існування границі функції $f(z)$ при $z \to z_0$ рівнозначне існуванню границь для функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, $(w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y))$, коли $x \to x_0$, $y \to y_0$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$. Справді, $|f(z) - A| = \left[(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2\right]^{1/2}$. Відповідно, прямування $z \to z_0$ означає $z - z_0 \to 0$, тобто $x - x_0 \to 0$, $y - y_0 \to 0$. У цьому разі $f(z) \to A$, тобто $|f(z) - A| \to 0$, звідки випливає, що при $z \to z_0$ $u(x, y) - a \to 0$ і $v(x, y) - b \to 0$. Отже, існують границі

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Функцію $f(z)$ називають ***неперервною*** в точці z_0, якщо

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Неперервність $f(z)$ у точці z_0 рівносильна неперервності функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ у точці x_0, y_0.

2.2. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші–Рімана. Аналітичні функції

Розглянемо такі неперервні функції комплексної змінної, які допускають диференціювання. Поняття диференційовної функції комплексної змінної введемо за аналогією до такого поняття для функції дійсної змінної.

Нехай маємо $w = f(z)$, $z \in D$. Якщо для точки $z_0 \in D$ при $\Delta z = z - z_0 \to 0$ існує границя відношення

$$\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

незалежна від способу прямування Δz до нуля, то цю границю називають ***похідною*** функції $f(z)$ за комплексною змінною z в точці z_0 і позначають $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{I.17}$$

У цьому випадку функцію $f(z)$ називають ***диференційовною*** в точці z_0.

Постає питання, чи властивості диференційовної функції $w = f(z)$ не відповідають відповідним властивостям функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$?

Розглянемо, наприклад, $w = \bar{z} = x - iy$ і шукатимемо границю (I.17) для $z_0 = 0$. Значення $f(0) = 0$, а $f(0+\Delta z) = \overline{\Delta z}$. Отже,

$$f'(0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Якщо прямувати до $z_0 = 0$ по осі x, то $\Delta y = 0$ і $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Коли прямувати до $z_0 = 0$ по осі y, то $\Delta x = 0$ і $f'(0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{(-\Delta y)}{\Delta y} = -1$. Звідси значення $f'(0)$ залежить від способу прямування $\Delta z \to 0$, тому функція $f(z) = \bar{z}$ не є диференційовною в точці $z_0 = 0$, хоча частинні похідні від $u(x, y) = x$ і $v(x, y) = -y$ існують. Отже, диференційовність функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ не є достатньою для диференційовності функції $w = f(z)$.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0, то в цій точці існують частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, які задовольняють співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{I.18}$$

Співвідношення (I.18) називають ***умовами Коші–Рімана*** (інколи д'Аламбера–Ейлера–Коші–Рімана).

Доведення. Якщо $f(z)$ диференційовна в точці z_0, то існує границя $f'(z)$, яка не залежить від способу прямування $\Delta z \to 0$.

Нехай $\Delta z = \Delta x$. Тоді

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Нехай $\Delta z = i\Delta y$. Тоді

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Оскільки ліві частини цих співвідношень існують і дорівнюють одна одній, то існують частинні похідні від функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ у точці (x_0, y_0), які задовольняють рівності

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y},$$

що треба було довести. Отже, існування частинних похідних від функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, які задовольняють умови Коші–Рімана, є необхідною умовою диференційовності функції $f(z)$ в точці z_0.

Доведемо, що ці умови є достатніми.

Теорема. Якщо в точці (x_0, y_0) функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ — диференційовні, а їхні частинні похідні задовольняють умови Коші–Рімана, то функція $f(z) = u + iv$ є диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Доведення. Існування неперервних частинних похідних від функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що є необхідною умовою їхньої диференційовності, достатнє для існування приростів Δu і Δv, тобто існують

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha,$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta,$$

де α, β — величини другого порядку мализни

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z} = 0, \qquad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\beta}{\Delta z} = 0.$$

Запишемо приріст Δf і використаємо умови Коші–Рімана

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \alpha + i\beta \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) i\Delta y + \alpha + i\beta \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + \alpha + i\beta.
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + \alpha + i\beta}{\Delta z} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{z=z_0}. \end{aligned}$$

Права сторона існує, тому існує $f'(z_0)$, що й треба було довести.

Отже, диференційовність функції $f(z)$ не зводиться лишень до існування неперервних частинних похідних від u і v, однак між ними повинний існувати співвідношення, які називають умовами Коші–Рімана.

Означення. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в кожній точці області D, то її називають ***аналітичною*** у цій області[18].

- Існує поняття аналітичності в точці z_0, а саме: якщо існує ε-окіл z_0, в усіх точках якого функція аналітична.

- Умови Коші–Рімана приводять до ряду рівнозначних (тотожних) рівностей для $f'(z_0)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{(I.19)}$$

Умови Коші–Рімана можна формулювати в іншому вигляді, якщо прийняти $z = re^{i\varphi}$. Тоді $w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ і умови Коші–Рімана мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad \text{(I.20)}$$

[18]Доведення наведених вище теорем ґрунтується на неперервності похідної $f'(z)$. Це не обмежує поняття аналітичності, лише спрощує доведення теорем. Достатньою є умова неперервності самих u і v, однак це значно ускладнює доведення теореми.

Поняття диференційовності функції комплексної змінної суттєво змістовніше від такого ж поняття для функції дійсної змінної, тому у випадку функцій комплексної змінної для диференційовної функції комплексної змінної в усіх точках області D дали спеціальну назву — ***аналітичність***. В аналізі функцій дійсної змінної виділяють клас диференційовних функцій, далі — клас функцій, які мають другу похідну. Нарешті серед них є такі, що мають похідні всіх порядків і які можна розкласти в степеневий ряд. Чогось подібного в теорії функцій комплексної змінної немає. Функція, аналітична в області, має в кожній точці області похідні всіх порядків і може бути розкладена в околі кожної точки цієї області у степеневий ряд, зокрема, у ряд Тейлора[19]. Усе це ґрунтується на інтеґральному численні функцій комплексної змінної, про що йтиметься мова далі.

Аналітичні функції комплексної змінної мають спеціальні властивості, серед яких є ряд достатньо очевидних. Зокрема, таких.

1. Якщо $f_1(z)$ і $f_2(z)$ аналітичні в D, то $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z)f_2(z)$, $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналітичні в D, причому остання аналітична всюди, де $f_2(z) \neq 0$.

2. Якщо $w = f(z)$ аналітична в D, а в області значень цієї функції $w \in G$ визначена аналітична функція $\varphi(w)$, то функція $F(z) = \varphi[f(z)]$ аналітична в D.

3. Якщо $w = f(z)$ аналітична в D і похідна $f'(z) \neq 0$ всюди в D, то обернена функція $z = \varphi(w)$ також аналітична в області G ($w \in G$) і $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$. Справді, щоб існувала обернена функція, треба розв'язати систему рівнянь $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ відносно x і y. Для цього необхідно, щоб виконувалась умова

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \neq 0,$$

де нижні індекси біля u і v означають змінні, за якими беруть

[19] Брук Тейлор (Brook Taylor, 1685–1731) — англійський математик.

частинні похідні, і використані умови Коші–Рімана, а також одне зі співвідношень (I.19).

4. Нехай $f(z)$ аналітична в D. Розглянемо сім'ї кривих $u(x, y) = C_1$, $v(x, y) = C_2$. Для скалярного добутку векторів $\operatorname{grad} u$ і $\operatorname{grad} v$ у площині XOY маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v &= (\mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y)(\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y) \\ &= u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0. \end{aligned}$$

Оскільки лінії $\operatorname{grad} u$ і $\operatorname{grad} v$ ортогональні до ліній $u(x, y) = C_1$ і $v(x, y) = C_2$, то останні ортогональні між собою.

5. Якщо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналітична функція в деякій області D, то її дійсну й уявну частини називають ***гармонічними*** функціями в цій області.

Якщо умови Коші–Рімана для цієї функції

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{I.21}$$

продиференціювати першу за x, а другу за y, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \tag{I.22}$$

Однак відомо, що $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$. Тому, додавши рівності (I.22), одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \Delta u = 0, \tag{I.23}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — ***оператор Лапласа***[20].

Неперервну з неперервними другими похідними функцію, яка задовольняє рівняння Лапласа (I.23), називають ***гармонічною*** в області D.

[20] П'єр Симон Лаплас (Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749–1827) — французький математик і астроном.

Отже, ми довели, що дійсна частина аналітичної функції є гармонічною функцією.

Якщо першу рівність в (I.21) продиференціювати за y, а другу за x і відняти другу від першої, то одержимо

$$\Delta v = 0. \tag{I.24}$$

Тобто й уявна частина аналітичної функції є гармонічною функцією. Однак обернене твердження тут не виконується: якщо u і v — гармонічні функції, то $f(z) = u+iv$ не обов'язково буде аналітичною. Наприклад, $u = x$ і $v = -y$ — гармонічні функції, проте умови Коші–Рімана для них не виконуються, тому $f(z) = x - iy = \bar{z}$ не є аналітичною.

Зазначимо також, що оскільки рівняння Лапласа (I.23) і (I.24) визначають потенціал електростатичного поля в просторі, у якому нема зарядів, то можна стверджувати, що дійсна й уявна частини аналітичної функції відповідають деяким потенціалам. Отже, існує прямий зв'язок між теорією аналітичних функцій і двовимірною задачею електростатики.

6. З умов Коші–Рімана випливає, що дійсна й уявна частини аналітичної функції не є незалежними між собою. Цей зв'язок виявляється настільки тісним, що задання функції $u(x, y)$ визначає майже однозначно, з точністю лише до адитивної константи, функцію $v(x, y)$, і навпаки.

Доведення. Використаємо умови Коші–Рімана й запишемо повний диференціал функції v:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Тобто диференціал функції v визначають за допомогою відомих функцій u_x і u_y. А з теорії функцій дійсних змінних відомо, що за заданим повним диференціалом dv функцію v визначають з точністю до адитивної константи. Отже, властивість 6 доведено.

2.3. Геометричний зміст похідної функції комплексної змінної. Конформне відображення

Нехай $f(z)$ аналітична в D. Через довільну точку $z_0 \in D$ проведемо криву γ_1, яка повністю лежить в D. Функція $f(z)$ відображає D на G, у цьому разі $z_0 \to w_0$, $\gamma_1 \to \Gamma_1$ (рис. I.8)

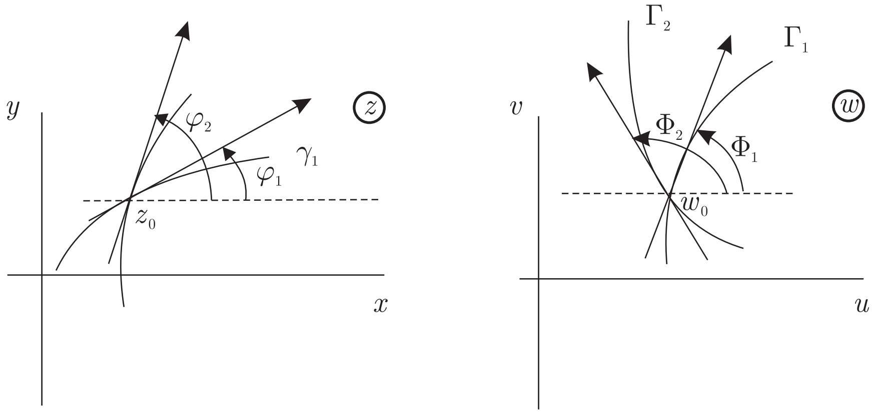


Рис. I.8.

Припустимо, що похідна $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ існує, причому $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$. Виберемо $\Delta z \to 0$ по кривій γ_1. Тоді $\Delta w \to 0$ по кривій Γ_1. Вектори Δz і Δw лежать на відповідних хордах кривих γ_1 і Γ_1, кути між цими векторами і додатними напрямами осей x і u є $\arg \Delta z$ і $\arg \Delta w$, а $|\Delta z|$ і $|\Delta w|$ — довжини цих векторів. При $\Delta z \to 0$, $\Delta w \to 0$ відповідні вектори переходять у прямі, дотичні до кривих γ_1 і Γ_1 у точках z_0 і w_0, і $\alpha = \lim\limits_{\Delta w \to 0} \arg \Delta w - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1$. Якщо вибирати $\Delta z \to 0$ по іншій кривій γ_2, то $\Delta w \to 0$ по кривій Γ_2, яка є відображенням кривої γ_2, що його здійснює функція $f(z)$. Оскільки $f'(z_0)$ не залежить від того, як $\Delta z \to 0$, маємо $\alpha = \Phi_2 - \varphi_2$, тобто

$$\Phi_2 - \varphi_2 = \Phi_1 - \varphi_1,$$

звідки

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Отже, у разі відображення, яке виконує аналітична функція $f(z)$ за умови $f'(z_0) \neq 0$, кут між двома довільними кривими γ_1 і γ_2, що проходять через точку z_0, дорівнює кутові між їхніми образами Γ_1 і Γ_2, що проходять через точку $w_0 = f(z_0)$. У цьому випадку зберігається не тільки значення кута, а й його напрям. Таку властивість зображення називаєюь ***властивістю збереження кутів***.

Для модуля $|f'(z_0)| = k = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ з точністю до значень вищого порядку мализни одержуємо рівність

$$|\Delta w| = k|\Delta z|$$

для довільних кривих, що проходять через z_0. Тобто в разі відображення за умови $f'(z_0) \neq 0$ безмежно малі лінійні елементи перетворюються подібним чином, причому $|f'(z_0)| = k$ є коефіцієнтом перетворення подібності. Таку властивість відображення називають ***властивістю постійності розтягу (стиску)***.

Означення. Відображення околу точки z_0, яке виконує аналітична функція $f(z)$ за умови $f'(z_0) \neq 0$ і яке має властивості постійності розтягу (стиску) та збереження кутів, називають ***конформним відображенням*** у точці z_0.

Розглянемо декілька прикладів конформного відображення.

Приклад 1. Функція $w = az + b$, $a = a_1 + ia_2 \neq 0$, $b = b_1 + ib_2$, $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ — дійсні числа. Для $w = u + iv$ маємо $u = a_1x - a_2y + b_1$, $v = a_2x + a_1y + b_2$. Легко переконатись, що умови Коші–Рімана виконуються, і функція $w = az + b$ є однолистою й аналітичною в усій комплексній площині. Похідна $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = a_1 + ia_2 = a \neq 0$ і $f(z)$ виконує конформне відображення в усій комплексній площині. Відображення, виконуване функцією $w = az + b$, $a \neq 0$, називають ***лінійним***. Значення кута повороту і коефіцієнта розтягу (стиску) однакові для всіх точок комплексної площини z, а вектор $\mathbf{b}$ визначає її паралельне перенесення.

Зокрема, знайдено функцію, що відображає круг $|z-3-i|<2$ на одиничний круг $|w|<1$. Оскільки області D і G є подібними (перша та друга — круг), то відображення виконуватиме лінійна функція. Легко побачити, що такою є $w=a(z-3-i)$, де $|a|=\dfrac{1}{2}$, а $\arg a$ — довільний. Ця функція зменшує радіус удвічі й переносить центр кола в початок координат площини w: при $z=3+i$, $w=0$.

Приклад 2. Функція $w=e^z$ має дійсну й уявну частини $u=e^x\cos y$ і $v=e^x\sin y$, які задовольняють умови Коші–Рімана, а тому є аналітичною в усій комплексній площині. Для похідної $f'(z)$ маємо $(e^z)'=u_x+iv_x=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$ і $f'(z)\neq 0$ у всій комплексній площині (при $z=\infty$ функція e^z не аналітична). Однак обернена функція є багатозначною (див. §1) і тому $w=e^z$ не є однолистою у всій комплексній площині. Однак для окремих частин комплексної площини однолистість зберігається, і для відповідних областей відображення буде конформним. Наприклад, знайдемо функцію, що відображає смугу $0<\operatorname{Re}z<a$ на верхню півплощину $\operatorname{Im}w>0$. Спочатку виконаємо лінійне перетворення $f_1(z)=i\dfrac{\pi}{a}z$, яке смугу шириною a перетворить у смугу шириною π і поверне її на кут $\pi/2$ навколо початку координат. Тоді для $w_1=f_1(z)=u_1+iv_1$ отримаємо, що $-\infty<u_1<+\infty$, $0<v_1<\pi$. Далі зробимо перетворення $w=e^{w_1}=e^{u_1}(\cos v_1+i\sin v_1)=u+iv$. Легко переконатись, що для наведених вище інтервалів значень дійсних змінних u_1 і v_1 величини u і v змінюватимуться у межах $-\infty<u<+\infty$, $0<v<\infty$, тобто $\operatorname{Im}w>0$. Отже, шукане відображення для вибраної області зміни z має вигляд $w=e^{i\pi z/a}$.

У випадку конформного відображення малі кола з центром у точці z_0, які повністю належать деякому δ-околу цієї точки, переходять у кола, що належать ε-околу точки w_0 з центром у цій точці, а малі трикутники з вершиною в точці z_0 з δ-околу цієї точки переходять у подібні трикутники у ε-околі точки w_0 з вершиною у цій точці.

Означення. Взаємно однозначне відображення області D комплексної площини z на область G комплексної площини w називають конформним, якщо це відображення є конформним в усіх точках $z \in D$.

Сформулюємо без доведення такі дві теореми[21].

Теорема 1. Якщо $f(z)$ — однолиста аналітична функція в D і $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, то $f(z)$ виконує конформне відображення D на G, причому G — область значень функції $w = f(z)$, $z \in D$.

Теорема 2. Якщо $f(z)$ конформно відображає область D на область G і обмежена в D, то $f(z)$ однолисна й аналітична в D, причому $f'(z) \neq 0$, $z \in D$.

Розглянемо ще поняття диференціала функції комплексної змінної. Нехай $f(z)$ — аналітична в D й у деякій точці $z_0 \in D$ похідна $f'(z_0) \neq 0$. Тоді в околі z_0 відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha$, причому $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha = 0$. Звідси

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha \Delta z,$$

де другий доданок є величиною вищого порядку мализни, а перший є головною частиною приросту, яку називають диференціалом функції $f(z)$ в точці z_0

$$dw = f'(z_0)dz.$$

Визначимо відображення, яке виконує функція $f(z)$ в околі z_0. Для $\Delta w = w - w_0$ і $\Delta z = z - z_0$ з точністю до величини вищого порядку мализни маємо

$$w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0),$$

звідки

$$w = f'(z_0)z + w_0 - f'(z_0)z_0 = az + b,$$

де

$$a = f'(z_0), \qquad b = w_0 - f'(z_0)z_0.$$

[21] Доведення див., наприклад, у підручнику *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.*, Теория функций комплекной переменной. Москва: Наука, 1967. С. 146–148.

Отже, у безмежно малому околі точки z_0 конформне відображення є лінійним і містить розтяг (стиск) в $|a| = |f'(z_0)|$ разів, поворот на кут $\arg a = \arg f'(z_0)$ і паралельне перенесення на вектор $\mathbf{b}$.

2.4. Відображення багатозначними функціями. Поверхні Рімана

Якщо функція $f(z)$ багатозначна, то виникає проблема вибору її значень $w = f(z)$ і з'ясування характеру відображення, яке вона реалізує. Існує можливість визначити багатозначну функцію на складнішому ***многовиді***[22], ніж звичайна площина комплексної змінної, і розглядати багатозначну функцію як однозначну.

Такі многовиди називаються ***поверхнями Рімана***. Їхній конкретний вигляд залежить від розглядуваної функції. Тому відображення багатозначними функціями розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1. Розглянемо функцію $w = \sqrt{z}$. Для фіксованого $z = r\,e^{i\varphi}$ маємо $w_1 = \sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}$ і $w_2 = \sqrt{r}\,e^{i(\varphi/2+\pi)}$, $(0 \le \varphi < 2\pi)$. Очевидно, що $w_1^2 = w_2^2$, а головні значення арґументів w_1 і w_2 відрізняються на π (рис. І.9).

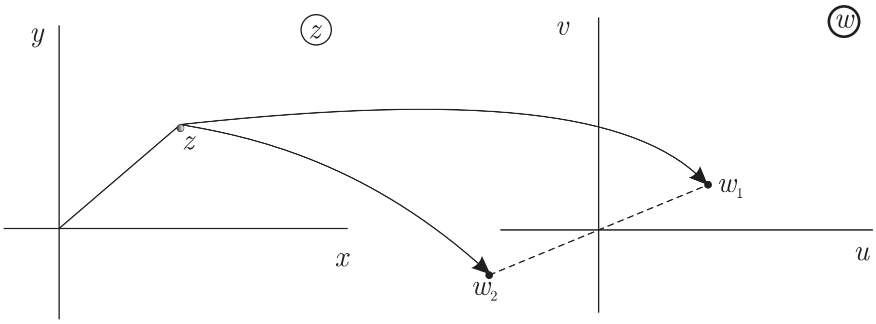


Рис. І.9.

[22]Многовид — математичне поняття, яке уточнює й узагальнює на будь-яку кількість вимірів поняття лінії та поверхні.

Щоб з'ясувати у якій області відображення є взаємно однозначним, розглянемо обернену функцію $z = w^2$. Нехай $\operatorname{Arg} z = \varphi$, $\operatorname{Arg} w = \vartheta$, тоді $\varphi = 2\vartheta$. Якщо $0 < \vartheta < \pi$, то $0 < \varphi < 2\pi$, тобто верхня півплощина w відобразиться на всю площину z. Ми не включили в проміжок зміни арґументів ϑ і φ граничних значень, тому маємо взаємну однозначність відображення верхньої півплощини w без дійсної осі на всю площину z без додатної півосі $x > 0$. Справді, якщо, наприклад, $0 \le \vartheta \le \pi$, то на додатну частину осі x відображатимуться і точка $\vartheta = 0$ і $\vartheta = \pi$, що привзведе до втрати взаємної однозначності відображення. Якщо $\pi < \vartheta < 2\pi$, то $2\pi < \varphi < 4\pi$, і знову маємо область однолистості — нижня півплощина w без дійсної осі відображається взаємно однозначно на всю площину z без додатної півосі $x > 0$. Зробимо допоміжний крок, який дасть змогу кожне значення $x > 0$, $y = 0$ зображати двома точками площини z. Для цього площину z розріжемо уздовж півосі $x > 0$ і розведемо краї розрізу вверх–вниз. У цьому разі на обох краях розрізу матимемо одну й ту ж точку $x > 0$, $y = 0$. Далі приймемо, що точки $u > 0$, $v = 0$ відображаються на верхній край розрізу, а точки $u < 0$, $v = 0$ — на нижній. Отже, отримано можливість розширити область однолистості для функції $z = w^2$ на відрізок $0 \le \vartheta \le \pi$, причому точки з $\arg \vartheta = 0$ відображаються на верхній край розрізу, для якого $\varphi = 0$, а з $\arg \vartheta = \pi$ — на нижній, для якого $\varphi = 2\pi$ (рис. I.10). Таку площину z назвемо 0-листом (нуль-листом).

Для нижньої півплощини $\pi \le \vartheta \le 2\pi$ введемо ще одну площину z з таким же розрізом (1-лист). Тоді для $\vartheta = \pi$ отримаємо $\varphi = 2\pi$, і відповідні точки w відображатимуться на верхній край розрізу, а точки w з $\vartheta = 2\pi$ — на нижній 1-листа ($\varphi = 4\pi$).

Наступним кроком розташуємо 1-лист під 0-листом і з'єднаємо верхній край 1-листа з нижнім краєм 0-листа, що забезпечить однозначність відображення точок $\arg \vartheta = \pi$, які включені у відрізок $0 \le \vartheta \le \pi$ і у відрізок $\pi \le \vartheta \le 2\pi$ (рис. I.11). Зазначимо, що в цьому разі нижній край 0-листа z і верхній край 1-листа z

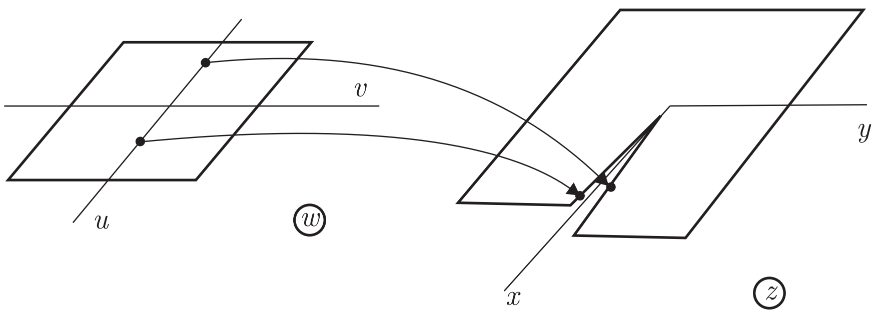


Рис. I.10. Відображення точок $z = 0$ і $z = \pi$ функцією $z = w^2$ на площину z з розрізом $0 \le \varphi \le 2\pi$.

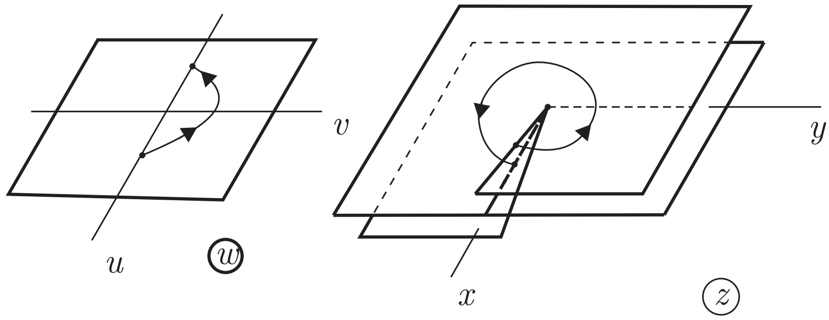


Рис. I.11. Відображення $z = w^2$ для верхньої півплощини $\mathrm{Im}\ w \ge 0$ на площину z з розрізом $0 \le \varphi \le 2\pi$.

мають одне й теж значення $\varphi = 2\pi$. Коли точка w переходить з сектора $0 \le \vartheta \le \pi$ у сектор $\pi \le \vartheta \le 2\pi$ через піввісь $u < 0$ ($\arg w = \pi$), то відповідна точка z переходить з 0-листа на 1-лист. Ще треба зберегти неперервність у разі переходу точки w з нижньої півплощини у верхню через піввісь $u > 0$ ($\arg w = 0$ чи 2π). У цьому випадку маємо повернутись з 1-листа на 0-лист, бо верхня півплощина w відображена на 0-лист. Такий перехід можна забезпечити, якщо з'єднати нижній край розрізу 1-листа з верхнім краєм розрізу 0-листа (рис. I.12). Отриманий многовид для змінної z називають поверхнею Рімана для функції $w = \sqrt{z}$.

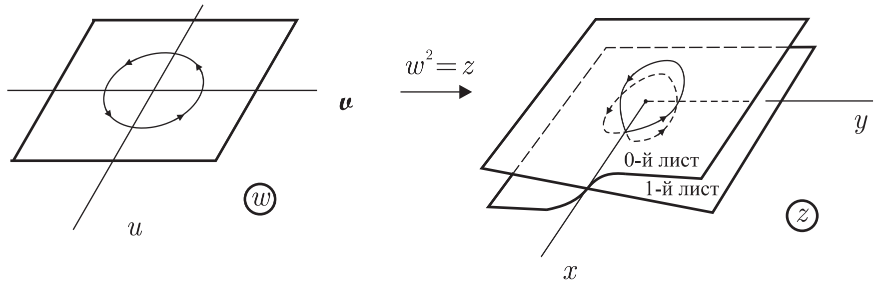


Рис. I.12. Ріманова поверхня для функції $w = \sqrt{z}$.

Коли змінна z набуває значень, що відповідають 0-листу, то значення w належать верхній півплощині w і їхня сукупність становить так звану гілку w_1 функції $\sqrt{z}$, відповідно, для значень z з 1-листа отримуємо другу гілку w_2 функції $\sqrt{z}$. Описаний спосіб побудови забезпечує взаємно однозначну відповідність між усіма точками ріманової поверхні й точками всієї площини w. У цьому разі

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, &\quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \arg w_1 \le \pi,\\
w_2 &= \sqrt{r}\, e^{i(\varphi/2+\pi)}, &\quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad \pi \le \arg w_2 \le 2\pi.
\end{aligned}
$$

Якщо вибрати замкнену криву, наприклад, на 0-листі ріманової поверхні, яка не охоплює точки $z = 0$, то всі значення $\sqrt{z}$, що відповідають точкам цієї кривої, належать до гілки w_1. Аналогічно, для такої ж кривої на 1-листі значення $\sqrt{z}$ належать до гілки w_2. Обхід точки $z = 0$ по замкненій кривій пов'язаний із переходом з 0-листа на 1-лист (як на рис. I.12), що відповідає переходу з гілки w_1 на гілку w_2. Тому точку $z = 0$ називають ***точкою розгалуження*** для функції $w = \sqrt{z}$. Оскільки обхід навколо точки $z = 0$ є одночасно обходом навколо точки $z = \infty$, то точка $z = \infty$ є також точкою розгалуження для функції $w = \sqrt{z}$.

Існує загальна властивість: точки розгалуження для багатозначних функцій трапляються парами, а лінії, що їх з'єднують, є лініями розрізів.

Отже, завдяки введенню поняття ріманової поверхні маємо взаємно однозначну відповідність між її точками z і точками $w = \sqrt{z}$ площини w. Звідси випливає, що функція $w = \sqrt{z}$ виконує конформне відображення всієї ріманової поверхні z на всю площину w, за винятком точок $z = 0$ і $z = \infty$, які є точками розгалуження.

Приклад 2. Розглянемо функцію $w = \sqrt[n]{z}$. Щоб визначити області однолистості, розглянемо обернену функцію $z = w^n$. Запишемо $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\vartheta}$, тоді $re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\vartheta}$. Для секторів $\frac{2\pi}{n}k < \vartheta < \frac{2\pi}{n}(k+1)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, маємо взаємно однозначну відповідність кожного з них і усії площини змінної z без дійсної півосі $x > 0$. Отже, областями однолистості є: $0 < \vartheta < \frac{2\pi}{n}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\frac{2\pi}{n} < \vartheta < \frac{2\pi}{n} \cdot 2$, $2\pi < \varphi < 4\pi, \ldots$, $\frac{2\pi}{n}(n-1) < \vartheta < \frac{2\pi}{n}n$, $2\pi(n-1) < \varphi < 2\pi n$. Щоб забезпечити взаємно однозначне відображення всієї площини w, для змінної z візьмемо n листів з розрізами по додатній півосі $x > 0$ і утворимо поверхню Рімана аналогічно до попереднього випадку, тобто нижній край розрізу 0-листа з'єднаємо з верхнім краєм розрізу 1-листа, нижній край розрізу 1-листа — з верхнім краєм розрізу 2-листа і т. д. Нижній розріз останнього $(n-1)$-листа з'єднаємо з верхнім краєм 0-листа (рис. I.13).

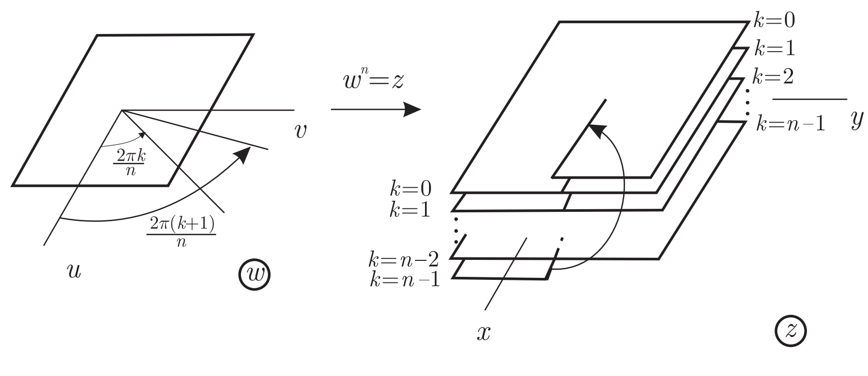


Рис. I.13.

Кожному k-листу значень z відповідає гілка

$$w_{k+1} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\arg z+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

У цьому випадку, якщо z змінюється так, що описує на листі рімановой поверхні замкнену криву, що не охоплює точки $z = 0$, то всі значення $w = \sqrt[n]{z}$ належать одній гілці. Коли крива лінія на площині z охоплює точку $z = 0$ (це означає, що z переходить на сусідній лист ріманової поверхні), то значення функції $w = \sqrt[n]{z}$ переходять на іншу гілку. Тому точка $z = 0$ (і, відповідно, $z = \infty$) — точка розгалуження для багатозначної функції $\sqrt[n]{z}$.

Отже, функція $w = \sqrt[n]{z}$ виконує конформне відображення усієї n-листої поверхні Рімана змінної z на всю площину змінної w (за винятком точок $z = 0$ і $z = \infty$).

Приклад 3. Поверхня Рімана для функції $w = \operatorname{Ln} z$. Щоб встановити області взаємно однозначного відображення, розглянемо обернену функцію $z = e^w$.

Приймемо, що $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тоді $re^{i\varphi} = e^u e^{iv}$, звідки $r = e^u$, $\varphi = v$. Легко бачити, що областю однолистості для змінної w буде смуга $0 < v < 2\pi$, $-\infty < u < +\infty$. Відповідні значення z належать усій комплексній площині z, за винятком додатної півосі $x > 0$. Виконавши розріз уздовж цієї півосі, як у попередніх прикладах, розширимо область однолистості для w, включаючи значення $v = 0$ і $v = 2\pi$, для яких значення z належатимуть верхньому і нижньому краям розрізу, відповідно. Аналогічно для значень w зі смуги $2\pi \le v \le 4\pi$, $-\infty < u < +\infty$, ми отримаємо значення z, що належатимуть ще одній повній площині комплексної z з розрізом, яка становитиме ще один лист ріманової поверхні. Якщо розглянути значення w з усієї комплексної площини w, то кожній смузі $2\pi k \le v \le 2\pi(k+1)$, $\quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad -\infty < u < +\infty$ відповідатиме лист з розрізом уздовж півосі $x > 0$, загальна кількість яких є безмежною, а спосіб їх з'єднання такий самий, як у попередніх прикладах (рис. I.14). Отже, функція $w = \operatorname{Ln} z$ виконує конформне відображення нескінченнолистої поверхні Рімана для змінної z на повну площину w, крім точок розгалуження $z = 0$ і $z = \infty$, що з'єднані лінією розрізу вздовж півосі $x > 0$.

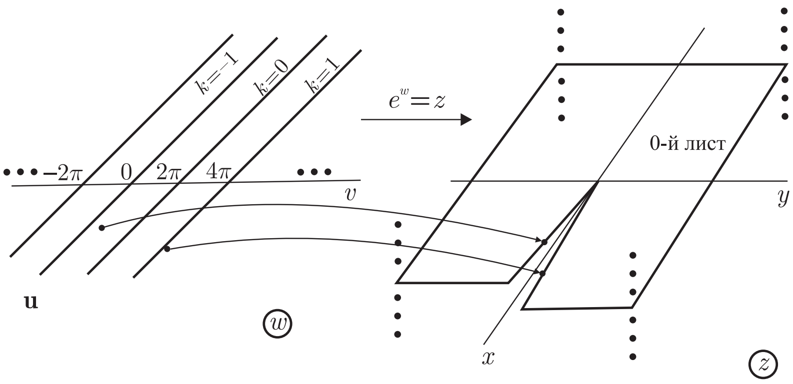


Рис. I.14. Відображення смуги $0 \le v \le 2\pi$ комплексної площини w на повну комплексну площину з розрізом змінної z, яке виконує функція $z = e^w$, обернена до $w = \operatorname{Ln} z$. Гілками функції w є $w_k = \ln z + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, де $\ln z$ — головне значення логарифмічної функції $\operatorname{Ln} z$.

§ 3. Інтеґрування функцій комплексної змінної

3.1. Інтеґрал і властивості інтеґрала

Нехай функція $f(z)$ визначена в області D. У цій області виберемо кусково-гладку криву $\mathcal{L}$, яку поділимо на n частин точками поділу $z_0, z_1, \ldots, z_n$ (рис. I.15).

Нехай $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, а $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ — довільна точка k-ї частини. Утворимо суму

$$S_n(\ldots, z_k, \ldots; \ldots \zeta_k, \ldots) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k. \qquad (I.25)$$

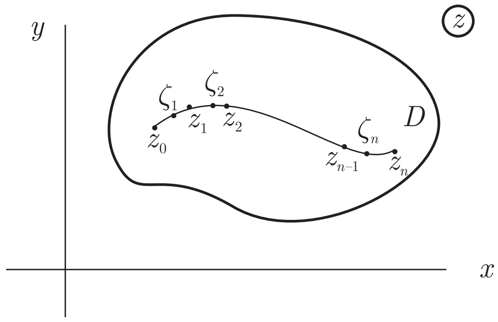


Рис. I.15.

Уведемо поняття інтеґрала. Якщо при $\max|\Delta z_k| \to 0$ існує границя суми S_n (I.25), яка не залежить ні від способу розбиття кривої $\mathcal{L}$, ні від вибору точок ζ_k, то цю границю називають інтеґрал від функції $f(z)$ по кривій $\mathcal{L}$ і позначають

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\ldots, z_k, \ldots; \ldots \zeta_k, \ldots) = \int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\, dz.$$

Якщо записати

$$\begin{aligned} &f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k) \equiv u_k + iv_k; \\ &\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \end{aligned} \tag{I.26}$$

то (I.25) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} f\,(z_k)\, \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k). \end{aligned} \tag{I.27}$$

Цей вираз прямує до деякої границі при $\Delta z_k \to 0$, якщо існують криволінійні інтеґрали другого роду по $\mathcal{L}$ від $u(x, y)$ і $v(x, y)$.

У цьому випадку

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k = \int\limits_{\mathcal{L}} udx - vdy + i\int\limits_{\mathcal{L}} vdx + udy \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\mathcal{L}} f\left(z\right)dz. \qquad \text{(I.28)}$$

Як бачимо з останньої формули, достатньою умовою існування цього інтеґрала є існування двох криволінійних інтеґралів другого роду від функцій дійсних змінних, наявних у формулі (I.28).

Відповідно, для існування цих криволінійних інтеґралів достатньо кускової неперервності функцій дійсних змінних $u(x, y)$ і $v(x, y)$. Це означає, що інтеґрал існує й у випадку неаналітичної функції $f(z)$, якщо ця функція є кусково-неперервною. Тому співвідношення

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\mathcal{L}} v\,dx + u\,dy$$

самé може бути означенням інтеґрала від функції $f(z)$ за кривою $\mathcal{L}$.

З властивостей криволінійних інтеґралів другого роду отримаємо такі властивості інтеґралів від функцій комплексної змінної:

1)

$$\int\limits_{\mathcal{L}_{AB}} f(z)\,dz = -\int\limits_{\mathcal{L}_{BA}} f(z)\,dz, \qquad \text{(I.29)}$$

де A, B — початкова та кінцева точки кривої $\mathcal{L}$, відповідно. У цьому випадку криву $\mathcal{L}$ називають орієнтованою, і тому в кожному випадку требу мати на увазі напрям, уздовж якого виконують інтеґрування.

2) Якщо крива $\mathcal{L}$ кусково-гладка і складається з гладких орієнтованих кусків $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$, то за означенням вважають, що

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f\left(z\right)dz = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathcal{L}_k} f(z)dz. \qquad \text{(I.30)}$$

3) Якщо a — комплексна стала, то

$$\int\limits_{\mathcal{L}} af(z)\,dz = a\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz. \tag{I.31}$$

4)

$$\int\limits_{\mathcal{L}} [f_1(z) + f_2(z)]\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}} f_1(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{L}} f_2(z)\,dz. \tag{I.32}$$

5)

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\mathcal{L}} |f(z)|\,ds, \tag{I.33}$$

де ds — диференціал дуги кривої $\mathcal{L}$, а інтеґрал праворуч — криволінійний інтеґрал першого роду. Справді, на основі нерівності трикутника маємо

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le$$
$$\le \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| = \int\limits_{\mathcal{L}} |f(z)|\,ds. \tag{I.34}$$

Зокрема, якщо $\max\limits_{z\in\mathcal{L}}|f(z)| = M$, то

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz\right| \le ML, \tag{I.35}$$

де L — довжина кривої $\mathcal{L}$.

6) ***Формула заміни змінної.*** Нехай $w = f(z)$ однозначна в D, яка відображає криву ℓ у z-площині на криву $\mathcal{L}$ у w-площині. Тоді

$$\int\limits_{\mathcal{L}} F(w)\,dw = \int\limits_{\ell} F[f(z)]f'(z)\,dz. \tag{I.36}$$

Часто криву $\mathcal{L}$ зручно задавати параметрично $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ — дійсні неперервні функції дійсної змінної t, причому $\alpha \le t \le \beta$, а $z(\alpha)$ і $z(\beta)$ — початкова і кінцева точки кривої $\mathcal{L}$. Тоді

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{I.37}$$

Найчастіше матимемо справу з інтеґралами, коли крива $\mathcal{L}$ — кусково-гладка замкнена крива, яку далі називатимемо замкненим контуром, або просто контуром, і позначатимемо C. Контур можна скласти з дуг, що неперервно межують одна з одною, кожна з яких має неперервно змінну дотичну. Ні окремі дуги, ні контур загалом не містять петель, тобто точок самоперетину. Зрозуміло, що суттєвим є напрям обходу контура. За додатний приймемо такий, що область, обмежена C, знаходиться ліворуч. За такого напряму обходу контур інколи позначають C^+, а для протилежного напряму обходу маємо C^-. Надалі завжди розуміємо додатний напрям обходу, тобто

$$\int_{C} f(z)\,dz \equiv \int_{C^+} f(z)\,dz,$$

$$\int_{C^-} f(z)\,dz \equiv -\int_{C} f(z)\,dz.$$

У випадку, коли контур C задано в параметричній формі, очевидно, що $z(\alpha) = z(\beta)$, але $z(t_i) \ne z(t_k)$, коли $t_i \ne t_k$, за винятком $t_i = \alpha$, $t_k = \beta$.

Приклад. Обчислимо інтеґрал за замкненим контуром

$$J = \int_{C} \frac{dz}{z - z_0}, \tag{I.38}$$

де C — коло з центром у z_0. У цьому випадку z можна записати у вигляді

$$z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{I.39}$$

де ρ — радіус кола. Кут φ відіграє роль параметра t у формулі (I.37). Тому, згідно з (I.37),

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Отже,

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \tag{I.40}$$

Наголосимо, що значення цього інтеґрала не залежить від радіуса кола ρ.

3.2. Інтеґрування аналітичної функції. Теорема Коші

Далі нас цікавитимуть інтеґрали від функцій, аналітичних у деякій обмеженій області D, коли границя області C кусково-гладка замкнена крива, що не має самоперетинів.

Доведемо одну з основних теорем у теорії аналітичних функцій — теорему Коші.

Теорема. Якщо $f(z)$ — однозначна аналітична функція в області D, то інтеґрал від неї по довільному кусково-гладкому замкненому контуру C, що міститься в області D, дорівнює нулю:

$$\int_C f(z) dz = 0. \tag{I.41}$$

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо формулу Ґріна, відому з теорії криволінійних інтеґралів:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\, dy, \tag{I.42}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — неперервні в замкненій області $\bar{D}$, границею якої є крива C, а їхні частинні похідні першого порядку неперервні в D.

Застосуємо до замкненого контуру C формулу (I.28) і використаємо (I.42):

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(z)\,dz &= \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy = \qquad \text{(I.43)}\\ &= \iint\limits_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy.\end{aligned}$$

Однак з умов Коші–Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

випливає, що кожна з дужок у правій частині (I.43) дорівнює нулю. Тобто $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, що й треба було довести.

Зазначимо, що теорема Коші справедлива і за більш загальних умов, ніж ті, що наведені в цій теоремі. Зокрема, теорема Коші справджується і для замкненого контура, який є границею області аналітичності (такий замкнений контур позначатимемо Γ):

Теорема. Якщо $f(z)$ — однозначна аналітична функція в однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладким контуром Γ і неперервна в замкненій області $\bar{D}$, то інтеґрал від функції $f(z)$ за границею Γ області D дорівнює нулю:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0. \qquad \text{(I.44)}$$

Теорему Коші можна сформулювати і для багатозв'язної області.

Теорема. Нехай $f(x)$ — аналітична в багатозв'язній області D, яка обмежена зовні контуром Γ_0, а зсередини контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ і неперервна в $\bar{D}$. Тоді

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0,$$

де Γ — повна границя області D, $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ (рис. I.16).

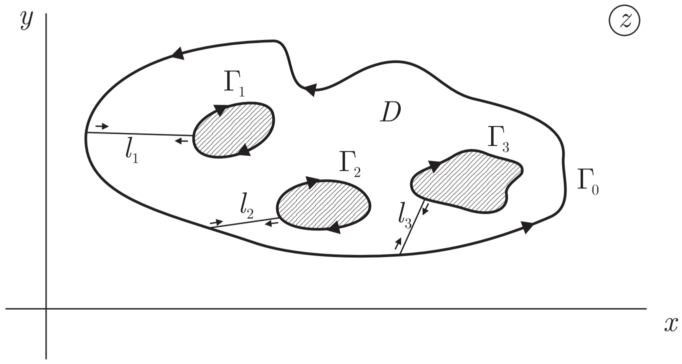


Рис. I.16. У заштрихованих областях функція $f(z)$ неаналітична.

Доведення. Перетворимо $(n+1)$-зв'язну область D в однозв'язну за допомогою розрізів $l_1, \ldots, l_n$ (на рис. I.16, де $n = 3$). Тоді одержимо єдину границю $\Sigma = \Gamma + l_1 + \ldots + l_n$. У разі обходу границі Σ в "+"-напрямі дуги $l_1, \ldots, l_n$ проходять двічі в протилежних напрямах.

За теоремою Коші для однозв'язної області

$$\int\limits_{\Sigma} f(z)\,dz = 0,$$

але

$$\int\limits_{\Sigma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k^-} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_k^+ + l_k^-} f(z)\,dz = 0.$$

Останній доданок за властивістю (I.29) дорівнює нулю.

Отже,

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k^-} f(z)\,dz = 0, \tag{I.45}$$

що й треба було довести. Останню рівність запишемо інакше:

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz. \tag{I.46}$$

З теореми Коші випливає важливий наслідок.

Для функції комплексної змінної, аналітичної в області D, інтеґрал не залежить від шляху інтеґрування, а тільки від початкової і кінцевої точок.

Справді, проведемо в D довільний контур C так, щоб точки A і B належали цьому контуру (рис. I.17).

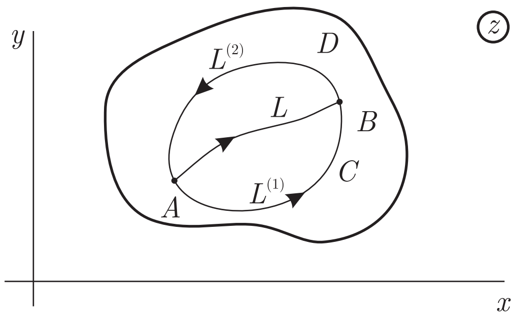


Рис. I.17.

За теоремою Коші

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = 0.$$

Однак $C = \mathcal{L}^{(1)}_{AB} + \mathcal{L}^{(2)}_{BA}$, тоді

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}^{(1)}_{AB}+\mathcal{L}^{(2)}_{BA}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}^{(1)}_{AB}} f(z)\,dz - \int\limits_{\mathcal{L}^{(2)}_{AB}} f(z)\,dz = 0.$$

Звідси

$$\int\limits_{\mathcal{L}^{(1)}_{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}^{(2)}_{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{L}_{AB}} f(z)\,dz,$$

де $\mathcal{L}_{AB}$ — довільний контур у D між точками A і B.

Цей наслідок можна сформулювати дещо інакше: криву інтеґрування між точками A і B в області аналітичності можна довільно деформувати (рис. I.18).

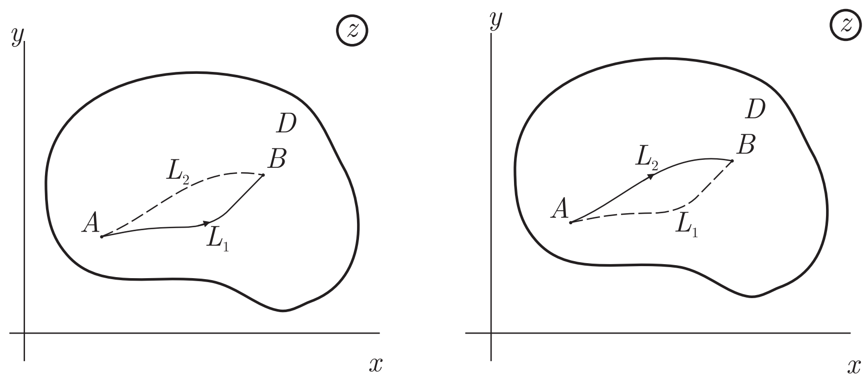


Рис. I.18.

Зокрема, повертаючись до інтеґрала (I.38), можемо для інтеґрування замість кола з центром у точці z_0 вибрати довільний замкнений контур C, який охоплює точку z_0 і повністю розташований в області аналітичності D. Тобто

$$\int\limits_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \tag{I.47}$$

для довільного $C \in D$, що містить точку z_0 усередині.

3.3. Неозначений інтеґрал. Теорема Морери

Нехай $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D і задовольняє умову

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 0 \tag{I.48}$$

для довільного контура C всередині D (наголосимо, що йдеться не про аналітичну, а лише про неперервну в D функцію $f(z)$).

Виберемо в D довільні точки z_0 і z та розглянемо інтеґрал

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z). \tag{I.49}$$

З умови (I.48) інтеґрал (I.49) не залежить від шляху інтеґрування між z_0 і z, тому є функцією тільки z (за фіксованого z_0). Доведемо, що $F(z)$ — аналітична функція в довільній точці $z \in D$, причому $F'(z) = f(z)$. У цьому випадку $F(z)$ називають ***первісною*** для $f(z)$.

Справді, уведемо

$$\Delta F = F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$$

і розглянемо рівність

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta\right),$$

яка є очевидною, тому що

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = f(z)\Delta z.$$

Далі

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\Big[f(\zeta) - f(z)\Big]\,d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}\Big|f(\zeta) - f(z)\Big||\Delta z| \\ &= \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}\Big|f(\zeta) - f(z)\Big|.\end{aligned}$$

Оскільки $f(z)$ — неперервна функція, то для довільного $\delta > 0$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що коли $|\Delta z| < \delta$, то

$$\max|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon,$$

тобто

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$$

для $|\Delta z| < \delta$, що означає існування границі

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z),$$

яка не залежить від способу прямування $\Delta z \to 0$.

Отже, $F(z)$ диференційовна для довільного $z \in D$, тобто аналітична всюди в D, причому $F'(z) = f(z)$. Як з'ясуємо далі, аналітична функція має похідні всіх порядків, які теж є аналітичними функціями, тобто існує $f'(z) = F''(z)$, що означає аналітичність функції $f(z)$ всюди в D. Цей висновок становить зміст ***теореми Морери***[23], оберненої до теореми Коші:

Теорема. Якщо $f(z)$ — неперервна в однозв'язній області D й інтеґрал за довільним замкненим контуром, що повністю міститься в D дорівнює нулеві, то $f(z)$ — аналітична в D.

Теорема Морери справджується і для багатозв'язної області.

Пригадаємо, що, коли $F'(z) = f(z)$, аналітичну функцію $F(z)$ називають первісною для $f(z)$. Доведемо, що в цьому випадку виконується формула Ньютона–Ляйбніца[24]. Справді,

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta &= \int_{z_1}^{z_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\, d\zeta = F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$

[23]Джачінто Морера (Giacinto Morera, *уродж.* Novara, 1856–1909) — італійський математик.

[24]Ісаак Ньютон (Sir Isaac Newton, 1643–1727) — англійський фізик, математик, астроном.

Отже, інтеґрал

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta = F(z_2) - F(z_1),$$

якщо $F(z)$ первісна для $f(z)$.

3.4. Інтеґральна формула Коші (інтеґрал Коші)

З того факту, що інтеґрал по замкненому контуру від будь-якої аналітичної функції за теоремою Коші дорівнює нулю, випливає, що значення аналітичної функції в різних точках тісно пов'язані між собою. Цей зв'язок ще яскравіше виявляється в інтеґральній формулі Коші, яка зв'язує значення аналітичної функції вздовж замкненого контуру та значення її в будь-якій точці всередині цього контуру.

Формула Коші, про яку йдеться, має вигляд

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = f(z_0), \tag{I.50}$$

де C — довільна кусково-гладка замкнена крива, що належить однозв'язній області D, у якій функція $f(z)$ аналітична, z_0 — довільна точка всередині C (рис. I.19).

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{I.51}$$

аналітичну в усіх точках області D, крім $z = z_0$. Щоб вилучити цю особливу точку, проведемо навколо неї коло радіусом ρ (контур C_ρ). Оскільки між контурами C і C_ρ функція $\varphi\,(z)$ аналітична, то за теоремою Коші для двозв'язної області D_1

$$\int_C \varphi(z)dz + \int_{C_\rho^-} \varphi(z)dz = 0. \tag{I.52}$$

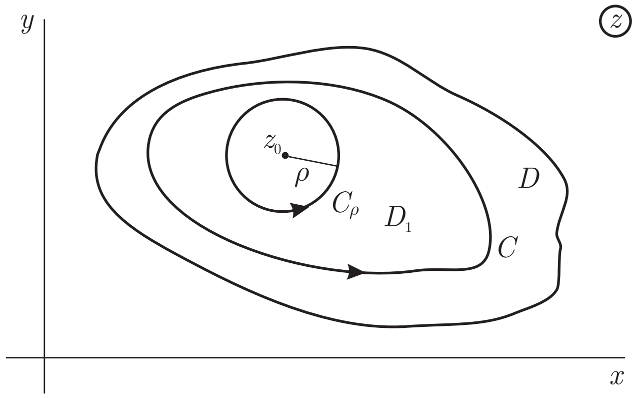


Рис. I.19.

Як бачимо з рівності (I.52), інтеґрал за контуром C_ρ не залежить від ρ, оскільки він завжди дорівнює інтеґралу за довільним контуром C. Тому для визначення інтеґрала за контуром C_ρ можна спрямувати ρ до нуля. Тоді під другим інтеґралом у (I.52) буде функція

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0). \qquad \text{(I.53)}$$

Оскільки $f(z)$ за означенням аналітична всюди в D, у тому числі в z_0, то $f'(z_0)$ — скінченна. Якщо доозначити функцію $\varphi(z)$ у точці z_0 за допомогою (I.53), то $\varphi(z)$ неперервна всюди в області D. Тоді $|\varphi(z)| < M$, де M — деяка константа. На підставі формул (I.34), (I.35) виконується нерівність

$$\left|\int\limits_{C_\rho}\varphi(z)dz\right| < M2\pi\rho. \qquad \text{(I.54)}$$

Спрямувавши ρ до нуля, з (I.54) одержимо $\int\limits_{C_\rho}\varphi(z)dz = 0$, і внаслідок (I.52)

$$\int\limits_C \varphi(z)dz = \int\limits_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = 0. \tag{I.55}$$

Або

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = f(z_0)\int\limits_C \frac{dz}{z - z_0}. \tag{I.56}$$

Інтеґрал у правій частині за формулою (I.47) дорівнює $2\pi i$. Отже,

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \tag{I.57}$$

і формулу Коші (I.50) доведено.

Формулу Коші легко узагальнити на випадок багатозв'язної області подібно до того, як це зроблено для теореми Коші в пункті 3.2. Крім того, формула Коші справджується, коли замість довільного контура C всередині D взяти границю Γ області D, а також, коли область D багатозв'язна. В останньому випадку вигляд формули (I.50) зберігається, а під Γ треба розуміти складений контур $\Gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k$, як у формулах (I.45), (I.46).

Наслідки.

1. Якщо z_0 лежить зовні C, то всюди всередині C функція $f(z)/(z - z_0)$ аналітична, і за теоремою Коші

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{якщо } z \text{ всередині } C, \\ 0, & \text{якщо } z \text{ зовні } C. \end{cases} \tag{I.58}$$

При $z_0 \in C$ інтеґрал зліва в (I.57) у звичайному сенсі не існує і потребує доозначення.

2. Нехай C_R — коло радіусом R з центром у точці z_0, яке повністю лежить в області аналітичності. Розглянемо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Для $z \in C_R$ маємо $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, тобто $z - z_0 = Re^{i\varphi}$ і $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$. Тоді

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z)\, d\varphi$$

або

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(z)\, ds. \tag{I.59}$$

Формула (I.59) відома як формула середнього значення, яка виражає значення аналітичної функції в центрі кола як середнє її значень на колі C_R.

§ 4. Властивості аналітичних функцій

1. Похідні аналітичної функції.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в D. Виберемо в D контур C і дві близькі точки z і $z + \Delta z$ усередині C. За формулою Коші

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z}\, d\zeta, \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Утворимо відношення

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)}\, d\zeta. \tag{I.60}$$

При $\Delta z \to 0$ підінтеґральний вираз прямує до $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$. Доведемо, що така границя існує. Для цього розглянемо різницю

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta - \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta =$$
$$= \Delta z \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta.$$

Нехай $|f(\zeta)| \leq M$ на C, і відстань від z до контура C має найменше значення μ, тобто $|\zeta - z| \geq \mu$ на C, а довжина контура C дорівнює L. Тоді

$$\left|\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta - \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| =$$
$$= \left|\Delta z \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta\right| \leq |\Delta z| \frac{ML}{\mu^2(\mu - |\Delta z|)} \underset{|\Delta z|\to 0}{\to} 0.$$

З урахуванням (I.60) і знайденої границі маємо

$$\lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}, \tag{I.61}$$

тобто границя зліва існує і не залежить від способу прямування Δz до нуля. Отже,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{I.62}$$

Аналогічно можна довести, що похідні $f''(z)$, $f'''(z), \ldots, f^{(n)}(z), \ldots$

існують і виражені формулами

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,d\zeta, \\ f'''(z) &= \frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^4}\,d\zeta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{(I.63)}$$

Отже, аналітична функція $f(z)$ має похідні всіх порядків, причому ці похідні знову є аналітичними функціями в D.

2. Принцип максимуму модуля.

Доведемо таку теорему.

Теорема. Нехай $f(z)$ — аналітична в D і неперервна в $\bar{D}$. Тоді або $|f(z)| = \text{const}$ всюди в D, або максимальне значення $|f(z)|$ досягається на границі області.

Доведення. Розглянемо

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}, \qquad \text{(I.64)}$$

причому $u(x,y)$ і $v(x,y)$ неперервні в $\bar{D}$ і тому $|f(z)|$ досягає максимального значення M в деякій точці $z_0 \in \bar{D}$, тобто

$$M = |f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in \bar{D}.$$

Припустимо, що z_0 — внутрішня точка області D.

За формулою (I.59) про середнє значення

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C_R} f(\zeta)\,ds$$

(рис. I.20).

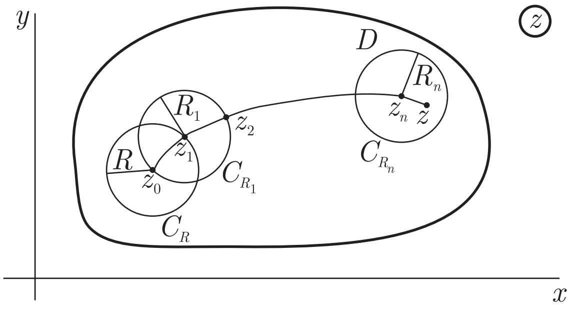


Рис. I.20.

Тоді

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi R}\left|\int\limits_{C_R} f(\zeta)\,ds\right| \le \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C_R} |f(\zeta)|\,ds \le M_R, \quad (I.65)$$

де

$$M_R = \max_{z\in C_R} |f(z)|.$$

Однак за умовою $M \ge |f(z)| \quad \forall z \in D$, тобто $M \ge M_R$. Враховуючи (I.65), знаходимо, що $M_R = M$. З іншого боку, $|f(z_0)| = M$ і за формулами (I.59) з урахуванням того, що $ds = R\,d\varphi$,

$$2\pi M = \left|\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi\right| \le \int\limits_0^{2\pi} |f(\zeta)|\,d\varphi \le 2\pi M_R.$$

Проте $M_R = M$, тому

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(\zeta)|\,d\varphi = 2\pi M,$$

що з урахуванням неперервності $f(z)$ можливе тоді, коли $|f(z)| = M$ в усіх точках кола C_R. Такий висновок справджується для будь-якого кола, що лежить усередині C_R і має центром точку z_0. Отже, всюди в крузі K_R, що обмежений C_R, $|f(z)| = M$. Доведемо, що $|f(z)| = M$ для довільної точки $z \in D$. Для цього з'єднаємо z_0 з z лінією, яка повністю лежить у D. Точку її перетину з колом C_R позначимо z_1 і виберемо як центр кола C_{R_1} радіусом R_1. Беручи до уваги, що $|f(z_1)| = M$, аналогічно доведемо, що $|f(z)| = M$ для всіх $z \in K_1$ — круга, обмеженого C_{R_1}. Далі таке ж доведемо для круга K_2 з центром у точці z_2 і так далі, доки не дійдемо до круга K_n з центром у точці z_n, до якого належить точка z, тобто $|f(z)| = M$.

Отже, якщо $|f(z)|$ набуває максимального значення M у деякій внутрішній точці області D, то $|f(z)| = M$ у будь-якій іншій точці цієї області, тобто $|f(z)| = \mathrm{const}$ в усій області D. З умов Коші–Рімана випливає, що $\arg f(z)$ сталий в області D. Отже, коли $|f(z)|$ набуває максимального значення в деякій точці z, внутрішній для області D, то ця функція тотожно дорівнює сталій. Теорему доведено.

Висновок. Якщо $f(z) \neq \mathrm{const}$ у D, то її модуль не може набувати максимального значення у внутрішніх точках області D. Та оскільки неперервна функція $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ набуває максимального значення в замкненій області $\bar{D}$, то це максимальне значення може досягатись тільки на границі області.

Для аналітичної в D функції $f(z)$, такої, що $f(z) \neq 0$ всюди в D, і неперервної в $\bar{D}$, також існує принцип мінімуму модуля. Для доведення цього принципу треба використати принцип максимуму модуля для функції $\varphi = 1/f(z)$.

3. Теорема Ліувілля[25].

Теорема. Якщо $f(z)$ — аналітична в повній комплексній площині й обмежена всюди за модулем, тобто $|f(z)| \leq M$, то така функція тотожно дорівнює сталій: $f(z) = \mathrm{const}$.

[25] Жозеф Ліувілль (Joseph Liouville, 1809–1882) — французький математик.

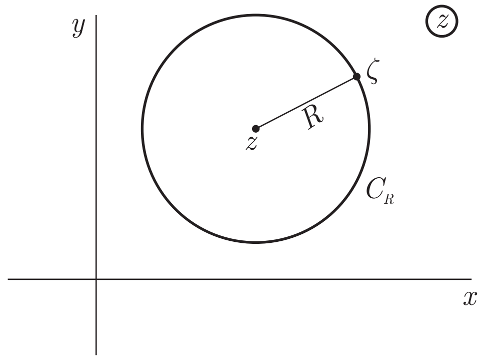


Рис. I.21.

Запишемо похідну від $f(z)$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Розглянемо

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_R} \frac{|f(\zeta)|\, ds}{R^2} \le \frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

(для унаочнення подано рис. I.21). Оскільки $f'(z)$ не залежить від R, то R можна вибирати довільно. Через те, що $f(z)$ аналітична в повній комплексній площині, у тому числі й у точці $z = \infty$, то R можна вибрати як завгодно великими, тобто $R \to \infty$. Тоді $|f'(z)| = 0$, звідки $f'(z) = 0$, $f(z) \equiv \text{const}$.

Якщо $f(z) \neq \text{const}$, то така функція не може бути обмеженою в усій комплексній площині. Зокрема, знайдуться такі z, що, наприклад, $|\sin z| > 1$, і цим функції комплексної змінної відрізняються від відповідних функцій дійсної змінної.

§ 5. Інтеґрал типу Коші. Формули Сохоцького

Нехай у комплексній площині задана довільна кусково-гладка орієнтована крива $\mathcal{L}$, на якій визначена неперервна, за винятком скінченної кількості точок, функція $\varphi(z)$. Розриви неперервності функції $\varphi(z)$ такі, що інтеґрал за $\mathcal{L}$ від $\varphi(z)$ існує (розриви є інтеґровними). Утворимо інтеґрал

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{I.66}$$

де точка z не лежить на $\mathcal{L}$. Якщо $\varphi(z)$ — аналітична в деякій області D, а інтеґрування виконують за замкненим контуром C, що повністю лежить у D, то (I.66) є вже відомий інтеґрал Коші. В нашому випадку функція $\varphi(z)$ задана на $\mathcal{L}$, як зазначено вище. Тоді (I.66) визначає так званий інтеґрал типу Коші. Сформулюємо такі теореми.

Теорема 1. Функція $F(z)$, яка визначена інтеґралом типу Коші, аналітична в будь-якій однозв'язній області D, що не містить точок лінії $\mathcal{L}$, а для її похідної $F'(z)$ виконується формула

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{I.67}$$

Теорема 2. Функція $F(z)$, яка визначена інтеґралом типу Коші, має в кожній $z \notin \mathcal{L}$ похідні всіх порядків, для яких справджуються формули

$$\begin{gathered} F''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{I.68}$$

Доведення цих теорем цілком аналогічне, як у § 4.

Зазначимо, що крива $\mathcal{L}$ в інтеґралі типу Коші може бути замкненим контуром C. У цьому випадку інтеґрал типу Коші може визначати різні аналітичні функції всередині контура і зовні від нього. Нагадаємо, що функція $\varphi(z)$ в (I.66) задана тільки на кривій $\mathcal{L}$, де вона кусково-неперервна. Тому формула (I.66), коли крива $\mathcal{L}$ є контуром C, не може привести до інтеґрала Коші, де йдеться про функцію $f(z)$, аналітичну в деякій області D.

Окремого розгляду потребує випадок, коли точка z в інтеґралі типу Коші лежить на кривій $\mathcal{L}$. Зокрема, розглянемо такий інтеґрал, у якому крива $\mathcal{L}$ є дійсною віссю $-\infty < x < \infty$, і на цій осі задана неперервна функція $\varphi(z)$

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz, \tag{I.69}$$

a — дійсне число.

У виразі (I.69) $\varphi(z) = \varphi(x)$ і $dz = dx$. Такий інтеґрал не існує і потребує доозначення. Нехай доозначення полягає в заміні “a” на “$a + i\delta$”, тобто замість (I.69) розглянемо інтеґрал

$$I^{(+)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-a-i\delta}\, dx, \tag{I.70}$$

де $\delta > 0$ і $\delta \to 0$. Щоб граничний перехід можна було виконати, замінимо інтеґрування за дійсною віссю інтеґруванням за кривою $\mathcal{L}$, як показано на рис. I.22.

Крива $\mathcal{L}$ складається з інтервалів $[-\infty, a-\delta]$ і $[a+\delta, +\infty]$ та півкола l_δ радіусом δ.

Тоді

$$\lim_{\delta\to 0} I^{(+)} = \lim_{\delta\to 0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{a-\delta} \frac{\varphi(x)\, dx}{x-a} + \int\limits_{a+\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\, dx}{x-a} + \int\limits_{l_\delta} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz \right\}. \tag{I.71}$$

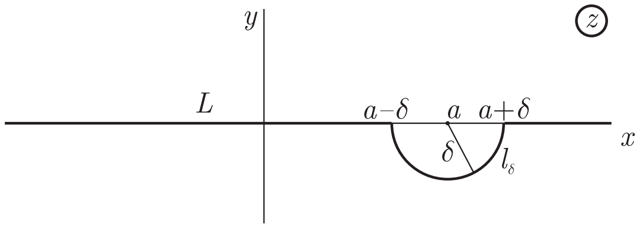


Рис. I.22.

Перші два інтеґрали дають так зване ***головне значення інтеґрала***, яке позначають $P\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(x)\,dx}{x-a}$. Останній інтеґрал обчислюємо, враховуючи, що на кривій l_δ $z=a+\delta e^{i\varphi}$, $-\pi\le\varphi\le 0$, $dz=i\delta e^{i\varphi}d\varphi$. Тоді

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{l_s}\frac{\varphi(a+\delta e^{i\alpha})}{\delta e^{i\alpha}}\,i\delta e^{i\alpha}\,d\alpha = i\varphi(a)\int\limits_{-\pi}^{0}d\alpha = i\pi\varphi(a). \qquad \text{(I.72)}$$

Отже,

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a-i\delta}\,dx = P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx + i\pi\varphi(a). \qquad \text{(I.73)}$$

У випадку іншого значення a, коли його замінимо на $a-i\delta$, аналогічно отримаємо

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a+i\delta}\,dx = P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx - i\pi\varphi(a). \qquad \text{(I.74)}$$

Об'єднуючи (I.73) і (I.74), можна записати

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a\mp i\delta}\,dx = P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx \pm i\pi\varphi(a). \qquad \text{(I.75)}$$

Цю рівність називають ***формулами Сохоцького***[26].

Уведення поняття головного значення інтеґрала для (I.66) є ще одним зі способів його доозначення. Розуміння інтеґрала (I.66) у сенсі головного значення “усуває” особливість на шляху інтеґрування. Розглянемо це питання докладніше. Нехай маємо

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx = P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\,dx + P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(a)}{x-a}\,dx. \qquad \text{(I.76)}$$

Далі розглянемо інтеґрал ($-R < a < R$)

$$\begin{aligned}
P\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{x-a} &= \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{-R}^{a-\delta}\frac{dx}{x-a} + \int_{a+\delta}^{R}\frac{dx}{x-a}\right\} = \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{R}^{\delta-a}\frac{dy}{y+a} + \int_{a+\delta}^{R}\frac{dx}{x-a}\right\} = \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left\{\ln(y+a)\Big|_{R}^{\delta-a} + \ln(x-a)\Big|_{a+\delta}^{R}\right\} = \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left[\ln\delta - \ln(R+a) + \ln(R-a) - \ln\delta\right] = \ln\frac{R-a}{R+a}.
\end{aligned}$$

Зокрема, при $a = 0$

$$P\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x} = \ln 1 = 0, \qquad \text{(I.77)}$$

у тому числі при $R \to \infty$

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x} = 0. \qquad \text{(I.78)}$$

[26] Юліан Кароль Сохоцький (Julian Karol Sochocki, 1842–1927) — польський математик, працював у Росії.

Отже, отримаємо

$$P\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx = P\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\,dx + \varphi(a)\ln\frac{R-a}{R+a}. \tag{I.79}$$

Якщо $\varphi(z)$ — аналітична при $z = a$, тобто диференційовна в цій точці, то при $x \to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a)$$

і в першому інтеґралі в (I.79) жодної особливості при $x = a$ немає. Тоді символ головного значення P в ньому можна не зазначати. При $R \to \infty$ другий доданок в (I.79) дорівнює нулю, і остаточно маємо

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\,dx. \tag{I.80}$$

Формула (I.80) демонструє, як усувається особливість в інтеґралі (I.69), коли його розуміють у сенсі головного значення. Зазначимо, що вибір способу доозначення інтеґрала (I.69) визначений умовами тієї конкретної фізичної задачі, у якій інтеґрал такого типу трапляється.

§ 6. Перетворення Гільберта

Нехай функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$ і така, що в цій півплощині $|f(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$. За таких умов між дійсною та уявною частинами $f(z)$ можна визначити зв'язки.

Утворимо інтеґрал Коші

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

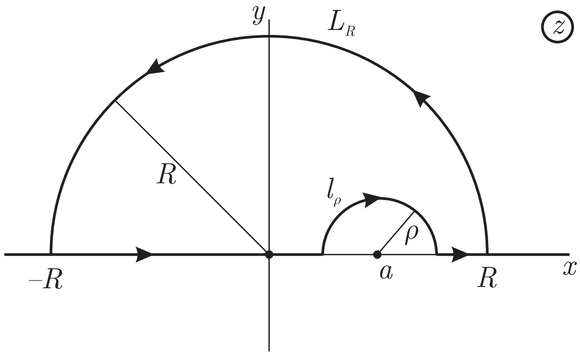


Рис. I.23.

де a — дійсне число. Контур C виберемо у вигляді, як на рис. I.23, тобто $C = \mathcal{L}_R + [-R, a-\rho] + l_\rho + [a+\rho, R]$. Всюди всередині C підінтеґральна функція $\frac{f(z)}{z-a}$ аналітична, тому $\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0$.

З іншого боку,

$$\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int\limits_{-R}^{a-\rho} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int\limits_{l_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + $$

$$+ \int\limits_{a+\rho}^{R} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int\limits_{\mathcal{L}_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0.$$

У границі $\rho \to 0$

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{ \int\limits_{-R}^{a-\rho} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int\limits_{a+\rho}^{R} \frac{f(x)\,dx}{x-a} \right\} = P\int\limits_{-R}^{R} \frac{f(x)\,dx}{x-a}$$

— головне значення інтеґрала. Розглянемо

$$\int\limits_{\mathcal{L}_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i\int\limits_0^{\pi} \frac{f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}-a}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} |R\,e^{i\theta} - a| &= (R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{1/2} \geq \\ &\geq |R^2 + a^2 - 2Ra|^{1/2} = |R - a| \end{aligned}$$

і $|f(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$ у верхній півплощині, то в границі $R \to \infty$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{L}_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \right| = \left| \int\limits_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta} - a} \right| \leq$$

$$\leq \frac{R}{|R-a|} \int\limits_0^\pi |f(Re^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{\pi R}{|R-a|} \max|f(Re^{i\theta})| \to 0, \quad R \to \infty.$$

Отже,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{L}_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0.$$

Інтеґрал за дугою l_ρ запишемо у вигляді

$$\int\limits_{l_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int\limits_{l_\rho} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\,dz + \int\limits_{l_\rho} \frac{f(a)\,dz}{z-a} =$$

$$= i \int\limits_\pi^0 \Big[f(a + \delta e^{i\alpha}) - f(a) \Big]\,d\alpha - i\pi f(a).$$

Оскільки $f(z)$ — неперервна (тому що $f(z)$ аналітична при $\operatorname{Im} z \geq 0$), то

$$\lim_{\delta\to 0} [f(a + \delta e^{i\alpha}) - f(a)] = 0$$

й остаточно при $R \to \infty$

$$P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{x-a} = i\pi f(a). \tag{I.81}$$

З урахуванням того, що

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x),$$

з (I.81) отримаємо зв'язки між дійсною й уявною частинами комплексно-значної функції $f(x)$

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)\,dx}{x-a},$$
$$\operatorname{Im} f(a) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)\,dx}{x-a}. \tag{I.82}$$

Пару функцій $\operatorname{Re} f(x)$ і $\operatorname{Im} f(x)$, що задовольняють формулу (I.82), називають ***трансформантами Гільберта***[27], а перехід від $\operatorname{Re} f(x)$ до $\operatorname{Im} f(x)$ і навпаки — ***перетворенням Гільберта***. Таке перетворення у фізиці називають дисперсійним співвідношенням. У випадку діелектричної проникності таке співвідношення називають ***дисперсійним співвідношенням Крамерса–Кроніґа***[28].

§ 7. Теорія рядів функцій комплексної змінної

7.1. Ряди у комплексній площині

Розглянемо послідовність комплексних чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

де $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, α_k, β_k — дійсні числа.

Числовим комплексним рядом називають вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k). \tag{I.83}$$

[27] Давид Гільберт (David Hilbert, 1862–1943), — німецький математик.

[28] Гендрик Антоні, *відомий як* Ганс Крамерс (Hendrik Anthony (Hans) Kramers, 1894–1952) — голландський фізик; Ральф Кроніґ (Ralph Kronig, 1904–1995) — німецько-американський фізик.

Такий ряд називають збіжним, якщо збігається послідовність $\{S_n\}$ його частинних сум $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Число $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ називають сумою ряду (I.83), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$; тоді існують границі $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \beta$, $\alpha + i\beta = a$.

Збіжність ряду означає, що для будь-якого як завгодно малого[29] $\varepsilon > 0$ існує таке $N = N(\varepsilon)$, що при $n \geq N$ виконується нерівність

$$\left| a - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon,$$

або

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon,$$

де величину $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ для збіжного ряду називають ***залишком ряду***.

Усі властивості числових рядів у дійсній області переносяться на ряди комплексних чисел. Зокрема, виконуються достатні умови збіжності д'Аламбера

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1, \;\; k \geq N$$

і Коші

$$\sqrt[k]{|a_k|} = q < 1, \quad k \geq N.$$

Необхідною умовою збіжності ряду є $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Розглянемо функціональні комплексні ряди. Нехай маємо послідовність функцій

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z), \ldots,$$

визначених в області D. Функціональним рядом називають вираз $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$. За кожного фіксованого $z = z_0$ цей ряд перетворюється

[29]Далі слів "як завгодно малого" вживати не будемо.

у числовий $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$. Якщо цей ряд збігається, то кажуть, що функціональний ряд збігається в точці z_0. Якщо функціональний ряд збігається у кожній точці області D, то кажуть, що функціональний ряд збігається в області D. Сумою такого ряду є функція

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{I.84}$$

а його залишок —

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z). \tag{I.85}$$

Збіжність ряду (I.84) означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon, z)$, що при $n \geq N$

$$|r_n(z)| < \varepsilon, \qquad \text{або} \qquad |f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)| < \varepsilon. \tag{I.86}$$

Збіжність ряду називають ***рівномірною***, якщо $N = N(\varepsilon)$, тобто не залежить від z, і нерівності (I.86) виконуються для всіх $z \in D$.

Достатню умову рівномірної збіжності функціонального ряду формулюють такою теоремою, яку називають ***ознакою Веєрштрасса***[30].

Теорема. Якщо в усій області D $|f_k(z)| < |a_k|$ і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ збігається, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ збігається рівномірно. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ у цьому випадку називають ***мажорантним***.

Доведення. За умовою теореми існує рівномірна (однакова для всіх $z \in D$) оцінка

$$|f_k(z)| < |a_k|, \qquad z \in D.$$

[30] Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897) — німецький математик.

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ збігається, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$ таке, що $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$. Для залишку функціонального ряду можемо записати

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

при $n \geq N(\varepsilon)$, що й доводить рівномірну збіжність ряду (I.84) в області D.

Наведемо без доведення теорему, яка формулює необхідну і достатню умову рівномірної збіжності ряду (I.84) в області D — так званий критерій Коші.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою рівномірної збіжності ряду (I.84) в області D є існування для довільного $\varepsilon > 0$ такого $N(\varepsilon)$, що для всіх $z \in D$ виконується співвідношення

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

при $n \geq N(\varepsilon)$ і для довільного натурального m.

Властивості рівномірно збіжних рядів формулюють такими теоремами, які наводимо без доведення.

Теорема 1. Якщо всі члени ряду (I.84) неперервні в області D і ряд збігається рівномірно, то сума ряду $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ є теж неперервною функцією в D.

Теорема 2. Якщо всі члени ряду (I.84) неперервні в області D і ряд збігається рівномірно, то його можна почленно інтеґрувати в D, причому

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{L}} f_k(z)\, dz,$$

де $\mathcal{L}$ — довільна кусково-гладка крива, що міститься в D.

Розглянемо випадок, коли члени функціонального ряду — аналітичні функції в деякій області D. Сформулюємо таку теорему.

Теорема (перша теорема Веєрштрасса). Нехай функції $f_k(z)$ аналітичні в D, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ збігається рівномірно в кожній довільній замкненій підобласті $\bar{D}_1$ області D [31]. Тоді

1) сума ряду $f(z)$ аналітична в D;

2) ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z);$$

3) ряд похідних рівномірно збіжний у довільній замкненій підобласті $\bar{D}_1$ області D.

Доведення.

1. За умовою теореми $f_k(z)$ неперервні в D, і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ можна почленно інтеґрувати. Виберемо в D довільний замкнений контур C, тоді

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_C f_k(z)\,dz.$$

Однак усі $\int\limits_C f_k(z)\,dz$ за теоремою Коші дорівнюють 0. Отже, $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, і, на підставі теореми Морери, $f(z)$ аналітична в D.

2. Виберемо в D довільний замкнений контур C і зафіксуємо всередині нього довільну точку z. Нехай $\min\limits_{\zeta\in C} |\zeta - z| = d > 0$ (рис. I.24). Розглянемо ряд для $\zeta \in C$

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)$$

[31] Це означає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ може збігатись нерівномірно або взагалі не збігатись на границі області D.

і помножимо зліва і справа на $\dfrac{n!}{2\pi i(\zeta - z)^{n+1}}$. Одержимо

$$\frac{n!f(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!f_k(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Далі інтеґруємо за C

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Звідки

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z),$$

що й треба було довести.

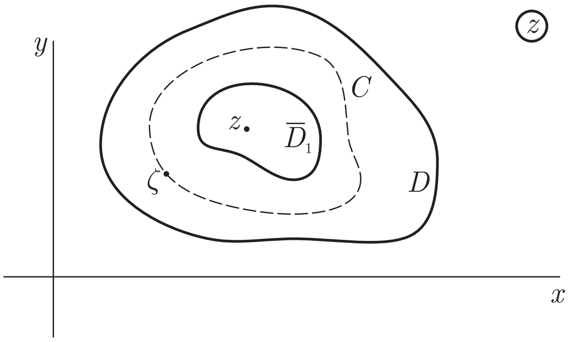


Рис. I.24.

3. Розглянемо довільну підобласть $\bar{D}_1$ у D і побудуємо контур C, що містить $\bar{D}_1$ всередині. Нехай $\min\limits_{\zeta\in C,\, z\in\bar{D}_1} |\zeta - z| = d$. Залишок ряду $r_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ — аналітична функція в D. Для довільної $z \in \bar{D}_1$ запишемо співвідношення

$$\frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{r_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\,d\zeta = r_n^{(m)}(z),$$

причому $r_n^{(m)}(z)$ — залишок ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(m)}(z)$.

Завдяки рівномірній збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що на C при $n \geq N(\varepsilon)$ існує рівномірна оцінка $|r_n(\zeta)| < \varepsilon$. Тоді

$$|r_n^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{2\pi} \int\limits_C \frac{|r_n(\zeta)|}{|(\zeta - z)^{m+1}|} |d\zeta| \leq \frac{m!L}{2\pi d^{m+1}} \varepsilon = \tilde{\varepsilon},$$

де L — довжина контура C. Це означає, що для ряду похідних виконується рівномірна оцінка $|r_n^{(m)}(z)| \leq \tilde{\varepsilon}$ при $n \geq N$ для всіх $z \in \overline{D}_1$. Отже, ряд похідних рівномірно збіжний для замкненої підобласті $\overline{D}_1$ області D, що й треба було довести.

Зрозуміло, що теорема справджується й у випадку, коли функціональний ряд рівномірно збіжний у замкненій області $\bar{D}$. Однак ряд похідних може не збігатися рівномірно в $\bar{D}$, він може на границі області D бути розбіжним. Тому ряд похідних рівномірно збігається лише в кожній замкненій підобласті області D. Наприклад, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ збігається рівномірно в крузі $|z| \leq 1$, а ряд похідних $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$ не може збігатися в крузі $|z| \leq 1$, бо він розбіжний при $z = 1$.

Умову рівномірної збіжності функціонального ряду в замкненій області $\bar{D}$ можна замінити умовою рівномірної збіжності ряду на границі Γ області D. Сформулюємо відповідну теорему.

Теорема (друга теорема Веєрштрасса). Нехай $f_k(z)$ — аналітичні в D, неперервні в $\bar{D}$ і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ рівномірно збігається на границі Γ області D. Тоді ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ збігається рівномірно і в $\bar{D}$.

Доведення. На підставі критерію Коші та рівномірної збіжності ряду на Γ для різниці частинних сум маємо

$$|S_{n+m}(\zeta) - S_n(\zeta)| = |f_{n+m}(\zeta) + \ldots + f_{n+1}(\zeta)| < \varepsilon$$

при $n \geq N(\varepsilon)$ для довільного натурального числа m і всіх точок $\zeta \in \Gamma$. Ця різниця частинних сум як скінченна сума функцій, аналітичних у D і неперервних у $\bar{D}$, є аналітичною в D і неперервною в $\bar{D}$. За теоремою про максимум модуля аналітичної функції

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

при $n \geq N(\varepsilon)$ для довільного натурального числа m і для всіх $z \in \bar{D}$. Отже, всюди в $\bar{D}$ виконується критерій Коші і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ рівномірно збіжний всюди в $\bar{D}$, що й треба було довести.

7.2. Степеневі ряди. Теорема Абеля

Степеневими називають ряди, для яких $f_k(z) = C_k(z-a)^k$, тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k, \tag{I.87}$$

де a — фіксоване комплексне число, число a називають центром ряду, а комплексні числа C_k — коефіцієнтами степеневого ряду. Члени ряду $C_k(z-a)^k$ — аналітичні функції в усій комплексній площині. Важливими є питання про область рівномірної збіжності такого ряду. Зрозуміло, що така область визначатиметься конкретним виглядом коефіцієнтів C_k. У кожному випадку ряд збігається у своєму центрі

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k|_{z=a} = C_0.$$

Область збіжності степеневого ряду визначена ***теоремою Абеля***[32].

[32]Нільс Генрик Абель (Niels Henrik Abel, 1802–1829) — норвезький математик.

Теорема. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k$ збігається в точці $z_0 \neq a$, то він збігається абсолютно[33] для всіх z, що задовольняють умову $|z-a| < |z_0-a|$, а в крузі $|z-a| \leq R < |z_0-a|$ збіжність рівномірна.

Доведення. З умови збіжності ряду в точці z_0 випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} C_k(z_0-a)^k = 0$, тобто члени ряду є обмежені $|C_k||z_0-a|^k \leq M$ для всіх k. Розглянемо

$$|C_k(z-a)^k| = \left| C_k(z_0-a)^k \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^k \right| \leq M \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k$$

для всіх k. Однак $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| = q < 1$, тому степеневий ряд (I.87) мажорується нескінченною геометричною прогресією $M\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ зі знаменником $q < 1$. Отже, ряд (I.87) збігається абсолютно при $|z-a| < |z_0-a|$. Для круга $|z-a| \leq R$ степеневий ряд (I.87) мажорується рядом $M\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{|z_0-a|^k}$, який також є збіжною нескінченною геометричною прогресією зі знаменником $\frac{R}{|z_0-a|} < 1$. За ознакою Веєрштрасса степеневий ряд (I.87) рівномірно збігається в крузі $|z-a| \leq R < |z_0-a|$, що завершує доведення.

Наслідки з теореми Абеля.

1. Якщо ряд (I.87) розбіжний при $z = z_0$, то він розбіжний для всіх z, що задовольняють умову $|z-a| > |z_0-a|$. Справді, припустимо протилежне, тобто що ряд збіжний у точці z. Тоді за теоремою Абеля він збіжний у точці z_0, що суперечить припущенню.

2. Позначимо через R точну верхню границю відстаней $|z-a|$, для яких ряд збіжний $R = \sup|z-a|$. При $|z-a| < R$ ряд збіжний, при $|z-a| > R$ ряд розбіжний, при $|z-a| = R$ ряд може збігатись або розбігатись. Область $|z-a| < R$ називають кругом збіжності

[33] Нагадаємо, що ряд комплексних чисел збігається абсолютно, якщо збігається ряд модулів цих чисел.

степеневого ряду (I.87), а число R — радіусом збіжності. Можливі три випадки:

а) $R = 0$ — ряд збігається тільки у своєму центрі. Наприклад, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!(z-a)^k$ за критерієм д'Аламбера $\left|\frac{f_{k+1}(z)}{f_k(z)}\right| = (k+1)|z-a| > 1$, починаючи з деякого $k \geq N(z)$ і тому розбігається при будь-якому $z \neq a$;

б) $R = \infty$ — ряд збігається при всіх z. Таким є ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$. Справді, цей ряд при $z = x$ дорівнює $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, який збігається при будь-якому x. Тому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ збігається $|z| < x < \infty$;

в) R — скінченне. Наприклад, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$, який при $z = x$ дорівнює $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, а той збігається при $x < 1$. Тому за теоремою Абеля ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ збігається при $|z| < 1$. Отже, радіус збіжності в цьому випадку $R = 1$.

3. Усередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції, бо члени ряду $C_k(z-a)^k$ аналітичні в усій комплексній площині, а ряд збігається рівномірно в будь-якій замкненій підобласті в крузі збіжності і, отже, виконуються умови теореми Веєрштрасса.

4. Степеневий ряд усередині круга збіжності можна почленно інтеґрувати і диференціювати довільну кількість разів. Отримані ряди збігаються в цьому ж крузі збіжності.

5. Якщо $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k = f(z)$, то коефіцієнти ряду можна ви-

разити через значення $f(z)$ та її похідних у центрі круга. Справді:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k = f(z), \qquad C_0 = f(a);$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} kC_k (z-a)^{k-1} = f'(z), \qquad C_1 = f'(a);$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k (z-a)^{k-2} = f''(z), \qquad 1\cdot 2\cdot C_2 = f''(a);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)C_k (z-a)^{k-n} = f^{(n)}(z), \quad n!C_n = f^{(n)}(a);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отже,

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{I.88}$$

7.3. Теорема і ряди Тейлора

За теоремою Абеля степеневий ряд усередині круга збіжності визначає деяку аналітичну функцію. Постає питання: чи можна аналітичну всередині деякого круга функцію подати степеневим рядом, який збігається всередині цього круга до заданої функції? Позитивну відповідь на це питання дає ***теорема Тейлора***.

Теорема. Функцію $f(z)$, аналітичну всередині круга $|z-a|<R$, можна зобразити в цьому крузі степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k,$$

причому цей ряд визначений однозначно.

Доведення. Виберемо деяку точку z усередині круга $|z-a|<R$ і побудуємо контур C у вигляді кола радіусом ρ з центром ув a такий, щоб точка z опинилася всередині цього контура (рис. I.25).

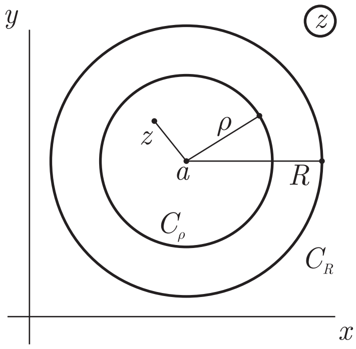


Рис. I.25.

Оскільки функція $f(z)$ аналітична на контурі C і всередині нього, то за формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{I.89}$$

Перетворимо вираз, що стоїть під інтеґралом в (I.89):

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}. \tag{I.90}$$

Оскільки точка ζ лежить на контурі C, а z — усередині нього, то

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1. \tag{I.91}$$

Тому $1\Big/\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)$ можна розглядати як суму геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots \tag{I.92}$$

Підставимо (I.92) в (I.90) й одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{I.93}$$

Цей ряд збіжний рівномірно для всіх ζ, оскільки мажорантний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-a|^k}{\rho^{k+1}} \qquad (|z-a| < \rho)$$

збігається. Множення на функцію $f(\zeta)$, очевидно, не порушує рівномірної збіжності. Тому, підставивши (I.93) в (I.89), можна проінтеґрувати почленно й одержати

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}} (z-a)^k. \tag{I.94}$$

Отже, ми розклали $f(z)$ у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k, \tag{I.95}$$

де

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(z)}{dz^k}\bigg|_{z=a}. \tag{I.96}$$

Коефіцієнти C_k — єдині. Якщо припустити, що існує інший ряд, сума якого дорівнює $f(z)$, тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty} C'_k (z-a)^k = f(z),$$

де хоча б одне $C'_k \neq C_k$ і збігається до $f(z)$, то на підставі властивостей степеневих рядів отримаємо

$$C'_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = C_k,$$

і розклад єдиний.

Розглянемо це питання дещо детальніше. Передусім зазначимо, що з означення функції, аналітичної в точці, випливає таке твердження: якщо $f(z)$ аналітична в деякій точці z, то вона аналітична в деякому околі цієї точки. Тобто існує круг з центром у z як завгодно малого радіуса, в якому $f(z)$ аналітична. Будь-яку точку, у якій функція аналітична, коротко можна назвати правильною, а будь-яку неправильну точку — особливою. Наприклад, для функції $1/(1-z)$ усі точки $z \neq 1$ є правильними, а точка $z = 1$ — особлива. Коли говорять, що ряд збігається в крузі $|z| < R$, то це означає, що на самому колі $|z| = R$ є принаймні одна особлива точка. Справді, якби всі точки кола були правильними, то це означало б, що функція аналітична, згідно зі сказаним вище, у крузі радіусом $R+\varepsilon$, де ε — безмежно мала, і в цьому крузі її можна було б розкласти в ряд, а це суперечить нашій умові, що радіус круга збіжності дорівнює R. Звідси робимо важливий висновок: якщо a є правильною точкою функції $f(z)$, то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора в околі цієї точки, причому коло, яке є межею круга збіжності, проходить через найближчу до a особливу точку функції $f(z)$. (Центр цього кола є в точці a).

Розглянемо для прикладу ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots . \tag{I.97}$$

В області дійсних чисел важко зрозуміти, чому цей ряд розбігається, якщо $x \leq -1$ і $x \geq 1$, тоді як функція $1/(1+x^2)$ визначена для всіх x, і значення $x = \pm 1$ не є для неї особливими.

Пояснити це легко, якщо розглянути комплексні z. Справді, функція $1/(1+z^2)$ має особливі точки $z = \pm i$, а отже, радіус круга збіжності цього ряду дорівнює одиниці. Це означає, що ряд не збігається на колі радіусом, що дорівнює одиниці, з центром у початку координат. А точки $x = \pm 1$ належать цьому колу. Тому в них і порушується збіжність ряду (I.97).

Приклад. Функція $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; особливі точки $z = \pm i$. Функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд у довільному крузі, що не містить цих точок.

Якщо це круг $|z| < 1$ з центром у точці $z = 0$, то розкладаємо функцію за формулою нескінченної геометричної прогресії

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

і радіус збіжності $R = 1$.

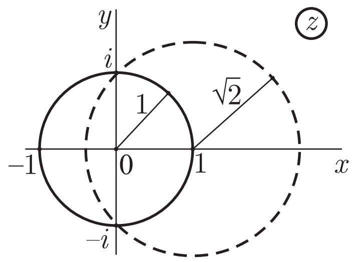


Рис. I.26.

Якщо ж розкласти $f(z)$ в ряд у крузі з центром $z = 1$, то $R = \sqrt{2}$ (рис. I.26). Загалом, радіус збіжності — це відстань від центра до найближчої особливої точки.

7.4. Єдиність аналітичної функції. Аналітичне продовження

Інтеґральна формула Коші дає змогу визначити аналітичну функцію в деякій області, якщо ми знаємо її тільки на границі цієї області. Отже, функція, аналітична в області, визначається неповною інформацією про її значення — ці значення відомі лише на границі. Постає питання: яку треба мати "мінімальну" інформацію, щоб повністю визначити функцію, аналітичну в заданій області?

Насамперед уведемо поняття нуля аналітичної функції.

Точку a називають ***нулем*** аналітичної в D функції $f(z)$, якщо

$f(a) = 0$ $(a \in D)$. Розкладемо $f(z)$ в ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k,$$

тоді

$$f(a) = C_0 = 0.$$

Може статися, що

$$C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0, \qquad C_n \neq 0,$$

тоді точка a — нуль n-го порядку і розклад у ряд буде таким:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z-a)^k = \sum_{k'=0}^{\infty} C_{k'+n} (z-a)^{k'+n} = \\ &= (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n} (z-a)^k = (z-a)^n \varphi(z), \end{aligned}$$

де $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{k+n}(z-a)^k$, $\varphi(a) \neq 0$ і $\varphi(z)$ — аналітична в тому ж крузі збіжності, що й $f(z)$. У цьому випадку

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \qquad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Теорема. Нехай $f(z)$ — аналітична в D і перетворюється в нуль у точках $z_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$. Якщо послідовність $z_1, z_2, \ldots,$ $z_n \ldots$ збігається до границі $a \in D$, то $f(z) \equiv 0$ всюди в D.

Доведення. Розкладемо $f(z)$ в ряд у крузі $|z-a| < R_0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k,$$

причому радіус збіжності R_0 ряду не більший, ніж найменша відстань від a до границі області D (рис. I.27). З неперервності $f(z)$ випливає

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) = 0. \tag{I.98}$$

Отже, $f(a) = C_0 = 0$ і розклад у ряд має вигляд

$$f(z) = (z - a) f_1(z),$$

де

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}(z - a)^k.$$

Припустимо, що всі $z_n \neq a$, однак $f(z_n) = 0$, тоді з (I.98) $f_1(z_n) = 0$ для всіх $z_n \neq a$. Проте $f_1(z)$ — неперервна функція, тому $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(z_n) = f_1(a) = 0$. Звідси $C_1 = 0$,

$$f_1(z) = (z - a) \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}(z - a)^k = (z - a) f_2(z).$$

Аналогічно $f_2(a) = 0$ і $C_2 = 0$ і т. д. Продовжуючи цей процес необмежено, знаходимо, що всі коефіцієнти $C_n = 0$. Отже, у крузі $|z - a| < R_0$, $f(z) \equiv 0$.

Доведемо тепер, що $f(z) = 0$ для довільного $z \in D$. Для цього з'єднаємо z з a кривою $\mathcal{L} \in D$.

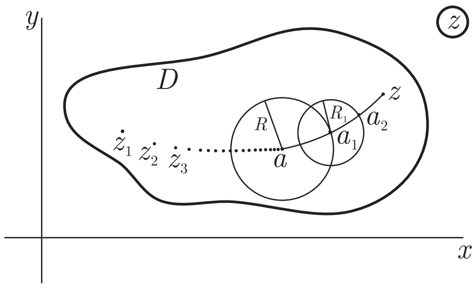


Рис. I.27.

Послідовність точок кривої $\mathcal{L}$ всередині круга радіусом R_0 є такою, що для них $f(z) = 0$. Точка a_1 — гранична для цієї послідовності, її вибирають як центр нового розкладу. Повторюючи доведення, знайдемо, що $f(z) \equiv 0$ для $|z - a_1| < R_1$. Продовжуючи цей процес, дійдемо висновку, що $f(z) \equiv 0$ для круга $|z - a_n| < R_n$, у якому міститься довільно вибрана точка z. Отже, $f(z) = 0$ для довільної $z \in D$ і $f(z) \equiv 0$ для всіх $z \in D$, тобто $f(z) \equiv 0$ всюди в D.

Наслідки

1. Функція $f(z) \neq 0$ й аналітична в D у будь-якій замкненій підобласті $\bar{D}_1 \in D$, має лише скінченну кількість нулів.

У протилежному випадку в $\bar{D}_1$ можна вибрати збіжну послідовність нулів $\{z_n\} \to a$, де $a \in \bar{D}_1$. Тоді $f(z) \equiv 0$ в D, що суперечить припущенню.

2. Аналітична функція може мати безмежну кількість нулів лише у відкритій або необмеженій областях.

3. **Теорема єдиності аналітичної функції**. Якщо аналітичні функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ в D збігаються на збіжній послідовності $\{z_n\} \in D$, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в D.

Для доведення достатньо розглянути функцію $\psi(z) = f(z) - \varphi(z)$, яка на послідовності $\{z_n\}$ дорівнює нулю. Тоді $\psi(z) \equiv 0$ в D.

З теореми єдиності:

а) якщо аналітичні функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ в D збігаються на деякій кривій, що належить D, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ у D.

б) якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні, відповідно, в D_1 і D_2, що мають спільну підобласть і збігаються в D, де D — спільна область для D_1 і D_2) (рис. I.28), то існує єдина аналітична функція $F(z)$ така, що

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1, \\ \varphi(z), & z \in D_2. \end{cases}$$

Теорему єдиності та її наслідки можна переформулювати так.

1. Нехай у D вибрано збіжну послідовність точок $\{z_n\} \to a$. Тоді в D існує єдина аналітична функція $f(z)$, що набуває в точках z_n заданих значень.

2. Нехай у D вибрано криву $\mathcal{L}$. Тоді в D існує єдина аналітична функція $f(z)$, що набуває на $\mathcal{L}$ заданих значень.

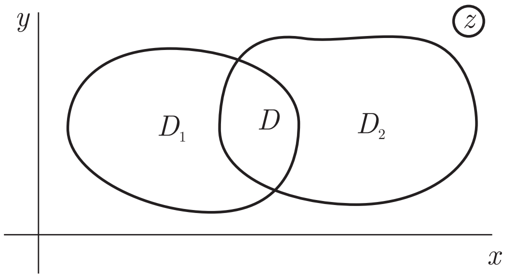


Рис. I.28.

3) Нехай в D задана підобласть D_1. Тоді в D існує єдина аналітична функція $f(z)$, що приймає в D_1 задані значення.

Означення. Аналітичну функцію $f(z)$, визначену в D, про яку говорилось у п. 1–3, називають ***аналітичним продовженням функції***, заданої на множині $\{z_n\}$, лінії $\mathcal{L}$ чи підобласті D_1 в область D.

Зокрема, повертаючись до наслідку б):

- $\varphi(z)$ — аналітичне продовження функції $f(z)$ в область D_2 через D;
- $f(z)$ — аналітичне продовження функції $\varphi(z)$ в область D_1 через D.

Теорема про єдиність аналітичної функції дає змогу поширити на комплексну площину елементарні функції дійсної змінної.

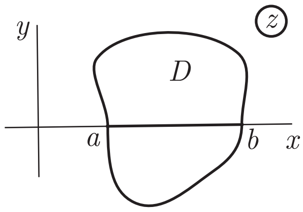


Рис. I.29.

Якщо на відрізку $[a,b]$ дійсної осі x задано неперервну функцію $f(x)$, то в області D площини z, яка містить $[a,b]$, може існувати тільки одна функція $f(z)$, аналітична в D, яка на $[a,b]$ набуває значення $f(x)$. Тоді $f(z)$ називають аналітичним продовженням функції $f(x)$ в комплексну область D (рис.I.29)

У цьому разі можна аналітично продовжити в комплексну площину і співвідношення між ними, наприклад,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \text{оскільки} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Аналітичне продовження через границю.

Нехай у D_1 задана функція $f_1(z)$, причому $f_1(z)$ — аналітична в $D_1 + \mathcal{L}$, а $f_2(z)$ — в $D_2 + \mathcal{L}$ і $f_1(z) = f_2(z)$ на $\mathcal{L}$, де $\mathcal{L}$ — спільна границя областей D_1 і D_2. Доведемо, що функція

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 + \mathcal{L}, \\ f_2(z), & z \in D_2 + \mathcal{L} \end{cases}$$

аналітична в $D_1 + D_2 + \mathcal{L}$.

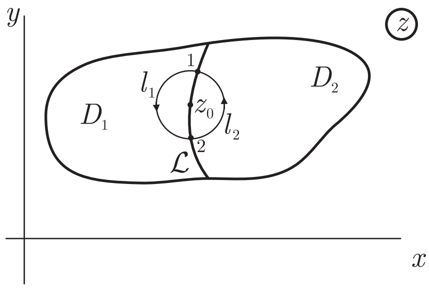


Рис. I.30. Частини дуги $\mathcal{L}$ між точками 1 і 2 позначатимемо $\mathcal{L}_{12}$ і $\mathcal{L}_{21}$ залежно від напряму обходу.

Достатньо довести, що для $z_0 \in \mathcal{L}$ існує окіл, у якому $F(z)$ аналітична. Розглянемо коло (рис. I.30) $C = l_1 + l_2$ і побудуємо інтеґрал

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_1+l_2} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{I.99}$$

— інтеґрал Коші. Функція $\Phi(z)$ — аналітична, якщо z не лежить на колі C. Доведемо, що $\Phi(z) \equiv F(z)$ для всіх z усередині C. Для цього запишемо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_1+\mathcal{L}_{21}} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_2+\mathcal{L}_{12}} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

якщо $z \in D_1$, то $\Phi_1(z) = f_1(z)$, $\Phi_2(z) = 0$, тобто $\Phi(z) = f_1(z) = F(z)$. Для $z \in D_2$ маємо $\Phi_1(z) = 0$, $\Phi_2(z) = f_2(z)$, тобто $\Phi(z) = f_2(z) = F(z)$. Для $z_0 \in \mathcal{L}_{12}$ з огляду на неперервність $\Phi(z_0) = f_1(z_0) = f_2(z_0) = F(z_0)$. Отже, $F(z)$ — аналітична в D. У цьому випадку говорять, що $f_2(z)$ є аналітичним продовженням $f_1(z)$ через границю з D_1 в D_2 і навпаки.

7.5. Ряди Лорана

Рядом Лорана[34] називають ряд вигляду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k, \tag{I.100}$$

де a — точка комплексної площини, C_k — комплексні числа. Запишемо (I.100) у вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}. \tag{I.101}$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ — ряд Тейлора, областю збіжності якого є круг із центром у точці a деякого радіуса R (зокрема, R може дорівнювати нулю або безмежності). У такому крузі цей ряд збігається до деякої аналітичної функції

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k, \qquad |z-a| < R. \tag{I.102}$$

[34] П'єр Альфонс Лоран (Pierre Alphonse Laurent, 1813–1854) — французький математик.

Визначимо область збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$. Для цього введемо змінну $\zeta = \frac{1}{z-a}$. Тоді цей вираз матиме вигляд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{-k}\zeta^k$, тобто є рядом Тейлора, який збігається в деякому крузі до аналітичної функції $\varphi(\zeta)$. Нехай $1/r$ — радіус круга збіжності цього степеневого ряду, тобто

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k}\zeta^k, \qquad |\zeta| < \frac{1}{r}. \tag{I.103}$$

Повернемось до попередньої змінної і приймемо $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$. Тоді маємо

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}, \qquad |z-a| > r. \tag{I.104}$$

Цей ряд за від'ємними степенями різниці $(z-a)$ збігається всюди поза кругом $|z-a| > r$, причому r може дорівнювати нулю або безмежності.

Отже, для ряду (I.101) маємо, що кожна частина збігається до відповідної аналітичної функції $f_1(z)$ чи $f_2(z)$. Якщо $r < R$, то існує спільна область збіжності цих частин — кругове кільце $r < |z-a| < R$, у якому ряд (I.100) збігається до аналітичної функції

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z-a)^k, \quad r < |z-a| < R, \tag{I.105}$$

оскільки ряди (I.102) і (I.104) є звичайними степеневими рядами і функція $f(z)$ має всі властивості суми степеневого ряду.

Якщо $r > R$, то ряди (I.102) і (I.104) не мають спільної області збіжності, і ряд (I.100) ніде не збігається до якоїсь функції.

Доведемо, що функції, аналітичній у деякому круговому кільці, можна поставити у відповідність ряд Лорана (I.100), який буде збігатися до цієї функції в заданому кільці.

Теорема. Функцію $f(z)$, аналітичну в круговому кільці $r < < |z-a| < R$, однозначно можна зобразити в цьому кільці збіжним рядом Лорана.

Доведення. У межах кільця $r < |z-a| < R$ виберемо кругове кільце K_1 з радіусами r_1 і R_1, такими що (рис. I.31)

$$r < r_1 \leq |z-a| \leq R_1 < R.$$

У замкненому кільці K_1 функція $f(z)$ аналітична, тому запишемо формулу Коші для довільного z усередині K_1:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f_1(z) - f_2(z). \end{aligned} \tag{I.106}$$

Кожну з функцій $f_1(z)$ та $f_2(z)$ розкладемо в ряд.

Для $f_1(z)$ виконаємо такі дії (нагадаємо, що $f_1(z)$ — аналітична всередині круга радіусом R)

$$\frac{1}{(\zeta - z)} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)}.$$

Оскільки $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} &= \frac{1}{\zeta - a}\left[1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \ldots\right] = \\ &= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \ldots . \end{aligned}$$

Цей ряд рівномірно збігається на колі C_{R_1}, його можна почленно інтеґрувати.

а) Помножимо отриманий ряд на $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ і почленно проінтеґруємо за C_{R_1}:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}\,d\zeta(z-a) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}\,d\zeta(z-a)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k, \\ C_k &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a). \end{aligned}$$

Отриманий ряд збігається рівномірно до $f_1(z)$ усередині кола C_{R_1}.

Подібні дії виконаємо для функції $f_2(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \\ &= -\frac{1}{z-a}\left[1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\ldots\right], \qquad \left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1, \end{aligned}$$

де цей ряд рівномірно збігається на колі C_{r_1} і його можна почленно інтеґрувати.

б) Помножимо отриманий ряд на $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ і проінтеґруємо за C_{r_1}:

$$f_2(z) = -\left[(z-a)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{1-1}}\,d\zeta + (z-a)^{-2}\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{1-2}}\,d\zeta + (z-a)^{-3}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{1-3}}\,d\zeta + \ldots\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k}(z-a)^{-k},$$

де

$$C_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{1-k}}\,d\zeta.$$

Отже,

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) - f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k}(z-a)^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{-\infty} C_k (z-a)^k = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k, \end{aligned} \tag{I.107}$$

причому для всіх k коефіцієнти C_k обчислюють за формулою

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{I.108}$$

де C — довільний замкнений контур, що лежить у кільці $r < |z-a| < R$ і містить точку a всередині (вибір довільного контура C можливий згідно з теоремою Коші, яка дає змогу довільно деформувати контур інтеґрування в областях аналітичності підінтеґральних функцій).

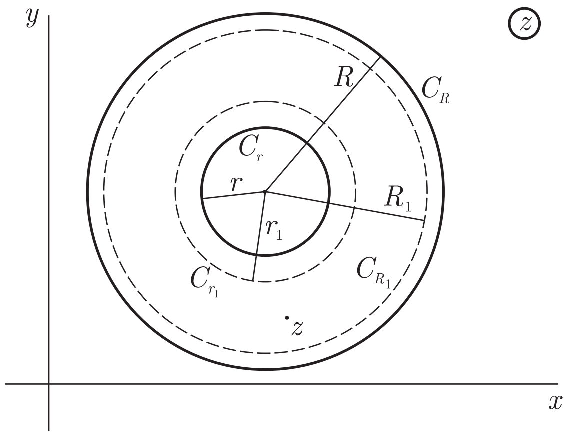


Рис. I.31.

Оскільки z — довільна точка всередині кільця $r < |z-a| < R$, то ряд (I.107) збігається до функції $f(z)$ всюди всередині цього кільця, причому в замкненому кільці K_1 ряд збігається до функції $f(z)$ рівномірно.

Доведемо, що розклад (I.107) однозначний. Припустимо, що можливий інший розклад

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k (z-a)^k,$$

де хоча б один коефіцієнт $C'_k \neq C_k$, тобто всюди всередині кільця $r < |z-a| < R$ справджується рівність

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k (z-a)^k. \tag{I.109}$$

Виберемо коло $C_{\tilde{R}}$ радіусом $\tilde{R}$, $r < \tilde{R} < R$, з центром у точці a. На $C_{\tilde{R}}$ ряди (I.108) збігаються рівномірно. Домножимо їх на $(z-a)^{-n-1}$, де n — фіксоване ціле число, і проінтеґруємо почленно.

В інтеґралах

$$\int\limits_{C_{\tilde{R}}} (z-a)^{k-n-1}\, dz$$

приймемо $z - a = \tilde{R}e^{i\varphi}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{C_{\tilde{R}}} (z-a)^{k-n-1}\, dz &= \tilde{R}^{k-n} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi}\, d\varphi = \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 2\pi i, & k = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{I.110}$$

Враховуючи (I.109), знайдемо, що після інтеґрування у (I.108) залишаться по одному доданку, і $C_n = C'_n$. Оскільки n — довільне, то це доводить однозначність розкладу (I.107).

Зазначимо, що точною областю збіжності ряду Лорана (I.107) є кругове кільце $r < |z-a| < R$, на границях якого є хоча б по одній особливій точці аналітичної функції $f(z)$, до якої ряд (I.100) збігається.

§ 8. Теорія лишків

8.1. Класифікація ізольованих особливих точок однозначної аналітичної функції

Точку a називають ***ізольованою точкою*** функції $f(z)$, якщо $f(z)$ однозначна й аналітична в круговому кільці $0 < |z-a| < R$, а в точці a функція може бути невизначена, тобто точка a є особливою. Характер цієї особливості визначений структурою ряду Лорана, яким функцію $f(z)$ можна записати в круговому кільці $0 < |z-a| < R$.

Частину ряду Лорана $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k$ називають ***правильною***, а $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty} C_k(z-a)^k$ — ***головною***. Правильна частина збіжна при $|z-a| < R$, а головна — при $|z-a| > r$.

Можливі три випадки.

1. Ряд Лорана не містить членів з від'ємними степенями різниці $(z-a)$, тобто головної частини.

2. Ряд Лорана містить скінчену кількість членів з від'ємними степенями різниці $(z-a)$.

3. Ряд Лорана містить безліч членів з від'ємними степенями різниці $(z-a)$.

Відповідно, ізольовані особливі точки функції $f(z)$ класифікують так.

Точку a називають ***усувною особливою точкою***, якщо ряд Лорана не містить головної частини. У цьому випадку

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k, \tag{I.111}$$

і при $z \to a$ $\lim\limits_{z\to a} f(z) = C_0$. Приймемо $f(a) = C_0$, тоді $f(z)$ визначена всюди в крузі $|z-a| < R$ і розкладається в звичайний степеневий ряд Тейлора. Точка a в цьому разі перестає бути особливою.

Якщо ряд Лорана містить скінченну кількість членів з від'ємними степенями $(z-a)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{m} C_{-k} (z-a)^{-k}, \tag{I.112}$$

то точку a називають ***полюсом порядку*** m. У цьому випадку $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ незалежно від способу прямування z до a. Справді, у цьому разі

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^{-m}\left[C_{-m} + C_{-m+1}(z-a) + \ldots + C_{-1}(z-a)^{m-1}\right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k = (z-a)^{-m}\varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k. \end{aligned}$$

Очевидно, що $\varphi(z)$ — обмежена аналітична функція в околі точки a. Якщо її доозначити в точці $z = a$, приймаючи $\varphi(a) = C_{-m}$, то останню формулу можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \tag{I.113}$$

де

$$\psi(z) = \varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^{k+m},$$

причому $|\psi(z)|$ обмежений і $|\psi(a)| \neq 0$. Тоді $|f(z)| \to \infty$ при $|z-a| \to 0$ незалежно від способу прямування z до a. Для оберненої до $f(z)$ функції з (I.113) маємо

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\psi(z)}(z-a)^m, \qquad \psi(a) \neq 0 \tag{I.114}$$

і точка a для функції $g(z)$ є нулем m-го порядку. Отже, нулі і полюси аналітичних функцій пов'язані між собою: якщо функція $f(z)$ в точці a має полюс m-го порядку, то обернена функція $g(z)$ у цій точці має нуль m-го порядку, і навпаки.

Якщо ряд Лорана містить безліч членів з від'ємними степенями $(z-a)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z-a)^{-k},$$

то точку a називають ***суттєво особливою точкою*** для функції $f(z)$. Можна довести, що в довільному δ-околі точки a, тобто коли $|z-a| < \delta$, $|f(z) - A| < \varepsilon$, причому A — довільне наперед задане комплексне число. Це означає, що в суттєво особливій точці a не існує скінченної чи безмежної границі функції $f(z)$ в разі прямування z до a. Залежно від вибору послідовності точок, які збігаються до a, можна отримувати послідовності значень функції, що збігаються до різних границь.

Прикладом суттєво особливої точки є точка $a = 0$ функції

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-2k}.$$

Якщо прямувати до точки $a = 0$ по дійсній осі $z = x$, то $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$. Однак, якщо взяти послідовність точок $z = \frac{i}{n}$, що прямує до $a = 0$ при $n \to \infty$, то $\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \exp(n^2)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(n^2) = \infty$. Отже, $\lim\limits_{z\to 0} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ не існує.

Розглянемо безмежно віддалену точку $a = \infty$. Така точка є ізольованою особливою точкою аналітичної функції $f(z)$, якщо можна вказати таке значення R, що за межами кола $|z| > R$ функція $f(z)$ не має особливих точок, що розміщені на скінченній відстані від точки $z = 0$.

У функції $f(z)$ зробимо заміну $1/z = \zeta$. Тоді $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$, причому $\varphi(\zeta)$ — аналітична в круговому кільці $0 < |\zeta| < 1/R$. Її можна розкласти в ряд Лорана з центром у точці $a = 0$:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} \zeta^{-k}. \tag{I.115}$$

Повернемось до змінної z. Тоді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^k. \qquad (I.116)$$

Розклад (I.116) —це розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі безмежно віддаленої точки, тобто точка $a = \infty$ є центром ряду. У (I.116) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}$ — правильна частина ряду Лорана, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^k$ — головна.

Точку $a = \infty$ називають усувною особливою точкою функції $f(z)$, якщо ряд (I.116) не містить головної частини, тобто $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}$. Доозначенням $f(\infty) = C_0$ особливість функції $f(z)$ в точці $a = \infty$ усувають.

Точку $a = \infty$ називають полюсом порядку m, якщо головна частина (I.116) містить скінченну кількість доданків, тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{m} C_{-k} z^k. \qquad (I.117)$$

Точку $a = \infty$ називають суттєво особливою точкою функції $f(z)$, якщо головна частина ряду (I.116) містить безліч членів. Наприклад, ряд за степенями z функції $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ має вигляд

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots .$$

Якщо вважати цей розклад таким, що його центром є точка $a = 0$, то головна частина містить безмежну кількість від'ємних степенів, і тому точка a є суттєво особливою точкою. Якщо центром цього ряду вважати точку $a = \infty$, то цей ряд не містить головної частини, тобто точка $a = \infty$ є усувною особливою точкою.

Залежно від характеру ізольованих особливих точок і їхнього розташування для функції комплексної змінної вводять такі поняття.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в усій комплексній площині, і тільки точка $z = \infty$ є її ізольованою особливою точкою, то таку функцію називають ***цілою***.

Зокрема, цілими функціями є поліноми, трансцендентні функції e^z, $\sin z$ тощо. Цілу функцію у всій комплексній площині зображають ***рядом Маклорена***[35] (рядом Тейлора в околі $a = 0$).

Якщо функція $f(z)$ аналітична у всій комплексній площині, за винятком окремих ізольованих точок, що є полюсами, то таку функцію називають ***мероморфною***.

Прикладами мероморфних функцій є раціональні дроби (відношення поліномів), а також функції вигляду $\cos z / \sin z = \operatorname{ctg} z$ тощо. В останньому випадку полюсами є точки, в яких $\sin z = 0$. Таких точок безліч. Функція, яка має безліч полюсів, є мероморфною, якщо в будь-якій обмеженій області D комплексної площини вона має скінченну кількість полюсів. У протилежному випадку в D існувала б збіжна послідовність полюсів із граничною точкою z_0. Тоді в кожному як завгодно малому околі точки z_0 міститься безмежна кількість полюсів, що суперечить означенню полюса як ізольованої особливої точки. Додамо, що кожну мероморфну функцію можна зобразити часткою цілих функцій.

8.2. Основна теорема теорії лишків. Обчислення лишків

Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі точки a при $0 < |z-a| < R$. За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int\limits_{C_1} f(z)\, dz = \int\limits_{C_2} f(z)\, dz, \tag{I.118}$$

де C_1, C_2 — кола радіусів R_1 і R_2, відповідно, з центрами в точці a, причому радіуси R_1, R_2 менші від R (рис. I.32).

[35] Колін Маклорен (Colin Maclaurin, 1698–1746) — шотландський математик.

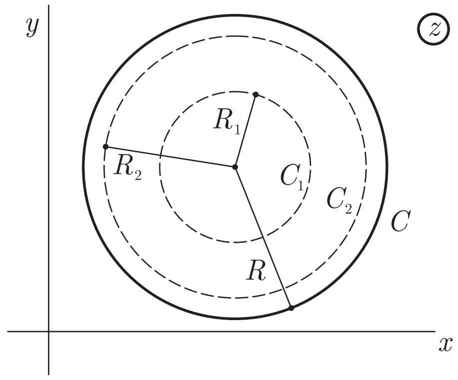


Рис. I.32.

Значення інтеґралів (I.118) не зміняться, якщо замінити кола довільною замкненою кривою C, яка охоплює точку a і не виходить за межі кола радіусом R.

Величину $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_C f(z)\,dz$ називають ***лишком*** функції $f(z)$ в точці a й позначають $\operatorname{res} f(a)$ або $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz \tag{I.119}$$

(від франц. *résidu*). Розкладемо $f(z)$ в околі точки a в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k.$$

Такий ряд рівномірно збіжний при $0 < |z-a| < R$ і його можна почленно інтеґрувати

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int\limits_C (z-a)^k\,dz.$$

Для інтеґрування замість контура C оберемо, наприклад, коло

C_1. Тоді $z-a=R_1e^{i\varphi}$, $dz=iR_1e^{i\varphi}\,d\varphi$. За довільного k маємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_1}(z-a)^k\,dz &= iR_1^{k+1}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k+1)\varphi}\,d\varphi = \\ &= \begin{cases}0, & k\neq -1,\\ 2\pi i, & k=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

Отже,

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i C_{-1}, \tag{I.120}$$

тобто лишок функції $f(z)$ в особливій точці a дорівнює коефіцієнту при $(z-a)^{-1}$ в розкладі функції $f(z)$ у ряд Лорана з центром в точці a. Сформулюємо основну теорему теорії лишків, яку теж часто називають теоремою Коші.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ — аналітична всюди в замкненій області $\bar{D}$ з границею Γ, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $a_k (k=1,\ldots,m)$, що лежать усередині D. Тоді

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z). \tag{I.121}$$

Доведення. Оточимо кожну з точок $a_1,\ldots,a_m$ контурами $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ (рис. I.33). За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)\,dz = 0.$$

Однак

$$\int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

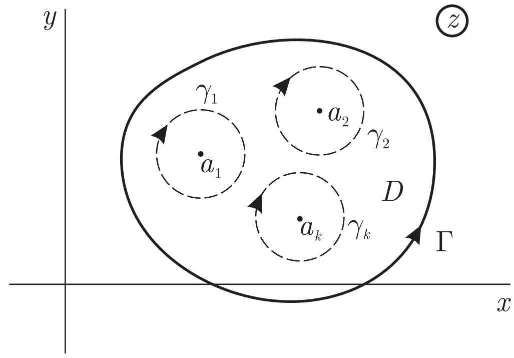


Рис. I.33.

тому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

що і треба було довести.

Уведемо поняття лишку відносно безмежно віддаленої точки $a = \infty$.

Якщо $a = \infty$ — ізольована особлива точка функції $f(z)$, то лишком у точці $a = \infty$ називають число

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} f(z)\,dz, \qquad \text{(I.122)}$$

де C — довільний контур, зовні якого функція $f(z)$ не має, крім $a = \infty$, особливих точок, наприклад, коло як завгодно великого радіуса R.

Ряд Лорана для $a = \infty$ має вигляд (I.116), звідки

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_1. \qquad \text{(I.123)}$$

Зазначимо, що іноді ряд Лорана відносно точки $a = \infty$ записують як $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$, тоді $\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}$, що треба мати на увазі.

Сформулюємо теорему.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ аналітична в усій комплексній площині, за винятком скінченної кількості числа ізольованих особливих точок $a_1, \ldots, a_m$ і точки $a = \infty$, то сума всіх лишків дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f(a_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0. \tag{I.124}$$

Для доведення теореми достатньо скористатись означенням лишку відносно точки $a = \infty$ (I.122) та основною теоремою теорії лишків.

Розглянемо обчислення лишків. В усувній особливій точці лишок функції $f(z)$ дорівнює нулю, оскільки ряд Лорана в цьому випадку не містить від'ємних степенів.

У суттєво особливій точці для обчислення лишку треба розкласти функцію в ряд Лорана і скористатись (I.120) або (I.123), або обчислити інтеґрали (I.119), чи (I.122).

Якщо особлива точка a є полюсом, то існує простіший спосіб обчислення лишків. Нехай a є полюсом m-порядку. Тоді розклад у ряд Лорана має вигляд

$$\begin{aligned} f(z) &= C_{-m}(z-a)^{-m} + \ldots + C_{-1}(z-a)^{-1} + \\ &+ C_0 + C_1(z-a) + \ldots . \end{aligned} \tag{I.125}$$

Помножимо обидві частини (I.125) на $(z-a)^m$

$$\begin{aligned} (z-a)^m f(z) &= C_{-m} + \ldots + C_{-1}(z-a)^{m-1} + \\ &+ C_0(z-a)^m + \ldots . \end{aligned}$$

Продиференціюємо цю рівність $m-1$ разів, при $z \to a$ одержимо

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-a)^m \right]. \tag{I.126}$$

Для простого полюса $m = 1$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a). \tag{I.127}$$

У випадку, коли $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0) = 0$ і $\psi'(z_0) \neq 0$, тобто точка z_0 є полюсом першого порядку $f(z)$, формулу (I.127) переписуємо так:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z), a] &= \lim_{z\to a} \varphi(z) \Bigg/ \left(\frac{\psi(z)}{z-a}\right) \\ &= \lim_{z\to a} \varphi(z) \Bigg/ \left(\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-a}\right) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \end{aligned} \tag{I.128}$$

8.3. Обчислення означених інтеґралів за допомогою лишків. Лема Жордана

Теорія лишків дає змогу обчислювати означені інтеґрали, у тому числі від функцій дійсних змінних, коли застосування звичайних методів аналізу або не дає успіху, або робить обчислення громіздкими. Розглянемо окремі види означених інтеґралів, коли застосування теорії лишків є суттєво ефективнішим.

1. Інтеґрали вигляду

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta. \tag{I.129}$$

У (I.129) R — дробово-раціональна функція своїх арґументів:

$$R = \frac{a_0 + a_1\cos\vartheta + a_2\sin\vartheta + a_3\cos^2\theta + a_4\sin^2\vartheta + \ldots + a_{2n}\sin^n\vartheta}{b_0 + b_1\cos\vartheta + b_2\sin\vartheta + b_3\cos^2\theta + b_4\sin^2\vartheta + \ldots + b_{2m}\sin^m\vartheta}.$$

Уведемо комплексну змінну $z = e^{i\vartheta}$, $d\vartheta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$. При $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ змінна z пробігає коло $|z| = 1$ в додатному напрямі. Тоді

$$I = \frac{1}{i}\int_C R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z} = \frac{1}{i}\int_C \tilde{R}(z)\, dz,$$

де C — коло $|z| = 1$, $\tilde{R}(z)$ — знову дробово-раціональна функція змінної z,

$$\tilde{R}(z) = \frac{a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \ldots + a'_n z^{n'}}{b'_0 + b'_1 z + b'_2 z^2 + \ldots + b'_m z^{m'}}$$

і аналітична функція всередині кола $|z| = 1$, за винятком скінченної кількості особливих точок a_k, які є нулями знаменника. Тому

$$I = 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{z=a_k} \tilde{R}(z), \qquad |a_k| < 1. \tag{I.130}$$

2. Інтеґрали вигляду

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{I.131}$$

Розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ задана на всій дійсній осі та яку можна аналітично продовжити на верхню півплощину комплексної змінної z. Нехай функція $f(z)$ — аналітична при $\operatorname{Im} z \geq 0$, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок a_k, причому $|a_k| < R$, а при $|z| > R$ виконується нерівність

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \qquad M > 0, \quad \delta > 0. \tag{I.132}$$

Виберемо у верхній півплощині криву $\mathcal{L}_R$, яка є півколом $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ (рис. I.34)

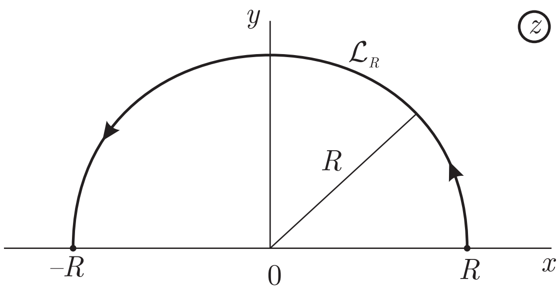


Рис. I.34.

У разі виконання умов (I.132)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{L}_R} f(z)\,dz = 0. \tag{I.133}$$

Справді

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}}\int\limits_{\mathcal{L}_R} dl = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

де $z = Re^{i\varphi}$, $|dz| = Rd\varphi = dl$, $0 < \varphi < \pi$.

Зокрема, умови (I.132) виконуються, коли функція $f(z)$ аналітична в околі безмежно віддаленої точки $a = \infty$ і ця точка є нулем не нижче другого порядку. У цьому випадку ряд Лорана в околі $a = \infty$ має вигляд

$$f(z) = \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \ldots = \frac{\psi(z)}{z^2},$$

тобто $|\psi(z)| < M$, $\delta = 1$.

Для обчислення інтеґрала (I.131) розглянемо замкнений контур $C_R = \mathcal{L}_R + [-R, R]$. За теоремою про лишки

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{\mathcal{L}_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Im} a_k > 0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

При $R \to \infty$ інтеґрал за кривою $\mathcal{L}_R$ прямує до нуля (I.133), отже,

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Im} a_k > 0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z). \tag{I.134}$$

Якщо $f(x)$ можна аналітично продовжити на нижню півплощину і виконуються умови (I.132), то розглядуваний інтеґрал обчислюють за аналогією до (I.134) формулою так, що лишки треба рахувати в тих особливих точках a_k, для яких $\operatorname{Im} a_k < 0$.

3. Інтеґрали вигляду

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx. \tag{I.135}$$

Обчислення таких інтеґралів ґрунтується на ***лемі Жордана***[36].

Лема Жордана. Нехай функція $f(z)$ — аналітична у верхній півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок, і рівномірно відносно $\arg z$ $(0 \leq \arg z \leq \pi)$ прямує до нуля при $|z| \to \infty$. Тоді при $a > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{L}_R} e^{iaz} f(z)\, dz = 0, \tag{I.136}$$

де $\mathcal{L}_R$ — дуга півкола $|z| = R$ у верхній півплощині.

Доведення. Умова рівномірного прямування $f(z)$ до нуля означає, що при $|z| = R$ виконується оцінка $|f(z)| < \mu_R$ для $|z| = R$ і $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$.

Зокрема, така оцінка існує, коли в околі точки $a = \infty$ функція $f(z)$ аналітична, і точка $a = \infty$ є нулем першого або другого порядків.

Для оцінки інтеґрала (I.136) приймемо $z = Re^{i\varphi}$ і використаємо співвідношення $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}_R} e^{iaz} f(z)\, dz\right| \leq \mu_R R \int\limits_0^\pi \left|e^{iaz}\right| d\varphi = \mu_R R \int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} d\varphi =$$
$$= 2\mu_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi < 2\mu_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\varphi} d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{a}\mu_R\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

що доводить лему.

Якщо $a < 0$ і $f(z)$ задовольняє умови леми Жордана у нижній півплощині, то формула (I.136) справджується в разі інтеґрування за дугою $\mathcal{L}_R$ у нижній півплощині.

[36]Марі Енмон Камій Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) — французький математик.

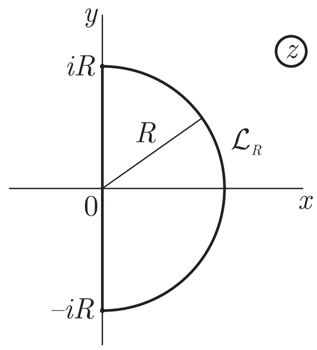


Рис. I.35.

Якщо $a = \pm i\alpha$ ($\alpha > 0$), то аналогічну формулу одержують у разі інтеґрування за дугами в правій ($\operatorname{Re} z \geq 0$) або лівій ($\operatorname{Re} z \leq 0$) півплощинах. Зокрема, при $a = i\alpha$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{L}_R} e^{-\alpha z} f(z)\, dz = 0, \qquad \alpha > 0, \tag{I.137}$$

де крива $\mathcal{L}_R$ показана на рис. I.35.

Таку форму леми Жордана використовують під час обчислення інтеґралів в операційному численні.

Нехай в інтеґралі (I.135) функція $f(x)$ задана на всій дійсній осі $-\infty < x < \infty$ і її можна аналітично продовжити у верхню півплощину $\operatorname{Im} z \geq 0$, аналітичне продовження $f(z)$ задовольняє умови леми Жордана. Тоді при $a > 0$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Im} a_k > 0)}} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), a_k\right]. \tag{I.138}$$

Нехай для особливих точок a_k, $|a_k| < R_0$, тоді виберемо контур $C_R = L_R + [-R, R]$, де $R > R_0$. За основною теоремою теорії лишків

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x) + \int_{\mathcal{L}_R} e^{iaz} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\mathrm{Im}\, a_k > 0)}} \mathrm{res}\left[e^{iaz} f(z), a_k\right].$$

При $R \to \infty$ інтеґрал за кривою $\mathcal{L}_R$ прямує до нуля, що приводить до результату (I.138).

Як приклад, розглянемо інтеґрал, який трапляється у фізичних задачах

$$I = \int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2 + \mu^2}\, d\mathbf{k},$$

де інтеґрування проводять у всьому тривимірному просторі векторів $\mathbf{k}$, $d\mathbf{k} = dk_x\, dk_y\, dk_x$. Спочатку в $\mathbf{k}$-просторі виконаємо інтеґрування за кутами, обравши сферичну систему координат з полярною віссю вздовж вектора $\mathbf{r}$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} k^2 \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2 + \mu^2}\, dk = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2}\, dk \int_{-1}^{1} dt\, e^{ikrt} = \\ &= \frac{2\pi}{ir} \int_0^{\infty} \frac{k}{k^2 + \mu^2} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) dk = \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + \mu^2}\, dk, \end{aligned}$$

де використано заміну змінної $\cos\theta = t$. Для комплексних значень k функція $f(k) = k/(k^2 + \mu^2)$ задовольняє у верхній півплощині $\mathrm{Im}\, k \geq 0$ умови леми Жордана. Тому

$$I = \frac{2\pi}{ir} 2\pi i \operatorname*{res}_{k = i\mu} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + \mu^2},$$

де $k = i\mu$ — простий полюс функції $f(k)$ у верхній півплощині. Використаємо формулу (I.127) й остаточно отримаємо

$$I = \frac{2\pi^2}{r} e^{-\mu r}.$$

Зазначимо, що в інтеґралах (I.131) і (I.135) функція $f(x)$ задана на усій дійсній осі $-\infty < x < \infty$, на якій вона не має особливих точок.

4. Інтеґрали вигляду

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{I.139}$$

Нехай у (I.139) функція $f(x)$ на дійсній осі має прості полюси, а її аналітичне продовження на верхню півплощину $\operatorname{Im} z \geq 0$ задовольняє умови (I.132) або леми Жордана (якщо $f(x)$ містить множник e^{iax}). Розглянемо випадок, коли $f(x)$ має простий полюс при $x = a$. Сформуємо контур, як на рис. I.36.

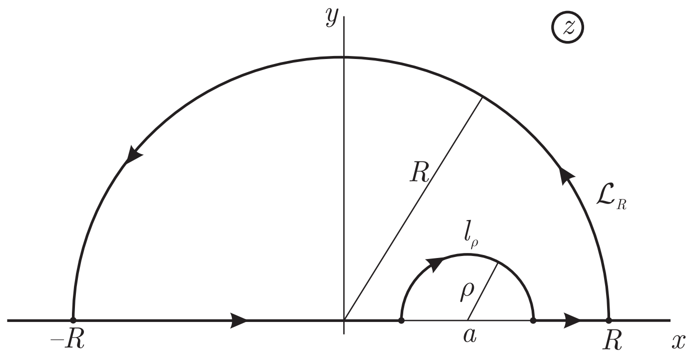


Рис. I.36.

За теоремою про лишки

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Im} a_k > 0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

де a_k — ізольовані особливі точки, для яких $\operatorname{Im} a_k > 0$. При $R \to \infty$ за умов (I.132) або леми Жордана

$$\int_{\mathcal{L}_R} f(z)\,dz = 0.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{a-\rho} f(x)\,dx + \int\limits_{a+\rho}^{\infty} f(x)\,dx + \int\limits_{l_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Im} a_k > 0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Однак на l_ρ маємо $z = a + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi$, тому

$$\int\limits_{l_\rho} f(z)\,dz = i\int\limits_{\pi}^{0} f(a+\rho e^{i\varphi})\,\rho e^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Якщо a — простий полюс, то функцію в околі точки a можна записати у вигляді

$$f(z) = \psi(z) + \frac{\varphi(z)}{z-a},$$

де $\psi(z)$, $\varphi(z)$ — аналітичні в околі a і не мають особливостей у точці a. Тоді

$$\lim_{\rho\to 0}\left[i\rho\int\limits_{l_\rho} \psi(a+\rho e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,d\varphi\right] = \lim_{\rho\to 0}(2\rho\psi(a)) = 0.$$

Далі $\dfrac{\varphi(z)}{z-a} = \dfrac{\varphi(a+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}$ і

$$\lim_{\rho\to 0} i\int\limits_{\pi}^{0} \varphi(a+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi = i\varphi(a)\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi = -i\pi\varphi(a),$$

оскільки a — простий полюс, то

$$\varphi(a) = \operatorname{res} f(a).$$

З урахованням

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{a-\rho} f(x)\,dx + \int\limits_{a+\rho}^{\infty} f(x)\,dx\right] = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

остаточно отримаємо

$$I = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k\\(\operatorname{Im} a_k>0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) + \\ + i\pi \sum_{\substack{k\\(\operatorname{Im} a_k=0)}} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z), \qquad \text{(I.140)}$$

причому (I.140) узагальнено на випадок, коли на дійсній осі функція $f(x)$ має скінченну кількість полюсів першого порядку.

Як приклад, розглянемо інтеґрал

$$I = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Легко побачити, що

$$I = \operatorname{Im}\left(P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right).$$

Тоді

$$P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i\pi \operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = i\pi.$$

Остаточно $I = \pi$.

Розділ II.

Елементи операційного числення. Інтеґральні перетворення

Вступ

Розробкою символічного числення (так називали операційний метод у XIX ст.) займалися О. Гевісайд[1], М. Ващенко-Захарченко[2], Т. Бромвіч[3] та ін. В основі цього числення є побудова математичного аналізу як системи формальних операцій над символом $p = \frac{d}{dt}$ (t — незалежна змінна). Наприклад, n-похідну функції $x = x(t)$ розглядають як результат дії на x символа $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$, а операцію інтеґрування $\int_0^t x(t)\,dt$ — як застосування символа $1/p$, так що $\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t$, $\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$, тощо.

Символічне числення виявилось дуже зручним для розв'язу-

[1]Олівер Гевісайд (Oliver Heaviside, 1850–1925) — англійський математик, фізик, інженер.

[2]Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) — український математик.

[3]Томас Джон Бромвіч (Thomas John l'Anson Bromwich, 1875–1929) — британський математик.

вання різних задач, пов'язаних з лінійними диференціальними рівняннями. Популяризації цього методу сприяв О. Гевісайд, плідно використавши символічне числення в електротехнічних розрахунках. Однак символічне числення не мало в його працях математичного обґрунтування. Строге обґрунтування дали в 20-х роках XX ст. Т. Бромвіч, Н. Вінер[4], Дж. Карсон[5], П. Леві[6] та ін. Вони пов'язали цей метод із відомим з теорії функцій комплексної змінної методом інтеґральних перетворень, зокрема, інтеґральним перетворенням Лапласа. Тепер символ (оператор) p одержав нове трактування як комплексна змінна p, разом з нею нове трактування одержав і сам операційний метод.

§ 1. Перетворення Лапласа

Операційне числення — це певний спосіб розв'язування математичних задач, зокрема, диференціальних рівнянь. В основі цього методу є ідея інтеґральних перетворень, коли функції $f(t)$ дійсної змінної t ставлять у відповідність функцію $F(p)$ комплексної змінної p так, що, наприклад, звичайно диференціальне рівняння для функції $f(t)$ перетворюється в алґебраїчне рівняння для функції $F(p)$ (тут і надалі ми будемо використовувати для дійсної змінної букву t замість x, а для комплексної змінної — букву p замість z, як традиційно прийнято в операційному численні).

Провідну роль в операційному численні відіграє так зване ***перетворення Лапласа***

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \tag{II.1}$$

де $f(t)$ називають функцією-ориґіналом.

[4]Норберт Вінер (Norbert Wiener, 1894–1964) — американський математик.
[5]Джон Реншоу Карсон (John Renshaw Carson, 1886–1940) —- американський теоретик комунікаційних систем.
[6]Поль П'єр Леві (Paul Pierre Lévy, 1886–1971) —- французький математик.

Визначимо клас функцій $f(t)$, для яких перетворення Лапласа буде виконуватись.

Функцією-ориґіналом називають довільну комплекснозначну функцію $f(t)$ дійсного арґумента t, яка задовольняє такі умови:

а) $f(t)$ — неперервна або кусково-неперервна при всіх значеннях $-\infty < t < \infty$ та інтеґровна на довільнному скінченому інтервалі осі t;

б) $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$;

в) при $t \to \infty$ $f(t)$ має обмежену степінь зростання, тобто існують такі числа $M > 0$ і $s_0 > 0$, що при $t > 0$

$$|f(t)| \le Me^{s_0 t}. \tag{II.2}$$

Точна нижня границя s_0, за якої нерівність (II.2) виконується, називають ***показником зростання*** функції $f(t)$. Надалі множину функцій-ориґіналів $f(t)$ позначатимемо K, тобто в разі виконання умов а), б), в) $f(t) \in K$.

Перетворення Лапласа для $f(t) \in K$ ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$ комплексного арґумента p, визначену інтеґралом (II.1), що позначають

$$f(t) \doteq F(p), \quad \text{або} \quad f(t) \to F(p). \tag{II.3}$$

Інтеґрал (II.1) існує не за будь-яких p. Зокрема, очевидно, що при $\operatorname{Re} p < 0$ цей інтеґрал є розбіжним. Тому постає питання про область визначення функції $F(p)$.

Теорема. Інтеґрал Лапласа (II.1) існує (збігається) в області $\operatorname{Re} p > s_0$ для будь-якої $f(t) \in K$.

Доведення. Позначимо $p = s + i\sigma$, $\operatorname{Re} p = s$, $\operatorname{Im} p = \sigma$ і розглянемо (II.1) за модулем

$$\begin{aligned}|F(p)| &= \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty |e^{-pt}||f(t)|\,dt < M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt \\ &= \frac{M}{s-s_0},\end{aligned}$$

де $s - s_0 > 0$. Отже, інтеґрал (II.1) мажорується збіжним інтеґралом, який дорівнює величині $\frac{M}{s-s_0}$, а тому в області $\operatorname{Re} p = s > s_0$ рівномірно збігається. У цій області

$$\lim_{p\to\infty} |F(p)| = 0,$$

оскільки $\frac{M}{s-s_0} \to 0$, коли $s \to \infty$.

Доведемо, що інтеґрал Лапласа, тобто функція-зображення $F(p)$, аналітична функція в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$.

Для цього доведемо, що в цій півплощині існує похідна $F'(p)$, тобто функція $F(p)$ диференційовна.

Виконаємо диференціювання в (II.1) за p

$$F'(p) = \int_0^\infty e^{-pt}(-tf(t))\,dt \tag{II.4}$$

і розглянемо оцінку

$$\begin{aligned}|F'(p)| &= \left|\int_0^\infty e^{-pt}((-t)f(t))\,dt\right| < M\int_0^\infty te^{-(s-s_0)t}dt \\ &= Mt\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)}\bigg|_0^\infty + \frac{M}{s-s_0}\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{(s-s_0)^2},\end{aligned}$$

де використано інтеґрування частинами.

Отже, інтеґрал (II.4) мажорується збіжним до $\frac{M}{(s-s_0)^2}$ інтеґралом, а тому існує. Отже, похідна $F'(p)$ існує і функція $F(p)$ аналітична в області $\operatorname{Re} p > s_0$. Це стає очевидним, тому що функція

$tf(t) \in K$ має той самий показник зростання, що й функція $f(t)$. Справді,

$$|tf(t)| \leq Me^{\ln t + s_0 t} = Me^{s_0 t\left(1+\frac{\ln t}{s_0 t}\right)}$$

і при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{s_0 t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{s_0 t} = 0,$$

тобто $|tf(t)| \leq Me^{s_0 t}$.

Аналогічно можна довести, що існують усі похідні $F^{(n)}(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$

$$F^{(n)}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)\, dt. \tag{II.5}$$

Зазначимо, що (II.5) виражає формулу диференціювання зображення: якщо $f(t) \to F(p)$, то

$$(-t)^n f(t) \to F^{(n)}(p). \tag{II.6}$$

§ 2. Властивості перетворення Лапласа

Розглянемо окремі властивості перетворення Лапласа.

1. Перетворення лінійне:

якщо

$$f_1(t) \to F_1(p), \qquad f_2(t) \to F_2(p),$$

то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \to C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \tag{II.7}$$

2. Властивості подібності:

якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$f(at) \to \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{II.8}$$

Справді,

$$
\begin{aligned}
f(at) \quad &\to \quad \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(at)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{a}at} f(at)\,\frac{d(at)}{a} = \\
&= \quad \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).
\end{aligned}
$$

3. Властивість зміщення ориґіналу (запізнення і випередження): якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то при $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \to e^{-pt_0}F(p) \tag{II.9}$$

і

$$f(t + t_0) \to e^{pt_0}\Bigg[F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\,dt\Bigg]. \tag{II.10}$$

Зазначимо, що $f(t) \equiv 0$ для від'ємних значень арґумента, тобто $f(t - t_0) = 0$ при $t < t_0$. Тому

$$
\begin{aligned}
f(t - t_0) \quad &\to \quad \int\limits_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t - t_0)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-p(\tau + t_0)} f(\tau)\,d\tau = \\
&= \quad e^{-pt_0}\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = e^{-pt_0}F(p).
\end{aligned}
$$

Для $f(t+t_0)$ маємо

$$\begin{aligned} f(t+t_0) \quad &\to \quad \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t+t_0)\,dt = \int\limits_{t_0}^\infty e^{-p(\tau-t_0)} f(\tau)\,d\tau = \\ &= \quad \int\limits_0^\infty e^{pt_0} e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t_0} e^{pt_0} e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = \\ &= \quad e^{pt_0}\left[F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\,dt\right], \end{aligned}$$

де використано заміну $t + t_0 = \tau$ і в останньому інтеґралі змінну інтеґрування τ перепозначено на t.

4. Властивість зміщення зображення:
якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$e^{\alpha t} f(t) \to F(p-\alpha). \tag{II.11}$$

Справді,

$$e^{\alpha t} f(t) \to \int\limits_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t} f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} f(t)\,dt = F(p-\alpha).$$

5. Диференціювання ориґіналу:
якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0). \tag{II.12}$$

Інтеґруючи частинами з урахуванням, що $\operatorname{Re} p > s_0$, маємо

$$f'(t) \to \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = pF(p) - f(0).$$

За індукцією отримаємо

$$
\begin{aligned}
&f''(t) \to p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^2f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \quad \text{(II.13)}
\end{aligned}
$$

Зокрема, якщо всі похідні від $f(t)$ разом з $f(t)$ дорівнюють нулю при $t = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p).$$

6. Інтеґрування ориґіналу:
якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}. \tag{II.14}$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau,$$

для якої маємо $\varphi'(t) = f(t)$, $\varphi(0) = 0$. Нехай

$$\varphi(t) \to \Phi(p),$$

$f(t) = \varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$, звідси

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

7. Диференціювання зображення:
якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$(-t)^n f(t) \to F^{(n)}(p) \tag{II.15}$$

(див. формулу (II.5) попереднього параграфа).

8. Інтеґрування зображення:

якщо

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^\infty F(p)\,dp. \tag{II.16}$$

Розглянемо інтеґрал

$$\begin{aligned}\int\limits_p^\infty F(p)\,dp &= \int\limits_p^\infty \left[\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\right] dp \\ &= \int\limits_0^\infty f(t)\left[\int\limits_p^\infty e^{-pt}\,dp\right] dt = \int\limits_0^\infty f(t)\left[-\frac{e^{-pt}}{t}\Big|_p^\infty\right] dt.\end{aligned}$$

Зазначимо, що в комплексній площині p інтеґрування від p до ∞ треба виконувати в області, де $F(p)$ існує, тобто в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ (рис. II.1).

Зважаючи, що $f(t)$ має обмежений показник зростання s_0, останній інтеґрал дорівнює

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Отже,

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_p^\infty F(p)\,dp,$$

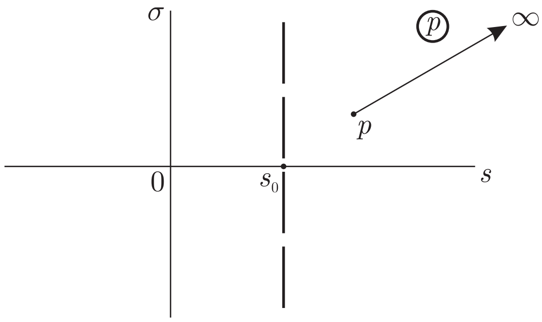


Рис. II.1.

тобто

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^\infty F(p)\,dp.$$

9. Перетворення згортки функцій (теорема Бореля[7]).

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t) \in K$ називають інтеґрал $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$, який позначають $f_1 * f_2$. Легко бачити, що згортка $f_1 * f_2$ є ориґіналом з показником зростання $\max\{s_1, s_2\}$, де s_1 і s_2 — показники зростання ориґіналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$, відповідно.

Справді,

$$\left|\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right| \le M_1M_2\int\limits_0^t e^{s_1\tau}e^{s_2(t-\tau)}d\tau =$$

$$= \frac{M_1M_2}{s_1-s_2}\left(e^{s_1t}-e^{s_2t}\right) \le \frac{M_1M_2}{|s_1-s_2|}\,e^{\max\{s_1,\,s_2\}}.$$

Можна переконатись, що згортка $f_1 * f_2$ має, зокрема, такі властивості:

1. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.
2. $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$.

[7] Еміль Борель (Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956) — французький математик і політик.

3. $(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$.

4. $|f_1 * f_2| \le |f_1(t)||f_2(t)|$.

Для зображення згортки сформулюємо ***теорему Бореля***.

Теорема. Якщо $f_1(t) \to F_1(p)$ і $f_2(t) \to F_2(p)$, то $f_1 * f_2 \to F_1(p)F_2(p)$.

Доведення:

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \to \int\limits_0^\infty e^{-pt}\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)\,dt = \int\limits_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-p(\tau+x)}f_2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-px}f_2(x)\,dx = F_1(p)F_2(p),$$

де використано зміну порядку інтеґрування за t і τ, а також заміну змінних $t - \tau = x$.

Використаємо властивість 5 (формула (II.12), тоді для зображення похідної від згортки маємо

$$\frac{d}{dt}(f_1 * f_2) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \to pF_1(p)F_2(p), \qquad \text{(II.17)}$$

або

$$\begin{aligned} pF_1(p)F_2(p) \quad &\to \quad f_1(0)f_2(0) + \frac{d}{dt}f_1 * f_2 \\ &= \quad f_1(t)f_2(0) + f_1 * \frac{d}{dt}f_2, \qquad \text{(II.18)} \end{aligned}$$

де згортки у (II.18) називають ***інтеґралами Дюамеля***[8].

[8]Жан-Марі Констан Дюамель (Jean-Marie Constant Duhamel, 1797–1872) — французький математик і фізик.

§ 3. Зображення Лапласа деяких елементарних функцій

1. Функція Гевісайда $\theta(t)$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

$$\theta(t) \to \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\,e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

$$\chi(t) \to \frac{1}{p}. \tag{II.19}$$

2. Степенева функція t^n.

Зазначимо, що всі функції-ориґінали $f(t)$ є фактично добутками $f(t)\chi(t)$, а це в багатьох випадках дає змогу використати формулу (II.19) і властивості перетворення Лапласа, наведені у попередньому параграфі.

У нашому випадку за властивістю диференціювання зображення (II.15) маємо

$$\begin{aligned} &t = t\chi(t) \to -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}, \\ &t^2 = t^2\chi(t) \to \left(\frac{1}{p}\right)'' = \frac{2!}{p^3}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &t^n = t^n\chi(t) \to (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \end{aligned}$$

тобто

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{II.20}$$

3. Показникова функція $e^{\alpha t}$.

Використаємо властивість зміщення зображення (II.11):

$$e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\chi(t) \to \frac{1}{p-\alpha},$$

тобто

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}.$$

4. Функція $t^n e^{\alpha t}$:

$$t^n e^{\alpha t} = t^n e^{\alpha t}\chi(t) \to \frac{n!}{p^{n+1}}\Big|_{p\to p-\alpha} = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},$$

отже,

$$t^n e^{\alpha t} \to \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}. \tag{II.21}$$

5. Функція $\sin \omega t$:

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \end{aligned}$$

тобто

$$\sin \omega t \to \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{II.22}$$

Подібним чином знайдено такі зображення.

6. Функція $\cos \omega t$:

$$\cos \omega t \to \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

7. Функція гіперболічний синус $\operatorname{sh} \omega t$:

$$\operatorname{sh} \omega t \to \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

8. Функція гіперболічний косинус $\operatorname{ch} \omega t$:

$$\operatorname{ch} \omega t \to \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

9. Функція $e^{\alpha t}\sin\omega t$:

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \to \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

10. Функція $\sin^2 t$:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p(p^2+4)},$$

тобто

$$\sin^2 t \to \frac{2}{p(p^2+4)}$$

тощо.

§ 4. Визначення ориґіналу за зображенням. Формула Мелліна

Розглянемо задачу, обернену до перетворення Лапласа, — за заданим зображенням $F(p)$ знайти ориґінал $f(t)$.

Насамперед розглянемо умови, за яких функція $F(p)$ є зображенням якоїсь функції $f(t)$.

Теорема. Нехай функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$ задовольняє такі умови:

а) функція $F(p)$ аналітична при $\operatorname{Re} p = s > s_0 > 0$;

б) в області $s > s_0$ функція $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$ рівномірно щодо $\arg p$;

в) для всіх $s > s_0$ збігається інтеґрал

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)|\,d\sigma < M, \qquad s > s_0. \tag{II.23}$$

Тоді функція $F(p)$ при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної t, яка дорівнює

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \qquad s > s_0. \tag{II.24}$$

Формулу (II.24) оберненого перетворення Лапласа називають ***формулою Мелліна***[9].

Доведення. Насамперед з'ясуємо, що інтеґрал (II.24) існує. Виконаємо оцінку

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left|e^{pt}F(p)\right|d\sigma = \frac{1}{2\pi}e^{st}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}|F(p)|\,d\sigma < \frac{M}{2\pi}e^{st},$$

отже, інтеґрал (II.24) збігається. Доведемо, що інтеґрал (II.24) — wt оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)$. Для цього треба показати, що

1) інтеґрал (II.24) не залежить від s і визначає функцію $f(t)$ тільки однієї змінної t, причому $f(t)$ має скінченний степінь зростання;

2) при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$;

3) зображення функції $f(t)$, яка визначена формулою Мелліна, — це функція $F(p)$.

Розглянемо в області $\operatorname{Re} p > s_0$ замкнений контур C, як на рис. II.2. За теоремою Коші для аналітичної в області $\operatorname{Re} p > s_0$ функції $e^{pt}F(p)$ маємо

$$\int\limits_C e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Нехай $A \to \infty$, тоді за умовою б) теореми інтеґрали за горизонтальними відрізками контура C прямують до нуля. Залишається

$$\int\limits_{s_1-iA}^{s_1+iA} e^{pt}F(p)\,dp + \int\limits_{s_2+iA}^{s_2-iA} e^{pt}F(p)\,dp = 0,$$

[9]Роберт Х'ялмар Меллін (Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933) — фінський математик.

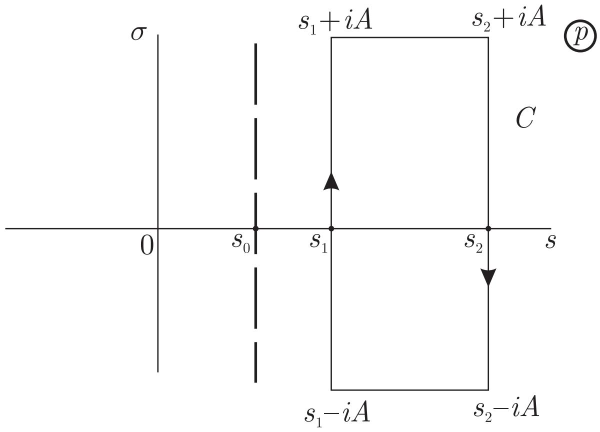


Рис. II.2.

або

$$\int_{s_1-iA}^{s_1+iA} e^{pt}F(p)\,dp = \int_{s_2-iA}^{s_2+iA} e^{pt}F(p)\,dp,$$

тобто інтеґрал (II.24) не залежить від вибору s при $s > s_0$.

Доведемо, що $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Для цього в області $\operatorname{Re} p = s > s_0$ виберемо контур $C_1 = [s - iR, s + iR] + L_R$, як на рис. I.35.

За теоремою Коші

$$\int_{C_1} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

При $t < 0$ виконуються умови леми Жордана (див. (I.137)), тому

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}_R} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Отже, при $t < 0$

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = 0,$$

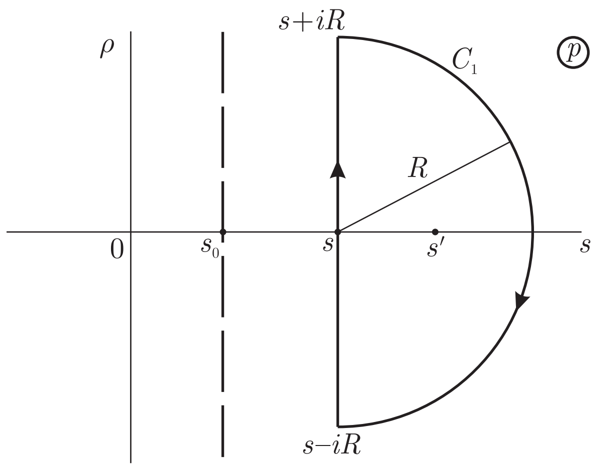


Рис. II.3.

тобто $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Побудуємо зображення Лапласа для функції (II.24) для деякого $p' = s' + i\sigma'$, де $s' > s_0$:

$$\int_0^\infty e^{-p't} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p't} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp\, dt, \qquad p = s + i\sigma$$

і, зважаючи на довільність вибору s за умови $s > s_0$, приймемо, що $s_0 < s < s'$. Тоді

$$\int_0^\infty e^{-p't} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\, dp \int_0^\infty e^{-(p'-p)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{F(p)}{p'-p}\, dp.$$

Цей інтеґрал обчислимо за допомогою лишків, для чого доповнимо лінію $[s - iR, s + iR]$ дугою півкола $\mathcal{L}_R$ (рис. II.3). Оскільки $|F(p)| \to 0$ при $|p| \to \infty$ і $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, то $\frac{F(p)}{p'-p} \to 0$ при $|p| \to \infty$ швидше, ніж за лінійним законом. Тоді виконуються умови (I.132) і

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}_R} \frac{F(p)}{p'-p}\, dp = 0.$$

Тому можна записати

$$\int_0^\infty e^{-p't} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^-} \frac{F(p)}{p'-p}\,dp,$$

причому єдиною особливістю функції $\frac{F(p)}{p'-p}$ всередині контура C_1 є простий полюс при $p = p'$. Використовуючи (I.127), остаточно маємо

$$\int_0^\infty e^{-p't} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}(-2\pi i)\operatorname*{res}_{p=p'} \frac{F(p)}{p'-p} = F(p'),$$

що й треба було довести.

Досить часто інтеґрал Мелліна можна обчислити за допомогою теорії лишків. Нехай $F(p)$, яка початково задана при $\operatorname{Re} p = s > s_0$, можна аналітично продовжити на всю комплексну площину. При $t > 0$ і $\operatorname{Re} p = s < s_0$ це аналітичне продовження задовольняє умови леми Жордана, так що

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}'_R} e^{pt} F(p)\,dp = 0,$$

де $\mathcal{L}'_R$ — дуга півкола, що замикає пряму $[s - iR, s + iR]$ зліва. як на рис. II.4.

Тоді

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{pt}F(p)\,dp = \\ &= \sum_{\substack{k \\ (\operatorname{Re} p_k < s_0)}} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left[e^{pt}F(p)\right], \end{aligned} \tag{II.25}$$

де p_k — ізольовані особливі точки функції $e^{pt}F(p)$ в області $\operatorname{Re} p < s_0$.

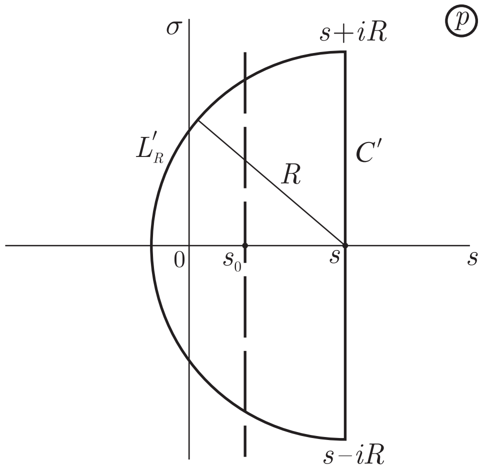


Рис. II.4.

Розглянемо, наприклад, $F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ і знайдемо ориґінал $f(t)$. При $\operatorname{Re} p > 0$ умови теореми щодо $F(p)$ виконуються. Тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\, dp, \qquad s > 0.$$

Підінтеґральна функція має два прості полюси $p_{1,2} = \pm i\omega$, тому при $t > 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} \frac{\omega e^{pt}}{p^2+\omega^2} = \\ &= \lim_{p\to -i\omega} \left[\frac{\omega e^{pt}}{p^2+\omega^2}(p+i\omega) \right] + \lim_{p\to i\omega} \left[\frac{\omega e^{pt}}{p^2+\omega^2}(p-i\omega) \right] = \\ &= -\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} + \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right) = \sin \omega t. \end{aligned}$$

Ще розглянемо функцію-зображення

$$F(p) = \frac{1-e^{-ap}}{p} = F_1(p) - F_2(p),$$

де $F_1(p) = \frac{1}{p}$, $F_2(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$ мають прості полюси при $p = 0$. Тоді при $s > 0$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}\frac{1}{p}\,dp = \begin{cases} \operatorname*{res}\limits_{p=0}\dfrac{e^{pt}}{p} = 1, & t > 0 \\ \\ \qquad 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{p(t-a)}\frac{1}{p}\,dp = \begin{cases} \operatorname*{res}\limits_{p=0}\dfrac{e^{p(t-a)}}{p} = 1, & t - a > 0 \\ \\ \qquad 0, & t - a < 0, \end{cases}$$

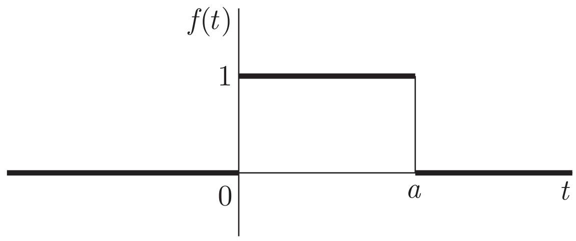


Рис. II.5.

Отже, $f_1(t)$ і $f_2(t)$ є функціями Гевісайда $\theta(t)$ і $\theta(t-a)$, відповідно. Тоді

$$f(t) = \theta(t) - \theta(t-a) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < a, \\ 0, & t > a. \end{cases}$$

і має вигляд, як на рис. II.5.

§ 5. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування диференціальних рівнянь

Нехай маємо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами, тобто треба знайти розв'язок рівняння

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t) \tag{II.26}$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

де $a_0, \ldots, a_n, y_0, \ldots, y_{n-1}$ — задані сталі, $f(t)$ — задана функція, що відповідає умовам для функції-оригіналу. Виконаємо у (II.26) перетворення Лапласа. Тоді

$$\begin{aligned}
&y(t) \to X(p), \quad f(t) \to F(p),\\
&y^{(k)} \to p^k X(p) - p^{k-1} y_0 - p^{k-2} y_1 - \ldots - y_{k-1},
\end{aligned}$$

і рівняння (II.26) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) X(p) -\\
&-\Phi(p; y_0, \ldots, y_{n-1}; a_0, \ldots, a_{n-1}) = F(p),
\end{aligned}$$

де Φ — поліном степеня $(n-1)$ щодо p. Звідси

$$X(p) = \frac{F(p) + \Phi(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

За формулою Мелліна знайдемо шуканий оригінал

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} X(p)\, dp, \qquad s > s_0.$$

Для обчислення $y(t)$ можна використати теорію лишків, оскільки $X(p)$ в області $s < s_0$ задовольняє умови леми Жордана і має полюси, які є коренями характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Як приклад, розглянемо задачу про коливний рух гармонічного осцилятора з тертям

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0.$$

Далі

$$y(t) \to X(p), \quad y'(t) \to pX(p) - y_0, \quad y''(t) \to p^2 X(p) - py_0,$$

і перетворене рівняння має вигляд

$$(mp^2 + bp + k)X(p) = my_0 p + by_0,$$

звідки

$$X(p) = \frac{mp + b}{mp^2 + bp + k} y_0 = \frac{p + b/m}{p^2 + bp/m + k/m} y_0.$$

Знаменник в $X(p)$ запишемо у вигляді

$$p^2 + \frac{b}{m} p + \frac{k}{m} = \left(p + \frac{b}{2m}\right) + \omega_1^2, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}.$$

Припустимо, що $\omega_1^2 > 0$, тобто $b^2 < 4km$ (мале тертя), тоді

$$\begin{aligned} X(p) \quad &= \quad \frac{p + b/m}{(p + b/2m)^2 + \omega_1^2}\, y_0 = \frac{p + b/2m}{(p + b/2m)^2 + \omega_1^2}\, y_0 + \\ &+ \quad \frac{b\omega_1/2m\omega_1}{(p + b/2m)^2 + \omega_1^2}\, y_0. \end{aligned}$$

Використаємо відповідні формули з §2–4 і для $y(t)$ одержимо

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{2m} t} \cos \omega_1 t + y_0 e^{-\frac{b}{2m} t} \frac{b}{2m\omega_1} \sin \omega_1 t.$$

Отриманий вираз легко звести до вигляду

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \frac{\omega_0}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \varphi),$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{2m\omega_1}$. Функція $y(t)$ описує загасаючі коливання осцилятора з тертям.

§ 6. Перетворення Фур'є. Інтеґрал Фур'є

Перетворення Лапласа, розглянуте попередніх параграфах, належить до так званих інтеґральних перетворень, які часто застосовують у математичній фізиці. У загальному вигляді ці перетворення виражають формулою

$$F(p) = \int_a^b K(p,t) f(t)\, dt, \tag{II.27}$$

де $K(p,t)$ — відома функція p і t, яку називають ***ядром інтеґрального перетворення***. Змінна t у (II.27) — дійсна, змінна p може бути комплексна, як у випадку перетворення Лапласа. Для цього перетворення (див. формулу (II.1)) ядро $K(p,t) = e^{-pt}$, $a = 0$, $b = \infty$. Наведемо ядра $K(p,t)$ для інших інтеґральних перетворень:

- ***перетворення Ганкеля***[10]

  $$K(p,t) = tJ_n(pt), \quad a = 0, \quad b = \infty,$$

  де $J_n(pt)$ — функція Бесселя[11] першого роду порядку n;

- ***перетворення Мелліна***

  $$K(p,t) = t^{p-1}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$$

[10] Герман Ганкель (Hermann Hankel, 1839–1873) — німецький математик.

[11] Фрідріх Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846) — німецький математик і астроном.

- ***перетворення Фур'є***[12] ***(комплексне)***

$$K(p,t) = e^{ipt}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty.$$

Саме про останнє інтеґральне перетворення далі йтиметься.

Перетворення Фур'є можна отримати з перетворення Лапласа. Запишемо формули (II.1) прямого (Лапласа) та (II.24) оберненого перетворень (формула Мелліна)

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad s > s_0.$$

Нагадаємо, що $p = s + i\sigma$, тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(s+i\sigma) i\, d\sigma,$$

оскільки в разі інтеґрування за змінною p її дійсна частина s залишається сталою. Уведемо позначення

$$f(t)e^{-st} = g(t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(s+i\sigma) = G(\sigma),$$

у яких останню формулу запишемо у вигляді

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} G(\sigma)\, d\sigma. \tag{II.28}$$

У цьому разі формула перетворення Лапласа матиме вигляд

$$F(s+i\sigma) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} e^{-i\sigma t}\, dt,$$

[12] Жозеф Фур'є (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830) — французький математик і фізик.

або

$$G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t)e^{-i\sigma t} dt. \tag{II.29}$$

На відміну від формули (II.27), де для перетворення Фур'є $a = -\infty$, $b = \infty$, у формулі (II.29) інтеґрування за змінною t виконують у межах $0 \le t \le \infty$. Нагадаємо, що в перетворенні Лапласа функція-ориґінал $f(t) \in K$, тобто, зокрема, $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$, тоді й $g(t) \equiv 0$ для $t < 0$. Такого обмеження на функцію $g(t)$ у перетворенні Фур'є не вводять, тому приймаємо, що нижня границя в інтеґралі (II.29) дорівнює $-\infty$.

Зазначимо, що для перетворення Фур'є поширені такі позначення: замість p використовують позначення k, причому змінна k, якщо інше не зазначено, є дійсна, а замість t — позначення x. З урахуванням наведеного вище запишемо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k)\, dk, \tag{II.30}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx. \tag{II.31}$$

Формулу (II.30) називають ***інтеґралом Фур'є*** для функції $f(x)$, а функцію $F(k)$ — ***фур'є-образом*** функції $f(x)$. Перехід від функції $f(x)$ до $F(k)$ називають ***перетворенням Фур'є***, або ***фур'є-перетворенням***. Зазначимо, що вибір знаків у формулах (II.30) і (II.31) не загальноприйнятий, деякі автори обирають їх протилежними. Це не впливає на властивості фур'є-перетворення, оскільки достатньо перепозначити $k \leftrightarrow x$, $f \leftrightarrow F$ у формулах (II.30) і (II.31), щоб отримати в експонентах протилежні знаки, що означає повну еквівалентність фур'є-перетворення щодо їхнього вибору.

Під час розв'язування фізичних задач часто зручніше вводити коефіцієнт при інтеґралах у перетворенні Фур'є не симетрично, як у формулах (II.30), (II.31), а залишаючи один з інтеґралів без додаткового множника, тодя як перед іншим ставити $1/2\pi$.

Частіше поняття інтеґрала і перетворення Фур'є вводять шляхом узагальнення розкладу періодичних функцій у ряди Фур'є. У цьому разі отримують формули (II.30) і (II.31) послідовним способом, і вони мають своє обґрунтування.

Нехай $f(x)$ — функція з періодом $2l$, де l — довільне дійсне число. Припустимо, що на відрізку $[-l, l]$ функція $f(x)$ має скінченну кількість розривів першого роду й абсолютно інтеґровна на цьому відрізку, тобто інтеґрал $\int\limits_{-l}^{l} |f(x)|\, dx$ існує. Тоді в точках неперервності функції $f(x)$ її можна зобразити рядом Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{II.32}$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{II.33}$$

Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має розрив, то сума ряду в правій частині формули (II.32) дорівнює $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$.

Далі будемо прямувати $l \to \infty$. У цьому разі накладемо на функцію $f(x)$ такі умови. На кожному скінченному відрізку дійсної осі вона має скінченну кількість розривів першого роду, а невласний інтеґрал $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ збігається, тобто функція $f(x)$ абсолютно інтеґровна на всій дійсній осі.

Підставимо вирази (II.33) у формулу (II.32):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi y}{l}\,\cos\frac{n\pi x}{l}\,dy + \right.\\ &+ \left.\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{n\pi y}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dy\right) = \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi(y-x)}{l}\,dy. \end{aligned}$$

Приймемо $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta k_n = \frac{\pi}{l}$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi}\Delta k_n$, тоді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy + \frac{1}{\pi}\Delta\sum_{n=1}^{\infty} k_n\int_{-l}^{l} f(y)\cos[k_n(y-x)]\,dy.$$

Розглянемо $l \to \infty$. Очевидно, що

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy \underset{l\to\infty}{\to} 0\int_{-l}^{l} f(y)\,dy = 0,$$

оскільки функція $f(y)$ — абсолютно інтеґровна.

Природно прийняти, що при $l \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta k_n\int_{-l}^{l} f(y)\cos[k_n(y-x)]\,dy \to \int_{0}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos[k(y-x)]\,dy. \quad \text{(II.34)}$$

Доведення існування границі інтеґральної суми при $\Delta k_n \to 0$ та її граничного значення у вигляді інтеґрала у правій частині виразу (II.34) є змістом відповідної теореми, яку наведемо без доведення.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має на кожному скінченному відрізку дійсної осі x скінченну кількість розривів першого роду й абсолютно інтеґровна на $(-\infty, \infty)$, то в кожній точці x, у якій функція $f(x)$ диференційовна, маємо

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty dk \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \cos[k(y-x)]\, dy. \tag{II.35}$$

Праву частину формули (II.35) називають ***подвійним інтеґралом Фур'є*** для функції $f(x)$.

У формулі (II.35) виконаємо такі перетворення:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \cos[k(y-x)]\, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \cos ky\, dy \cos kx +$$
$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \sin ky\, dy \sin kx = a(k) \cos kx + b(k) \sin kx,$$

де

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \cos ky\, dy, \;\; b(k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(y) \sin ky\, dy, \;\; k \geq 0. \tag{II.36}$$

Тоді формула (II.35) набуде вигляду

$$f(x) = \int\limits_0^\infty [a(k) \cos kx + b(k) \sin kx]\, dk. \tag{II.37}$$

Тепер перетворимо підінтеґральну функцію за допомогою формули Ейлера (I.11)

$$a(k) \cos kx + b(k) \sin kx = a(k) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b(k) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$
$$= \frac{a(k) - ib(k)}{2} e^{ikx} + \frac{a(k) + ib(k)}{2} e^{-ikx} = c(k) e^{ikx} + c(-k) e^{-ikx},$$

де

$$c(k) = \frac{a(k) - ib(k)}{2}, \quad c(-k) = \frac{a(k) + ib(k)}{2}, \quad k \geq 0, \tag{II.38}$$

оскільки $a(-k) = a(k)$, $b(-k) = -b(k)$ (див. II.36). Тоді

$$f(x) = \int\limits_0^\infty [a(k)\cos kx + b(k)\sin kx]\,dk =$$

$$= \int\limits_0^\infty [c(k)e^{ikx} + c(-k)e^{-ikx}]\,dk =$$

$$= \int\limits_0^\infty c(k)e^{ikx}dk + \int\limits_{-\infty}^0 c(k)e^{ikx}dk = \int\limits_{-\infty}^\infty c(k)e^{ikx}dk.$$

Знайдемо вираз для $c(k)$:

$$c(k) = \frac{a(k) - ib(k)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)\cos ky\,dy - i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)\sin ky\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)[\cos ky - i\sin ky)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)e^{-iky}dy,\ k \geq 0.$$

Оскільки $c(-k) = c^*(k)$, де зірочка позначає комплексне спряження, то формула

$$c(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)e^{-iky}dy$$

справджується і для $k < 0$.

Отже, маємо

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^\infty c(k)e^{ikx}dk,$$

де

$$c(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ikx}dx.$$

Уведемо функцію $F(k) = \sqrt{2\pi}c(k)$, тоді для останніх двох формул отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \quad \text{і} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx,$$

що збігається з (II.30), (II.31) і обґрунтовує їхню правильність.

Перетворення Фур'є з погляду фізики природніше, ніж перетворення Лапласа. Зокрема, це зумовлене тим, що перетворення Фур'є безпосередньо пов'язане з розкладом функцій у ряди Фур'є, коли фізичні процеси можна зобразити як суму гармонічних коливань (так званий спектральний аналіз). У випадку зображення функції від часової змінної t інтеґралом Фур'є записують

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{II.39}$$

де

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt, \tag{II.40}$$

і функцію $F(\omega)$ називають спектральною функцією (тут знаки в експонентах протилежні!).

Для функцій від просторового арґументу $\mathbf{r} = (x, y, z)$ $f(\mathbf{r})$ уводять її зображення потрійним інтеґралом Фур'є

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int F(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}d\mathbf{k}, \tag{II.41}$$

де $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $d\mathbf{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z$, і вектор $\mathbf{k}$ називають ***хвильовим вектором***, а інтеґрування відбувається за всім простором змінної $\mathbf{k}$.

Якщо маємо функції типу $f(\mathbf{r}, t)$, якими у фізиці описують так звані скалярні поля, то їхній розклад в інтеґрал Фур'є є розкладом за плоскими хвилями вигляду $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\ F(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{II.42}$$

який застосовують у різноманітних фізичних теоріях.

Розділ III.

Узагальнені функції

Розв'язування деяких задач математичної фізики потребує введення об'єктів, властивості яких відрізняються від властивостей звичайних функцій. Наприклад, поняття густини точкового заряду пов'язане з уведенням величини, що має такі властивості:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0, \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \end{cases} , \qquad \int\limits_V \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = q,$$

де $\mathbf{r}_0$ — радіус-вектор точки, у якій перебуває заряд; V — об'єм, що містить точку $\mathbf{r}_0$; q — величина заряду; $d\mathbf{r} = dx\,dy\,dz$. Серед усіх "традиційних" функцій не існує жодної, яка б мала такі властивості. Неможливо визначити інтеґрал для функції, що всюди дорівнює нулю, за винятком однієї точки, де вона перетворюється в нескінченність. Математично коректно цю й інші подібні величини (густину матеріальної точки, густину точкового диполя, інтенсивність миттєвого точкового джерела тощо) описують так званими ***узагальненими функціями***, які розширюють класичне поняття функції. У понятті узагальненої функції відображено той факт, що реально не можна виміряти значення фізичної величини в точці, можна виміряти лише її значення у досить малому околі заданої точки, тому узагальнені функції іноді називають ***розподілами***.

§ 1. δ-функція

Поняття δ-функції було введене задовго до П. Дірака,[1] з розвитком операційного числення наприкінці XIX ст. Зокрема, вважали, що похідна від функції Гевісайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

дорівнює δ-функції. П. Дірак лише широко застосував поняття δ-функції та її похідних у квантово-механічних дослідженнях. В одновимірному випадку ця функція визначена так:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0), \tag{III.1}$$

де $\varphi(x)$ — звичайна функція.

Існує спосіб означення $\delta(x)$ як уточнення властивостей (III.1) шляхом певного граничного переходу в послідовності звичайних функцій (так звані δ-функційні послідовності)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x),$$

де послідовність $\{f_\varepsilon(x)\}$ має такі властивості:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \tag{III.2}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\, dx = 1, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

[1] Поль Адрієн Моріс Дірак (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984) — британський фізик-теоретик.

Наведемо приклади таких послідовностей.

Приклад 1. Нехай $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/4\varepsilon}$, тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-x^2/4\varepsilon}\varphi(x)\,dx$$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/4\varepsilon}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\,dx = \varphi(0)\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\sqrt{4\pi\varepsilon} = \varphi(0).$$

Ми врахували, що $e^{-x^2/4\varepsilon}$ має максимум у $x = 0$, при $|x| \gg \varepsilon$ швидко прямує до нуля (рис. III.1), отже, в інтеґралі суттєвий лише окіл точки $x = 0$, тому функцію $\varphi(x)$ в точці $x = 0$ можна винести за знак інтеґрала, припускаючи, що на нескінченності $\varphi(x)$ достатньо швидко спадає.

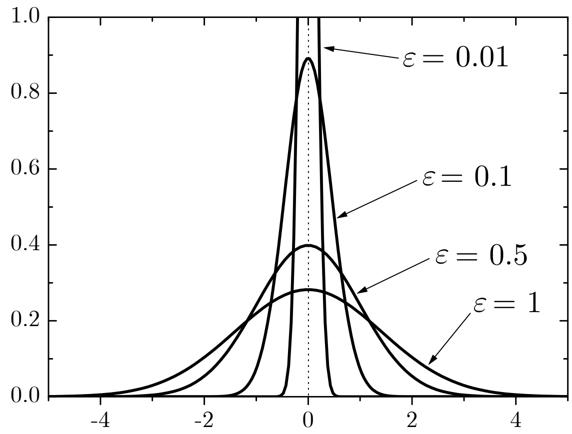


Рис. III.1.

Приклад 2. Нехай $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$.

Як і у прикладі 1, $f_\varepsilon(x)$ має максимум у точці $x = 0$, при

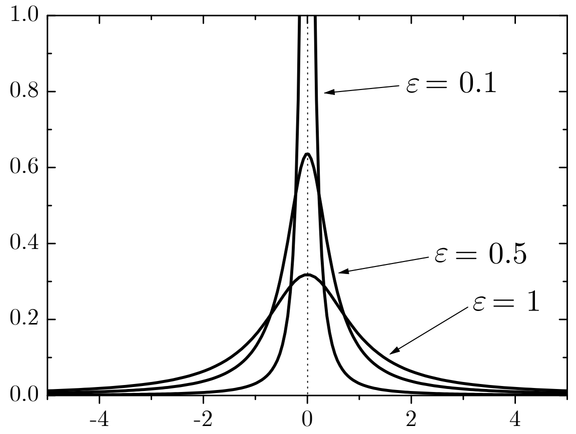


Рис. III.2.

$|x| \gg \varepsilon$ прямує до нуля (рис. III.2), тому маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} =$$
$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \varphi(0).$$

Послідовності $\dfrac{\sin ax}{\pi x}$, $a\to\infty$, $\dfrac{a}{2\,\mathrm{ch}^2\,ax}$, $a\to\infty$, $\dfrac{1-\cos ax}{\pi a x^2}$, $a\to\infty$ також є δ-функційними.

Інший спосіб уведення δ-функції полягає в означенні її як функціонала, який ставить у відповідність будь-якій ***основній (пробній) функції*** $\varphi(x)$ число $\varphi(x_0)$ — значення в точці x_0. Це число позначають (δ,φ) і записують

$$(\delta,\varphi) = \int \delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0),$$
$$(\delta,1) = \int \delta(x)\,dx = 1,$$

тобто δ-функція визначена не поданням її значень для кожного значення арґумента x, а поданням значень інтеґралів для всіх основних функцій $\varphi(x)$. Надалі за основні функції оберемо нескінченно диференційовні та фінітні функції. ***Фінітними*** називають функції, що дорівнюють нулю поза певною областю значень її арґумента. Найменшу замкнену множину, поза якою основна функція дорівнює нулю, називають ***носієм*** $\varphi(x)$ і позначають $\operatorname{supp}\varphi(x)$. Якщо носій обмежений, його називають ***компактним***. Нескінченно диференційовні функції з компактним носієм утворюють лінійний векторний простір — ***простір основних функцій*** $D = D(R^n)$, тут R^n — n-вимірний дійсний евклідовий простір, точками якого є $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де x_i, $i = 1, \ldots, n$ — координати точки x. Поширеним прикладом основної функції з D і носієм $[-1, 1]$ є функція

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Тепер наведемо означення будь-якої узагальненої функції f. ***Узагальненою функцією*** називають будь-який лінійний неперервний функціонал на просторі основних функцій D. Значення функціонала f на основній функції φ записуватимемо

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Узагальнену функцію f будемо також формально записувати як $f(x)$, $x \in R^n$, маючи на увазі, що x — це арґумент основних функцій, на які діє функціонал f.

Функціонал ***лінійний*** на D, якщо

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi),$$

де $\varphi \in D$, $\psi \in D$, α, β — комплексні числа.

Функціонал ***неперервний*** на D, якщо з $\varphi_m \to 0$, $m \to \infty$ у D випливає $(f, \varphi_m) \to 0$, $m \to \infty$. Функції $\varphi_m \to 0$, $m \to \infty$ у D, якщо всі $\varphi_m(x)$ мають скінченний інтервал, поза яким вони зникають, і рівномірно прямують до нуля разом зі своїми похідними.

Множину всіх узагальнених функцій позначимо через $D' = D'(R^n)$.

Послідовність узагальнених функцій $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$ з D' збігається до узагальненої функції $f \in D'$, якщо для довільної $\varphi \in D$, $(f_m, \varphi) \to (f, \varphi)$, $m \to \infty$. Лінійну множину D' із заданою збіжністю називають ***простором узагальнених функцій*** D'.

Звичайну неперервну функцію $f(x)$ можна розглядати як частковий випадок узагальненої функції, тоді лінійний функціонал задають таким інтеґралом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Узагальнені функції не мають значень в окремих точках, однак можна говорити, що узагальнена функція $f(x)$ в області G дорівнює нулю. Запис $f(x) = 0$, $x \in G$ означає, що для будь-якої основної функції з носієм $\operatorname{supp}\varphi(x)$, розташованим у G, $\varphi \in D(G)$, завжди $(f, \varphi) = 0$. Зокрема, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$.

Узагальнені функції f і g називають ***рівними в області*** G, якщо $f - g = 0$, $x \in G$, зокрема, $f = g$, якщо для всіх основних функцій $\varphi \in G$ $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Носій узагальненої функції — $\operatorname{supp} f$ — це найменша замкнена множина, поза якою функція f дорівнює нулю. Наприклад, у $\delta(x)$ носієм є одна точка — початок координат.

Узагальнену функцію з обмеженим носієм називають ***фінітною***.

Узагальнені функції, породжувані локально-інтеґровними в R^n функціями $f(x)$ (тобто інтеґровні в будь-якій обмеженій області в R^n) за формулою

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

називають ***реґулярними узагальненими функціями***. Решту узагальнених функцій називають ***синґулярними узагальненими функціями***. Прикладом синґулярної функції є δ-функція

Дірака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D,$$

тому що носій її — одна точка $x = 0$.

§ 2. Дії над узагальненими функціями

1. *Додавання і множення на число* визначають за формулами

$$(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \tag{III.3}$$

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi). \tag{III.4}$$

2. *Лінійна заміна змінних.* Нехай $f(x)$ — локально інтеґровна в R^n функція і $x = Ay + b$ (A — матриця перетворення, $\det A \neq 0$) — неособливе перетворення простору R^n на себе. Тоді для будь-якої $\varphi \in D$ одержимо

$$\begin{aligned}
(f(Ay + b), \varphi) &= \int f(Ay + b)\varphi(y)\, dy = \\
&= \frac{1}{|\det A|} \int f(x)\varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)\, dx = \\
&= \frac{1}{|\det A|} \left(f, \varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)\right).
\end{aligned}$$

Цю рівність приймемо за означення узагальненої функції $f(Ay+b)$ для довільної $f(x) \in D'$

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{1}{|\det A|}\, \varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)\right). \tag{III.5}$$

Тепер розглянемо часткові випадки:

- якщо A — матриця обертання і $b = 0$, то

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A^{-1}x)), \tag{III.6}$$

- якщо A — матриця масштабного перетворення або відбиття, $A = aI$, I — одинична матриця, $a \neq 0$, $a < 0$ (для відбиття) і $b = 0$, то

$$(f(ay), \varphi) = \frac{1}{|a^n|}(f, \varphi(x/a)), \qquad \text{(III.7)}$$

- якщо $A = I$, $b \neq 0$, то

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)). \qquad \text{(III.8)}$$

Узагальнену функцію $f(x+b)$ називають ***зсувом*** узагальненої функції $f(x)$ на вектор b.

Для δ-функції з формул (III.7) і (III.8) маємо ($n = 1$):

$$\begin{aligned}(\delta(x-x_0), \varphi) &= (\delta, \varphi(x+x_0)) = \\ &= \int \delta(x)\varphi(x+x_0)\,dx = \varphi(x_0),\end{aligned} \qquad \text{(III.9)}$$

$$\begin{aligned}(\delta(ax), \varphi) &= \frac{1}{|a|}(\delta, \varphi(x/a)) = \frac{1}{|a|}\int \delta(x)\varphi(x/a)\,dx = \\ &= \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}(\delta, \varphi),\end{aligned}$$

або

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad \text{(III.10)}$$

$$(\delta(-x), \varphi) = (\delta, \varphi(-x)) = \int \delta(x)\varphi(-x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

або

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \text{(III.11)}$$

тобто δ-функція — парна функція.

Нехай $f = \delta(\psi(x))$, де $\psi(x)$ — функція, яка має ізольовані прості нулі в дійсних точках x_i, $x \in R^1$. В околі кожного з цих нулів функція $\psi(x)$ дорівнює $\psi(x) \simeq \psi'(x_i)(x-x_i)$, $\psi'(x_i) \neq 0$. Тоді з (III.10) маємо $\delta(\psi'(x_i)(x-x_i)) = \frac{\delta(x-x_i)}{|\psi'(x_i)|}$ і в заналом

$$\delta(\psi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\psi'(x_i)|}. \tag{III.12}$$

Зокрема, за цією формулою отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} &\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)], \\ &\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-\pi k), \\ &\delta(a+bx) = \frac{1}{b}\delta\left(x+\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

3. *Множення узагальненої функції.* Нехай $f(x)$ — локально-інтеґровна в R^n функція, $a(x) \in C^\infty(R^n)$, тобто нескінченно диференційовна функція. Тоді для $\varphi \in D$ справджується рівність

$$(af,\varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x)\,dx = (f,a\varphi), \tag{III.13}$$

зокрема,

$$\begin{aligned} (a\delta,\varphi) &= \int a(x)\delta(x)\,dx = (\delta,a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta,\varphi) \\ &= (a(0)\delta,\varphi), \end{aligned}$$

або

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x). \tag{III.14}$$

4. *Диференціювання.* Якщо $f(x) \in D'$, $\varphi(x) \in D$, $x \in R^1$, то $f'(x)$ — похідну від $f(x)$, означимо так,

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi'). \tag{III.15}$$

У випадку звичайних функцій $f(x)$ і $f'(x)$ (III.15) — це результат інтеґрування частинами, де враховано, що $\varphi(x)$ дорівнює нулю для тих x, які не належать носію φ. Оскільки $\varphi'(x)$ разом з $\varphi(x)$ — основні функції, то вираз праворуч у (III.15) визначає лінійний і неперервний функціонал, тому кожна узагальнена функція має похідну.

Похідні вищих порядків означають у той самий спосіб шляхом формального інтеґрування частинами ($x \in R^n$)

$$(\partial^p f, \varphi) = (-1)^{|p|}(f, \partial^p \varphi), \tag{III.16}$$

де

$$\partial^p f = \partial_1^{p_1} \dots \partial_n^{p_n} f(x) = \frac{\partial^{|p|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}, \quad |p| = p_1 + \dots + p_n,$$

— похідна p-порядку, $p = (p_1, \dots, p_n)$ — це цілочисловий вектор з додатними складовими p_j, $j = 1, \dots, n$, $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$, $\partial_j = = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial^0 f(x) = f(x)$.

Отже, кожна узагальнена функція має похідну будь-якого порядку. Зокрема, для δ-функції

$$(\partial^p \delta, \varphi) = (-1)^{|p|}(\delta, \partial^p \varphi) = (-1)^{|p|} \partial^p \varphi(0). \tag{III.17}$$

Наведемо деякі властивості похідних узагальнених функцій:

а) операція диференціювання лінійна і неперервна. Доведемо лінійність.

$$\begin{aligned} (\partial^p(\alpha f + \beta g), \varphi) &= ((\alpha f + \beta g), (-1)^{|p|} \partial^p \varphi) \\ &= \alpha(f, (-1)^{|p|} \partial^p \varphi) + \beta(g, (-1)^{|p|} \partial^p \varphi) \\ &= \alpha(\partial^p f, \varphi) + \beta(\partial^p g, \varphi) = (\alpha \partial^p f + \beta \partial^p g, \varphi), \end{aligned}$$

тобто

$$\partial^p(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial^p f + \beta \partial^p g. \tag{III.18}$$

Тепер доведемо неперервність

$$\partial^p f_k \to 0, \quad k \to \infty \ \text{ у } D', \text{якщо } f_k \to 0, \quad k \to \infty \ \text{ в } D'.$$

З означення похідної маємо $(\partial^p f_k, \varphi) = (-1)^{|p|}(f_k, \partial^p \varphi) \to 0$, $k \to \infty$, тобто $\partial^p f_k \to 0$, $k \to \infty$ в D';

б) результат диференціювання довільної узагальненої функції не залежить від порядку диференціювання

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{III.19}$$

Зазначимо, що подібне правило виконується для основних функцій, тому

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \varphi\right);$$

в) якщо $f \in D'$, $a(x) \in C^\infty(R^n)$, то справджується формула диференціювання добутку fa. Справді, використовуючи формули (III.13), (III.15), (III.18), одержимо

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi\right) = -\left(f, a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \\ &= -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) \\ &= \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right), \end{aligned}$$

отже,

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a\frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{III.20}$$

Тепер за формулами (III.13), (III.16) доведемо, що в $\mathcal{D}'(R^1)$

$$x^k \delta^{(m)}(x) = \begin{cases} 0, & m < k, \\ (-1)^k k! \delta(x) & m = k. \end{cases}$$

Для цього запишемо функціонал

$$
\begin{aligned}
&(x^k\delta^{(m)}(x),\varphi(x)) = (\delta^{(m)}(x), x^k\varphi(x)) = \\
&= (-1)^m\left(\delta(x), \frac{d^m}{dx^m}(x^k\varphi(x))\right) = \\
&= (-1)^m\left(\delta(x), \sum_{\nu=0}^{m}\frac{m!}{\nu!(m-\nu)!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^k\frac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}}\varphi(x)\right) = \\
&= \begin{cases} (-1)^m\sum\limits_{\nu=0}^{m}\dfrac{m!}{\nu!(m-\nu)!}\dfrac{d^\nu}{dx^\nu}x^k\dfrac{d^{m-\nu}}{dx^{m-\nu}}\varphi(x)\Bigg|_{x=0} = 0, & m<k, \\ (-1)^k k!(\delta(x),\varphi(x)) = (-1)^k k!\varphi(0), & m=k, \end{cases}
\end{aligned}
$$

зокрема, $x\delta'(x) = -\delta(x)$;

г) якщо узагальнена функція $f = 0$, $x \in G$, то й похідна $\partial^p f = 0$, $x \in G$

Оскільки $\varphi \in D(G)$, то $\partial^p\varphi \in D(G)$, отже,

$$(\partial^p f, \varphi) = (-1)^{|p|}(f, \partial^p\varphi) = 0,$$

звідки одержуємо $\partial^p f = 0$.

Як приклад, знайдемо похідну від $\theta(x)$-функції Гевісайда $(x \in R^1)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{III.21}$$

За означенням

$$(\theta',\varphi) = -(\theta,\varphi') = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta,\varphi),$$

звідки

$$
\begin{aligned}
\theta'(x) &= \delta(x), \\
\theta'(x-a) &= \delta(x-a).
\end{aligned} \tag{III.22}
$$

Зазначимо, що похідна від $\theta(x)$ у звичайному розумінні дорівнює 0 при $x \neq 0$, а при $x = 0$ не існує.

Функція $\theta(x)$ — найпростіша розривна функція. Розглянемо похідну від кусково-неперервної функції разом з кусково-неперервною похідною $f'(x)$ на R^1, точками розриву $\{x_k\}$ та відповідними стрибками $\{h_k\}$ (рис. III.3).

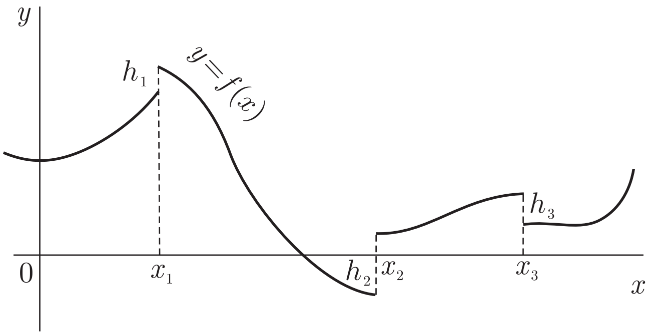


Рис. III.3.

Уведемо функцію

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Функція $f_1(x)$ неперервна і $f_1'(x)$ збігається з $f'(x)$ всюди, крім точок розриву $f(x)$, де $f_1'(x)$ не існує. Враховуючи (III.22), запишемо

$$f_1'(x) = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k),$$

де f' — похідна узагальненої функції $f(x)$, або

$$f' = f_1'(x) + \sum_k h_k \delta(x - x_k), \tag{III.23}$$

тобто похідна узагальненої функції $f(x)$ складається з її звичайної похідної і суми δ-функцій у точках розриву з відповідними стрибками як коефіцієнтами.

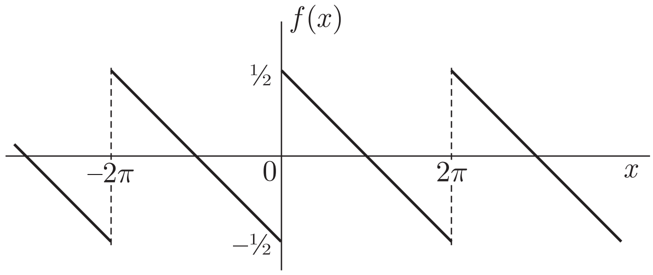


Рис. III.4.

Зокрема, для 2π-періодичної функції (рис. III.4)

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \qquad x \in [0, 2\pi),$$

отримаємо

$$f' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k). \tag{III.24}$$

Отже, узагальнена і класична похідна не збігаються одна з одною.

Далі розглянемо таку 2π-періодичну функцію:

$$g(x) = \int_0^x f(x')\,dx' = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi},$$

і розкладемо в рівномірно збіжний ряд Фур'є $g(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}$, $C_k = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx}\,dx$:

$$\int_0^x f(x')\,dx' = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

Диференціюючи цей ряд двічі і враховуючи (III.24), одержимо рівність

$$f' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{ikx},$$

або

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \tag{III.25}$$

яка є рядом Фур'є 2π-періодичної узагальненої функції

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Наведемо приклади узагальнених функцій однієї змінної, які є похідними від звичайних локально інтеґровних функцій:

а)

$$\begin{aligned} &((\ln|x|)', \varphi) = -(\ln|x|, \varphi') = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)\,dx \right\} = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right\}, \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln\varepsilon \to 0$$

тому остаточно

$$((\ln|x|)', \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right) = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

де інтеґрал розуміють у сенсі головного значення.

Цей результат можна записати так:

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = P\frac{1}{x}; \tag{III.26}$$

б) тепер продиференціюємо одержану узагальнену функцію $P\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\left(\left(P\frac{1}{x}\right)', \varphi\right) = -\left(P\frac{1}{x}, \varphi'\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(-x)}{x^2}\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{2\varphi(0)\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dx}{x^2} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(-x)}{x^2}\,dx\right\} = \\
&= \int\limits_{0}^{\infty}\frac{2\varphi(0) - \varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2}\,dx.
\end{aligned} \tag{III.27}$$

Цей результат також зручно записати у вигляді інтеґрала в сенсі головного значення

$$\begin{aligned}
&\left(\left(P\frac{1}{x}\right)', \varphi\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx\right) = \\
&= -P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx,
\end{aligned} \tag{III.28}$$

або в символічній формі

$$\left(P\frac{1}{x}\right)' = -Pf\frac{1}{x^2}. \qquad \text{(III.29)}$$

де символ Pf (псевдофункція) означає правило інтеґрування (III.27). Узагальнимо (III.26), (III.27), одержимо

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln|x| = Pf\frac{1}{x^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \qquad \text{(III.30)}$$

в) **формули Сохоцького**.

Знайдемо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(x+i\varepsilon)$. З означення логарифма (I.14) випливає

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(x+i\varepsilon) = \ln|x| + i\lim_{\varepsilon\to 0}\arg(x+i\varepsilon) = \ln|x| + i\pi\theta(-x).$$

Продиференціюємо цю рівність:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = P\frac{1}{|x|} + i\pi\theta'(-x),$$

однак

$$\begin{aligned}(\theta'(-x),\varphi) &= -(\theta(-x),\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{0}\theta(-x)\varphi'(x)\,dx = \\ &= -\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi'(x)\,dx = -\varphi(0) = -(\delta,\varphi),\end{aligned}$$

тобто

$$\theta'(-x) = -\delta(x),$$

тому остаточно одержимо ***формули Сохоцького***:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \qquad \text{(III.31)}$$

або

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-i\varepsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

інше доведення цих формул наведене в § 5 розділу I (треба врахувати, що $\varphi(a) = (\delta(x-a),\varphi)$)).

§ 3. Прямий добуток узагальнених функцій

Нехай $f(x)$ і $g(y)$ — локально інтеґровні функції в просторах R^n і R^m, відповідно. Функція $f(x)g(y)$ також буде локально інтеґровною в R^{n+m} і визначає (реґулярну) узагальнену функцію, що діє на основні функції $\varphi(x,y) \in D$, за формулами

$$\begin{aligned}(f(x)g(y), \varphi) &= \int f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int f(x) \int g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \\ &= \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x,y)\Big)\Big), \end{aligned} \qquad \text{(III.32)}$$

або

$$\begin{aligned}(g(y)f(x), \varphi) &= \int g(y)f(x)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int g(y) \int f(x)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \Big(g(y), \Big(f(x), \varphi(x,y)\Big)\Big). \end{aligned} \qquad \text{(III.33)}$$

Формула (III.32) означає ***прямий добуток*** $f(x) \circ g(x)$ ***узагальнених функцій***, тобто

$$(f(x) \circ g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))), \quad \varphi \in D(R^{n+m}). \qquad \text{(III.34)}$$

Розглянемо деякі властивості прямого добутку.

1. Комутативність

$$f(x) \circ g(y) = g(y) \circ f(x) \qquad \text{(III.35)}$$

випливає з формули (III.33).

2. Асоціативність

$$f(x) \circ [g(y) \circ h(z)] = [f(x) \circ g(y)] \circ h(z), \quad h(z) \in D'(R^k). \qquad \text{(III.36)}$$

Справді, якщо $\varphi \in D(R^{n+m+k})$, то

$$\begin{aligned}&(f(x)\circ[g(y)\circ h(z)],\varphi) = (f(x),(g(y)\circ h(z),\varphi)) =\\ &= (f(x),(g(y),(h(z),\varphi))) =\\ &= (f(x)\circ g(y),(h(z),\varphi)) = ([f(x)\circ g(y)]\circ h(z),\varphi).\end{aligned}$$

3. Диференціювання

$$\partial_x^p[f(x)\circ g(y)] = \partial^p f(x)\circ g(y). \tag{III.37}$$

За формулою (III.16) запишемо

$$\begin{aligned}&(\partial_x^p[f(x)\circ g(y)],\varphi) =\\ &= (-1)^{|p|}(f(x)\circ g(y),\partial_x^p\varphi) = (-1)^{|p|}(g(y),(f(x),\partial_x^p\varphi(x,y))) =\\ &= (g(y),(\partial^p f(x),\varphi)) = (\partial^p f(x)\circ g(y),\varphi).\end{aligned} \tag{III.38}$$

4. Узагальнена функція $f(x)\circ 1(y)$ не залежить від y, тобто

$$\begin{aligned}&(f(x)\circ 1(y),\varphi) = (f(x),\int\varphi(x,y)\,dy) = (1(y)\circ f(x),\varphi) =\\ &= \int(f(x),\varphi(x,y))\,dy,\end{aligned}$$

або остаточно

$$(f(x),\int\varphi(x,y)\,dy) = \int(f(x),\varphi(x,y))\,dy. \tag{III.39}$$

§ 4. Згортка узагальнених функцій

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — локально інтеґровні функції в R^n, крім того, функція

$$h(x) = \int|g(y)f(x-y)|\,dy$$

також локально інтеґровна в R^n, тоді ***згорткою*** $f*g$ цих функцій називають функцію

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int f(y)g(x-y)\,dy =\\ &= \int g(y)f(x-y)\,dy = (g*f)(x).\end{aligned} \tag{III.40}$$

Сформулюємо правило, за яким згортка діє на основні функції $\varphi \in D(R^n)$, для цього утворимо функціонал

$$(f * g, \varphi) = \int (f * g)(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int \left[\int g(y) f(\xi - y)\, dy\right] \varphi(\xi)\, d\xi,$$

змінимо порядок інтеґрування та зробимо заміну змінної $x = \xi - y$, тоді

$$\int g(y) \left[\int f(\xi - y)\varphi(\xi)\, d\xi\right] dy = \int g(y) \left[\int f(x)\varphi(x + y)\, dx\right] dy,$$

отже,

$$(f * g, \varphi) = \int f(x) g(y) \varphi(x + y)\, dx\, dy. \qquad \text{(III.41)}$$

Нехай f — довільний функціонал, $g = \delta(x)$, тоді для довільної основної функції φ одержимо

$$\begin{aligned} (f * \delta, \varphi) &= \int f(x)\delta(y)\varphi(x + y)\, dy\, dx = \\ &= \int f(x)\varphi(x)\, dx = (f, \varphi), \end{aligned} \qquad \text{(III.42)}$$

тобто $f * \delta = f$. Той самий результат маємо для довільного g

$$(\delta * g, \varphi) = \int \delta(x) g(y) \varphi(x + y)\, dx\, dy = (g, \varphi), \quad \delta * g = g. \qquad \text{(III.43)}$$

Отже, згортка з δ-функцією існує завжди і функціонал δ у разі згортки відіграє таку саму роль, як одиниця у множенні. Зокрема, $\delta * \delta(x) = \delta(x)$. Крім того, зміст формул (III.42), (III.43) полягає в тому, що будь-який функціонал f або g можна розкласти за δ-функціями, що формально записують так:

$$f(x) = \int f(\xi)\delta(x - \xi)\, d\xi.$$

Саме цю формулу мають на увазі, коли говорять, що будь-яке матеріальне тіло складається з точкових мас, будь-яке джерело складається з точкових джерел тощо.

Якщо $f = \delta'(x)$, $x \in R^1$, g — довільна узагальнена функція, або навпаки, $g = \delta'(x)$, f — довільна узагальнена функція, то

$$(\delta' * g, \varphi) = \int \delta'(x) g(y) \varphi(x+y)\, dx\, dy =$$
$$= \int g(y) \delta'(x) \varphi(x+y)\, dx\, dy = -\int g(y) \varphi'(y)\, dy =$$
$$= \int g'(y) \varphi(y)\, dy = (g', \varphi),$$

тобто

$$\delta' * g = g', \quad f * \delta' = f'. \tag{III.44}$$

Нехай тепер одна з узагальнених функції є похідною k-го порядку, $x \in R^1$, тоді

$$(\delta^{(k)} * g, \varphi) = \int \delta^{(k)}(x) g(y) \varphi(x+y)\, dx\, dy =$$
$$= \int g(y) \delta^{(k)}(x) \varphi(x+y)\, dx\, dy =$$
$$= (-1)^k \int g(y) \varphi^{(k)}(y)\, dy = (g^{(k)}, \varphi),$$

тобто $\delta^{(k)} * g = g^{(k)}$, або

$$\delta^{(k)} * f = f^{(k)}. \tag{III.45}$$

Легко перевірити, що

$$\delta' * \theta = \theta' = \delta \quad i \quad \delta' * 1 = 0.$$

З цих прикладів випливає, що результат згортки будь-якої узагальненої функції з $\delta^{(k)}(x)$ — це похідна відповідного порядку цієї узагальненої функції.

Зазначимо, що згортка двох довільних узагальнених функцій f і g існує не завжди, однак якщо одна з узагальнених функцій фінітна, то справджується формула (III.41) — означення згортки.

На підставі формули (III.41) можна довести, що згортка має такі властивості.

1. Лінійність

$$(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + \beta(f_2 * g), \quad f_1, f_2, g \in D', \quad \text{(III.46)}$$

за умови, що згортки $f_1 * g$ та $f_2 * g$ існують.

2. Комутативність

$$f * g = g * f. \quad \text{(III.47)}$$

3. Диференціювання згортки

$$\partial^p (f * g) = \partial^p f * g = f * \partial^p g. \quad \text{(III.48)}$$

Нарешті, наведемо приклади згорток.

Нехай ρ — об'ємна густина, тоді об'ємний потенціал записують як згортку

$$V_n(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho = \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} \rho(y)\, dy, \quad n \geq 3,$$
$$V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} * \rho = \int \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \rho(y)\, dy, \quad n = 2.$$

Якщо ж на обмеженій кусково-гладкій двобічній поверхні S з нормаллю $\mathbf{n}$ на ній задані поверхневі густини μ, ν, то поверхневі потенціали також є згортками. Зокрема, поверхневий потенціал простого шару

$$V_n(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_S = \int\limits_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y, \quad n \geq 3,$$
$$V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} * \mu\delta_S = \int\limits_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\, dS_y, \quad n = 2;$$

поверхневий потенціал подвійного шару

$$V_n(x) = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S) = \int\limits_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y, \quad n \geq 3,$$
$$V_2(x) = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S) = \int\limits_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|}\, dS_y, \quad n = 2,$$

де узагальнена функція $\mu\delta_S$ — простий шар на поверхні S з густиною μ — діє за правилом

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)\, dS, \quad \varphi \in D, \mu\delta_S \in D', \quad \mu\delta_S(x) = 0, \quad x \bar{\in} S.$$

Аналогічно, $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S)$ — узагальнена функція, яку називають подвійним шаром на поверхні S з густиною ν, і

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S), \varphi\right) = \int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial \mathbf{n}}\, dS, \quad \varphi \in D, \quad -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S) \in D'.$$

§ 5. Перетворення Фур'є

У попередньому параграфі розглянуто інтеґральні перетворення Фур'є і Лапласа для звичайних функцій. Тепер означимо ці перетворення для узагальнених функцій.

Уведемо множину функцій класу $C^\infty(R^n)$, що спадають при $|x| \to \infty$ разом з усіма похідними швидше від будь-якого степеня $|x|^{-1}$, і назвемо множиною основних функцій $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^n)$.

Будь-які неперервні лінійні функціонали на просторі цих основних функцій утворюють множину ***узагальнених функцій повільного зростання*** $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(R^n)$.

Перетворення Фур'є $F[f]$ довільної узагальненої функції повільного зростання

$$F[f] = \int f(x_1, \ldots, x_n) e^{i(\xi_1 x_1, + \ldots + \xi_n x_n)} dx_1, \ldots, dx_n =$$
$$= \int f(x) e^{i(\xi, x)}\, dx, \quad (\xi, x) = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n, \qquad \text{(III.49)}$$

означимо як лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{L}$

$$(F[f],\varphi) = \int F[f](\xi)\varphi(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int \left[\int f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx\right]\varphi(\xi)\,d\xi = \int f(x)\int \varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi\,dx =$$
$$= \int f(x)F[\varphi](x)\,dx = (f,F[\varphi]),$$

тобто

$$(F[f],\varphi) = (f,F[\varphi]), \quad F[f]\in\mathcal{L}', \tag{III.50}$$

де

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x)e^{i(\xi,x)}dx, \quad F[\varphi]\in\mathcal{L}, \tag{III.51}$$

— перетворення Фур'є основної функції $\varphi(x)$.

Існує й обернена операція F^{-1} до операції перетворення Фур'є F, а саме:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)], \tag{III.52}$$

тобто

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f.$$

Тут варто звернути увагу на асиметрію в означеннях прямого й оберненого перетворення Фур'є порівняно з формулами (II.30) і (II.31), а також відповідний коментар на с. 144.

Як приклад, знайдемо за формулою (III.50)

$$(F[\delta(x)],\varphi) = (\delta(x),F[\varphi]) = F[\varphi](0) = (1,\varphi),$$

або

$$F[\delta] = 1, \tag{III.53}$$

звідси маємо

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(\xi,x)}\, dx.$$

Тому

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{III.54}$$

Розглянемо деякі властивості перетворення Фур'є.

1. Спочатку продиференціюємо перетворення Фур'є. Для цього за формулами (III.16), (III.50) запишемо

$$(\partial^p F[f], \varphi) = (-1)^{|p|}(F[f], \partial^p \varphi) = (-1)^{|p|}(f, F[\partial^p \varphi]). \tag{III.55}$$

Далі знайдемо перетворення Фур'є основної функції $\partial^p \varphi \in \mathcal{L}(R^n)$

$$\begin{aligned} F[\partial^p \varphi] &= \int e^{i(\xi,x)} \partial^p \varphi \, d\xi \\ &= (-ix)^p \int e^{i(\xi,x)} \varphi(\xi)\, d\xi = (-ix)^p F[\varphi], \end{aligned} \tag{III.56}$$

де $(-ix)^p = (-i)^{|p|} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$, і підставимо в (III.55):

$$\begin{aligned} &(\partial^p F[f], \varphi) = (-1)^{|p|}(f, (-ix)^p F[\varphi]) = (-1)^{|p|}((-ix)^p f, F[\varphi]) \\ &(-1)^{|p|}(F[(-ix)^p f], \varphi) = (F[(ix)^p f], \varphi), \end{aligned}$$

остаточно

$$\partial^p F[f] = F[(ix)^p f]. \tag{III.57}$$

Приймемо в (III.57) $f = 1$ і врахуємо (III.54), тоді

$$F[x^p] = (-i)^{|p|} \partial^p F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|p|} \partial^p \delta(\xi). \tag{III.58}$$

Використаємо цю формулу для знаходження перетворення Фур'є від e^{ax}, $x \in R^1$. Для цього розкладемо e^{ax} у степеневий ряд:

$e^{ax} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!}$. Цей ряд збіжний, тому запишемо

$$\begin{aligned} F[e^{ax}] &= \sum_{k=0}^{\infty} F\left[\frac{a^k x^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} F[x^k] = \\ &= (2\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} (-i)^k \partial^k \delta(\xi) = (2\pi)\delta(\xi - ia), \end{aligned}$$

тобто

$$F[e^{ax}] = (2\pi)\delta(\xi - ia). \qquad \text{(III.59)}$$

З формули (III.59) легко знайти перетворення Фур'є функцій:

$$\begin{aligned} F[\sin ax] &= F\left[\frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})\right] = -i\pi[\delta(\xi + a) - \delta(\xi - a)], \\ F[\cos ax] &= F\left[\frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})\right] = \pi[\delta(\xi + a) + \delta(\xi - a)], \\ F[\operatorname{sh} ax] &= F\left[\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})\right] = \pi[\delta(\xi - ia) - \delta(\xi + ia)], \\ F[\operatorname{ch} ax] &= F\left[\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})\right] = \pi[\delta(\xi - ia) + \delta(\xi + ia)]. \end{aligned}$$

2. Тепер знайдемо перетворення Фур'є похідної. Використовуючи (III.50) і (III.16)

$$(F[\partial^p f], \varphi) = (\partial^p f, F[\varphi]) = (-1)^{|p|}(f, \partial^p F[\varphi]),$$

а також

$$\begin{aligned} \partial^p F[\varphi] &= \partial^p \int e^{i(\xi,x)} \varphi(\xi)\, d\xi = \int (i\xi)^p \varphi(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi = \\ &= F[(i\xi)^p \varphi], \end{aligned} \qquad \text{(III.60)}$$

одержимо

$$\begin{aligned} &(F[\partial^p f], \varphi) = (-1)^{|p|}(f, F[(i\xi)^p \varphi]) = (-1)^{|p|}(F[f], (i\xi)^p \varphi) = \\ &= ((-i\xi)^p F[f], \varphi), \end{aligned}$$

або

$$F[\partial^p f] = (-i\xi)^p F[f]. \tag{III.61}$$

Якщо $f = \delta$, то формула (III.61) набуде вигляду

$$F[\partial^p \delta] = (-i\xi)^p F[\delta] = (-i\xi)^p. \tag{III.62}$$

3. Перетворення Фур'є зсуву.

Нехай $f = f(x - x_0)$, тоді

$$(F[f(x-x_0)], \varphi) = (f(x-x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x+x_0)) =$$
$$= (f, F[e^{i(\xi,x_0)}\varphi]) = (F[f], e^{i(\xi,x_0)}\varphi]) = (e^{i(\xi,x_0)}F[f], \varphi),$$

оскільки за означенням (III.51)

$$F[\varphi](x+x_0) = \int e^{i(\xi,(x+x_0))}\varphi(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int e^{i(\xi,x)}e^{i(\xi,x_0)}\varphi(\xi)\, d\xi = F[e^{i(\xi,x_0)}\varphi].$$

Отже,

$$F[f(x-x_0)] = e^{i(\xi,x_0)}F[f]. \tag{III.63}$$

Якщо $f = \delta(x - x_0)$, то

$$F[\delta(x-x_0)] = e^{i(\xi,x_0)}F[\delta] = e^{i(\xi,x_0)}. \tag{III.64}$$

З цієї формули, якщо $n = 1$, легко одержати

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{i\xi x_0} + e^{-i\xi x_0}\right) = \cos\xi x_0,$$
$$F\left[\frac{1}{2i}\left(\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)\right)\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{i\xi x_0} - e^{-i\xi x_0}\right) = \sin\xi x_0.$$

Далі за формулою (III.64) для $n = 1$ перепишемо рівність

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx},$$

встановлену в § 2 (формула (III.25)), так:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)].$$

Застосуємо цю рівність до $\varphi \in \mathcal{L}$

$$2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \varphi \right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)], \varphi \right)$$

і перетворимо окремо кожну частину:

$$2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \varphi \right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-2\pi k), \varphi) =$$
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \delta(x - 2\pi k)\varphi(x)\, dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k);$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)], \varphi \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-k), F[\varphi]) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \delta(x-k) F[\varphi](x)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k).$$

Остаточно одержимо

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k). \tag{III.65}$$

Рівність (III.65) називають ***формулою підсумовування Пуассона***[2].

Як приклад, застосуємо цю формулу до функції

$$\varphi(x) = e^{-a^2 x^2}, \quad a = \sqrt{t}/2\pi, \quad t > 0.$$

[2]Симеон-Дені Пуассон (Siméon-Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик і фізик.

Знайдемо фур'є-перетворення

$$\begin{aligned} F[\varphi](\xi) &= \int e^{i\xi x} e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{a} \int e^{-\left(x^2 - \frac{i\xi}{a}x\right)} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int e^{-\left(x - \frac{i\xi}{2a}\right)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} dx. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінної $\zeta = x - \frac{i\xi}{2a} = \sigma + i\tau$, тоді одержимо інтеґрал за прямою $\operatorname{Im}\zeta = \frac{\xi}{2a}$ від функції комплексної змінної

$$F[\varphi](\xi) = \frac{1}{a} e^{-\xi^2/4a^2} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta = \frac{\xi}{2a}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Доведемо, що цей інтеґрал дорівнює інтеґралу за дійсною віссю $-\infty \le \sigma \le \infty$. Для цього оберемо контур C_R, зображений на рис. III.5.

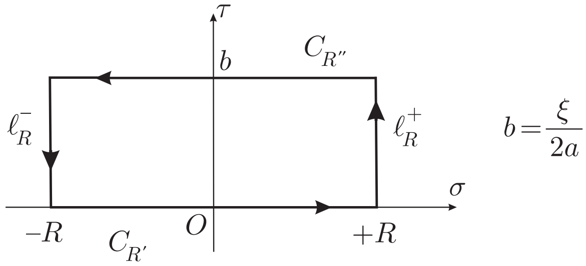


Рис. III.5.

Інтеґрал за контуром C_R за теоремою Коші

$$\int\limits_{C_R} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0.$$

Тепер обчислимо інтеґрал за відрізками $\ell_R^{\pm} = [0 \le \tau \le b,\, b = \frac{\xi}{2a},\ \sigma = \pm R]$. На них

$$|e^{-\xi^2}| = |e^{-\sigma^2 + \tau^2 - 2i\sigma\tau}| = e^{-R^2 + b^2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

тому $\lim\limits_{R\to\infty}\Big(\int\limits_{l_R^+}+\int\limits_{l_R^-}\Big)e^{-\zeta^2}d\zeta=0$. Це означає, що

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}e^{-\zeta^2}d\zeta=\lim_{R\to\infty}\Big(\int\limits_{C_R'}+\int\limits_{C_R''}+\int\limits_{l_R^+}+\int\limits_{l_R^-}\Big)e^{-\zeta^2}d\zeta=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\Big(\int\limits_{C_R'}+\int\limits_{C_R''}\Big)e^{-\zeta^2}d\zeta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma-\int\limits_{\tau=\xi/2a}e^{-\zeta^2}d\zeta=0,$$

тобто

$$\int\limits_{\tau=\xi/2a}e^{-\zeta^2}d\zeta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}.$$

Отже,

$$F[\varphi](\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\xi^2/4a^2}=\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}e^{-\xi^2\pi^2/t},\quad t>0$$

і формула (III.65) набуде вигляду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-tk^2}=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-k^2\pi^2/t}. \qquad \text{(III.66)}$$

За формулою (III.64) легко одержати таку рівність:

$$F\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)\Big]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ik\xi}. \qquad \text{(III.67)}$$

Тепер нехай $f=\theta(x-x_0)$, $x,x_0\in R^1$. З (III.63) маємо

$$F[\theta(x-x_0)]=e^{i\xi x_0}F[\theta].$$

Щоб визначити $F[\theta]$, уведемо функцію $\theta(x)\,e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon>0$, яка прямує до $\theta(x)$, коли $\varepsilon\to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\theta(x)\,e^{-\varepsilon x}=\theta(x).$$

Тоді

$$F[\theta] = \lim_{\varepsilon\to 0} F[\theta(x)\, e^{-\varepsilon x}] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-(\varepsilon - i\xi)x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{i}{\xi + i\varepsilon}.$$

З формули Сохоцького (III.31) випливає, що

$$F[\theta(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{i}{\xi + i\varepsilon} = iP\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta(\xi) \tag{III.68}$$

і

$$F[\theta(x - x_0)] = e^{i\xi x_0}\left(iP\frac{1}{\xi} + \pi\delta(\xi)\right). \tag{III.69}$$

Таким самим способом можна вивести рівність

$$F[\theta(-x)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-i}{\xi - i\varepsilon} = -iP\frac{1}{\xi} + \pi\delta(\xi). \tag{III.70}$$

4. Наведемо також формули ***перетворення Фур'є згортки*** і ***прямого добутку***

$$F[f * g] = F[g]F[f], \tag{III.71}$$

де $f \in \mathcal{L}'$, g — фінітна узагальнена функція;

$$F[f(x) \circ g(y)] = F[f](\xi) \circ F[g](\eta),\ f \in \mathcal{L}'(R^n),\ g \in \mathcal{L}'(R^m). \tag{III.72}$$

§ 6. Інтеґральне перетворення Лапласа

Спочатку нагадаємо (див. 2.1), що інтеґрал

$$\mathcal{F}(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + i\omega \tag{III.73}$$

називають перетворенням Лапласа локально інтеґровних функцій f у R^1, $f(t) = 0$, $t < 0$ і

$$|f(t)| \leq Ae^{at}, \quad t \to \infty. \tag{III.74}$$

Функцію $f(t)$ називають ориґіналом, $\mathcal{F}(p)$ — зображенням, а формулу (III.73) записують скорочено так:

$$f(t) \to \mathcal{F}(p),$$

і відповідність між $f(t)$ і $\mathcal{F}(p)$ є однозначною. Якщо підставити оцінку (III.74) у підінтеґральну функцію, то отримаємо

$$|f(t)e^{-pt}| \le Ae^{-(\sigma-a)t}, \quad t \to \infty,$$

тобто підінтеґральна функція абсолютно інтеґровна у півплощині $\sigma > a$, тому інтеґрал (III.73) визначає аналітичну функцію $\mathcal{F}(p)$ для $\sigma > a$, що прямує до нуля при $\sigma \to \infty$ рівномірно за ω.

Тепер формулу (III.73) перепишемо як перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \quad \sigma > a \tag{III.75}$$

і приймемо її за означення ***перетворення Лапласа узагальнених функцій*** з $D'_+(a)$. Множину $D'_+(a)$ утворюють узагальнені функції $f(t)$, що дорівнюють нулю для $t < 0$ і $f(t)\,e^{-\sigma t} \in \mathcal{L}'_+$ при всіх $\sigma > a$, $\mathcal{L}'_+$ — сукупність узагальнених функцій повільного зростання, які дорівнюють нулю для $t < 0$.

З означення (III.75) випливає, що властивості перетворення Лапласа, наведені в § 2 розділу II для звичайних функцій, справджуються для узагальнених функцій.

Наприклад, отримаємо формулу для перетворення Лапласа похідної $f'(t)$. За означенням (III.75) і (III.61) маємо

$$\begin{aligned}&f'(t) \to F[f'(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = F[(f(t)e^{-\sigma t})' + \sigma f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ &= F[(f(t)e^{-\sigma t})'](-\omega) + \sigma F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ &= (\sigma + i\omega)F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = p\mathcal{F}(p),\end{aligned}$$

тобто

$$f'(t) \to p\mathcal{F}(p),$$

або для похідної m-порядку

$$f^{(m)}(t) \to p^m\mathcal{F}(p), \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{III.76}$$

Зокрема,

$$\delta^{(m)}(t) \to p^m \mathcal{F}(p) = p^m F[\delta(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = p^m \int\limits_0^\infty \delta(t) e^{-\sigma t - i\omega t} dt = p^m,$$

отже[3],

$$\delta^{(m)}(t) \to p^m, \quad \delta(t) \to 1. \tag{III.77}$$

Інший приклад — формула перетворення Лапласа зсуву. Нехай $f \in D'_+(a)$, $\tau \geq 0$, тоді

$$f(t-\tau) \to e^{-\tau p} \mathcal{F}(p), \quad \sigma > a. \tag{III.78}$$

Справді,

$$f(t-\tau) \to F[f(t-\tau)e^{-\sigma t}](-\omega) = \int\limits_0^\infty f(t-\tau) e^{-(\sigma + i\omega)t} dt,$$

зробимо заміну змінної $x = t - \tau$ і матимемо

$$f(t-\tau) \to F[f(t-\tau)e^{-\sigma t}](-\omega) = e^{-p\tau} \int\limits_0^\infty f(x) e^{-px} dx = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p).$$

---

[3] Якщо розраховувати перетворення Лапласа для δ-функції безпосередньо за означенням (III.73), тобто $\int\limits_0^\infty \delta(t) e^{-pt} dt$, то матимемо ситуацію, коли синґулярність у δ-функції потрапляє на край проміжку інтеґрування $t = 0$. Через це інколи перетворення Лапласа записують у вигляді

$$\mathcal{F}(p) = \int\limits_{-0}^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

де нижня межа "-0" означає, що інтеґрал $\int\limits_{-0}^\infty \ldots = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int\limits_{-\varepsilon}^\infty \ldots$.

Якщо $f(t-\tau) = \delta(t-\tau)$, то одержимо

$$\begin{aligned} &\delta(t-\tau) \to e^{-\tau p}\mathcal{F}(p) = e^{-\tau p} \cdot 1 = e^{-\tau p}, \\ &\delta(t-\tau) \to e^{-\tau p}. \end{aligned} \qquad \text{(III.79)}$$

Насамкінець, за формулами (III.77), (III.79) знайдемо, що

$$\delta^{(m)}(t-\tau) \to p^m e^{-\tau p}. \qquad \text{(III.80)}$$

§ 7. Фундаментальні розв'язки

Застосуємо теорію узагальнених функцій для знаходження фундаментальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, нехай задане лінійне диференціальне рівняння m-го порядку

$$\sum_{|k|=0}^{m} a_k(x)\partial^k u = f(x), \quad f \in D', \quad a_k \in C^\infty(R^n). \qquad \text{(III.81)}$$

Уведемо диференціальний оператор

$$L(x,\partial) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k(x)\,\partial^k \qquad \text{(III.82)}$$

і перепишемо рівняння (III.81) так:

$$L(x,\partial)u = f(x). \qquad \text{(III.83)}$$

Узагальненим розв'язком рівняння (III.81) в області G називають узагальнену функцію $u \in D'$, що задовольняє це рівняння в області G в узагальненому сенсі, тобто для будь-якої функції $\varphi \in D(G)$

$$(L(x,\partial)u, \varphi) = (f, \varphi). \qquad \text{(III.84)}$$

Використоваємо формули (III.13), (III.16) у (III.84), одержимо

$$(L(x,\partial)u,\varphi) = \left(\sum_{|k|=0}^{m} a_k \partial^k u, \varphi\right) =$$
$$= \sum_{|k|=0}^{m} (a_k \partial^k u, \varphi) = \sum_{|k|=0}^{m} (\partial^k u, a_k \varphi) = \sum_{|k|=0}^{m} (-1)^{|k|}(u, \partial^k(a_k\varphi)) =$$
$$= (u, \sum_{|k|=0}^{m} (-1)^{|k|}\partial^k(a_k\varphi)) = (u, L^*(x,\partial)\varphi),$$

де

$$L^*(x,\partial) = \sum_{|k|=0}^{m} (-1)^{|k|}\partial^k(a_k\varphi), \tag{III.85}$$

тоді рівність (III.84) набуде вигляду

$$(u, L^*(x,\partial)\varphi) = (f,\varphi), \quad \varphi \in D(G). \tag{III.86}$$

Нехай тепер в операторі L $a_k(x) = a_k$ — сталі коефіцієнти

$$L(\partial) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k \partial^k, \quad L^*(\partial) = L(-\partial). \tag{III.87}$$

Фундаментальним розв'язком оператора $L(\partial)$ називають узагальнену функцію $\mathcal{E} \in D'$, що задовольняє в R^n рівняння

$$L(\partial)\mathcal{E} = \delta(x). \tag{III.88}$$

Фундаментальний розв'язок не єдиний, сума фундаментального розв'язку та довільного розв'язку однорідного рівняння $L(\partial)\mathcal{E}_0 = 0$ теж є фундаментальним розв'язком. Справді,

$$L(\partial)(\mathcal{E} + \mathcal{E}_0) = L(\partial)\mathcal{E} + L(\partial)\mathcal{E}_0 = \delta(x).$$

Щоб розв'язати рівняння (III.88), застосуємо інтеґральне перетворення Фур'є і врахуємо формулу (III.61)

$$F[L(\partial)\mathcal{E}] = F[\delta] = 1, \tag{III.89}$$

$$F[L(\partial)\mathcal{E}] = F\left[\sum_{|k|=0}^{m} a_k \partial^k \mathcal{E}\right] = \sum_{|k|=0}^{m} a_k F[\partial^k \mathcal{E}] =$$

$$= \sum_{|k|=0}^{m} a_k (-i\xi)^k F[\mathcal{E}] = L(-i\xi) F[\mathcal{E}], \tag{III.90}$$

де $L(-i\xi) = \sum\limits_{|k|=0}^{m} a_k(-i\xi)^k$ — поліном m-го степеня, $\mathcal{E} \in \mathcal{L}'$, $\mathcal{L}'$ — множина узагальнених функцій повільного зростання.

З перетвореного алґебраїчного рівняння випливає, що

$$F[\mathcal{E}] = \frac{1}{L(-i\xi)}, \quad L(-i\xi) \not\equiv 0. \tag{III.91}$$

Фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}$ одержимо, якщо подіємо оператором F^{-1} на (III.91) і використаємо (III.52):

$$\mathcal{E} = F^{-1}\left[\frac{1}{L(-i\xi)}\right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F\left[\frac{1}{L(i\xi)}\right], \quad L(i\xi) \not\equiv 0. \tag{III.92}$$

Маючи фундаментальний розв'язок оператора $L(\partial)$, можна побудувати розв'язок рівняння

$$L(\partial)u = f, \quad f \in D' \tag{III.93}$$

за формулою згортки

$$u = \mathcal{E} * f. \tag{III.94}$$

Справді, використовуючи формулу диференціювання згортки (III.48), рівність (III.88) та (III.42), доведемо правильність формули (III.94):

$$L(\partial)(\varepsilon * f) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k \partial^k (\mathcal{E} * f) = \left(\sum_{|k|=0}^{m} a_k \partial^k \mathcal{E}\right) * f =$$

$$= L(\partial)\mathcal{E} * f = \delta * f = f.$$

Зазначимо, що розв'язок рівняння (III.93) єдиний у класі тих узагальнених функцій з D', для яких існує згортка з $\mathcal{E}(x)$.

Наведемо фізичну інтерпретацію формули (III.94). Для цього джерело $f(x)$ запишемо як "суму" точкових джерел $f(\xi)\delta(x-\xi)$

$$f(x) = \delta * f = \int f(\xi)\delta(x-\xi)\,d\xi.$$

З (III.88) випливає, що кожне точкове джерело $f(\xi)\delta(x-\xi)$ визначає вплив $f(\xi)\mathcal{E}(x-\xi)$. Тому розв'язок

$$u(x) = \mathcal{E} * f = \int f(\xi)\mathcal{E}(x-\xi)\,d\xi$$

— це накладання цих впливів.

Як приклад, відшукаємо фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності, $x \in R^n$, $t > 0$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x,t), \tag{III.95}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Застосуємо перетворення Фур'є за змінною x — F_x до рівняння та формули (III.39), (III.61):

$$\begin{aligned}
&F_x\left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x[\mathcal{E}],\\
&F_x\left[\Delta \mathcal{E}\right] = -|\xi|^2 F_x[\mathcal{E}],\\
&F_x\left[\delta(x,t)\right] = F_x[\delta(x)\delta(t)] = F[\delta](\xi)\delta(t) = 1(\xi)\circ\delta(t),
\end{aligned}$$

одержимо для узагальненої функції $\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) = F_x[\mathcal{E}](\xi,t)$ звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)}{\partial t} + a^2|\xi|^2\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t) = 1(\xi)\circ\delta(t). \tag{III.96}$$

Це рівняння є частковим випадком диференціального рівняння m-го порядку

$$L\tilde{\mathcal{E}} = \delta(t), \quad L \equiv \frac{d^m}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t), \tag{III.97}$$

розв'язок якого виражають через розв'язок однорідного рівняння

$$LZ = 0 \tag{III.98}$$

з початковими умовами

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1, \tag{III.99}$$

так:

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \theta(t)Z(t). \tag{III.100}$$

Справді, підставимо (III.100) у рівняння (III.97) і врахуємо формулу (III.23) та початкові умови (III.99):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{E}}'(t) = Z'(t)\theta(t) + Z(t)\theta'(t) = Z'(t)\theta(t) + Z(t)\delta(t) = \\
&= Z'(t)\theta(t) + Z(0) = Z'(t)\theta(t), \\
&\ldots \\
&\tilde{\mathcal{E}}^{(m-1)}(t) = \theta(t)Z^{(m-1)}(t), \\
&\tilde{\mathcal{E}}^{(m)}(t) = \delta(t) + \theta(t)Z^{(m)}(t),
\end{aligned}$$

матимемо

$$L\tilde{\mathcal{E}} = \theta(t)LZ(t) + \delta(t) = \delta(t).$$

Отже, за формулою (III.100) запишемо розв'язок рівняння (III.96)

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = \theta(t)e^{-a^2|\xi|^2 t},$$

де $Z(t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}$ — розв'язок рівняння (III.98). Нарешті застосуємо обернений оператор Фур'є F_ξ^{-1} і, отже, одержимо фундаментальний розв'язок

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(x,t) = F_\xi^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}(\xi,t)] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int e^{-a^2|\xi|^2 t - i(\xi,x)}\,d\xi = \\
&= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int e^{-a^2 t(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2) - i(\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n)} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \\
&= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/4a^2 t}.
\end{aligned}$$

Розділ IV.

Рівняння математичної фізики

Більшість фізичних законів природи формулюють мовою рівнянь з частинними похідними: наприклад, рівняння Ньютона чи Лаґранжа[1] класичної механіки, рівняння Максвелла[2] для електромагнітного поля, рівняння Шрьодінґера[3] квантової механіки. У цих рівняннях фізичні явища описують просторовими та часовими похідними від відповідних величин. Такі похідні мають зміст швидкостей, прискорень, струмів, потоків тощо. Отже, рівняння математичної фізики — це рівняння, що містять невідому функцію кількох змінних і її частинні похідні.

[1] Жозеф-Луї Лаґранж (Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813) — французький математик і астроном.

[2] Джеймс Клерк Максвелл (James Clerk Maxwell, 1831–1879) — шотландський математик і фізик-теоретик.

[3] Ервін Шрьодінґер (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887–1961) — австрійський фізик-теоретик.

§ 1. Приклади фізичних задач, що приводять до рівнянь математичної фізики

Досить широкий клас фізичних процесів описують лінійними диференціальними рівняннями другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x), \tag{IV.1}$$

або квазілінійними (лінійними відносно всіх похідних другого порядку) диференціальними рівняннями другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0, \tag{IV.2}$$

де невідома функція $u(x)$ залежить від n змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a_{ij}(x)$ — неперервні коефіцієнти. Якщо a_{ij} — константи, то рівняння називають лінійним (рівняння (IV.1)) або квазілінійним (рівняння (IV.2)) зі сталими коефіцієнтами.

Схарактерисзуємо деякі фізичні процеси, які описують такими рівняннями.

1.1. Коливання струни. Одновимірне хвильове рівняння

Розглянемо малі поперечні коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями. Вважаємо, що струна однорідна, і коливання відбуваються в одній площині.

Рівняння руху можна вивести з другого закону Ньютона, застосованого до малої ділянки струни довжиною Δx (рис. IV.1).

Якщо знехтувати силами ваги, то єдиними силами, які діють на відрізок Δx, є сили натягу T, прикладені до його кінців. Проекція сумарної сили на вертикальну вісь дорівнює $-T\sin\theta_1 +$

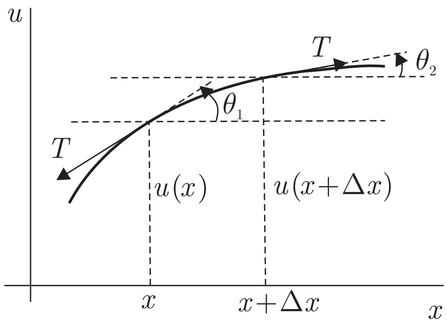


Рис. IV.1.

$+\,T\sin\theta_2$. У разі малих коливань кути θ_1 і θ_2 малі, тому

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \simeq \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial u}{\partial x},$$

і, отже, синус можна замінити на танґенс. Тоді

$$-T\sin\theta_1 + T\sin\theta_2 \approx T(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1) =$$
$$= T\left(\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x}\right),$$

де $u(x,t)$ — зміщення струни в точці x у момент часу t; θ_1 і θ_2 — кути нахилу струни в точках x і $x+\Delta x$.

Якщо лінійна густина струни дорівнює ρ, то рівняння руху запишемо так:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T\left(\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x}\right). \qquad \text{(IV.3)}$$

Розділивши це рівняння на Δx і перейшовши до границі $\Delta x \to$ $\to 0$, одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{(IV.4)}$$

де $a = \sqrt{T/\rho}$.

Рівняння (IV.4), як буде з'ясовано в пункті 3.5, описує поширення хвилі в натягнутій струні. Це приклад найпростішого ***хвильового рівняння***.

1.2. Рівняння для вектора напруженості електричного поля (тривимірне хвильове рівняння)

Знайдемо рівняння для напруженості електричного поля $\mathbf{E}$, на підставі рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

($\mathbf{B}$ — індукція магнітного поля).

З першого й останнього рівняння знаходимо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{IV.5}$$

Проте з відомої формули векторного аналізу маємо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}, \tag{IV.6}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Із (IV.5) і (IV.6), враховуючи, що $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, одержимо

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0, \tag{IV.7}$$

або $\Box\,\mathbf{E} = 0$, де $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор д'Аламбера.

Рівняння (IV.7) описує поширення хвиль у тривимірному просторі. Аналогічний вигляд мають також інші тривимірні хвильові рівняння, зокрема, рівняння для пружних хвиль у тривимірному середовищі.

Зазначимо, що і рівняння (IV.4), і рівняння (IV.7) є частковими випадками рівняння коливань

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F, \tag{IV.8}$$

де

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\,\frac{\partial\, u}{\partial x_i}\right),$$

$\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ визначені властивостями середовища, у якому відбувається коливальний процес, $F(x,t)$ — інтенсивність зовнішнього збурення.

Справді, якщо $\rho = \text{const}$, $p \equiv T = \text{const}$, $q = 0$, $F = 0$, для $n = 1$ отримаємо одновимірне хвильове рівняння, то для $n = 3$ — тривимірне хвильове рівняння. Двовимірне хвильове рівняння ($n = 2$) описує малі поперечні коливання мембрани.

1.3. Теплопровідність тонкого стрижня. Рівняння теплопровідності та дифузії

Будемо розглядати випадок, коли стрижень однорідний (рис. IV.2), теплообмін через бокові стінки не відбувається і всередині стрижня немає джерел тепла.

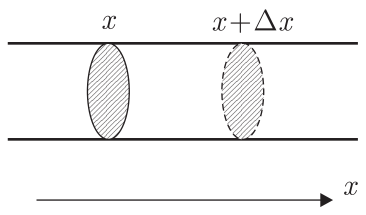


Рис. IV.2.

Нехай $u(x,t)$ — температура в заданій точці. Тоді за законом збереження енергії зміна кількості тепла на відрізку Δx за одиницю часу

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)ds$$

повинна дорівнювати кількості тепла, що проходить через перерізи x і $x+\Delta x$:

$$A\left[-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} - k\left(-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x}\right].$$

Тут c — питома теплоємність; ρ — густина, k — коефіцієнт теплопровідності, A — площа перерізу стрижня.

Прирівняємо останні два вирази, спрямуємо Δx до нуля і врахуємо, що в цьому разі інтеґрал у першому виразі прямує до $c\rho A u(x,t)\Delta x$, тоді одержимо

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{IV.9}$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності.

Рівняння (IV.9) називають ***рівнянням теплопровідності.***

Подібним способом можна вивести і рівняння для поширення тепла в об'ємі. Воно буде відрізнятись від (IV.9) лише тим, що замість $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ стоятиме оператор Лапласа Δ, і u буде функцією від $\mathbf{r}$ і t. Отже, тривимірне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\mathbf{r},t). \tag{IV.10}$$

Такий самий вигляд має і рівняння дифузії. У цьому випадку під $u(\mathbf{r},t)$ треба розуміти концентрацію речовини, що дифундує, а під a^2 — коефіцієнт дифузії.

Подібно до випадку коливань рівняння (IV.9), (IV.10) можна узагальнити:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + F, \tag{IV.11}$$

де $p \equiv k > 0$, $\rho > 0$, $q \geq 0$ визначений властивостями середовища, у якому поширюється тепло; $F(x,t)$ — інтенсивність джерел тепла в точці x у момент часу t.

1.4. Потенціальна течія рідини. Потенціал електростатичного поля. Рівняння Лапласа і Пуассона

Потенціальною називають безвихрову течію рідини, коли існує скалярна функція φ — ***потенціал швидкостей*** — така, що швидкість рідини

$$\boldsymbol{\theta} = -\mathrm{grad}\,\varphi. \tag{IV.12}$$

Якщо рідина нестислива і джерел нема, то $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\theta} = 0$. Підставимо в цю умову (IV.12) і одержимо $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$, або

$$\Delta\varphi = 0. \tag{IV.13}$$

Рівняння (IV.13) називають ***рівнянням Лапласа.***

Розглянемо далі електричне поле, створене нерухомими зарядами. У цьому випадку напруженість поля

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi, \tag{IV.14}$$

де φ — електростатичний потенціал.

Використаємо рівняння

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{IV.15}$$

де ρ — густина заряду; $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, ε — діелектрична проникність. Якщо ε не залежить від координат (однорідний діелектрик), то, підставивши (IV.14) у (IV.15), одержимо

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

або

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{IV.16}$$

Це рівняння називають ***рівнянням Пуассона***.

Рівняння Лапласа одержують, як частковий випадок рівняння Пуассона при $\rho = 0$.

Крім того, обидва рівняння є частковими випадками стаціонарного ($u(x,t) = u(x)$) рівняння

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + qu = F(x). \tag{IV.17}$$

Якщо прийняти $p = 1$, $q = 0$, отримаємо рівняння Пуассона, якщо ж і $F(x) = 0$ — рівняння Лапласа.

Рівняння вигляду (IV.7) (***хвильове*** рівняння), (IV.9) (рівняння ***теплопровідності***, або ***дифузії***), (IV.13) (рівняння ***Лапласа***) і (IV.16) (рівняння ***Пуассона***) часто називають ***основними рівняннями математичної фізики***.

§ 2. Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку

2.1. Рівняння з n незалежними змінними

Розглянемо рівняння (IV.2), частинними випадками якого є хвильове рівняння, рівняння теплопровідності, рівняння Лапласа, Пуассона. Спростимо це рівняння, роблячи заміну змінних $\xi = \xi(x)$:

$$\begin{aligned} &\xi_l = \xi_l(x_1, \ldots, x_n), \quad l = 1, \ldots, n, \\ &D = \frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i}\right) \neq 0. \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Оскільки $D \neq 0$, то змінні x можна виразити через змінні ξ, $x = x(\xi)$. Позначимо $u(x(\xi)) = \tilde{u}(\xi)$ і $\tilde{u}(\xi(x)) = u(x)$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \tag{IV.19}$$

Підставимо (IV.19) у рівняння (IV.2), отримаємо

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \tag{IV.20}$$

Уведемо позначення

$$\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \tag{IV.21}$$

і перепишемо рівняння (IV.20) так:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} + \bar{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \tag{IV.22}$$

Зафіксуємо точку x^0 і позначимо $\xi^0 = \xi(x^0)$, $\alpha_{li} = \partial \xi_l(x^0)/\partial x_i$, $a_{ij}^0 = a_{ij}(x^0)$, $\tilde{a}_{lk}^0 = \tilde{a}_{lk}(\xi^0)$. Тоді формула (IV.21) у точці x^0 набуде вигляду

$$\tilde{a}_{lk}^0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{li} \alpha_{kj}. \tag{IV.23}$$

Ця формула збігається з формулою перетворення коефіцієнтів квадратичної форми

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \, y_i y_j \tag{IV.24}$$

в разі лінійного перетворення

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} \eta_l, \quad \det(\alpha_{li}) \neq 0, \tag{IV.25}$$

що переводить (IV.24) у форму

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}^0 \eta_l \eta_k.$$

Отже, щоб спростити рівняння у точці x^0, зробивши заміну змінних (IV.18), треба спочатку звести квадратичну форму (IV.24) у цій точці до канонічної форми за допомогою перетворення (IV.25), а потім до нормального вигляду[4]

$$\sum_{l=1}^{s} \eta_l^2 - \sum_{l=s+1}^{m} \eta_l^2, \quad m \le n, \tag{IV.26}$$

тобто $|\tilde{a}_{ll}^0| = 1$, $\tilde{a}_{lk}^0 = 0$, $l \ne k$.

Тепер можна класифікувати рівняння (IV.2) залежно від значень коефіцієнтів a_{ij} у точці x^0.

Якщо в квадратичній формі (IV.26) $m = n$ і всі доданки одного знака ($s = 0$ або $s = m$), то рівняння (IV.2) називають ***рівнянням еліптичного типу***.

Якщо $m = n$, але є доданки різних знаків ($1 \le s \le n-1$), то рівняння (IV.2) називають ***рівнянням гіперболічного типу***.

Якщо ж $m < n$, то (IV.2) — ***рівняння параболічного типу***.

Зазначимо, що наведена класифікація залежить від точки x^0, тому що числа s і m залежать від x^0. Наприклад, ***рівняння Трикомі***[5]

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

при $y > 0$ — еліптичного типу, при $y < 0$ — гіперболічного, при $y = 0$ — параболічного.

Якщо ж у рівнянні (IV.2) коефіцієнти a_{ij} — сталі, то тип рівняння однаковий у всій області, де задане рівняння.

Нехай у рівнянні зі сталими коефіцієнтами перетворенням (IV.25) звели квадратичну форму (IV.24) до нормального вигляду (IV.26). Тоді лінійна заміна змінних

$$\xi_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{li} x_i$$

[4]Відповідні теореми наведено в *Ильин В. А., Позняк Э. Г.*, Линейная алгебра. — Москва : Наука, 1974. — С. 198.

[5]Франческо Джакомо Трикомі (Francesco Giacomo Tricomi, 1897–1978) — італійський математик.

перетворює рівняння (IV.2) до такого канонічного вигляду

$$\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l^2} - \sum_{l=s+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l^2} + \bar{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \qquad \text{(IV.27)}$$

За наведеною класифікацією визначимо типи рівнянь, розглянутих у § 1: хвильове рівняння — гіперболічного типу, рівняння теплопровідності (дифузії) — параболічного типу, рівняння Лапласа, Пуассона — еліптичного типу.

2.2. Характеристичні поверхні (характеристики)

Нехай функція $\varphi(x) \in C^1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$ така, що на поверхні $\varphi(x) = 0$ $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$ і

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = 0. \qquad \text{(IV.28)}$$

Тоді поверхню $\varphi(x) = 0$ називають ***характеристичною поверхнею*** (або ***характеристикою***) рівняння (IV.2), а рівняння (IV.28) — ***характеристичним***. При $n = 2$ характеристичну поверхню називають характеристичною лінією.

Визначивши характеристики диференціального рівняння, його можна спростити. Справді, якщо відомі k $(k \leq n)$ сім'ї характеристик

$$\varphi_1(x) = C_1, \ldots, \varphi_k(x) = C_k$$

таких, що ранґ матриці $\left(\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i}\right) = k$, то прийнявши у перетворенні (IV.18)

$$\xi_1 = \varphi_1(x), \ldots, \xi_k = \varphi_k(x),$$

одержимо, що коефіцієнти $\tilde{a}_{11}, \ldots, \tilde{a}_{kk}$ дорівнюють нулю.

Наприклад, розглянемо хвильове рівняння. Характеристичне рівняння його таке:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

а характеристична поверхня — це характеристичний конус з вершиною у точці (x_0, t_0)

$$a^2(t-t_0)^2 - |x-x_0|^2 = 0.$$

2.3. Канонічний вигляд рівнянь з двома незалежними змінними

У пункті 2.1 наведено спосіб спрощення рівняння (IV.2) зведенням його до канонічного вигляду. Розглянемо окремо випадок двох змінних ($x_1 = x$, $x_2 = y$), тоді рівняння (IV.2) запишемо так:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

(індекси x, y позначають похідні за відповідними координатами і $a = a_{11}$, $b = a_{12}$, $c = a_{22}$).

Уведемо нові змінні $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ і зведемо рівняння (IV.29) до вигляду

$$\tilde{a}\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{c}\tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0, \qquad \text{(IV.30)}$$

де (див. формулу (IV.21))

$$\begin{aligned}
&\tilde{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,\\
&\tilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,\\
&\tilde{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,\\
&\tilde{\Phi} = \Phi + a(\tilde{u}_\xi\xi_{xx} + \tilde{u}_\eta\eta_{xx}) + 2b(\tilde{u}_\xi\xi_{xy} + \tilde{u}_\eta\eta_{xy}) +\\
&+c(\tilde{u}_\xi\xi_{yy} + \tilde{u}_\eta\eta_{yy}).
\end{aligned} \qquad \text{(IV.31)}$$

Оберемо функції $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ такими, щоб величини $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$, тобто задовольняли рівняння характеристик (IV.28)

$$a{\varphi_{i_x}}^2 + 2b\varphi_{i_x}\varphi_{i_y} + c{\varphi_{i_y}}^2 = 0, \quad i = 1, 2. \qquad \text{(IV.32)}$$

Знайдемо розв'язки цих рівнянь, використовуючи дві леми.

Лема 1. Якщо $z = \varphi(x, y)$ — частинний розв'язок рівняння

$$az_x^2 + 2bz_x z_y + cz_y^2 = 0, \tag{IV.33}$$

то $\varphi(x, y) = C$ є загальним розв'язком рівняння

$$a(dy)^2 - 2bdx\,dy + c(dx)^2 = 0. \tag{IV.34}$$

Лема 2. Якщо $\varphi(x, y) = C$ — загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (IV.34), то функція $z = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння (IV.33).

Характеристичне рівняння (IV.34) розкладають на два рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{d}}{a}, \tag{IV.35}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \quad d = b^2 - ac. \tag{IV.36}$$

Знак підкореневого виразу d визначає тип рівняння (IV.29). За класифікацією, наведеною у пункті 2.1, можливі три типи рівнянь (IV.29). А самé, це рівняння називають у точці M рівнянням

а) гіперболічного типу, якщо в точці M $d > 0$,

б) параболічного типу, якщо в точці M $d = 0$,

в) еліптичного типу, якщо в точці M $d < 0$.

Розглянемо кожний тип окремо:

Для рівнянь гіперболічного типу $d > 0$, тому праві частини рівнянь (IV.35) і (IV.36) дійсні та різні. Загальні розв'язки $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ визначають дві сім'ї дійсних характеристик. Приймемо $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ і зведемо рівняння (IV.30) після ділення на коефіцієнт при $\tilde{u}_{\xi\eta}$ до вигляду ($\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$)

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = -\frac{\tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)}{2\tilde{b}}. \tag{IV.37}$$

Це ***канонічна форма рівнянь гіперболічного типу***. Якщо ж прийняти $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, де α, β — нові змінні, то одержимо іншу канонічну форму рівняння гіперболічного типу

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, \tilde{u}, \tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\beta). \qquad \text{(IV.38)}$$

Для рівнянь параболічного типу $d = 0$, тому рівняння (IV.35) та (IV.36) однакові. Отже, є одна сім'я характеристик $\varphi(x, y) = C$. Приймемо у цьому випадку $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, де $\eta(x, y)$ — двічі диференційована функція, незалежна від ξ, $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. У цих змінних

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = (\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{c}\xi_y)^2 = 0, \quad (b = \sqrt{a}\sqrt{c}), \\ \tilde{b} &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ &= (\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{c}\xi_y)(\sqrt{a}\eta_x + \sqrt{c}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

Розділимо рівняння (IV.30) на коефіцієнт при $\tilde{u}_{\eta\eta}$, одержимо ***канонічну форму рівняння параболічного типу***

$$\tilde{u}_{\eta\eta} = -\frac{\tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)}{\tilde{c}}. \qquad \text{(IV.39)}$$

Для рівнянь еліптичного типу $d < 0$, тому праві частини рівнянь (IV.35) та (IV.36) комплексні. Тоді дві сім'ї характеристик також комплексно-спряжені між собою:

$$\varphi_{1,2}(x, y) = \operatorname{Re}\varphi(x, y) \pm i \operatorname{Im}\varphi(x, y) = C.$$

Уведемо нові дійсні змінні

$$\xi = \operatorname{Re}\varphi(x, y), \quad \eta = \operatorname{Im}\varphi(x, y)$$

у рівняння (IV.32)

$$\begin{aligned} &a\xi_x^2 - a\eta_x^2 + 2b\xi_x\xi_y - 2b\eta_x\eta_y + c\xi_y^2 - c\eta_y^2 \\ &+i2\left[a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y\right] = 0. \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля окремо дійсну й уявну частини і, використавши (IV.31), одержимо, що $\tilde{a} = \tilde{c}$, $\tilde{b} = 0$. Отже, ***канонічна форма рівняння еліптичного типу*** така

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} = -\frac{\tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)}{\tilde{c}}. \tag{IV.40}$$

Зазначимо, що перехід до нових змінних не змінює типу рівняння. Справді, якщо розглянути $\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c}$, то можна переконатись, що

$$\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = (b^2 - ac)(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2$$

і, за умови $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, не змінює знака.

2.4. Типи крайових задач

За класифікацією, наведеною у пункті 2.1, рівняння коливань — це рівняння гіперболічного типу, рівняння дифузії — параболічного, стаціонарні рівняння — еліптичного. Отже, відмінність типів у розглядуваних рівняннях зумовлена відмінністю фізичних процесів, описуваних цими рівняннями.

Щоб знайти ту чи іншу фізичну величину розв'язуванням відповідного диференціального рівняння, необхідно задати певні початкові й граничні умови, які відображають характер досліджуваного фізичного процесу.

Математично це пов'язано з неєдиністю розв'язку диференціальних рівнянь. Навіть для звичайних диференціальних рівнянь n-порядку загальний розв'язок залежить від n довільних сталих. Для рівнянь з частинними похідними розв'язок залежить від довільних функцій. Тому, щоб знайти розв'язок, який описує реальний фізичний процес, треба задати додаткові умови — початкові й граничні.

Розглянемо це питання на прикладі задач із попереднього параграфа.

У випадку коливань струни — рівняння (IV.4) — ***початкові умови*** задають у вигляді

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{IV.41}$$

тобто задають початкові положення і швидкості всіх точок струни.

Крім початкових умов, потрібно задати ще й ***граничні умови.*** Ці умови бувають декількох видів. Найпростіший випадок буде, якщо кінці струни закріплені. Тоді

$$u(0,t) = 0 \quad \text{і} \quad u(l,t) = 0. \tag{IV.42}$$

Якщо задано закон руху кінців струни, то замість (IV.42) будемо мати

$$u(0,t) = f_1^{(0)}(t); \quad u(l,t) = f_2^{(l)}(t). \tag{IV.43}$$

Умови (IV.42) і (IV.43) прийнято називати ***граничними умовами I типу***.

Другий тип граничних умов виникає тоді, якщо на кінцях струни задані не зміщення, а сили, що діють у напрямі коливань. Виникають такі умови, наприклад, у випадку, коли кінець струни прикріплений до муфти вагою P, яка може рухатись без тертя у вертикальному напрямі (рис. IV.3).

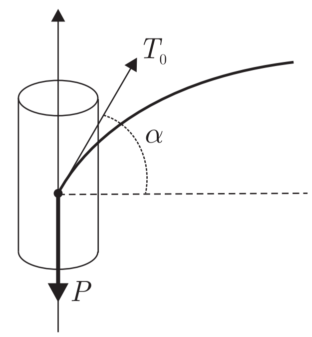


Рис. IV.3.

Розглянемо проекцію на вертикальну вісь усіх сил, що діють на відрізок струни довжиною Δx. Оскільки, за принципом д'Аламбера, сума всіх сил, що діють на систему разом із силами інерції, задовольняють умову рівноваги, то можна записати

$$T_0 \sin\alpha - P - \rho u_{tt}(0,t)\Delta x = 0, \tag{IV.44}$$

де T_0 — натяг струни в точці x=0.

За малих амплітуд коливань $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = u_x(0,t)$. Спрямувавши в (IV.44) $\Delta x \to 0$, одержимо

$$u_x(0,t) = \frac{P}{T_0}. \tag{IV.45}$$

Якщо вага муфти $P = 0$, то $u_x = 0$, тобто в цьому випадку струна біля границі завжди горизонтальна. Отже, якщо на границі задана сила P, то задане значення похідної від u за x на цій границі. У випадку, коли ця сила залежить від часу, замість (IV.45) одержуємо умову

$$u_x(0,t) = f_1(t), \tag{IV.46}$$

де $f_1(t)$ — деяка задана функція від часу. Граничну умову (IV.46) називають ***граничною умовою II типу***.

Нарешті, можуть бути ще складніші граничні умови, коли кінці струни пружно закріплені (рис. IV.4).

Якщо вважати муфту в цьому випадку невагомою, то замість ваги муфти P, яка була в рівнянні (IV.45), треба взяти силу, що діє на муфту з боку пружини. Якщо довжина пружини в недеформованому стані дорівнює a_0, то в разі зміщення муфти на $u(0,t)$ виникає сила з боку пружини: $k\,u(0,t)$, де k — жорсткість пружини.

Тоді замість (IV.45) одержимо граничну умову

$$u_x(0,t) = \frac{k}{T_0} u(0,t).$$

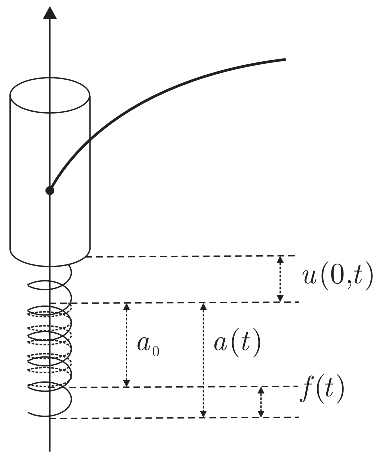


Рис. IV.4.

Якщо далі вважати, що точка закріплення пружини також рухається за деяким заданим законом

$$a(t) = a_0 + f(t),$$

то видовження пружини буде змінюватись за законом $u(0,t) + a(t) - a_0 = u(0,t) + f(t)$, а сила, що діє на муфту, дорівнюватиме

$$k(u(0,t) + f(t)). \tag{IV.47}$$

У цьому випадку замість (IV.45) одержимо умову

$$u_x(0,t) - \gamma u(0,t) = f_3(t), \tag{IV.48}$$

де $\gamma = \frac{k}{T_0}$, $\quad f_3(t) = \frac{k}{T_0} f(t)$.

Умову (IV.48) називають ***граничною умовою III типу***.

Такі самі, як (IV.46) або (IV.48), граничні умови треба записати також у точці $x = l$. Якщо через M позначити граничну точку (0, або l), то з формул (IV.43), (IV.46), (IV.48) одержимо

$$u(M,t) = f_1(M,t) \quad (\text{тип I}), \tag{IV.49}$$

$$u_x(M,t) = f_2(M,t) \quad (\text{тип II}), \tag{IV.50}$$

$$u_x(M,t) - \gamma u(M,t) = f_3(M,t) \quad (\text{тип III}). \tag{IV.51}$$

Нагадаємо ще раз, що у випадку

I типу — задають зміщення на границі;

II типу — задають силу на границі;

III типу — задають пружне закріплення.

Виявляється, що такого самого типу граничні умови можуть бути й для інших рівнянь.

Наприклад, у випадку рівняння теплопровідності тонкого стрижня (IV.9) $u(x,t)$ є температурою в заданій точці. Тоді задання граничної умови I означає задання закону зміни температури на кінцях стрижня, II — задання потоку тепла через кінці (тому що цей потік визначений ґрадієнтом температури: $u_x(M,t)$). Граничні умови III типу в цьому випадку будуть тоді, коли задана температура навколишнього середовища. Справді, якщо $g(M,t)$ — температура зовнішнього середовища в точці M, то потік тепла зі стрижня визначатиметь величина $\frac{\partial u(M,t)}{\partial x} = \gamma[u(M,t) - g(M,t)]$.

Ця рівність має форму граничної умови типу III.

У випадку рівняння Пуассона (IV.16) I тип відповідає заданню на границі потенціалу φ, II тип — заданню напруженості поля $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Якщо розглядати рівняння в тривимірному просторі, тобто вважати $u = u(x,y,z,t)$, то граничні умови треба задавати на поверхні S, що оточує область, у якій шукають розв'язки. Тоді фігуруватиме похідна за зовнішньою нормаллю $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ до поверхні S, і замість (IV.49)–(IV.51) одержимо такі граничні умови:

$$u\big|_S = f_1(M,t) \quad (\text{тип I}), \tag{IV.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = f_2(M,t) \quad (\text{тип II}), \tag{IV.53}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \gamma u\right)\Bigg|_S = f_3(M,t) \quad (\text{тип III}). \tag{IV.54}$$

Тут M — точка на поверхні S.

Усі розглянуті вище типи граничних умов ***лінійні***, оскільки функція u і $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ входять у них лінійно. Якщо права частина в рівнянні (IV.52), (IV.53) або (IV.54) дорівнює нулю, то відповідну граничну умову називають ***однорідною***, в іншому ж випадку — ***неоднорідною***.

Відповідно до різних типів граничних умов задачі знаходження розв'язків за заданих ***початкових*** і ***граничних*** умов зводять до різних так званих ***крайових*** задач.

Якщо ***граничні*** умови належать до I типу, то відповідну крайову задачу називають ***першою крайовою задачею***, так само визначають ***другу*** і ***третю*** крайові задачі. Якщо, наприклад, на одному кінці стрижня задані умови одного типу, а на іншому — іншого, то задачу називають ***змішаною***. Ця класифікація зберігається для всіх типів рівнянь. Іноді в застосуванні до рівнянь еліптичного типу першу крайову задачу називають ***задачею Діріхле***[6], другу — ***Ноймана***[7], а третю — ***змішаною***.

Початкові умови для різних типів рівнянь формулюють порізному. А саме — у випадку рівняння гіперболічного типу, такого як рівняння (IV.4), треба задати в початковий момент саму функцію u та її похідну за t. Це пов'язано з тим, що рівняння є другого порядку за t.

Якщо маємо рівняння параболічного типу, наприклад рівняння теплопровідності (IV.9), оскільки це рівняння першого порядку за t, то достатньо задати лише саму функцію $u(x,t)$ у початковий момент часу

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{IV.55}$$

Якщо ж маємо рівняння еліптичного типу, наприклад рівняння Лапласа (IV.13) або Пуассона (IV.16), до яких час взагалі не входить, то початкових умов нема.

[6]Йоган Діріхле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) — німецький математик.

[7]Карл Ґоттфрід Нойман (Carl Gottfried Neumann, 1832–1925) — німецький математик.

Наведені вище формулювання крайових задач є найбільш загальними. Однак часто достатньо обмежитись певними частинними випадками. Розглянемо деякі з них.

Задача Коші.

Якщо границя є дуже далеко від тієї області, у якій нас цікавить розв'язок, то впливом граничних умов можна знехтувати. Це може бути виправдано, якщо границя є на нескінченності або якщо розглядають малий проміжок часу, протягом якого вплив граничних умов ще не встигне виявитись. Тоді задають лише початкові умови: (IV.41) для рівняння гіперболічного типу або (IV.55) для параболічного, а граничні умови не враховують. Таку задачу називають ***задачею Коші***.

Іноді враховують граничні умови лише на одній границі, тобто розглядають задачу для півпрямої, півплощини або півпростору.

Задача без початкових умов (задача для стаціонарного режиму).

Якщо розглядають моменти часу, досить віддалені від початкового моменту $t{=}0$, то часто можна знехтувати впливом початкових умов і розглядати лише граничні умови. Прикладом може бути коливання маятника в середовищі з тертям під дією періодичної сили. Через деякий час встановиться певна амплітуда коливань і частота, які не залежать від величини початкового поштовху, що збудив коливання. Такі задачі називають задачами ***без початкових умов***.

§ 3. Методи розв'язування рівнянь математичної фізики

Існує багато методів розв'язування крайових задач математичної фізики. Деякі з них універсальні, інші застосовні до рівнянь того чи іншого типу. Ми розглянемо на найважливіші з цих методів.

3.1. Метод характеристик

Суть цього методу полягає у використанні характеристик уведених у пункті 2.2 для спрощення рівняння (IV.2). Розглянемо приклад застосування цього методу.

Приклад. Звести до канонічного вигляду і знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0. \tag{IV.56}$$

Маємо, згідно з (IV.29), $a = 1$, $b = -1$, $c = -3$, $d = b^2 - ac = 4$ — рівняння гіперболічного типу.

Зробимо заміну змінних

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y).$$

Запишемо характеристичні рівняння (IV.35) і (IV.36):

$$\frac{dy}{dx} = -3, ; \quad \frac{dy}{dx} = 1.$$

Розв'язки цих рівнянь

$$y = -3x + C_1 \quad \text{і} \quad y = x + C_2.$$

Отже, інтеґралами диференціальних рівнянь тут є

$$\varphi_1(x, y) = C_1 = 3x + y,$$

$$\varphi_2(x, y) = C_2 = -x + y.$$

Звідси знаходимо нові змінні

$$\xi = 3x + y, \quad \eta = -x + y. \tag{IV.57}$$

Тоді з формул (IV.31), (IV.37) одержуємо $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, $\tilde{b} = -8$, $\tilde{\Phi} = 0$ і канонічну форму рівняння (IV.56)

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{IV.58}$$

Інтеґрування (IV.58) за ξ дає

$$\tilde{u}_\eta = \tilde{f}(\eta), \tag{IV.59}$$

де $\tilde{f}(\eta)$ — довільна функція. Справді, оскільки $\tilde{f}(\eta)$ не залежить від ξ, то диференціювання (IV.59) за ξ одразу дасть (IV.58). З аналогічних міркувань випливає, що після інтеґрування (IV.59) за η одержимо

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\eta)\, d\eta + g(\xi),$$

де $g(\xi)$ — довільна функція від ξ.

Позначимо далі $\int \tilde{f}(\eta)\, d\eta = f(\eta)$, тоді

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta), \tag{IV.60}$$

де $g(\xi)$ і $f(\eta)$ — довільні функції, що мають другі похідні.

Повернемось до старих змінних (IV.57) і запишемо загальний розв'язок рівняння (IV.56)

$$u(x, y) = g(3x + y) + f(-x + y).$$

Отже, щоб одержати цей розв'язок, ми використали основну властивість характеристик, яка полягає в тому, що на характеристиці $\eta = \text{const}$ рівняння (IV.56) звелось до звичайного диференціального рівняння відносно функції $\tilde{u}_\eta(\xi, \eta)$ з незалежною змінною ξ.

3.2. Метод біжучих хвиль. Формула д'Аламбера

Цей метод як частинний випадок методу характеристик застосовують для розв'язування хвильових рівнянь.

1. Одновимірне хвильове рівняння.

а) Однорідне рівняння.

Спочатку розглянемо для прикладу задачу Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0) \tag{IV.61}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{IV.62}$$

уперше розв'язану Ж. д'Аламбером 1747 р.

З характеристичних рівнянь (IV.35), (IV.36)

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

знаходимо дві сім'ї характеристик $x + at = C_1$ і $x - at = C_2$. Отже, у нових змінних $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ рівняння (IV.61) запишемо так:

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{IV.63}$$

Загальний розв'язок цього рівняння, знайдений у попередньому прикладі (формула (IV.60)),

$$\tilde{u}_(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta).$$

Підставимо вирази для ξ і η, одержимо

$$u(x,t) = g(x + at) + f(x - at). \tag{IV.64}$$

З першої початкової умови маємо

$$f(x) + g(x) = \varphi(x). \tag{IV.65}$$

Із другої —

$$\left.\frac{\partial f(x - at)}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial g(x + at)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{IV.66}$$

Якщо використати $x - at = \eta$, то можна записати

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f(x - at)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{t=0} = -a\left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{t=0} \\ &= -a\left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{t=0} = -a\left.\frac{\partial f(x - at)}{\partial x}\right|_{t=0}, \end{aligned}$$

аналогічно можна переписати другий доданок у (IV.66). Тоді отримаємо

$$-a\frac{\partial f(x-at)}{\partial x}\Big|_{t=0}+a\frac{\partial g(x+at)}{\partial x}\Big|_{t=0}=\psi(x).$$

Проінтеґруємо цю рівність за x

$$-af\left(x\right)+ag\left(x\right)=\int\limits_{x_0}^{x}\psi\left(x'\right)dx'+a_1. \qquad \text{(IV.67)}$$

Із (IV.65) і (IV.67) знаходимо

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\varphi\left(x\right)-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi\left(x'\right)dx'-\frac{a_1}{2},$$

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2}\varphi\left(x\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi\left(x'\right)dx'+\frac{a_1}{2}. \qquad \text{(IV.68)}$$

Підставивши ці формули в (IV.64), одержимо

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(x')dx'. \qquad \text{(IV.69)}$$

Цю формулу прийнято називати ***формулою д'Аламбера***.

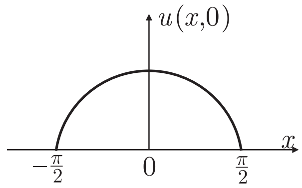
Щоб зрозуміти фізичний зміст одержаного розв'язку, розглянемо такий **приклад**.

Нехай

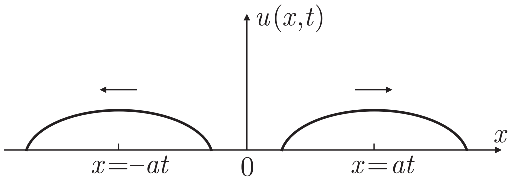
$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} b\,\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\\ \\ 0, & \text{для всіх інших } x. \end{cases} \qquad \text{(IV.70)}$$

Графік функції (IV.70) зображено на рис. IV.5, a.

Тобто в початковий момент часу частина струни між точками $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ піднята догори й швидкість у вертикальному напрямі



а



б

Рис. IV.5.

дорівнює нулю. Тоді, згідно з (IV.69) і (IV.70),

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{b}{2}\cos(x-at), & \text{при } -\frac{\pi}{2} \le x-at \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{b}{2}\cos(x+at), & \text{при } -\frac{\pi}{2} \le x+at \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{для всіх інших } x. \end{cases} \tag{IV.71}$$

Отже, $\frac{b}{2}\cos(x-at)$ описує імпульс, який рухається праворуч зі швидкістю a і максимум якого в момент t міститься в точці $x = at$. Доданок $\frac{b}{2}\cos(x+at)$ описує імпульс, що рухається ліворуч (рис. IV.5, б) з тією ж швидкістю a.

б) Неоднорідне рівняння.

Якщо навчитись будувати розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння (IV.61), то легко побудувати розв'язок цієї задачі для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{IV.72}$$

з початковими умовами (IV.62). Задачу розбиваємо на дві: 1) задача Коші для однорідного рівняння

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \tag{IV.73}$$

з заданими початковими умовами

$$v(x,0) = \varphi(x), \qquad v_t(x,0) = \psi(x); \tag{IV.74}$$

2) задача Коші для вихідного рівняння

$$\omega_{tt} - a^2\omega_{xx} = f(x,t) \tag{IV.75}$$

з нульовими початковими умовами

$$\omega(x,0) = 0, \qquad \omega_t(x,0) = 0. \tag{IV.76}$$

Це означає, що

$$u = v + \omega. \tag{IV.77}$$

Розв'язок задачі 1 запишемо за формулою д'Аламбера (IV.69)

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{IV.78}$$

Щоб розв'язати задачу 2, уведемо функцію $W(x,t,\tau)$, що задовольняє однорідне рівняння (IV.73) для $t > \tau$ і початкову умову

$$W(x,\tau,\tau) = 0, \qquad W_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau). \tag{IV.79}$$

Розв'язок і цієї задачі запишемо за формулою д'Аламбера (IV.69)

$$W(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\, dx', \tag{IV.80}$$

і шуканий розв'язок задачі Коші 2 буде таким:

$$\omega(x,t) = \int\limits_0^t W(x,t,\tau)\, d\tau. \tag{IV.81}$$

Справді, за правилом диференціювання за параметром інтеґрала зі змінною верхньою межею знаходимо

$$\omega_t(x,t) = \int\limits_0^t W_t(x,t,\tau)\, d\tau + W(x,t,t),$$

за першою з умов (IV.79) одержимо

$$\omega_t(x,t) = \int_0^t W_t(x,t,\tau)\,d\tau, \qquad \text{(IV.82)}$$

З формул (IV.81) та (IV.82) безпосередньо випливає, що $\omega(x,t)$ задовольняє початкові умови (IV.76). Знову диференціюючи (IV.82) за t і використовуючи другу з умов (IV.79), маємо

$$\omega_{tt} = W_t(x,t,t) + \int_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau = f(x,t) + \int_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau. \qquad \text{(IV.83)}$$

Обчислимо ω_{xx}. Операцію диференціювання можна виконати під знаком інтеґрала, тому

$$\omega_{xx} = \int_0^t W_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau. \qquad \text{(IV.84)}$$

Підставимо (IV.83), (IV.84) у (IV.75)

$$f(x,t) + \int_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau - a^2 \int_0^t W_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau =$$

$$= f(x,t) + \int_0^t (W_{tt} - a^2 W_{xx})\,d\tau = f(x,t),$$

оскільки $W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0$. Отже,

$$\omega(x,t) = \int_0^t W(x,t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\,dx'\,d\tau$$

— це розв'язок задачі Коші 2.

2. Тривимірне хвильове рівняння.

Як інший приклад, розглянемо процес поширення хвиль у просторі. Запишемо хвильове рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \tag{IV.85}$$

та його характеристику — характеристичний конус (див. пункт 2.2) для точки M_0 і моменту часу t_0:

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|, \tag{IV.86}$$

де

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Сукупність точок простору (M, t), у які надходить сигнал, що вийшов з точки M_0 зі швидкістю a в момент часу t_0, визначають з рівняння

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0, \quad t > t_0. \tag{IV.87}$$

Ці точки утворюють верхню порожнину характеристичного конуса точки M_0. Відповідно, сигнал, що вийшов з точки M у момент часу t, надходить у точку M_0 у момент часу t_0, якщо

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t, \quad t < t_0. \tag{IV.88}$$

Геометричне місце таких точок (M, t) утворює нижню порожнину характеристичного конуса (рис. IV.6).

Розглянемо саме цю половину конуса, тобто $t = t_0 - \frac{r}{a}$. Уведемо нові змінні

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z, \quad \tilde{t} = t - t_0 + \frac{r}{a},$$

позначимо

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t} + t_0 - r/a) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}),$$

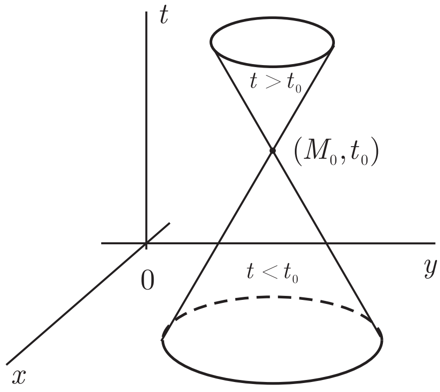


Рис. IV.6.

тоді

$$u_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{x} - x_0}{ra} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}},$$

$$\begin{aligned} u_{xx} \quad &= \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \frac{\tilde{x} - x_0}{ra} + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{(ra)^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \\ &+ \quad \left(\frac{1}{ra} - \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{r^3 a} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}, \end{aligned}$$

$$u_t = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2}$$

(аналогічні вирази одержуємо для u_{yy} і u_{zz}). Запишемо рівняння (IV.85) у нових змінних:

$$\frac{1}{r} \Delta \tilde{u} + \frac{2}{ar^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \right] = 0, \qquad \text{(IV.89)}$$

де враховано, що

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\tilde{x} - x_0}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{y} - y_0}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\tilde{z} - z_0}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$$

і
$$\left(\frac{\tilde{x}-x_0}{ra}\right)^2+\left(\frac{\tilde{y}-y_0}{ra}\right)^2+\left(\frac{\tilde{z}-z_0}{ra}\right)^2-\frac{1}{a^2}=0.$$
Легко перевірити, що частинний розв'язок цього рівняння такий:
$$\tilde{u}=\frac{\tilde{f}(\tilde{t})}{r},$$
$\tilde{f}(\tilde{t})$ — двічі диференційовна функція. Підставляючи замість $\tilde{t}$ його вираз через x, y, z, t, одержимо
$$u=\frac{\tilde{f}(t-t_0+r/a)}{r},$$
або
$$u=\frac{f(t+r/a)}{r},$$
оскільки параметр t_0 несуттєвий. Іншим частинним розв'язком є
$$u=\frac{\tilde{g}(-t+r/a)}{r},$$
тому що хвильове рівняння (IV.85) інваріантне відносно заміни $t \to -t$. Приймемо
$$\tilde{g}(-t+r/a)=g(t-r/a),$$
остаточно запишемо загальний розв'язок хвильового рівняння
$$u=\frac{1}{r}\left[f\left(t+\frac{r}{a}\right)+g\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]. \tag{IV.90}$$
Формула (IV.90) нагадує загальний розв'язок (IV.64) одновимірного хвильового рівняння. Розв'язок (IV.90) називають ***сферичними хвилями***. Перший доданок — це хвиля постійної форми, що збігається до точки $r = 0$. Наближаючись до центра, амплітуда хвилі збільшується. Другий доданок — це хвиля постійної форми, що поширюється від точки $r = 0$ на безмежність. Її амплітуда спадає на безмежності як $1/r$.

3.3. Метод функцій Ґріна

Одним з найпоширеніших методів розв'язування лінійних задач для диференціальних рівнянь є метод функцій Ґріна. Уперше (1828 р.) ці функції увів Дж. Ґрін[8] у теорію електрики і магнетизму. Метод функцій Ґріна полягає в тому, що спочатку знаходять деякий спеціальний розв'язок задачі того ж типу, а потім розв'язок вихідної задачі виражають через нього.

1. Застосуємо цей метод до рівнянь еліптичного типу.

Розглянемо крайову задачу

$$L[u] = f(M), \tag{IV.91}$$

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = g(M), \tag{IV.92}$$

де $f(M)$, $g(M)$ — задані функції; M — точка n-вимірного простору; $\alpha = \alpha(M)$, $\beta = \beta(M)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $L[u] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu$.

Знайдемо розв'язок задачі для спеціальних значень функцій f і g. А саме — знайдемо розв'язок G задачі

$$L[G] = -\delta(M, M_0), \tag{IV.93}$$

$$\left.\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_S = 0 \tag{IV.94}$$

($\delta(M, M_0) = \delta(x_1 - x_{01}), \ldots, \delta(x_n - x_{0n})$ — n-вимірна функція Дірака, уведена в розділі III), неперервний разом з першими частинними похідними всюди в замкненій області $\bar{D}$, крім точки M_0, у якій G може мати особливість. Цей розв'язок називають ***функцією Ґріна***, або ***фундаментальним розв'язком*** задачі (IV.91), (IV.92) (див. § 7 розділу III).

[8]Джордж Ґрін (George Green, 1793–1841) — британський математик і фізик.

Якщо функцію Ґріна знайдено, то легко відшукати розв'язок задачі (IV.91), (IV.92). Для цього запишемо другу формулу Ґріна

$$\int\limits_D \Big\{vL[u]-uL[v]\Big\}\,d\Omega_M=\int\limits_S p\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma_M \qquad \text{(IV.95)}$$

для функцій $u(M)$ і $v(M)$, неперервних разом зі своїми похідними першого порядку в $\bar{D}$ і похідними другого порядку в D. Приймемо, що у (IV.95) $u(M)$ — розв'язок задачі, $v(M)=G$, тоді

$$\int\limits_D \Big\{GL[u]-uL[G]\Big\}\,d\Omega_M=\int\limits_S p\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_M. \qquad \text{(IV.96)}$$

Оскільки в області D $L[u]=f$, $L[G]=-\delta(M,M_0)$, то співвідношення (IV.96) перепишемо так:

$$\int\limits_D f(M)G(M,M_0)\,d\Omega_M+\int\limits_D u(M)\delta(M,M_0)\,d\Omega_M=$$
$$=\int\limits_S p\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_M. \qquad \text{(IV.97)}$$

Другий інтеґрал у лівій частині (IV.97) за властивістю δ-функції (III.9) дорівнює $u(M_0)$. Отже,

$$\begin{aligned} u(M_0) &= \int\limits_S p\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_M- \\ &- \int\limits_D f(M)G(M,M_0)\,d\Omega_M \end{aligned} \qquad \text{(IV.98)}$$

З формули (IV.98) одержимо розв'язок рівняння (IV.91) з різними граничними умовами.

Для першої крайової задачі ($\alpha\equiv 1,\ \beta\equiv 0$)

$$G\big|_S=0,\quad u\big|_S=g(M),$$

$$u(M_0) = -\int\limits_S pg(M)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma_M - \\ - \int\limits_D G(M,M_0)f(M)\,d\Omega_M. \qquad \text{(IV.99)}$$

Для другої крайової задачі ($\alpha \equiv 0,\ \beta \equiv 1$)

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g(M),$$

$$u(M_0) = \int\limits_S pg(M)G(M,M_0)\,d\sigma_M - \\ - \int\limits_D G(M,M_0)f(M)\,d\Omega_M. \qquad \text{(IV.100)}$$

Для третьої крайової задачі ($\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$)

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = -\frac{\alpha}{\beta}G\Big|_S, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -\frac{\alpha}{\beta}u\Big|_S + \frac{g(M)}{\beta},$$

$$u(M_0) = \int\limits_S p\frac{g(M)}{\beta}G(M,M_0)\,d\sigma_M - \\ - \int\limits_D G(M,M_0)f(M)\,d\Omega_M. \qquad \text{(IV.101)}$$

Як перший приклад, знайдемо функцію Ґріна (фундаментальний розв'язок) рівняння Лапласа, тобто $L[u] = \Delta u$. Нехай функція Ґріна дорівнює сумі двох функцій:

$$G(M,M_0) = \Psi(r_{M,M_0}) + v(M,M_0), \qquad \text{(IV.102)}$$

де v — гармонічна функція в D (як функція точки M), а $\Psi(r_{M,M_0})$ (далі іноді $r_{M,M_0} \equiv r$) має особливість у точці M_0, тобто при $r_{M,M_0} = 0$, і повинна задовольняти рівняння

$$\Delta\Psi = -\delta(M,M_0). \qquad \text{(IV.103)}$$

Розглянемо тривимірний випадок. Позначимо через D_R сферу з центром у точці M_0 радіусом R, обмежену поверхнею S_R. Проінтеґруємо (IV.103) за областю D_R ($D_R \subset D$). Одержимо

$$\int\limits_{D_R} \Delta\Psi \, d\Omega_M = -1.$$

За формулою Остроградського[9] цей інтеґрал

$$\int\limits_{D_R} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi \, d\Omega_M = \int\limits_{D_R} \Delta\Psi \, d\Omega_M = \int\limits_{S_R} \frac{\partial\Psi}{\partial n} \, d\sigma_M = \int\limits_{S_R} \frac{d\Psi}{\partial r} \, d\sigma_M,$$

де враховано, що $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dr}$ для сфери. Отже,

$$\int\limits_{S_R} \frac{d\Psi}{dr} \, d\sigma_M = -1. \qquad \text{(IV.104)}$$

На сфері S_R функція $\frac{d\psi}{dr}$ має cnfkt значення, тому

$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r=R} \int\limits_{S_R} d\sigma_M = -1,$$

або

$$4\pi R^2 \frac{d\Psi}{dr} = -1.$$

Звідси одержуємо

$$\Psi(R) = \frac{1}{4\pi R},$$

а функція Ґріна

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M,M_0}} + v(M, M_0). \qquad \text{(IV.105)}$$

З (IV.105) випливає, що функція Ґріна має у точці M_0 особливість вигляду $\frac{1}{4\pi r}$.

[9] Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) — український математик і фізик.

Для двовимірного випадку (площини)

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M,M_0}} + v(M,M_0). \qquad \text{(IV.106)}$$

Зазначимо, що функція $v(M,M_0)$ є розв'язком такої задачі:

$$\Delta v = 0, \quad \left(\alpha v + \beta\frac{\partial v}{\partial n}\right)\Big|_S = -\left(\frac{\alpha}{r} + \beta\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)\Big|_S \frac{1}{4\pi}.$$

З означення функції Ґріна як розв'язку рівняння $\Delta G = -\delta(M,M_0)$ і формул (IV.105), (IV.106) маємо

$$\Delta(1/r) = -4\pi\delta(M,M_0) \qquad \text{(IV.107)}$$

для тривимірного випадку і

$$\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -2\pi\delta(M,M_0) \qquad \text{(IV.108)}$$

для двовимірного.

Дамо фізичну інтерпретацію функції Ґріна (формули (IV.106)). Зробимо це для першої крайової задачі.

Нехай поверхню S, що обмежує область D, зроблено з провідника і заземлено. І нехай у точці M_0 усередині D міститься електричний заряд $1/4\pi$. Цей заряд індукує деякий розподіл зарядів на поверхні S. Потенціал електростатичного поля в області D буде дорівнювати сумі потенціалу поля, створеного точковим зарядом, що дорівнює $1/4\pi r$, і потенціалу поля, створеного індукованими зарядами, що дорівнює $v(M,M_0)$. Ця сума дорівнює $G(M,M_0)$. Отже, $G(M,M_0)$ — це потенціал поля, створеного точковим зарядом, що міститься всередині заземленої провідної поверхні.

Для деяких простих областей (півплощина, куля, круг та їхні частини) індуковане поле можна знайти за допомогою ***методу відображень***. Суть цього методу полягає в тому, що поза областю D за певним законом уміщують заряди. Ці заряди називають ***зображеннями*** вихідного заряду відносно деякої границі

S. Зокрема, у задачі Діріхле для рівняння Лапласа з (IV.105) випливає, що потенціал індукованих зарядів v на S збігається за абсолютним значенням з потенціалом $\frac{1}{4\pi r_{M,M_0}}$ на S, однак має протилежний знак:

$$G\Big|_S = 0, \qquad v\Big|_S = -\frac{1}{4\pi r_{M,M_0}}\Big|_S .$$

У випадку плоскої границі зображення є дзеркальним відображенням оригіналу в площині або площинах, якщо область обмежена декількома площинами. У випадку сферичних границь для побудови зображень застосовують перетворення обернених радіусів (інверсію).

Як приклад, знайдемо потенціал електростатичного поля, створеного точковим зарядом e всередині заземленої кулі, та розв’язок задачі Діріхле.

Нехай a — радіус кулі з центром у точці O (рис. IV.7), у точці M_0 міститься електричний заряд e, M — точка спостереження, $r_0 = r_{MM_0}$, $\rho_0 = OM_0$, $r_1 = MM_0^*$, M_0^* — точка, що лежить на продовженні OM_0 й отримана з M_0 за допомогою перетворення обернених радіусів.

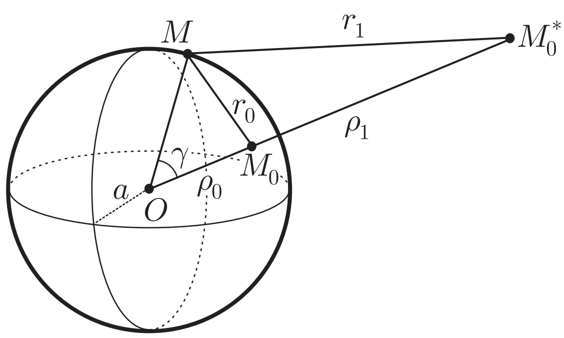


Рис. IV.7.

За формулою (IV.105) функція Ґріна — шуканий потенціал електростатичного поля в кулі

$$G(M, M_0) = \frac{e}{r_0} + v(M, M_0),$$

де $v(M, M_0)$ — потенціал індукованого поля,

$$\Delta v = 0.$$

Щоб знайти $v(M, M_0)$, використаємо перетворення обернених радіусів

$$OM_0 \cdot OM_0^* = a^2.$$

Умістимо в точці M_0^* зображення заряду e, тоді

$$v = \frac{e_1}{r_1},$$

де e_1 — величина заряду в точці M_0^*. Умова $G\big|_S = 0$ дає

$$e_1 = -\frac{r_1}{r_0} e.$$

Справді, розглянемо трикутники OMM_0 і OMM_0^*. Це подібні трикутники, тому що вони мають спільний кут $\angle MOM_0$ і пропорційні сторони

$$\frac{OM_0}{OM} = \frac{OM}{OM_0^*} = \frac{MM_0}{MM_0^*}$$

або

$$\frac{\rho_0}{a} = \frac{a}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}.$$

Отже, на поверхні S

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{\rho_0},$$

тому функція Ґріна $G(M, M_0) = e\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{a}{\rho_0 r_1}\right)$ дорівнює нулю на поверхні кулі.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u\big|_S = g(M).$$

Для цього обчислимо $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$ на поверхні кулі

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=a} = e\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0 r_1}\right]_{R=a},$$

де R — радіус-вектор будь-якої точки M кулі. З трикутника OMM_0 випливає, що $r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos\gamma$, тому

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r_0}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma\right)^{-1/2} = -\frac{R - \rho_0\cos\gamma}{r_0^3}.$$

Приймемо $R = a$, отримаємо

$$\left.\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r_0}\right)\right|_{R=a} = -\frac{a - \rho_0\cos\gamma}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}.$$

Оскільки $r_1^2 = R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\gamma$ (з $\triangle OMM_0^*$) і $\rho_0\rho_1 = a^2$, то знайдемо

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right|_{R=a} &= \left.\frac{\partial}{\partial R}(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\gamma)^{-1/2}\right|_{R=a} = \\ &= -\frac{a - \dfrac{a^2}{\rho_0}\cos\gamma}{\left(a^2 + \dfrac{a^4}{\rho_0^2} - 2R\dfrac{a^2}{\rho_0}\cos\gamma\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

або після спрощень

$$\left.\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right|_{R=a} = -\frac{\rho_0^2}{a^2}\frac{\rho_0 - a\cos\gamma}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}$$

і

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -e\frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2}(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\gamma)^{-3/2}.$$

Підставимо цей вираз у (IV.99) і запишемо розв'язок задачі Діріхле:

$$u(M) = \frac{e}{4\pi a}\int \frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\, g(M_0)\, dS_{M_0}.$$

У цьому розв'язку зручніше перейти до сферичних координат $dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, тоді

$$u(M) = \frac{ae}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{(a^2 - \rho_0^2) g(\theta, \varphi)}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos\gamma)^{3/2}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

де $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, $M_0 = (\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$. Цей інтеґрал називають ***інтеґралом Пуассона*** для кулі

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho_0^2)}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^{3/2}} g(\varphi) \, d\varphi.$$

Розглянемо інший приклад — одновимірне рівняння Пуассона

$$L[\varphi(x)] = -4\pi\rho(x), \tag{IV.109}$$

$$L[\varphi(x)] = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}.$$

За означенням (IV.93) функція Ґріна задовольняє рівняння

$$L[G(x, x')] = -\delta(x - x'). \tag{IV.110}$$

Із (IV.109) можна одержати розв'язок

$$\varphi(x) = -4\pi L^{-1}[\rho(x)], \tag{IV.111}$$

де L^{-1} — оператор, обернений до L, тобто такий, що $L^{-1}L = 1$.

З урахуванням властивостей δ-функції (формула (III.9)) запишемо $\rho(x)$ у вигляді

$$\rho(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x')\delta(x' - x)dx'.$$

Підставимо це в праву частину (IV.111), одержимо

$$\varphi(x) = -4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x') L^{-1} \delta(x' - x) dx'. \tag{IV.112}$$

Однак із (IV.110)

$$-L^{-1}\delta(x'-x) = G(x',x),$$

тобто (IV.112) можна записати у вигляді

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi\rho(x')G(x',x)dx'. \tag{IV.113}$$

Отже, розв'язок безпосередньо виражений через функцію Ґріна.

Знайдемо тепер цю функцію. Для цього треба записати δ-функцію через інтеґрал Фур'є (формула (III.54)):

$$\delta(x'-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}dk. \tag{IV.114}$$

Тоді

$$G(x',x) = -L^{-1}\delta(x'-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x'-x)}-1}{k^2}dk + G_0, \tag{IV.115}$$

де G_0 — розв'язок однорідного рівняння

$$LG_0 = 0. \tag{IV.116}$$

У правильності формули (IV.115) переконаємося, коли подіємо на ліву і праву частини оператором $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. У цьому разі одержимо рівність (IV.110).

Функція $G_0(x)$, що визначена рівнянням (IV.116), має вигляд

$$G_0(x) = c_1 x + c_2,$$

де c_1 і c_2 — деякі константи.

У (IV.115) ми додали сталий нескінченний доданок

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2},$$

потрібний для того, щоб вираз у правій частині (IV.115) був скінченним.

Визначимо інтеґрал, що входить У (IV.115):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}-1}{k^2}dk = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos k(x-x')-1}{k^2}\,dk + \\ &+ i\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k(x-x')}{k^2}\,dk. \end{aligned}$$

Другий інтеґрал дорівнює нулю внаслідок непарності підінтеґральної функції. Проінтеґруємо частинами: $u = \cos k(x-x') - 1$, $dv = \frac{dk}{k^2}$.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos k(x-x')-1}{k}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{x-x'}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k(x-x')}{k}dk = \\ &= 0 - \frac{|x-x'|}{2}. \end{aligned}$$

У цьому випадку ми врахували, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k(x-x')}{k}dk = \begin{cases} \pi, & x > x'; \\ -\pi, & x < x'. \end{cases}$$

Отже,

$$G(x',x) = -\frac{1}{2}\big|x-x'\big| + c_1x + c_2.$$

Підставимо останній вираз у (IV.113), знайдемо $\varphi(x)$. Константи c_1 і c_2 визначають з додаткових умов. Наприклад, якщо маємо точковий заряд у початку координат: $\rho(x') = e\delta(x')$, то з (IV.113)

$$\varphi(x) = -2\pi e|x| + 4\pi ec_1x + 4\pi ec_2.$$

Оскільки потенціал визначають з точністю до сталої, то можна припустити, що $c_2 = 0$. Крім того, з умови симетрії потенціалу відносно точки $x=0$, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, повинно бути $c_1 = 0$. Тоді

$$\varphi(x) = -2\pi e|x|. \tag{IV.117}$$

Формула (IV.117) у тривимірному просторі описує потенціал, створюваний безмежною рівномірно зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду $\sigma = e$. У цьому випадку x — відстань від точки спостереження до площини.

Зазначимо, що формула, подібна до (IV.113), справджується і в тривимірному випадку, якщо під x розуміти сукупність координат x, y, z і, відповідно, замість $x' - x'$, y', z'.

2. Застосуємо тепер метод функцій Ґріна до рівнянь параболічного типу. Знайдемо розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності.

Нехай задача Коші має вигляд

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{IV.118}$$

$$u(x, 0) = \delta(x - x_0). \tag{IV.119}$$

Розв'язок такої задачі називають ***функцією Ґріна***, або ***фундаментальним розв'язком***.

Позначимо цю функцію через $G(x - x_0, t)$. На відміну від попереднього прикладу, ця функція залежить і від координат, і від часу.

Для знаходження $G(x - x_0, t)$ розглянемо спочатку допоміжну задачу Коші, коли

$$u(x, 0) = \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{IV.120}$$

тобто є ступінчастою функцією Гевісайда, виведеною у розділі III.

Будемо шукати так званий автомодельний розв'язок, тобто розв'язок у вигляді $u = f\left(\frac{x}{t^\alpha}\right)$, де число α називають показником автомодельності.

Підставивши цю функцію в рівняння (IV.118), одержимо

$$\frac{a^2}{t^{2\alpha}}f''(z) = -\frac{\alpha z}{t}f'(z), \text{ де } \quad z = \frac{x}{t^\alpha}.$$

Щоб уникнути в останньому рівнянні явної залежності від t, виберемо $\alpha = 1/2$. Тоді рівняння для $f(z)$ матиме вигляд

$$f''(z) + \frac{z}{2a^2}f'(z) = 0. \tag{IV.121}$$

З початкових умов для u (IV.120) знаходимо

$$f(-\infty) = 0; \quad f(\infty) = 1.$$

Інтеґруючи один раз рівняння (IV.121), одержимо

$$\ln f'(z) = -\frac{z^2}{4a^2} + \ln c \quad \text{або} \quad f'(z) = ce^{-\frac{z^2}{4a^2}}. \tag{IV.122}$$

Інтеґруючи ще раз, маємо

$$f(z) = c\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{4a^2}}dz = 2ac\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{2a}} e^{-y^2}dy. \tag{IV.123}$$

Ця функція задовольняє першу з умов (IV.120). Для виконання другої умови потрібно, щоб

$$2ac\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = 2ac\sqrt{\pi} = 1,$$

звідси $c = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}$. Отже, розв'язок задачі (IV.118), (IV.120) має вигляд

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x/\sqrt{4a^2t}} e^{-y^2}dy, \tag{IV.124}$$

або

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right], \tag{IV.125}$$

де

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-y^2}dy \tag{IV.126}$$

— так званий інтеґрал помилок. (У разі переходу від (IV.124) до (IV.125) враховано, що $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Нехай тепер стрибок функції $u(x,0)$ міститься в точці x_0 і має висоту u_0. Тоді замість (IV.120) будемо мати початкову умову

$$u(x,0) = u_0\theta(x - x_0). \tag{IV.127}$$

У цьому випадку замість розв'язку (IV.125) одержимо

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right]. \tag{IV.128}$$

Якщо ж

$$u(x,0) = u_0\left[\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)\right], \tag{IV.129}$$

то, очевидно, розв'язок можна записати як різницю двох розв'язків, один з яких при $t = 0$ прямує до $u_0\eta(x - x_1)$, а інший — до $u_0\eta(x - x_2)$. Це, з урахуванням (IV.128), приведе до формули

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right]. \tag{IV.130}$$

Зазначимо, що зміст умови (IV.129) такий: $u(x,t)$ у початковий момент часу (t=0) дорівнює u_0 на проміжку $x_1 \le x \le x_2$ і нулю в усіх інших точках прямої, тобто має вигляд, зображений на рис. IV.8.

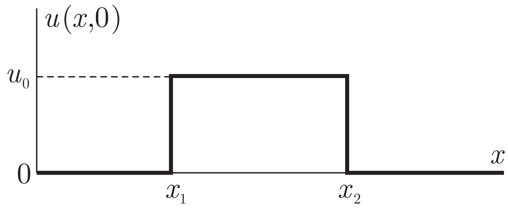


Рис. IV.8.

Припустимо тепер, що на відрізку $[x_1, x_2]$ у момент часу t=0 виділилась кількість тепла Q, яке рівномірно розподілене по відрізку. Тоді температура на відрізку в початковий момент

$$u(x,0) = \frac{Q}{c\rho(x_2 - x_1)}[\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)]. \qquad \text{(IV.131)}$$

Тобто в цьому випадку $u_0 = \frac{Q}{c\rho(x_2 - x_1)}$ і тоді з (IV.130) одержимо

$$u(x,t) = \frac{Q}{2c\rho} \frac{\Phi\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2 t}}\right)}{x_2 - x_1}. \qquad \text{(IV.132)}$$

Далі вважатимемо, що відрізок $[x_1, x_2]$ стягується в точку x_0, а кількість тепла Q не змінюється. У цьому разі $u_0 \to \infty$, а площа під кривою рис. IV.8 залишається сталою.

Позначимо $\frac{x - x_i}{\sqrt{4a^2 t}} = \chi_i \quad (i = 1, 2, 0)$. Тоді (IV.132) запишемо так:

$$u(x,t) = \frac{Q}{2c\rho} \frac{1}{\sqrt{4a^2 t}} \frac{\Phi(\chi_2) - \Phi(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1},$$

$$\lim_{\chi_1 \to \chi_2 \to \chi_0} u(x,t) = \frac{Q}{2c\rho} \frac{1}{\sqrt{4a^2 t}} \frac{\partial \Phi(\chi)}{\partial \chi}\Big|_{\chi = \chi_0}.$$

З урахуванням (IV.126) одержимо

$$\left.\frac{\partial\Phi(\chi)}{\partial\chi}\right|_{\chi=\chi_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\chi}\left.\left(\int\limits_0^{\chi} e^{-y^2}dy\right)\right|_{x=x_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\chi_0^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Тоді

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}. \qquad \text{(IV.133)}$$

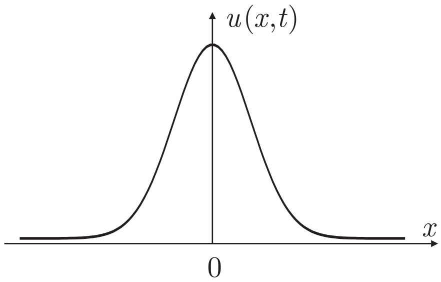


Рис. IV.9.

Графік функції $u(x,t)$ при $t > 0$ має вигляд, зображений на рис. IV.9. При $t = 0$ пік стає вищим і вужчим, тобто функція набуває δ-подібного вигляду. Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = \frac{Q}{c\rho\sqrt{4\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}dx = \frac{Q}{c\rho},$$

а інтеґрал від δ-функції дорівнює одиниці, то звідси маємо

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{Q}{c\rho}\delta(x-x_0). \qquad \text{(IV.134)}$$

Остаточно з (IV.133), (IV.134) випливає, що функція Ґріна $G(x-x_0,t)$ як розв'язок рівняння (IV.118) з умовою (IV.119) має вигляд

$$G(x-x_0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}, \qquad \text{(IV.135)}$$

і

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho} G(x - x_0, t). \qquad \text{(IV.136)}$$

Фізичний зміст функції $G(x - x_0, t)$ такий: вона дає розподіл температури вздовж нескінченного тонкого стрижня в момент часу t, якщо в момент $t = 0$ у точці $x = x_0$ виділилась певна кількість тепла. Аналогічний зміст функція Ґріна має у випадку рівняння дифузії. Тому цю функцію називають ***функцією впливу***: вона визначає вплив ***миттєвого точкового джерела*** на температуру або концентрацію в середовищі.

Розглянемо далі випадок, коли початкова умова має вигляд

$$u(x,0) = \varphi(x). \qquad \text{(IV.137)}$$

Цей випадок відповідає виділенню в момент часу t=0 тепла, розподіленого по стрижню, з розподілом, що його описує функція $\varphi(x)$.

Щоб знайти вплив всього цього тепла на температуру стрижня в наступні моменти часу, розглянемо спочатку вплив деякої малої частини стрижня в точці $x = \xi$ довжиною $d\xi$, у якому виділилась кількість тепла $dQ = c\rho\,\varphi(\xi)\,d\xi$. Температура в точці x у момент часу $t \geqslant 0$, зумовлена цим теплом, згідно з формулою (IV.136),

$$u(x,t)\Big|_{dQ} = \frac{dQ}{c\rho} G(x - \xi, t) = \varphi(\xi) G(x - \xi, t)\,d\xi.$$

Підсумовуючи вплив від усіх відрізків $d\xi$, одержимо

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x - \xi, t)\,d\xi. \qquad \text{(IV.138)}$$

Остання формула має ту саму природу, що й формула (IV.113) для рівняння Пуассона, тому вони подібні.

Узагальнимо метод функцій Ґріна на тривимірне рівняння теплопровідності

$$L[u] = \rho u_t,$$

де $L[u] = \mathrm{div}(k \,\mathrm{grad}\, u) - qu$.

Для задачі Коші з початковою умовою (IV.137) функцію Ґріна визначають як розв'язок такої задачі Коші

$$L[G] = \rho G_t,$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi),$$

$$\delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3).$$

Якщо ж задача, крім початкової умови (IV.137), містить граничну умову

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_S = 0,$$

то функція Ґріна — це розв'язок крайової задачі

$$L[G] = \rho G_t,$$

$$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_S = 0,$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi).$$

В обох випадках розв'язок рівняння теплопровідності знаходять за формулою (IV.138), лише для задачі з граничною умовою інтеґрувати треба за областю D, до якої належать x і ξ.

3.4. Метод конформного відображення

У багатьох двовимірних задачах електростатики, гідродинаміки, аеродинаміки, часто використовують метод конформного відображення. Із застосуванням цього методу, задачу Діріхле для довільної однозв'язної області зводять до задачі Діріхле для круга або іншої області простої форми, розв'язок якої відомий. Наприклад, знайдемо цим методом функцію Ґріна задачі Діріхле в однозв'язній області D, обмеженій кривою S:

$$\Delta u = f(M), \tag{IV.139}$$

$$u|_S = \varphi(M). \tag{IV.140}$$

Область $\bar{D}$ площини (x, y) можна конформно відобразити на одиничний круг $|w| \leq 1$. Нехай функція $w = \psi(z, \tau)$ виконує це відображення і точка $z = \tau$ переходить у центр круга $w = 0$, тобто $\psi(\tau, \tau) = 0$.

Тоді функцією Ґріна задачі (IV.139), (IV.140) буде функція (формула (IV.106))

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\psi(z, \tau)|}, \tag{IV.141}$$

у якій $z = x + iy$, $\tau = \xi + i\eta$, x, y — координати точки M, ξ, η — координати точки M_0.

Справді, оскільки функція $w = \psi(z, \tau)$ конформно відображає область D, то вона є аналітичною функцією в області D і $\psi(z, \tau) \neq$ $\neq 0$ при $z \neq \tau$, $\frac{d\psi}{dz} \neq 0$ всюди в D, включаючи $z = \tau$. Отже, $z = \tau$ — це нуль першого порядку функції $\psi(z, \tau)$, і тому

$$\psi(z, \tau) = (z - \tau) F(z, \tau), \tag{IV.142}$$

де $F(z, \tau)$ — аналітична в області D функція змінної z і $F(z, \tau) \neq$ $\neq 0$. Функція

$$\ln F(z, \tau) = \ln |F(z, \tau)| + i \arg F$$

також аналітична в D, а її дійсна частина $\ln |F(z, \tau)|$ — гармонічна функція в області D. Функція $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|F(z,\tau)|}$ також гармонічна в D. З формули (IV.142) знаходимо

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\Psi(z, \tau)|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \tau|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|F(z, \tau)|}$$

або
$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\Psi(z,\tau)|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|F(z,\tau)|}.$$
Тому що
$$\Delta\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right)=-2\pi\delta(M,M_0)$$
і $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|F(z,\tau)|}$ — гармонічна в D функція, одержимо
$$\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\psi(z,\tau)|}\right)=-\delta(M,M_0). \qquad \text{(IV.143)}$$
У разі відображення $w=\psi(z,\tau)$ границя області D, крива S, переходить у границю круга $|w|\leq 1$, тому $|\psi(z,\tau)|_S=1$ і $\left.\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\psi(z,\tau)|}\right)\right|_S=0$. Ця рівність разом з формулою (IV.143) означає, що функцію Ґріна для задачі (IV.139), (IV.140) треба шукати за формулою (IV.141).

Наостанок зазначимо, що описаний метод застосовний лише для двовимірного рівняння Лапласа або Пуассона, тому що в разі конформного відображення тільки ці рівняння у нових змінних залишаються тими ж самими рівняннями Лапласа чи Пуассона.

3.5. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є)

Метод відокремлення змінних запропонував Ж. Фур'є на початку XIX ст. для розв'язування рівняння теплопровідності, пізніше (1828 р.) загальну схему методу сформулював М. Остроградський.

Цей метод дає змогу звести диференціальне рівняння з частинними похідними з n незалежними змінними до n звичайних диференціальних рівнянь.

Проілюструємо цей метод на прикладі рівнянь усіх трьох типів.

1. Почнемо з ***гіперболічного типу.***

У пункті 3.2 ми розв'язали хвильове рівняння на всій прямій $-\infty<x<\infty$. Формула д'Аламбера відображає розв'язок у вигляді суми двох біжучих хвиль, що рухаються в протилежних напрямах. Якщо ж розглядати рівняння на обмеженому проміжку $0 < x < l$, то біжучих хвиль уже не буде, оскільки вони взаємодіятимуть з границями. Біжучі хвилі відбиваються від границь так, що сумарні коливання стають не біжучими, а перетворюються у стоячі хвилі. Якщо відомі профілі цих хвиль і характер коливань кожної хвилі, то розв'язок хвильового рівняння буде суперпозицією найпростіших коливань.

А. Отже, розв'язок хвильової задачі для струни з закріпленими кінцями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{IV.144}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{IV.145}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{IV.146}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{IV.147}$$

шукаємо у вигляді стоячих хвиль, тобто як добуток двох функцій $X(x)$ і $T(t)$

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{IV.148}$$

Підставимо (IV.148) у рівняння (IV.144) і поділимо на XT:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{IV.149}$$

Щоб функція (IV.148) була розв'язком рівняння (IV.144), рівність (IV.149) має задовольнятись тотожно, тобто для всіх значень незалежних $0 < x < l$, $t > 0$. Права частина рівності (IV.149) є функцією лише змінної t, ліва — лише x. Фіксуючи, наприклад, деякі значення x і змінюючи t (або навпаки), одержимо, що права і ліва частини рівності (IV.149) зі зміною своїх арґументів будуть сталими:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{IV.150}$$

де λ — константа, яку для зручності беремо зі знаком "мінус". З (IV.150) маємо звичайні диференціальні рівняння для функцій $X(x)$ і $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{IV.151}$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{IV.152}$$

Підставимо розв'язок (IV.148) у граничні умови (IV.145)

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0, \\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функція $X(x)$ повинна задовольняти додаткові умови

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{IV.153}$$

$T(t) \neq 0$, бо інакше мали б тривіальний розв'язок $u(x,t) = 0$.

Отже, щоб знайти $X(x)$, треба розв'язати задачу на власні значення: знайти ті значення параметра λ, за яких існують нетривіальні розв'язки задачі

$$\begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ &X(0) = X(l) = 0 \end{aligned} \tag{IV.154}$$

і знайти ці розв'язки. Такі значення параметра λ називають ***власними значеннями***, а відповідні їм нетривіальні розв'язки — ***власними функціями*** задачі (IV.154). Сформульовану так задачу називають ***задачею Штурма–Ліувілля***[10].

Розглянемо окремо випадки, коли параметр λ від'ємний, додатний або дорівнює нулю.

Нехай $\lambda < 0$, тоді задача не має нетривіальних розв'язків. Справді, загальний розв'язок рівняння (IV.151) такий:

$$X(x) = A_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

[10]Жак Штурм (Jacques Charles François Sturm, 1803–1855) — французький математик, народився в Женеві.

З граничних умов (IV.153) маємо

$$X(0) = A_1 + A_2 = 0,$$

$$X(l) = A_1 e^{\alpha} + A_2 e^{-\alpha} = 0, \quad \alpha = l\sqrt{-\lambda} > 0,$$

тобто

$$A_1 = -A_2 \quad \text{i} \quad A_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Проте в розглядуваному випадку $\alpha > 0$, так що $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Тому $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, і отже, $X(x) \equiv 0$.

При $\lambda = 0$ також не існує нетривіальних розв'язків. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (IV.151) такий:

$$X(x) = B_1 x + B_2.$$

З граничних умов

$$X(0) = B_2 = 0,$$

$$X(l) = B_1 l = 0,$$

тобто $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, і, отже, $X(x) \equiv 0$.

При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння можна записати як

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Граничні умови дають

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Якщо $X(x) \neq 0$, то $D_2 \neq 0$, тому

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

або

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l},$$

де n — довільне ціле число. Отже, нетривіальні розв'язки задачі Штурма–Ліувілля можливі лише за власних значень

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \tag{IV.155}$$

Цим власним значенням відповідають власні функції

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{IV.156}$$

Таким значенням λ_n відповідають і розв'язки рівняння (IV.152)

$$T_n(t) = A'_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B'_n \sin\frac{n\pi}{l}at, \tag{IV.157}$$

де $A'_n,\ B'_n$ — довільні константи.

Повернемось до задачі (IV.144)–(IV.147), і дійдемо висновку, що функції

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

де

$$A_n = A'_n D_n, \qquad B_n = B'_n D_n,$$

є частинними розв'язками рівняння (IV.144). Внаслідок лінійності й однорідності рівняння (IV.144) сума частинних розв'язків

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{IV.158}$$

також є розв'язком цього рівняння і задовольняє граничні умови (IV.145). Константи A_n і B_n знайдемо з початкових умов (IV.146), (IV.147)

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{IV.159}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}aB_n \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{IV.160}$$

З теорії рядів Фур'є відомо, що довільну функцію, неперервну разом зі своїми похідними першого порядку, можна розкласти в ряд Фур'є. Нехай функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ саме такі, тому розкладемо їх у ряди Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \varphi_n(x) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi, \quad \text{(IV.161)}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \psi_n(x) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi. \quad \text{(IV.162)}$$

Порівняємо ці ряди з формулами (IV.159), (IV.160), одержимо

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{n\pi a}\psi_n.$$

Отже, розв'язок задачі (IV.144) знайдено у вигляді послідовності стоячих хвиль або гармонік струни

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}at + B_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right) = \\ &= \alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}a\,(t+\delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x, \end{aligned}$$

де $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\frac{n\pi}{l}a\delta_n = -\mathrm{arctg}\frac{B_n}{A_n}$. Кожна точка струни x_0 виконує гармонічні коливання

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x_0$$

з амплітудою $\alpha_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0$. Точки, у яких $\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$, протягом усього процесу є нерухомими і їх називають вузлами стоячої хвилі $u_n(x,t)$. Точки, у яких $\sin\frac{n\pi}{l}x = \pm 1$, коливаються з амплітудою α_n і їх називають пучностями стоячої хвилі. У стоячій хвилі всі точки коливаються з однаковою частотою (власною частотою) $\omega_n = \frac{n\pi}{l}a$, форма хвилі подібна до хвиль, зображених на рис. IV.10

Б. Тепер розглянемо неоднорідне рівняння коливань струни

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t) \quad \text{(IV.163)}$$

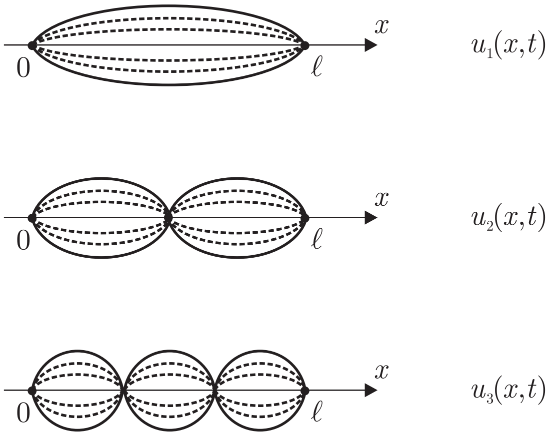


Рис. IV.10.

з початковими умовами (IV.146), (IV.147) і граничними умовами (IV.145). Оскільки розв'язок однорідної задачі (IV.158) — це ряд за власними функціями $X_n(x)$ задачі Штурма–Ліувілля, то розв'язок неоднорідної задачі теж шукаємо у вигляді ряду за власними функціями (ряду Фур'є)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad \text{(IV.164)}$$

Щоб знайти $u_n(t)$, розкладемо в ряд Фур'є початкові умови та функцію $f(x,t)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \varphi_n(x) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi,$$

$$\text{(IV.165)}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \psi_n(x) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi,$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x,$$
$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{IV.166}$$

і підставимо (IV.164) та (IV.166) у рівняння (IV.163):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x = 0.$$

Ця рівність виконується за умови, що всі коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, тобто

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{IV.167}$$

Ми одержали звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. З початкових умов (IV.146) і (IV.147)

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

маємо початкові умови для $u_n(t)$

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{u}_n(0) = \psi_n. \tag{IV.168}$$

Розв'язок рівняння (IV.167) є сумою

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(2)}(t), \tag{IV.169}$$

де

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t \sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)f_n(\tau)\,d\tau \tag{IV.170}$$

— розв'язок неоднорідного рівняння з нульовими (однорідними) початковими умовами, і

$$u_n^{(2)}(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi}{l}at + \frac{l}{n\pi a}\psi_n \sin\frac{n\pi}{l}at \qquad \text{(IV.171)}$$

— розв'язок однорідного рівняння з початковими умовами (IV.168). Підставивши (IV.169)–(IV.171) у розв'язок (IV.164), одержимо

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t \sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x f_n(\tau)\,d\tau \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi}{l}at + \frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &= u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t). \qquad \text{(IV.172)} \end{aligned}$$

Дамо фізичну інтерпретацію цього розв'язку. Другий член — це розв'язок задачі про вільні коливання струни за заданих початкових умов, а перший член описує вимушені коливання струни під дією зовнішньої сили, коли початкових збурень нема.

Розв'язок $u^{(1)}(x,t)$ можна виразити через функцію Ґріна, якщо підставити вираз (IV.166) для $f_n(t)$

$$u^{(1)}(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad \text{(IV.173)}$$

де

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\,x\sin\frac{n\pi}{l}\,\xi. \quad \text{(IV.174)}$$

Якщо ж підставити вирази (IV.165) для φ_n, ψ_n, то $u^{(2)}(x,t)$ перепишемо так:

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,t) &= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^l \left[\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}at + \frac{l}{n\pi a}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}at\right]\times \\ &\times\ \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi. \qquad \text{(IV.175)} \end{aligned}$$

В. Нарешті розглянемо загальний випадок крайової задачі з граничними умовами I типу, тобто дослідимо вимушені коливання струни довжиною l під дією зовнішньої сили $f(x,t)$, коли кінці струни рухаються за заданим законом. Ця задача зводиться до розв'язку рівняння (IV.163)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \tag{IV.176}$$

і початковими умовами (IV.146), (IV.147).

Оскільки граничні умови (IV.176) неоднорідні, то метод Фур'є не придатний для розв'язування крайової задачі. Отже, треба звести цю задачу до задачі з однорідними граничними умовами. Для цього введемо невідому функцію $v(x,t)$, приймаючи

$$u(x,t) = v(x,t) + V(x,t), \tag{IV.177}$$

так що $v(x,t)$ є відхиленням функції $u(x,t)$ від деякої відомої функції $V(x,t)$. Функцію $v(x,t)$ означимо як розв'язок рівняння

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x,t), \quad \bar{f}(x,t) = f(x,t) - [V_{tt} - a^2 V_{xx}]$$

з додатковими умовами

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - V(x,0), \\ v_t(x,0) &= \bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - V_t(x,0), \\ v(0,t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - V(0,t), \\ v(l,t) &= \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - V(l,t). \end{aligned}$$

Оберемо допоміжну функцію $V(x,t)$ так, щоб

$$\bar{\mu}_1(t) = 0, \quad \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

для цього достатно прийняти

$$V(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right). \tag{IV.178}$$

Отже, крайова задача для функції $u(x,t)$ зведена до крайової задачі для $v(x,t)$ з нульовими граничними умовами, тобто до задачі з пункту Б. Подібним способом можна звести неоднорідні граничні умови інших типів до однорідних.

2. Параболічний тип.

А. Наведений нижче приклад — неоднорідне рівняння теплопровідності.

Це рівняння в одновимірному випадку має вигляд

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t). \tag{IV.179}$$

Тут $f(x,t)$ описує виділення тепла в стрижні, яке може відбуватись, наприклад, під час проходження електричного струму. Справді, вираз u_t у лівій частині (IV.179) визначає зміну температури за одиницю часу в заданій точці. Ця зміна може відбуватись як унаслідок надходження тепла з інших точок стрижня (перший доданок в правій частині), так і внаслідок виділення тепла в заданій точці (другий доданок у правій частині (IV.179)).

Нехай початкова умова має вигляд

$$u(x,0) = 0, \tag{IV.180}$$

а граничні —

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{IV.181}$$

Спочатку знайдемо власні функції і власні значення задачі. Для цього розгляньмо однорідне рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{IV.182}$$

Щоб відокремити змінні, шукаємо $u(x,t)$ як добуток двох функцій

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{IV.183}$$

Підставляючи (IV.183) у рівняння (IV.182), отримаємо

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

звідки одержимо рівняння для $X(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad \text{(IV.184)}$$

Нетривіальний розв'язок рівняння (IV.182) з граничними умовами (IV.181) одержимо, якщо знайдемо нетривіальний розв'язок рівняння (IV.184) з граничними умовами

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Отже, для визначення функцій $X(x)$ маємо задачу Штурма–Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

яку ми дослідили в попередньому прикладі про коливання струни. Там з'ясовано, що лише для значень параметра λ, які

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

існують нетривіальні розв'язки

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Знову розглянемо рівняння (IV.179). Будемо шукати його розв'язок у вигляді ряду Фур'є за власними функціями $X_n(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad \text{(IV.185)}$$

Запишемо функцію $f(x,t)$ також у вигляді ряду Фур'є

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{(IV.186)}$$

де

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{IV.187}$$

Підставивши (IV.185) і (IV.186) у рівняння (IV.179), будемо мати

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x = 0.$$

Цей вираз можна розглядати як розклад у ряд Фур'є нуля, що стоїть у правій частині. Тому всі коефіцієнти розкладу повинні бути нулями. Це дає таке рівняння для $u_n(t)$:

$$\dot{u}_n(t) + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{IV.188}$$

З початкової умови (IV.180) для $u_n(t)$ із (IV.185) маємо

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,$$

звідки випливає, що

$$u_n(0) = 0. \tag{IV.189}$$

Отже, задача звелась до розв'язування звичайного диференціального рівняння першого порядку за t (IV.188) замість вихідного рівняння (IV.179) з частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними (x,t). Таке зменшення кількості незалежних змінних є загальним правилом у разі застосування розкладів у ряд або інтеґрал Фур'є.

Рівняння (IV.188) можна розв'язати за допомогою функції Ґріна.

Запишемо для цього задане рівняння у вигляді

$$Lu_n(t) = f_n(t), \tag{IV.190}$$

де

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \tag{IV.191}$$

Визначимо функцію Ґріна $G(t-t')$ цього рівняння так:

$$LG(t-t') = \delta(t-t'). \tag{IV.192}$$

(Зазначимо, що таке означення відрізняється знаком від того, яке зроблено у формулі (IV.93). У літературі трапляються два означення.

Використаємо розклад δ-функції в інтеґрал Фур'є (формула (III.54))

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega, \tag{IV.193}$$

знайдемо

$$G(t-t') = L^{-1}\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{i\omega + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}\, d\omega. \tag{IV.194}$$

Переконаємось, що остання формула правильною. Для цього подіємо на неї оператором L (IV.191). Це приведе, з урахуванням (IV.193), до рівняння (IV.192).

Інтеґрал (IV.194) можна обчислити за допомогою теорії лишків. А саме — розглянемо інтеґрал по контуру C, зображеному на рис. IV.11, і використаємо теорему про лишки (I.121). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} J &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{i\omega + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega \\ &+ \lim_{R\to\infty}\int\limits_\Gamma F(\omega)\, d\omega = 2\pi i \operatorname*{res}_{\omega=\omega_0} F(\omega), \end{aligned} \tag{IV.195}$$

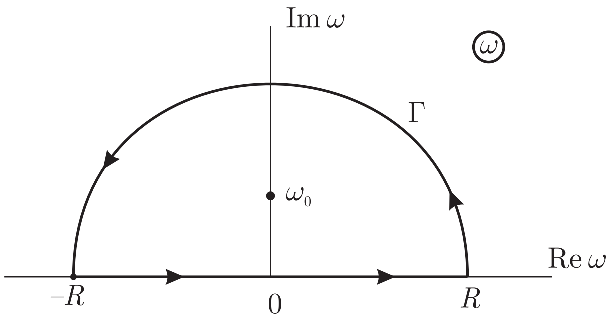


Рис. IV.11.

де

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega(t-t')}}{i\omega + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}, \quad \omega_0 = ia^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \qquad \text{(IV.196)}$$

З урахуванням $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} F(\omega)\,d\omega = 0$ одержимо

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega &= 2\pi i \operatorname*{res}_{\omega=\omega_0} F(\omega) = 2\pi i\cdot\frac{1}{i}e^{i\omega_0(t-t')}\\ &= 2\pi e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-t')}.\end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у (IV.194) і знайдемо функцію Ґріна для рівняння (IV.188):

$$G(t-t') = e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-t')}.$$

Для знаходження розв'язку рівняння (IV.188) за допомогою цієї функції Ґріна можна використати загальну формулу типу (IV.138), однак дещо модифіковану.

Оскільки в (IV.138) функція $\varphi(\xi)$ характеризує виділення тепла, яке відбулося в момент часу t=0 по всьому нескінченному стрижню, то там інтеґрування за ξ відбувається від $-\infty$ до $+\infty$. У випадку ж рівняння (IV.188) для визначення температури в момент часу t треба підсумувати внески від джерела, починаючи з моменту його вмикання t_0 до t. У задачі, яку ми тут розв'язуємо, t_0=0, про що свідчить початкова умова (IV.189). Тому розв'язок рівняння (IV.188), що задовольняє цю початкову умову, має вигляд

$$u_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-t')} f_n(t')\,dt'. \tag{IV.197}$$

Можна безпосередньо перевірити диференціюванням, що (IV.197) задовольняє рівняння (IV.188). Справді, з (IV.197) $\dot{u}_n(t)$ дорівнює підінтеґральній функції (IV.197) при $t = t'$ плюс інтеґрал, під знаком якого стоїть похідна за t від підінтеґральної функції, тобто дорівнює $f_n(t) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \cdot u_n(t)$, що збігається з (IV.188).

Підставивши далі (IV.197) у (IV.185), одержимо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-t')} f_n(t')\,dt' \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{IV.198}$$

Функція $f_n(t')$, що входить у цей вираз, визначена за формулою (IV.187).

Отже, задача знаходження $u(x,t)$ розв'язана.

Б. Тепер розглянемо процес поширення тепла у стрижні, на кінцях якого відбувається вільний теплообмін з навколишнім середовищем. Отже, маємо задачу знаходження розв'язку однорідного рівняння теплопровідності (IV.118) з початковою умовою (IV.137), проте з граничними умовами III типу

$$u_x(0,t) - ku(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + ku(l,t) = 0,$$

де k — коефіцієнт теплообміну. За методом Фур'є розв'язок шукаємо в вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

і знову (дивись А) отримаємо задачу про власні функції для рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

з граничними умовами

$$X'(0) - kX(0) = 0, \quad X'(l) + kX(l) = 0.$$

Запишемо загальний розв'язок цього рівняння

$$X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x + D\cos\sqrt{\lambda}x,$$

підставимо у граничні умови й одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\lambda}C - kD = 0, \\
&(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + k\sin\sqrt{\lambda}l)C + (-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + k\cos\sqrt{\lambda}l)D = 0.
\end{aligned}$$

Ця система двох однорідних рівнянь має нетривіальний розв'язок за умови, що визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -k \\ \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + k\sin\sqrt{\lambda}l & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + k\cos\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$2\,\mathrm{ctg}\,\mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}, \quad \text{де } \mu = \sqrt{\lambda}l, \quad p = kl > 0. \qquad \text{(IV.199)}$$

Щоб знайти множину дійсних коренів цього рівняння, побудуємо графіки кривих $y = 2\,\mathrm{ctg}\,\mu, \quad y = \dfrac{\mu}{p} - \dfrac{p}{\mu}$.

З рис. IV.12 видно, що в кожному з інтервалів $(0, \pi), (\pi, 2\pi), \ldots$ є додатний корінь рівняння, від'ємні корені за абсолютною величиною дорівнюють додатним. Позначимо через $\mu_1, \mu_2, \ldots$ додатні корені рівняння, тоді власні значення будуть (IV.199)

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

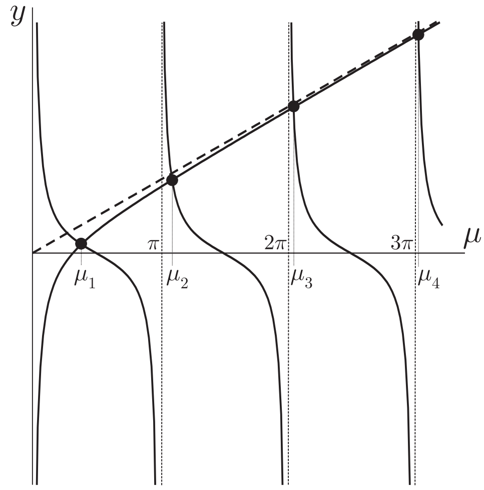


Рис. IV.12.

Кожному власному значенню відповідає власна функція

$$X_n(x) = D_n \left(\frac{p}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{l} x + \cos \frac{\mu_n}{l} x \right), \quad C_n = \frac{p}{\mu_n} D_n.$$

При $\lambda = \lambda_n$ загальний розв'язок рівняння

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$$

має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-(\mu_n a/l)^2 t}$$

і

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{p}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{l} x + \cos \frac{\mu_n}{l} x \right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} a\right)^2 t}, \quad B_n = A_n D_n.$$

Константи B_n визначаємо з початкової умови (IV.137)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{p}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{l} x + \cos \frac{\mu_n}{l} x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = \varphi(x).$$

Розкладемо $\varphi(x)$ за власними функціями $X_n(x)$ і перепишемо це рівняння так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n(x)||^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi,$$

$$||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(\xi)\, d\xi = \frac{l}{2} \frac{p(p+2)+\mu_n^2}{\mu_n^2},$$

звідки одержимо

$$B_n = \frac{2}{l} \frac{\mu_n^2}{p(p+2)+\mu_n^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi$$

і остаточно розв'язок однорідного рівняння теплопровідності з граничними умовами III типу

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\mu_n}{l} a)^2 t} \frac{(\mu_n \cos \frac{\mu_n}{l} x + p \sin \frac{\mu_n}{l} x)}{p(p+2)+\mu_n^2} \times \\ &\times \int_0^l \varphi(\xi) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n}{l} \xi + p \sin \frac{\mu_n}{l}\, \xi \right) d\xi. \end{aligned}$$

3. Еліптичний тип.

Метод відокремлення змінних особливо важливий у квантовій механіці, тому, як приклад, розглянемо рівняння Шрьодінґера для електрона в сферично-симетричному полі.

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) + \frac{2M}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi(\mathbf{r}) = 0. \qquad \text{(IV.200)}$$

Тут M — маса електрона; $\hbar$ — стала Планка, поділена на 2π; E — повна, а $U(r)$ — потенціальна енергія електрона; $\psi(\mathbf{r})$ — хвильова функція.

З урахуванням того, що $U(r)$ є функція тільки від відстані r до центра силового поля, цю задачу зручно розв'язувати в сферичній системі координат r, θ, φ. У цьому разі оператор Лапласа, як відомо з векторного аналізу, записують так:

$$\Delta = \nabla^2 = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}, \qquad \text{(IV.201)}$$

де

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \qquad \text{(IV.202)}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad \text{(IV.203)}$$

Спочатку відокремимо радіальну змінну r від кутових θ і φ, тому шукаємо розв'язок рівняння (IV.200) у вигляді

$$\psi(\mathbf{r}) = f(r)Y(\theta, \varphi). \qquad \text{(IV.204)}$$

Підставивши (IV.204) у (IV.200) і поділивши його на $\psi(\mathbf{r})$, одержимо

$$r^2\frac{\Delta_r f(r)}{f(r)} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2}[E - U(r)] = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \lambda, \qquad \text{(IV.205)}$$

звідки два рівняння для $f(r)$ і $Y(\theta, \varphi)$ мають вигляд

$$\Delta_r f(r) + \left\{\frac{2M}{\hbar^2}[E - U(r)] - \frac{\lambda}{r^2}\right\}f(r) = 0, \qquad \text{(IV.206)}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0. \qquad \text{(IV.207)}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$$

і позначивши $rf(r) = R(r)$ одержимо для цієї функції рівняння

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \left\{\frac{2M}{\hbar^2}[E - U(r)] - \frac{\lambda}{r^2}\right\}R = 0. \qquad \text{(IV.208)}$$

Функцію $f(r)$ (або $R(r)$) називають ***радіальною частиною хвильової функції***.

Змінні θ і φ у рівнянні (IV.207) також можна відокремити. Справді, будемо шукати розв'язок у вигляді $\Upsilon(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Підставимо це в (IV.207), помножимо на $\sin^2\theta$ і перенесемо вираз, залежний від φ, праворуч. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \nu, \qquad \text{(IV.209)}$$

де ν — константа.

З (IV.209) одержимо рівняння для Θ і для Φ:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \qquad \text{(IV.210)}$$

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + (\lambda\sin^2\theta - \nu)\Theta = 0. \qquad \text{(IV.211)}$$

Отже, методом відокремлення змінних нам вдалось звести рівняння Шрьодінґера (IV.200) до трьох звичайних диференціальних рівнянь: (IV.208), (IV.210) і (IV.211).

4. Загальна задача Штурма–Ліувілля.

Ми застосували метод відокремлення змінних до трьох крайових задач для найпростіших рівнянь математичної фізики й у кожній з них одержали задачу Штурма–Ліувілля на власні функції і власні значення. Якщо ж застосувати цей метод до крайових задач для рівнянь (IV.8), (IV.11), (IV.17), то одержимо загальну задачу Штурма–Ліувілля:

знайти значення λ (власні значення), за яких однорідне рівняння

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]X(x) = 0$$

з однорідними граничними умовами

$$\begin{aligned}
&\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad 0 < x < l, \\
&\gamma X(l) + \delta X'(l) = 0
\end{aligned}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — сталі, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$) має нетривіальні розв'язки $X(x)$ (власні функції). Наведемо деякі загальні властивості власних функцій і власних значень.

1. Існує зліченна множина власних значень $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, яким відповідають нетривіальні розв'язки задачі — власні функції $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$

2. При $q \geq 0$ всі власні значення λ_n додатні.

3. Власні функції $X_n(x)$ і $X_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональні між собою з вагою $\rho(x)$ на відрізку $[0, l]$

$$\int\limits_0^l \rho(x)\, X_m(x) X_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n. \tag{IV.212}$$

Доведемо цю властивість. Нехай λ_1 і λ_2 — два різні власні значення, $X_1(x)$ і $X_2(x)$ — відповідні їм власні функції, так що

$$[p(x)X_1'(x)]' + [\lambda_1 \rho(x) - q(x)]X_1(x) = 0,$$

$$[p(x)X_2'(x)]' + [\lambda_2 \rho(x) - q(x)]X_2(x) = 0.$$

Помножимо першу рівність на $X_2(x)$, другу — $X_1(x)$ і віднімемо одну від одної почленно:

$$\begin{aligned}
&X_2(x)[p(x)X_1'(x)]' - X_1(x)[p(x)X_2'(x)]' + \\
&+(\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)X_1(x)X_2(x) = 0
\end{aligned}$$

або

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\rho(x)X_1(x)X_2(x) + [p(x)(X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x))]' = 0.$$

Інтеґруючи цю рівність за x у межах від 0 до l, одержимо

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int\limits_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,dx =$$
$$= -p(x)[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x)]\Big|_0^l.$$

Беручи до уваги граничні умови, переконаємось, що

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int\limits_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,dx = 0.$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,dx = 0.$$

Унаслідок лінійності й однорідності рівняння і граничних умов очевидно, що тому ж самому λ_n можуть відповідати функції $X_n(x)$, які відрізняються множником. Щоб позбутися невизначеності у виборі множника, треба вимагати, щоб власні функції були нормовані:

$$||X_n(x)||^2 = \int\limits_0^l \rho(x)X_n^2(x)\,dx = 1. \qquad \text{(IV.213)}$$

Отже, власні функції утворюють ортонормовану систему

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_m(x)X_n(x)\,dx = \delta_{nm}, \qquad \text{(IV.214)}$$

де δ_{nm} — символ Кронекера[11].

[11]Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker, 1823–1891) — німецький математик і логік.

4. ***Теорема розкладності***.

Довільну функцію $f(x) \in C^1[0, l]$, що задовольняє однорідні граничні умови, можна розкласти у рівномірно збіжний ряд за власними функціями

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$
$$f_n = \frac{1}{||X_n(x)||^2} \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x)\, dx. \tag{IV.215}$$

Систему функцій $X_n(x)$ називають ***повною***.

3.6. Метод потенціалу

У деяких випадках крайові задачі або задачу Коші для диференціальних рівнянь можна звести до задач знаходження розв'язків відповідних інтеґральних рівнянь. Можливість такого зведення (редукції) часто використовують, щоб знайти наближений числовий розв'язок задачі, зокрема, крайових задач для областей складної форми. Адже методом відокремлення змінних і методом функцій Ґріна можна одержати явний вираз для розв'язків крайових задач лише у випадку областей простої форми.

Ідея зведення крайових задач до інтеґральних рівнянь полягає в тому, що розв'язки задач шукають у вигляді деяких інтеґралів спеціального типу, наприклад, потенціалів з невідомими густинами розподілу мас, зарядів тощо. Ось чому такий спосіб розв'язування крайових задач називають методом потенціалів. Запропонували цей метод незалежно Д. Ґрін (1828), К. Ґаусс (1840), однак ідея потенціалу належить Ж. Лаґранжу (1775) і П. Лапласу (1782).

Перш ніж навести приклад застосування цього методу, розглянемо деякі потенціали та їхні властивості.

1. Об'ємний потенціал.

Нехай у точках $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_n$ містяться заряди $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Потенціал $u(M)$ електростатистичного поля, створеного цими зарядами, у довільній точці M тривимірного простору

$$u(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_{M\bar{M}_i}}. \tag{IV.216}$$

Якщо в області D розподілені заряди з густиною $\rho(M)$, то потенціал поля $u(M)$, створеного цими зарядами, має вигляд

$$u(M) = \int\limits_D \frac{\rho(\bar{M})}{r_{M\bar{M}}}\, d\Omega_{\bar{M}}, \tag{IV.217}$$

де $\Omega_{\bar{M}}$ — елемент об'єму, що містить точку $\bar{M}$. Інтеґрал (IV.217) називають ***об'ємним потенціалом***. Функція $u(M)$ — неперервна разом із частинними похідними першого порядку за координатами M.

Об'ємний потенціал — гармонічна функція поза областю D, у якій розташовані заряди (маси), тобто $u(M)$ має задовольняти рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{IV.218}$$

Щоб довести цю властивість, підставимо (IV.217) у (IV.218) і внесемо оператор Лапласа під знак інтеґрала:

$$\Delta u = \Delta \left(\int\limits_D \frac{\rho(\bar{M})}{r_{M\bar{M}}}\, d\Omega_{\bar{M}} \right) = \int\limits_D \rho(\bar{M}) \Delta \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\Omega_{\bar{M}} = 0,$$

оскільки для точок M, що не належать D, $\Delta \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) = 0$ (формула (IV.107)).

Якщо ж точки M належать D, то $\Delta \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) = -4\pi\delta(M, \bar{M})$ і

$$\Delta u = \Delta \left(\int\limits_D \frac{\rho(\bar{M})}{r_{M\bar{M}}}\, d\Omega_{\bar{M}} \right) = \int\limits_D \rho(\bar{M}) \Delta \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\Omega_{\bar{M}} = -4\pi\rho(M).$$

Отже, всередині області D об'ємний потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\rho. \tag{IV.219}$$

2. Поверхневі потенціали.

Нехай заряди (маси) розподілені по поверхні S з густиною $\rho(M)$. Потенціал поля, створеного цими зарядами (масами),

$$v(M) = \int\limits_S \frac{\rho(\bar{M})}{r_{M\bar{M}}} d\sigma_{\bar{M}}, \tag{IV.220}$$

де $d\sigma_{\bar{M}}$ — елемент поверхні S, що містить точку $\bar{M}$. Цей поверхневий інтеґрал називають ***потенціалом простого шару***. Функція $v(M)$ — гармонічна функція всюди, крім точок поверхні S, тому що

$$\Delta v = \int\limits_S \rho(\bar{M}) \Delta \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\sigma_{\bar{M}} = 0.$$

Якщо на двобічній поверхні S розподілені диполі з густиною моментів $\nu(\bar{M})$ так, що їхні осі у кожній точці збігаються з додатним напрямом нормалі, то потенціал поля, створеного цими диполями,

$$w(M) = \int\limits_S \nu(\bar{M}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\sigma_{\bar{M}}. \tag{IV.221}$$

Цей інтеґрал називають ***потенціалом подвійного шару***. Ця назва пов'язана з такими міркуваннями. Нехай S — двобічна поверхня з фіксованим додатним напрямом нормалі. Уявимо тепер, що на додатному напрямі нормалі в кожній точці відкладено відрізки довжиною h. Геометричне місце кінців цих відрізків утворює поверхню S_1, розташовану від S на відстані h. Нехай на поверхні S розподілені від'ємні заряди з густиною $\frac{1}{h}\nu(\bar{M})$, а на поверхні S_1 — додатні заряди з тією ж густиною (рис. IV.13). Отже, ми будемо мати "подвійний шар" зарядів протилежних знаків, який можна розглядати як сукупність диполів, розташованих на поверхнях S і S_1 з густиною $\frac{1}{h}\nu(\bar{M})$. Потенціал поля, створеного диполем, що "спирається" на елементи $d\sigma$ поверхонь S і S_1, дорівнює $\nu(\bar{M})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}}\right) d\sigma$. Потенціал поля, створеного всіма диполями, становить

$$\int\limits_S \nu(\bar{M})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}}\right) d\sigma_{\bar{M}}.$$

Якщо $h \to 0$, то одержимо "подвійний шар" на поверхні S, потенціал якого обчислюють за формулою (IV.221). Потенціал подвійного шару можна записати ще й так:

$$w(M) = \int\limits_S \nu(\bar{M})\frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma_{\bar{M}},$$

тому що

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}}\right) = \frac{\cos\varphi}{r^2_{M\bar{M}}},$$

де φ — кут між додатним напрямом нормалі до поверхні S в точці $\bar{M}$ і відрізком $M\bar{M}$.

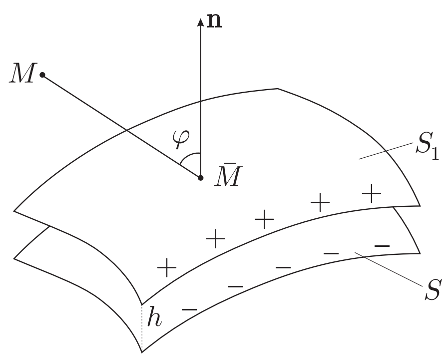


Рис. IV.13.

У точках M, що не належать поверхні S, потенціал подвійного шару, як і потенціал простого шару, є гармонічною функцією

$$\begin{aligned}\Delta w &= \int\limits_S \nu(\bar M)\Delta\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_{M\bar M}}\right)\right] d\sigma_{\bar M} \\ &= \int\limits_S \nu(\bar M)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left[\Delta\left(\frac{1}{r_{M\bar M}}\right)\right] d\sigma_{\bar M} = 0. \qquad \text{(IV.222)}\end{aligned}$$

Потенціал подвійного шару має ще одну важливу властивість. Якщо густина моментів $\nu(\bar M)$ неперервна на S, то потенціал подвійного шару в довільній точці M_0 поверхні S є розривною функцією зі стрибком, рівним $4\pi\nu(M_0)$

$$w_{\text{в}}(M_0) - w_{\text{з}}(M_0) = 4\pi\nu(M_0),$$

де $w_{\text{в}}(M_0)$ — граничне значення функції $w(M)$ в точці M_0, коли точка M прямує до M_0 з внутрішнього боку поверхні, $w_{\text{з}}(M_0)$ — граничне значення функції; $w(M)$ в точці M_0, коли M прямує до M_0 з зовнішнього боку поверхні. Крім того,

$$\begin{aligned} w_{\text{в}}(M_0) &= w(M_0) + 2\pi\nu(M_0), \\ w_{\text{з}}(M_0) &= w(M_0) - 2\pi\nu(M_0). \end{aligned} \qquad \text{(IV.223)}$$

Розглянуті властивості потенціалів застосуємо для розв'язування крайової задачі Діріхле

$$\Delta u = f(M), \qquad \text{(IV.224)}$$

$$u|_S = \varphi(M) \qquad \text{(IV.225)}$$

в області D з границею S. Частинним розв'язком рівняння (IV.224) є об'ємний потенціал (див. (IV.219))

$$u_1(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{f(\bar M)}{r_{M\bar M}}\, d\Omega_{\bar M}. \qquad \text{(IV.226)}$$

Тому запишемо розв'язок задачі як суму

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M), \tag{IV.227}$$

де $u_2(M)$ — розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} &\Delta u_2 = 0, \\ &u_2\big|_S = \varphi(M) - u_1(M)\big|_S = F(M). \end{aligned} \tag{IV.228}$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u_2(M) = w(M) = \int\limits_S \nu(\bar{M}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\sigma_{\bar{M}}$$

з відповідно підібраною функцією $\nu(\bar{M})$. Для будь-якої функції $\nu(\bar{M})$ цей потенціал — гармонічна функція (формула (IV.222)). Врахуємо, що в точках M на поверхні S $w_{\text{в}}(M) = F(M)$, і формулу (IV.223), перепишемо граничну умову (IV.228) так:

$$w(M) + 2\pi\nu(M) = F(M),$$

або

$$\int\limits_S \nu(\bar{M}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_{M\bar{M}}} \right) d\sigma_{\bar{M}} + 2\pi\nu(M) = F(M). \tag{IV.229}$$

Розв'язком крайової задачі (IV.224), (IV.225) буде потенціал подвійного шару з такою густиною $\nu(M)$, що задовольняє умову (IV.229).

Отже, задача зводиться до розв'язування інтеґрального рівняння (IV.229) відносно $\nu(M)$.

3.7. Метод інтеґральних перетворень

Загальна схема застосування інтеґрального перетворення до задач математичної фізики така: за допомогою інтеґрального перетворення шуканого розв'язку задачі вилучають диференціювання за однією зі зміних і для його зображення одержують простішу задачу. Знайшовши зображення задачі за допомогою оберненого перетворення, "відновлюють" уже шуканий розв'язок.

Ми розглянемо інтеґральне перетворення Фур'є та інтеґральне перетворення Лапласа, означення і властивості яких наведені у розділі II (див. пункт 2.6).

1. Розв'яжемо методом інтеґрального перетворення Фур'є задачу Коші для неоднорідного одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{IV.230}$$

з однорідними початковими умовами

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{IV.231}$$

Використаємо інтеґральне перетворення Фур'є за змінною x

$$U(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x,t)\, dx, \tag{IV.232}$$

зведемо вихідну задачу до задачі

$$U_{tt} + (a\xi)^2 U = F(\xi,t), \tag{IV.233}$$

$$U(\xi,0) = 0, \quad U_t(\xi,0) = 0, \tag{IV.234}$$

де

$$F(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x,t)\, dx.$$

Отже, для зображення $U(\xi,t)$ отримано звичайне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язок його дорівнює сумі розв'язку однорідного рівняння $U^{(1)}(\xi,t)$ і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $U^{(2)}(\xi,t)$:

$$U(\xi,t) = U^{(1)}(\xi,t) + U^{(2)}(\xi,t).$$

Підставимо початкові умови, знайдемо, що $U^{(1)}(\xi, t) = 0$,

$$U^{(2)}(\xi, t) = \frac{1}{a\xi} \int\limits_0^t F(\xi, \tau) \sin\, a\xi(t - \tau)\, d\tau. \tag{IV.235}$$

Зробимо обернене перетворення Фур'є

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} U(\xi, t)\, d\xi,$$

тоді з (IV.235) одержимо

$$\begin{aligned} u(x, t) \quad &= \quad \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\xi} \times \\ &\times \quad \left\{ e^{i\xi[x + a(t-\tau)]} - e^{i\xi[x - a(t-\tau)]} \right\} F(\xi, \tau)\, d\xi, \end{aligned}$$

де враховано, що

$$\sin a\xi(t - \tau) = \frac{1}{2i} \left[e^{i\xi(t-\tau)} - e^{-i\xi(t-\tau)} \right].$$

Оскільки

$$\frac{1}{i\xi} \left\{ e^{i\xi[x + a(t-\tau)]} - e^{i\xi[x - a(t-\tau)]} \right\} = \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{i\xi\eta}\, d\eta,$$

то

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\eta} F(\xi, \tau)\, d\xi \right\} d\eta,$$

або остаточно

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau)\, d\eta. \tag{IV.236}$$

2. Інтеґральне перетворення Лапласа використаємо для розв'язування рівняння теплопровідності з однією неоднорідною граничною умовою. Розв'язок такої задачі описує температуру в середині області, якщо відома її залежність від часу на границі області. Наприклад, розглянемо задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{IV.237}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = \mu(t), \tag{IV.238}$$

$$u(x,0) = 0. \tag{IV.239}$$

Знайдемо спочатку розв'язок простішої задачі, коли температура на кінці стала (приймемо, що вона дорівнює одиниці)

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{IV.240}$$

$$w(0,t) = 0, \qquad w(l,t) = 1, \tag{IV.241}$$

$$w(x,0) = 0. \tag{IV.242}$$

Зробимо інтеґральне перетворення Лапласа за змінною t:

$$w(x,t) \to W(x,p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} w(x,t)\, dt, \tag{IV.243}$$

тоді замість задачі (IV.240)–(IV.242) одержимо задачу

$$W_{xx} - \frac{p}{a^2} W = 0, \tag{IV.244}$$

$$W(0,p) = 0, \quad W(l,p) = \frac{1}{p}, \tag{IV.245}$$

де враховано, що

$$w_t(x,t) \to pW(x,p) - w(x,0) = pW(x,p),$$

$$w_{xx}(x,t) \to W_{xx}(x,p).$$

Розв'язок рівняння (IV.244) такий:

$$W(x,p) = A(p) e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}} + B(p) e^{\frac{-\sqrt{p}x}{a}}.$$

Підстановка його в граничні умови (IV.245) дає

$$W(x,p) = \frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\,l\right)}.$$

Щоб знайти $w(x,t)$, зробимо обернене перетворення Лапласа й отримаємо

$$w(x,t) = x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad \text{(IV.246)}$$

Далі за допомогою перетворення Лапласа задачу (IV.237)–(IV.239) зведемо до задачі

$$U_{xx}(x,p) - \frac{p}{a^2}U(x,p) = 0,$$
$$U(0,p) = 0, \quad U(l,p) = F(p),$$

розв'язок якої має вигляд

$$U(x,p) = F(p)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\,l\right)}.$$

Цей вираз поділимо і помножимо на p:

$$U(x,p) = p\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\,l\right)}\right]F(p),$$

щоб за формулою Дюамеля (II.18) знайти

$$\left\{p\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\,l\right)}\right]F(p)\right\} \to u(x,t) =$$

$$= w_t(x,t) * f(t) = \int\limits_0^t w_t(x,t-\tau)f(\tau),d\tau$$

або після інтеґрування частинами

$$u(x,t) = \int_0^t w(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau + f(0) w(x,t). \qquad \text{(IV.247)}$$

Отже, розв'язок $u(x,t)$ задачі з залежними від часу граничними умовами виражено через розв'язок $w(x,t)$ задачі зі сталими граничними умовами. Такий спосіб розв'язування крайової задачі з залежною від часу граничною умовою $u(0,t) = f(t)$, коли спочатку знаходять розв'язок задачі зі сталою граничною умовою $w(0,t) = 1$, а потім — за формулою (IV.247) розв'язок $u(x,t)$, називають ***принципом Дюамеля***.

Розділ V.

Спеціальні функції

Спеціальні функції — це умовна назва групи функцій, які не виражають через елементарні функції, тобто їх не можна записати як комбінації поліномів, тригонометричних і гіперболічних (а також обернених тригонометричних і гіперболічних) функцій, експоненти й логарифма. Спеціальні функції зазвичай зображають у вигляді рядів або інтеґралів.

Ці функції відіграють важливу роль у різних галузях науки, завдяки чому їхні властивості детально вивчено, а для обчислень використовують таблиці й спеціальні алгоритми розрахунків, реалізовані в різних комп'ютерних програмах.

Більшість спеціальних функцій є розв'язком диференціальних рівнянь (переважно лінійних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами) або інтеґралами від елементарних функцій.

Переважно спеціальні функції розглядають як функції комплексної змінної, що потребує вивчення їхніх властивостей, пов'язаних з аналітичністю, як-от особливих точок тощо.

Побудова послідовної теорії спеціальних функцій припала переважно на другу половину XIX ст., що пов'язано насамперед із вивченням еліптичних функцій і ортогональних поліномів.

§ 1. Гамма-функція і функції, пов'язані з нею

1.1. Гамма-функція

Гамма-функція (інтеґрал Ейлера другого роду) визначена таким виразом:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{V.1}$$

Ця функція аналітична в усій комплексній площині, за винятком точки $z = 0$ і від'ємних цілих значень. З'ясуємо, який тип мають ці особливості. Для цього розіб'ємо перший інтеґрал в означенні (V.1) на дві частини:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 t^{z-1}\, e^{-t}\, dt + \int\limits_1^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = f(z) + g(z).$$

Легко побачити, що функція $g(z)$ є цілою. У першому доданку розкладемо e^{-t} в ряд і почленно проінтеґруємо:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int\limits_0^1 t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = \int\limits_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^n}{n!}\, dt = \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n}\bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n!\,(z+n)}. \end{aligned}$$

Отже, $\Gamma(z)$ має прості полюси в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$, причому

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots . \tag{V.2}$$

Графік Γ-функції для дійсних значень арґумента наведено на рис. V.1.

Існують також означення гамма-функції через безмежні добутки, отримані Ґауссом і Веєрштрассом. За Ґауссом,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}. \tag{V.3}$$

Еквівалентність цього означення виразові (V.1) можна показати так. Розглянемо інтеґрал

$$\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt, \qquad n\in\mathbb{N}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Інтеґруватимемо його частинами:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \\
&= \left[\begin{array}{ll} u = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n, & du = -\frac{n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \\ dv = t^{z-1}dt, & v = \frac{1}{z}t^z \end{array}\right] = \\
&= \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{z}t^z\Big|_0^n}_{=0} + \frac{n}{n\,z}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt = \\
&= \frac{n}{n\,z}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt = \left[\begin{array}{l} u = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}, \\ du = -\dfrac{n-1}{n}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-2} \\ dv = t^z dt, \quad v = \dfrac{1}{z+1}t^{z+1} \end{array}\right] = \\
&= \frac{n(n-1)}{n\cdot n\,z(z+1)}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{z+1}\,dt.
\end{aligned}$$

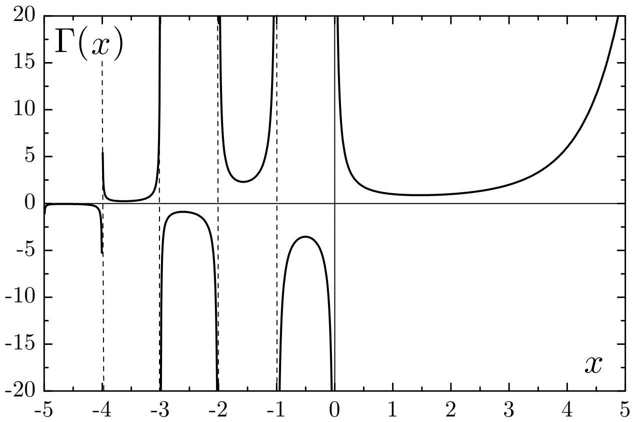


Рис. V.1. Гамма-функція.

На n-му кроці матимемо

$$\frac{n(n-1)\dots 1}{n^n\, z(z+1)\dots(z+n-1)}\int\limits_0^n t^{z+n-1}\,dt =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots 1}{n^n\, z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}\, n^{z+n}.$$

Тобто

$$\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Згадавши одну з “чудових границь”

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t},$$

отримаємо означення Ґаусса. Зазначимо, що строгий граничний перехід у цьому інтеґралі потребує насправді детальнішого математичного обґрунтування, яке ми тут наводити не будемо.

Для того, щоб отримати означення Веєрштрасса, "перевернемо" означення (V.3) і запишемо його в такому вигляді:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\ln n},$$

де співмножники факторіала $n! = n(n-1)\ldots 2\cdot 1$ внесені в дужки біля z. Цей вираз можна перетворити й так:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{n\to\infty}\left[(1+z)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \times e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\right],$$

Вираз у дужках в показнику останньої експоненти — це ***стала Ейлера*** (або ***Ейлера–Маскероні***[1]), її часто позначають γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.5772156649\ldots \tag{V.4}$$

Отже, остаточно матимемо

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{V.5}$$

Звідси видно, що $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ — ціла функція, а тому $\Gamma(z)$ не має нулів у всій комплексній площині.

З інтеґрального означення (V.1) можна отримати функціональне рівняння для гамма-функції. Проінтеґруємо (V.1) частинами:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int_0^{\infty} e^{-t}t^z\,dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

[1] Лоренцо Маскероні (Lorenzo Mascheroni, 1750–1800) — італійський математик.

Тобто

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{V.6}$$

Значення гамма-функції при $z = 1$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = 1. \tag{V.7}$$

З урахуванням (V.6) матимемо для цілих значень арґумента

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= \ldots = n(n-1)\ldots 1\Gamma(1) = n!.\end{aligned}$$

Принагідно зазначимо, що добутки типу $a(a-1)\ldots(a-n+1)$ часто трапляються в теорії спеціальних функцій і комбінаториці. Їх позначають ***символами Похгаммера***[2]

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \tag{V.8}$$

Значення гамма-функції (а отже, і факторіала) за великих значень арґумента можна знайти за ***формулою Стірлінґа***[3]

$$\Gamma(z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z. \tag{V.9}$$

[2]Лео Авґуст Похгаммер (Leo August Pochhammer, 1841–1920) — прусський математик.

Зазвичай у комбінаториці позначення $(a)_n$ використовують для ***"спадного (нижнього) факторіала"***

$$(a)_n = a(a-1)\ldots(a-n+1) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)},$$

натомість $(a)^n$ позначає ***"висхідний (верхній) факторіал"***

$$(a)^n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

[3]Джеймс Стірлінґ (James Stirling, 1692–1770) — шотландський математик.

З'ясуємо, як довести цю формулу ***методом перевалу***.

Загальна схема методу така. Нехай $f(x)$ — деяка (двічі диференційовна) функція, M — велике число. Розглядатимемо інтеґрал

$$I = \int_a^b e^{Mf(x)}\,dx.$$

Нехай $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ має єдину точку ***максимуму*** x_0. Розкладемо $f(x)$ у ряд в околі x_0:

$$f(x) \simeq f(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)|(x-x_0)^2.$$

Тоді інтеґрал

$$I \simeq e^{Mf(x_0)} \int_a^b e^{-M|f''(x_0)|(x-x_0)^2/2}\,dx.$$

Оскільки число M велике, то підінтеґральна функція швидко спадає з віддаленням від точки x_0, тому межі інтеґрування можна замінити на $-\infty$ і $+\infty$:

$$I \simeq e^{Mf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M|f''(x_0)|(x-x_0)^2/2}\,dx.$$

Обчислимо ґауссовий інтеґрал, остаточно отримаємо

$$I \simeq e^{Mf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}}.$$

Застосуємо цей вираз до обчислення $N!$:

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^N dt.$$

Зробимо заміну змінних

$$t = Nx, \qquad dt = N\,dx,$$

матимемо

$$\begin{aligned} N! &= \int\limits_0^\infty e^{-Nx}(Nx)^N N\,dx = N^{N+1}\int\limits_0^\infty e^{-Nx}x^N\,dx = \\ &= N^{N+1}\int\limits_0^\infty e^{N(\ln x - x)}\,dx. \end{aligned}$$

Тобто

$$f(x) = \ln x - x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Точка максимуму

$$x_0 = 1, \qquad f''(x_0) = -1,$$

тому

$$N! \simeq N^{N+1}e^{-N}\sqrt{\frac{2\pi}{N}} = \sqrt{2\pi N}\,\left(\frac{N}{e}\right)^N,$$

звідки очевидно отримуємо формулу (V.9).

На рис. V.2 зображено поведінку абсолютного значення Γ-функції комплексного арґумента $z = x + iy$.

З означення (V.5) виводять цікаве співвідношення для гамма-функції:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^\infty\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

Цей безмежний добуток пов'язаний із синусом[4]:

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^\infty\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

[4]Див. наприклад, *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. — Москва : Наука, 1969. — Т. 2. — С. 377.

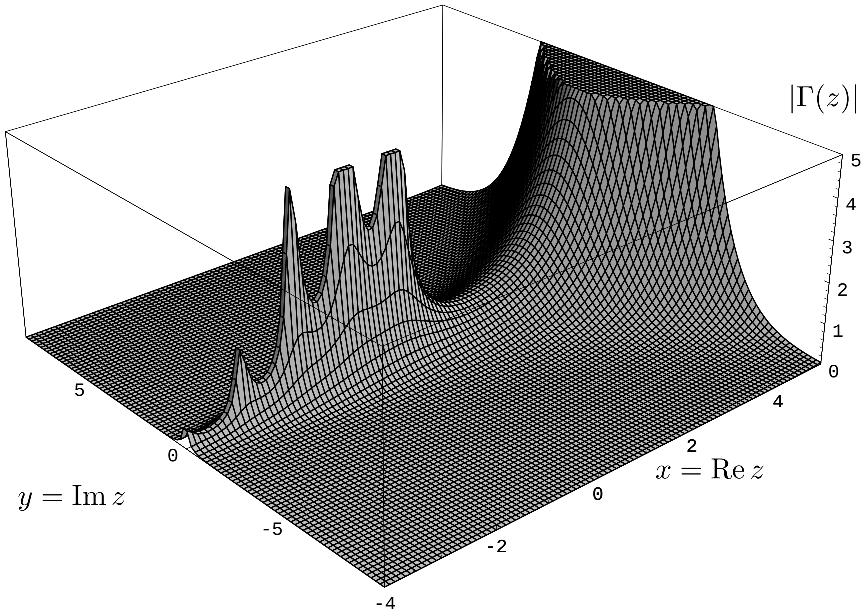


Рис. V.2.

Отже,

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z},$$

або оскільки $\Gamma(-z+1) = -z\Gamma(-z)$, то остаточно маємо

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \qquad \text{(V.10)}$$

Приймемо $z = 1/2$, звідси можемо знайти одне зі значень гамма-функції, у якому часто виникає потреба:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

З урахуванням (V.6) звідси можна отримати значення Γ-функції для півцілих значень арґумента:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Для жодних інших, відмінних від цілих і півцілих, значень арґумента Γ-функцію не можна звести до елементарних функцій.

Гамма-функцію можна також зобразити за допомогою контурного інтеґрала

$$\int\limits_C e^t t^{-z}\,dt, \tag{V.11}$$

де контур C починається в точці $-\infty$ (на дійсній осі), проходить по нижньому березі розрізу $(-\infty,-\rho)$, обходить початок координат проти годинникової стрілки по колу $t=\rho e^{i\varphi}$ до точки $-\rho$ на верхньому березі цього розрізу і по ньому повертається у точку $-\infty$ (рис. V.3). Ззначимо, що початкове і кінцеве значення арґумента t дорівнюють $-\pi$ і π, відповідно.

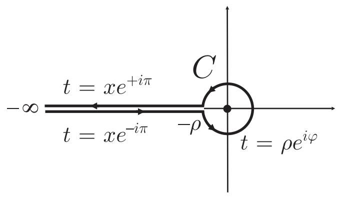


Рис. V.3. Контур інтеґрування у формулі (V.11).

Тоді

$$\begin{aligned}\int\limits_C e^t t^{-z}\,dt &= \int\limits_\infty^\rho \exp\left(xe^{-i\pi}\right)x^{-z}e^{+i\pi z}d\left(xe^{-i\pi}\right)+I+\\ &+\int\limits_\rho^\infty \exp\left(xe^{+i\pi}\right)x^{-z}e^{-i\pi z}d\left(xe^{+i\pi}\right),\end{aligned}$$

де інтеґрал по колу $t = \rho e^{i\varphi}$ позначено I. Очевидно, що $I \sim \rho^{1-z}$, тому $I \to 0$, коли $\rho \to 0$ і $\operatorname{Re} z < 1$.

Далі у границі $\rho \to 0$

$$\int\limits_C e^t t^{-z}\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{-z} \left(e^{+i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) dx = 2i \sin(\pi z)\Gamma(1-z).$$

Звідси за допомогою (V.10) отримуємо так зване ***зображення Ганкеля*** для гамма-функції:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^t t^{-z}\, dt. \tag{V.12}$$

Далі отримаємо ***формулу множення Ґаусса*** для гамма-функції кратного арґумента:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) \tag{V.13}$$

на прикладі $n = 2$.

Насамперед, застосувавши до $\Gamma(2z)$ формулу (V.3), отримаємо у знаменнику вираз

$$\begin{aligned} &2z(2z+1)(2z+2)(2z+3)\dots(2z+n) \\ &\quad = 2^{n+1} z \left(z + \frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z + \frac{3}{2}\right)\dots\left(z + \frac{n}{2}\right), \end{aligned}$$

який наводить на думку про зв'язок $\Gamma(2z)$ з добутком $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$. За формулою (V.3) маємо

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1/2}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + 1\right)\dots\left(z + \frac{1}{2} + n\right)},$$

а також, із заміною n на $2n$,

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,(2n)^{2z}}{2z(2z+1)(2z+2)\dots(2z+n)(2z+n+1)\dots(2z+2n)}.$$

Розглянемо частку

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 n^{2z+1/2}\, 2z(2z+1)(2z+2)\dots(2z+2n-1)(2z+2n)}{(2n)!\,(2n)^{2z} z(z+1)\dots(z+n)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 n^{2z+1/2}\, z(2z+1)(z+1)(2z+3)\dots(2z+2n-1)(z+n)2^{2n+2}}{(2n)!\,(2n)^{2z} z(z+1)\dots(z+n)\,(2z+1)\,(2z+3)\dots(2z+2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2 n^{1/2}}{(2n)!2^{2z}(2z+2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2 2n\, n^{-1/2}}{(2n)!2^{2z}(2z+2n+1)}.$$

Скомпенсуємо залежність від z у знаменнику:

$$2^{2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(2z+2n+1)}}_{=1}.$$

Оскільки правий бік цієї рівності не залежить від змінної z, то значення границі можна обчислити, наприклад, прийнявши $z = 1/2$ у лівому боці. Матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}.$$

Отже, ми отримали ***формулу подвоєння*** Γ***-функції***:

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{V.14}$$

яку ще називають ***формулою Лежандра***[5]. Такий спосіб виведення нескладно узагальнити на випадок довільних цілих n, який описує формула (V.13).

Якщо в означенні Γ-функції нижню або верхню межу інтеґрування замінити на деяку змінну, то відповідний інтеґрал виразимо через ***неповні гамма-функції***:

$$\gamma_a(x) \equiv \gamma(a,x) = \int\limits_0^x t^{a-1}\, e^{-t}\, dt, \tag{V.15}$$

[5]Адрієн-Марі Лежандр (Adrien-Marie Legendre, 1752–1833) — французький математик.

$$\Gamma_a(x) \equiv \Gamma(a,x) = \Gamma(a) - \gamma(a,x) = \int\limits_x^{\infty} t^{a-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad \text{(V.16)}$$

З них за допомогою незначної модифікації можна отримати однозначну аналітичну функцію за двома змінними (a та x)

$$\gamma^*(a,x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)}\, \gamma(a,x), \qquad \text{(V.17)}$$

яка не має особливих точок у всій скінченній комплексній площині.

1.2. Бета-функція

Бета-функція (інтеґрал Ейлера першого роду) визначена виразом

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}\, (1-t)^{y-1}\, dt \qquad \text{(V.18)}$$

або, після заміни змінної $u = \dfrac{t}{1-t}$,

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du. \qquad \text{(V.19)}$$

До цієї функції зводиться також інтеґрал

$$2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2x-1}\, (\cos\varphi)^{2y-1}\, d\varphi = \mathrm{B}(x,y), \qquad \text{(V.20)}$$

який отримуємо з (V.18) шляхом простої заміни змінних $t = \sin^2\varphi$.

З'ясуємо далі зв'язок між бета- так гамма-функціями. Використовуючи означення (V.1), запишемо добуток

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int\limits_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\,du \int\limits_0^\infty e^{-v} v^{y-1}\,dv.$$

Після заміни змінних $u = \eta^2$, $v = \zeta^2$ матимемо

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int\limits_0^\infty e^{-\eta^2}\eta^{2x-1}\,d\eta \int\limits_0^\infty e^{-\zeta^2}\zeta^{2y-1}\,d\zeta = \\ &= 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(\eta^2+\zeta^2)}\eta^{2x-1}\zeta^{2y-1}\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned}$$

Далі для обчислення цього двократного інтеґрала вводимо полярні координати $\eta = r\cos\varphi$, $\zeta = r\sin\varphi$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y-1)}\,d(r^2)\; 4\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2x-1}\,(\sin\varphi)^{2y-1}\,d\varphi \\ &= 2\Gamma(x+y)\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2x-1}\,(\sin\varphi)^{2y-1}\,d\varphi = \Gamma(x+y)\mathrm{B}(x,y).\end{aligned}$$

Звідси отримуємо зв'язок

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{V.21}$$

1.3. Дигамма- і полігамма функції

Логарифмічна похідна гамма-функції (псі-функція, або дигамма-функція):

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{V.22}$$

Підставляючи в це означення безмежний добуток Ґаусса (V.3), отримаємо

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \lim_{n\to\infty} \Big[\ln n! + z \ln n - \ln z - \ln(z+1) - \ldots - \ln(z+n) \Big] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\ln n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n} \right]. \qquad \text{(V.23)}$$

Звідси, враховуючи означення сталої Ейлера (V.4), будемо мати часткове значення

$$\psi(1) = -\gamma. \qquad \text{(V.24)}$$

Похідні від дигамма-функції називають ***полігамма-функціями***:

$$\begin{aligned} \psi^{(k)}(z) &= \frac{d^k}{dz^k}\psi(z) = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \ln\Gamma(z) \\ &= (-1)^{k+1} \int\limits_0^\infty \frac{t^k\, e^{-zt}}{1-e^{-t}}\, dt. \end{aligned} \qquad \text{(V.25)}$$

Еквівалентність цих рівностей доведемо, спираючись на розклад (V.23). Справді,

$$\frac{d}{dz}\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+n)^2} \right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^2},$$
$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1\cdot 2}{(z+n)^3}, \qquad \frac{d^3}{dz^3}\psi(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(z+n)^4}, \quad \ldots ,$$

Продовжимо далі й остаточно отримаємо ряд

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k}\psi(z) = (-1)^{k+1} k! \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^{k+1}}. \qquad \text{(V.26)}$$

Підінтеґральний вираз у (V.25) перепишемо через суму геометричної проґресії:

$$\frac{t^k\, e^{-zt}}{1-e^{-t}} = t^k\, e^{-zt} \sum_{n=0}^\infty e^{-nt} = t^k \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+z)t}$$

і почленно проінтеґруємо, зважаючи на означення гамма-функції:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^k\, e^{-(n+z)t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{(z+n)^{k+1}} = k!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{k+1}}.$$

Цей результат з урахуванням (V.26) підтверджує рівність у формулі (V.25).

§ 2. Загальні рівняння теорії спеціальних функцій

Особливим типом спеціальних функцій є розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними — ***спеціальні функції у вузькому сенсі***. Їх можна отримати декількома способами:

- як гіпергеометричні ряди;
- через рекурентні формули, що випливають з відповідних диференціальних рівнянь;
- послідовним диференціюванням твірної функції;
- ортогоналізацією Ґрама–Шмідта[6] з відповідною вагою;
- через інтеґральні зображення.

Метод відокремлення змінних для рівнянь з частинними похідними приводить до задачі Штурма–Ліувілля, тобто задачі на власні значення, про яку йшлося в попередньому розділі: знайти значення λ, за яких однорідне рівняння $\Delta v + \lambda v = 0$ в області D з однорідною умовою $v\big|_S = 0$ на границі S має нетривіальні розв'язки $v(M) \not\equiv 0$ (власні функції).

Якщо D — відрізок $0 \leqslant x \leqslant \ell$, прямокутник $(0 \leqslant x \leqslant \ell_1,$ $0 \leqslant y \leqslant \ell_2)$ або паралелепіпед $(0 \leqslant x \leqslant \ell_1,\ 0 \leqslant y \leqslant \ell_2,\ 0 \leqslant z \leqslant \ell_3)$,

[6]Йорґен Педерсен Ґрам (Jørgen Pedersen Gram, 1850–1916) — данський математик; Ергард Шмідт (Erhard Schmidt, 1876–1959) — німецький математик.

то власні функції $v_n(M)$ виражають через тригонометричні функції (sin, cos). Якщо D — круг, циліндр або куля, то для знаходження власних функцій уводять нові спеціальні функції — ***циліндричні*** і ***сферичні***.

Рівняння для спеціальних функцій можна записати так:

$$L[y] + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \tag{V.27}$$

де

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y, \qquad p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0.$$

Найпростіша крайова задача

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(\ell) = 0,$$

що відповідає $a = 0,\ b = \ell,\ q = 0,\ p = \rho = \text{const}$, визначає, як уже згадувано, тригонометричні функції. Трохи складніші випадки для інших спеціальних функції розглянемо нижче.

1. Рівняння Бесселя

$$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \tag{V.28}$$

відповідає $p(x) = x,\ \rho(x) = x,\ q(x) = \dfrac{n^2}{x},\ a = 0,\ b = r_0$.

2. Рівняння Лежандра

$$\left[(1 - x^2)y'\right]' + \lambda y = 0 \tag{V.29}$$

відповідає $p(x) = 1 - x^2,\ \rho(x) = 1,\ q(x) = 0,\ a = -1,\ b = 1$.

3. Рівняння для приєднаних функцій Лежандра

$$\left[(1 - x^2)y'\right]' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y = 0 \tag{V.30}$$

відповідає $p(x) = 1 - x^2,\ \rho(x) = 1,\ q(x) = \dfrac{m^2}{1 - x^2},\ a = -1,\ b = 1$.

4) Рівняння Ерміта[7]

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + \lambda e^{-x^2}y = 0 \quad \text{або} \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{V.31}$$

відповідає $p(x) = e^{-x^2},\ \rho(x) = e^{-x^2},\ q(x) = 0,\ a = -\infty,\ b = \infty.$

5) Рівняння Лаґерра[8]

$$\left(xe^{-x}y'\right)' + \lambda e^{-x}y = 0 \quad \text{або} \quad xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \tag{V.32}$$

відповідає $p(x) = xe^{-x},\ \rho(x) = e^{-x},\ q(x) = 0,\ a = 0,\ b = \infty.$

Характерною особливістю наведених рівнянь є обертання в нуль коефіцієнта $p(x)$ принаймні на одному з кінців інтервалу (a, b). Ця властивість $p(x)$ відіграє важливу роль у разі формулювання крайових задач для рівняння (V.27).

Розглянемо поведінку розв'язків в околі точки $x = a$, якщо $p(a) = 0$. Нехай a є скінченним. Якщо в рівнянні (V.27) $q(x)-\lambda\rho(x)$ замінити на функцію $q(x)$, то всі результати, одержані нижче для рівняння

$$L[y] = \left(p(x)y'\right)' - q(x)y = 0, \qquad p(x) > 0, \quad a < x < b, \tag{V.33}$$

будуть правильними і для рівняння (V.27).

Лема 1. Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — два лінійно незалежні розв'язки рівняння (V.33), коефіцієнт якого $p(x)$ має вигляд

$$p(x) = (x-a)\varphi(x), \qquad \varphi(a) \neq 0, \tag{V.34}$$

де $\varphi(x) > 0$ — неперервна на (a, b) функція. Якщо $y_1(x)$ — обмежений розв'язок

$$y_1(x) = (x-a)^n u(x), \qquad n \geqslant 0, \tag{V.35}$$

[7] Шарль Ермiт (Charles Hermite, 1822–1901) — французький математик.

[8] Едмон Ніколя Лаґерр (Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886) — французький математик.

де $u(x) > 0$ — неперервна на (a, b) функція і $u(a) \neq 0$, то інший розв'язок $y_2(x)$ при $x \to a$ необмежений.

Лема 2. Нехай виконані умови леми 1. Якщо $y_1(x) \neq 0$, тобто $n = 0$, то $y_2(x)$ має при $x = a$ логарифмічну особливість:

$$y_2(x) \sim \ln(x-a) \qquad \text{при} \quad y_1(a) \neq 0 \quad (n = 0).$$

Якщо точка $x = a$ є для функції $y_1(x)$ нулем n-го порядку: $y_1(x) = (x-a)^n u(x)$, $n > 0$, то $y_2(x)$ має при $x = a$ полюс порядку n:

$$y_2(x) \sim (x-a)^{-n}, \qquad \text{якщо} \quad y_1(a) \sim (x-a)^n \quad (n > 0).$$

Лема 3. Нехай виконані умови леми 1 і коефіцієнт $q(x)$ або обмежений, або прямує до ∞ при $x \to a$, так що

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^\sigma}, \qquad \sigma \geqslant 0, \quad q_0(a) \neq 0,$$

$q_0(x)$ — неперервна на $[a, b]$ функція. Тоді для обмеженого розв'язку $y_1(x)$ вигляду (V.35) виконується умова

$$\lim_{x \to a} p(x) y'(x) = 0, \tag{V.36}$$

за умови, що справджується нерівність $n > \sigma - 1$.

Сформулюємо крайові задачі для рівняння

$$L[y] + \lambda \rho y = 0 \qquad \text{і} \qquad L[y] = 0$$

в інтервалі (a, b), на одному або обох кінцях якого $p(x)$ обертається в нуль. Якщо $p(a) = 0$ і виконується умова (V.34), то при $x = a$ треба домагатися обмеженості вигляду (V.35) розв'язку рівняння (V.27).

Загальним розв'язком рівняння (V.27) є лінійна комбінація

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

де y_1 і y_2 — будь-які лінійно незалежні розв'язки рівняння (V.27), A і B — довільні сталі. Якщо $y_1(x)$ задовольняє умову обмеженості (V.35) при $x = a$, то $y_2(x)$ при $x \to a$ прямує до нескінченності (лема 1). Тому з вимоги обмеженості (V.35), яку будемо в подальшому записувати у вигляді

$$|y(a)| < \infty, \tag{V.37}$$

відразу випливає $B = 0$.

Отже, отримаємо таку крайову задачу: знайти власні значення і власні функції $y(x) \not\equiv 0$ рівняння

$$(py')' - qy + \lambda\rho y = 0, \qquad p(x) > 0, \quad a < x < b, \tag{V.38}$$

де $p(x)$ має вигляд (V.34), за умови обмеженості (V.35) або (V.37) і звичайної умові=и, наприклад,

$$y(b) = 0.$$

Якщо $p(a) = 0$ і $p(b) = 0$ (як для рівняння Лежандра), то на обох кінцях інтервалу (a, b) ставлять умову обмеженості

$$|y(a)| < \infty, \qquad |y(b)| < \infty.$$

Якщо інтервал (a, b) — безмежний, наприклад, $a = -\infty$, $b = \infty$ для рівняння Ерміта або $a = 0$, $b = \infty$ для рівняння Лаґерра, то при $a = -\infty$ або при $b = \infty$ у цьому випадку умову обмеженості (V.37) замінюють на слабшу вимогу: розв'язок на нескінченності не може зростати швидше, ніж скінченний степінь x.

Загальні властивості власних функцій і власних значень крайової задачі (V.38) розглянуто в пункті IV.3.5.4.

§ 3. Ортогональні поліноми

До спеціальних функцій належать деякі класи ортогональних поліномів (поліномів). Далі ми розглянемо декілька сімей таких поліномів. Кожне з них можна визначити різними способами. Ми для цього використаємо поняття твірної функції. Хоча такий підхід виглядає дещо формальним, він спрощує дослідження основних властивостей ортогональних поліномів.

3.1. Поліноми Лежандра

Ці функції тісно пов'язані з фундаментальним розв'язком $\dfrac{1}{R}$ рівняння Лапласа, де R — відстань точки M від фіксованої точки M_0. Нехай r і r_0 — радіуси-вектори точок M і M_0, відповідно, θ — кут між ними (рис. V.4). Тоді можна записати, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, & \text{для } r < r_0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, & \text{для } r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{V.39}$$

де $x = \cos\theta$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ і $\rho = \dfrac{r}{r_0} < 1$ або $\rho = \dfrac{r_0}{r} < 1$.

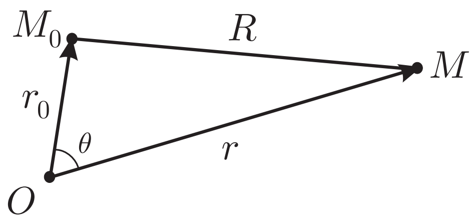


Рис. V.4.

Назвемо функцію

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, \qquad 0 < \rho < 1 \tag{V.40}$$

твірною функцією для поліномів Лежандра. Ця функція аналітична за змінною ρ в околі $\rho = 0$, тому її можна розкладати в степеневий ряд за степенями ρ:

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n. \tag{V.41}$$

Зазначимо, що для функції дійсної змінної аналітичність означає належність її до класу C^∞, тобто безмежну диференційовність.

Коефіцієнти $P_n(x)$ цього розкладу є поліномами n-го степеня, їх називають ***поліномами Лежандра*** (рис. V.5). За формулою Коші (I.63) запишемо $P_n(x)$ так:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n}\right|_{\rho=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \tag{V.42}$$

де C — будь-який замкнений контур у комплексній ζ-площині, що містить точку $\zeta = 0$. В інтеґралі (V.42) зробимо заміну змінної

$$\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2} = 1 - \zeta z, \quad \zeta = \frac{2(x-z)}{(1-z^2)}.$$

Одержимо

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint\limits_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{V.43}$$

де C_1 — будь-який замкнений контур у комплексній z-площині, що містить точку $z = x$.

За теоремою про лишки (I.121) маємо для інтеґрала

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz = (x^2-1)^n,$$

використаємо формулу для n-ї похідної інтеґрала Коші (I.63)

$$\frac{d^n}{dx^n}\oint\limits_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz = n!\oint\limits_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

одержимо з (V.43) формулу для $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{V.44}$$

Формулу (V.44) називають ***формулою Родриґа***[9]. Із (V.44) випливає властивість парності $P_n(x)$: $P_{2k}(x)$ — парна функція, $P_{2k+1}(x)$ — непарна. Справді,

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \qquad \dots .$$

Отже,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{V.45}$$

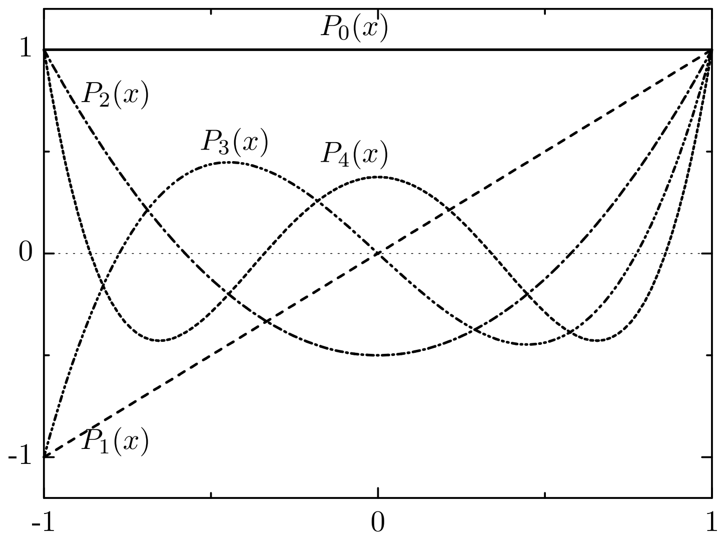


Рис. V.5. Поліноми Лежандра.

[9] Бенжамін Родриґ (Benjamin Olinde Rodrigues, 1795–1851) — французький банкір, математик і громадський діяч.

Зазначимо, що з (V.39) і (V.41) випливає розклад потенціалу

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при } r < r_0, \\ \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при } r > r_0. \end{cases} \tag{V.46}$$

Тепер одержимо ***диференціальне рівняння для поліномів Лежандра***. Для цього розглянемо функцію $w = (x^2-1)^n$. Очевидно, що

$$w' = 2nx(x^2-1)^{n-1} = 2nx\,\frac{w}{x^2-1},$$

або

$$(x^2-1)w' - 2nxw = 0.$$

Диференціюючи цю тотожність $n+1$ разів, одержимо

$$(x^2-1)[w^{(n)}]'' + 2x[w^{(n)}]' - n(n+1)w^{(n)} = 0.$$

Звідси випливає, що функція $w^{(n)}(x)$, а отже, і $P_n(x)$, оскільки $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}w^{(n)}(x)$ (див. (V.44)), задовольняє рівняння

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad \text{при } \lambda = n(n+1), \tag{V.47}$$

яке називають ***рівнянням Лежандра***. Його можна записати ще й так:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \lambda y = 0. \tag{V.48}$$

Отже, доведено, що поліноми Лежандра $P_n(x)$ є власними функціями рівняння (V.47), які відповідають власним значенням $\lambda_n = n(n+1)$.

Заміна змінної в (V.47) $x = \cos\theta$ приводить до рівняння

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)y = 0, \tag{V.49}$$

що виникає в разі відокремлення змінних у рівнянні Лапласа, записаному у сферичних координатах.

Зазначимо, що в загальному випадку ($\lambda = \nu(\nu+1)$ де ν — довільне комплексне число) розв'язками рівняння (V.47) є ***функції Лежандра***. Якщо на кінцях проміжку $[-1,1]$ вони не мають особливостей, то це ***функції Лежандра першого роду*** $P_\nu(x)$. Згідно з лемою 2, другий лінійно незалежний розв'язок у точках $x = \pm 1$ має логарифмічну розбіжність. Такі розв'язки називають ***функціями Лежандра другого роду*** і позначають $Q_\nu(x)$. Перші кілька функцій мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \\ Q_1(x) &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1, \\ Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}, \\ Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}, \ \dots \end{aligned}$$

а розклади в тригонометричні ряди записують так ($0 < \theta < \pi$):

$$P_\nu(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+k+1)}{k!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\sin(\nu+2k+1)\theta, \quad \text{(V.50)}$$

$$Q_\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+k+1)}{k!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\cos(\nu+2k+1)\theta. \quad \text{(V.51)}$$

З означення поліномів $P_n(x)$ можна легко довести два рекурентні співвідношення:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad \text{(V.52)}$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad \text{(V.53)}$$

Для цього продиференціюємо твірну функцію $\Psi(\rho, x)$ за ρ й x.

Одержимо тотожності

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} &= \frac{(x-\rho)\Psi}{1-2x\rho+\rho^2} = P_1(x)+2P_2(x)\rho+\ldots+nP_n(x)\rho^{n-1}+\ldots\\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{\rho\Psi}{1-2x\rho+\rho^2} = P_0'(x)+P_1'(x)\rho+\ldots+P_n'(x)\rho^n+\ldots\end{aligned}$$

або

$$(x-\rho)\left(P_0(x)+P_1(x)\rho+\ldots+P_n(x)\rho^n+\ldots\right)$$
$$=(1-2\rho x+\rho^2)\left(P_1(x)+2P_2(x)\rho+\ldots+nP_n(x)\rho^{n-1}+\ldots\right),$$

$$\rho\left(P_0(x)+P_1(x)\rho+\ldots+P_n(x)\rho^n+\ldots\right)$$
$$=(1-2\rho x+\rho^2)\left(P_0'(x)+P_1'(x)\rho+\ldots+P_n'(x)\rho^n+\ldots\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ρ, одержимо тотожності

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \qquad \text{(V.54)}$$

і

$$P_n(x)=P_{n+1}'(x)-2xP_n'(x)+P_{n-1}'(x), \qquad \text{(V.55)}$$

перша з яких збігається з (V.52). Диференціюючи її, матимемо

$$(n+1)P_{n+1}'(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP_n'(x)+nP_{n-1}'(x)=0.$$

Вилучивши з цього співвідношення і з формули (V.55) $xP_n'(x)$, одержимо тотожність (V.53). За допомогою співвідношення (V.52) і формул $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ можна одержати всі поліноми Лежандра.

Рівняння Лежандра (V.47) є частковим випадком ($q(x)=1$, $\rho(x)=1$, $p(x)=1-x^2$) розглянутого в попередньому параграфі рівняння (V.38), тому до нього можна застосувати загальну теорію. З неї випливають такі властивості:

1) поліноми Лежандра різних порядків ортогональні між собою:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{при } m \neq n;$$

2) система $\{P_n(x)\}$ є повною.

Обчислимо ***квадрат норми***

$$||P_n(x)||^2 \equiv (P_n, P_n) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx.$$

Застосуємо рекурентну формулу (V.52) двічі. Спочатку виразимо з неї (попередньо замінивши $n+1$ на n) $P_n(x)$ через $P_{n-1}(x)$ і $P_{n-2}(x)$, потім $xP_n(x)$ — через $P_{n+1}(x)$ і $P_{n-1}(x)$. З урахуванням ортогональності поліномів $P_n(x)$ і $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$ одержимо

$$\begin{aligned} ||P_n(x)||^2 &= \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} P_n(x)\left[(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)\right]\,dx = \\ &= \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}||P_{n-1}(x)||^2. \end{aligned}$$

Послідовне застосування цієї формули дає $||P_n(x)||^2 = \frac{1}{2n+1}||P_0(x)||^2$. Підставивши сюди $||P_0(x)||^2 = 2$, знаходимо квадрат норми

$$||P_n(x)||^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Отже,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{V.56}$$

За допомогою формули Родриґа (V.44) можна довести таку теорему.

Теорема. Усі нулі полінома Лежандра $P_n(x)$ з $n > 0$ і його похідної $P_n^{(r)}(x)$ довільного порядку $r < n$ прості, дійсні й розташовані всередині проміжку $(-1, 1)$.

3.2. Поліноми Ерміта

Поліноми Ерміта $H_n(x)$ означимо за аналогією з поліномами Лежандра, використовуючи твірну функцію $\Psi(\rho, x)$:

$$\Psi(\rho, x) = e^{2x\rho-\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{\rho^n}{n!}. \tag{V.57}$$

За допомогою формули Коші коефіцієнти розкладу $H_n(x)$ можна переписати так:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \left.\frac{\partial^n \Psi(\rho, x)}{\partial \rho^n}\right|_{\rho=0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \\ &= e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \end{aligned} \tag{V.58}$$

де C — замкнений контур у комплексній ζ-площині, що містить точку $\zeta = 0$. Уводячи нову змінну $z = x - \zeta$, перетворимо (V.58) до вигляду

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\,dz = \\ &= (-1)^n e^{x^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{d^n}{dx^n}\oint\limits_{C_1}\frac{e^{-z^2}}{z-x}\,dz\right\}, \end{aligned} \tag{V.59}$$

де контур C_1 охоплює точку $z = x$.

За теоремою Коші вираз у фіґурних дужках дорівнює $\dfrac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$, тому остаточно отримаємо

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{V.60}$$

Із цієї формули видно, що $H_n(x)$ — це поліноми n-го степеня, причому

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \tag{V.61}$$

Із (V.60) знаходимо:

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = 2x, \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2, \qquad \ldots .$$

Графіки перших п'яти поліномів $H_n(x)$ наведено на рис. V.6.

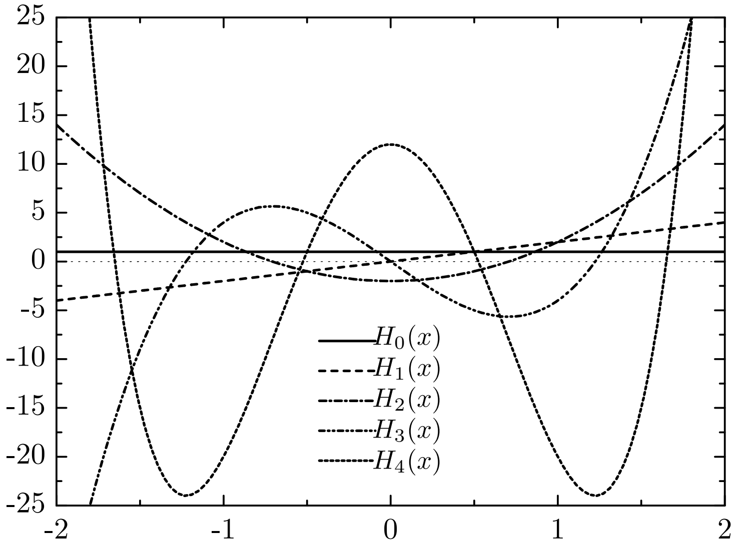


Рис. V.6. Поліноми Ерміта.

Доведемо, що поліном $H_n(x)$ є розв'язком рівняння

$$y'' - 2xy + \lambda y = 0 \qquad \text{при } \lambda = 2n. \tag{V.62}$$

Справді, продиференціювавши функцію $w = e^{-x^2}$ один раз, $w' = -2xe^{-x^2}$, знайдемо тотожність $w' + 2xw \equiv 0$. Продиференціювавши її $n+1$ разів, отримаємо

$$\left[w^{(n)}\right]'' + 2x\left[w^{(n)}\right]' + 2nw^{(n)} \equiv 0.$$

Тепер підставимо в цю тотожність за формулою (V.60)

$$w^{(n)} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2},$$

одержимо

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) \equiv 0.$$

Рівняння (V.62) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y'\right) + \lambda e^{-x^2}y = 0. \tag{V.63}$$

Отже, поліном Ерміта $H_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, є власною функцією, що відповідає власному значенню $\lambda = 2n$ такої задачі Штурма–Ліувілля: знайти такі значення λ, за яких рівняння Ерміта (V.63) має нетривіальний розв'язок, що зростає при $x \to \infty$ не швидше, ніж скінченний степінь x.

Доведемо рекурентні співвідношення для поліномів Ерміта:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \tag{V.64}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{V.65}$$

Для цього знайдемо частинні похідні твірної функції за x і ρ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} - 2\rho\Psi = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} - 2(x-\rho)\Psi = 0. \tag{V.66}$$

У кожну тотожність (V.66) підставимо ряд (V.57) для $\Psi(x,\rho)$. Збираючи члени при ρ^n і прирівнюючи їх до нуля, одержимо шукані рекурентні співвідношення.

Властивістю (V.64) скористаємося для обчислення інтеґрала

$$I_{mn} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx.$$

Приймемо $m \leqslant n$. Якщо проінтеґрувати частинами m разів, використати (V.65) і те, що при $x = \pm\infty$ добуток полінома на e^{-x^2} дорівнює нулю, то одержимо

$$\begin{aligned} I_{mn} &= (-1)^{n-1}\,2m \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\,dx = \ldots \\ &= (-1)^{n-m}2^m m! \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}e^{-x^2}\,dx, \end{aligned}$$

тому що $H_0(x) = 1$. Звідси випливає, що

$$I_{mn} = (-1)^{n-m}2^m m! \left(\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \text{при } m < n.$$

Якщо $m = n$, то наведений інтеґрал є квадратом норми

$$I_{nn} = 2^n n! \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi} = ||H_n(x)||^2.$$

Отже, ми отримали таку властивість ортогональності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n, \end{cases} \tag{V.67}$$

тобто поліноми Ерміта — це ортогональні з вагою e^{-x^2} поліноми, які утворюють повну систему.

Досить часто в задачах математичної фізики використовують функції Ерміта

$$\varphi_n(x) = \frac{H_n(x)}{||H_n(x)||}\,e^{-x^2/2}, \tag{V.68}$$

що утворюють ортогональну і нормовану з вагою $\rho(x) = 1$ систему на інтервалі $-\infty < x < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Ці функції обертаються в нуль при $x \to \pm\infty$ і задовольняють рівняння

$$\varphi_n'' + (\lambda_n - x^2)\varphi_n = 0, \qquad \lambda_n = 2n+1. \tag{V.69}$$

3.3. Поліноми Лаґерра

Поліноми Лаґерра $L_n^\alpha(x)$ визначають за допомогою твірної функції

$$\Psi_\alpha(\rho, x) = \frac{1}{(1-\rho)^{\alpha+1}}\, e^{-x\rho/(1-\rho)}, \qquad \alpha > -1. \tag{V.70}$$

Розкладаючи її в степеневий ряд

$$\Psi_\alpha(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\rho^n, \qquad L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \Psi_\alpha}{\partial \rho^n}\right|_{\rho=0} \tag{V.71}$$

і використовуючи формулу Коші (I.63), знайдемо

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Psi_\alpha(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,$$

де C — замкнений контур, що охоплює точку $\zeta = 0$. Уведемо нову змінну інтеґрування z, прийнявши $\zeta = 1 - x/z$, тоді

$$L_n^\alpha(x) = x^{-\alpha}e^x \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \tag{V.72}$$

де контур C_1 охоплює точку $z = x$. Формула (V.72) дає

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{n!}\,e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right). \tag{V.73}$$

Звідси випливає, що $L_n^\alpha(x)$ — поліном степеня n. Зокрема, $L_0^\alpha(x) = 1$, $L_1^\alpha(x) = 1 - x + \alpha$.

Часто поліномами Лаґерра називають часткові випадки $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha = 0$, які позначають $L_n(x)$ (рис. V.7). У цьому разі для $L_n^\alpha(x)$ використовують назву ***узагальнені поліноми Лаґерра***.

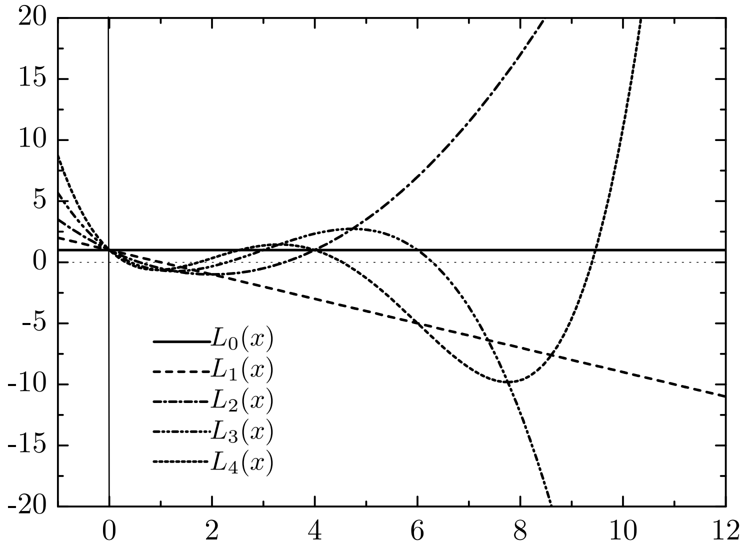


Рис. V.7. Поліноми Лаґерра.

Доведемо, що поліном $L_n^\alpha(x)$ є розв'язком рівняння

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \lambda y = 0 \qquad \text{(V.74)}$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}y'\right) + \lambda x^\alpha e^{-x}y = 0 \qquad \text{при } \lambda = n. \qquad \text{(V.75)}$$

Справді, продиференціювавши функцію $w = x^{n+\alpha}e^{-x}$ один раз

$$w' = (n+\alpha)x^{n+\alpha-1}e^{-x} - x^{n+\alpha}e^{-x},$$

знайдемо тотожність

$$xw' - (n + \alpha - x)w = 0.$$

Далі продиференціюємо цю тотожність $n + 1$ разів:

$$x\left[w^{(n)}\right]'' + (x + 1 - \alpha)\left[w^{(n)}\right]' + (n + 1)w^{(n)} = 0.$$

Підставимо сюди замість $w^{(n)}$ її значення з формули (V.73)

$$w^{(n)} = x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) n!,$$

одержимо

$$x\left(L_n^{\alpha}(x)\right)'' + (\alpha + 1 - x)\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' + nL_n^{\alpha}(x) = 0.$$

Отже, поліноми Лаґерра можна розглядати як власні функції, що відповідають власним значенням $\lambda = n$ такої крайової задачі: знайти значення λ, за яких рівняння (V.74) має в області $0 < < x < \infty$ нетривіальний розв'язок, що обмежений при $x = 0$ і який зростає при $x \to \infty$ не швидше, ніж скінченний степінь x.

Знайдемо норму поліномів Лаґерра. Спочатку доведемо для них два рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned}(n + 1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - (2n + 1 + \alpha - x)L_n^{\alpha}(x) + {}\\ + (n + \alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0,\end{aligned} \tag{V.76}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{V.77}$$

Для цього визначимо зв'язок між твірною функцією та її частинними похідними $\dfrac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \rho}$. Обчислимо ці похідні й знайдемо

$$\begin{aligned}&(1 - 2\rho + \rho^2)\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \rho} = \left[\alpha + 1 - x - (\alpha + 1)\rho\right]\Psi_\alpha,\\ &\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x} = -\rho \Psi_{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Підставимо в ці рівності замість $\Psi_\alpha(x,\rho)$ і $\Psi_{\alpha+1}(x,\rho)$ їхні розклади (V.71) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ρ, одержимо шукані рекурентні співвідношення.

Скористаємось виразом (V.76) для обчислення квадрата норми $||L_n^\alpha(x)||^2$:

$$||L_n^\alpha(x)||^2 = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} \left[L_n^\alpha(x)\right]^2 dx = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(x)\, dx.$$

Один множник $L_n^\alpha(x)$ під інтеґралом виразимо за формулою (V.76), замінивши n на $n-1$. Одержимо

$$\begin{aligned}||L_n^\alpha(x)||^2 &= \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\Big\{(2n-1+\alpha-x)L_{n-1}^\alpha(x) - \\ &\qquad - (n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha(x)\Big\}\,\frac{1}{n}\,L_n^\alpha(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^\alpha(x)\left[-xL_n^\alpha(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Тепер виразимо $-xL_n^\alpha(x)$ через поліноми $L_{n+1}^\alpha(x)$, $L_{n-1}^\alpha(x)$ і $L_n^\alpha(x)$ за формулою (V.76):

$$\begin{aligned}||L_n^\alpha(x)||^2 &= \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^\alpha(x)\Big\{(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - \\ &\qquad - (2n+1+\alpha)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\Big\}\,dx = \\ &= \frac{n+\alpha}{n}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\left[L_{n-1}^\alpha(x)\right]^2 dx = \frac{n+\alpha}{n}\,||L_{n-1}^\alpha(x)||^2,\end{aligned}$$

або

$$||L_n^\alpha(x)||^2 = \frac{n+\alpha}{n}\,||L_{n-1}^\alpha(x)||^2. \qquad \text{(V.78)}$$

З формули (V.78) та означення Γ-функції з § 1 випливає

$$\begin{aligned}||L_n^\alpha(x)||^2 &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{n!}||L_1^\alpha(x)||^2 = \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)}\int\limits_0^\infty (1+\alpha-x)^2 x^\alpha e^{-x}\,dx = \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)}\Gamma(\alpha+2) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.\end{aligned}$$

Остаточно для квадрата норми поліномів Лаґерра матимемо:

$$||L_n^\alpha(x)||^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{V.79}$$

Під час виведення (V.79) ми використовували ортогональність з вагою $x^\alpha e^{-x}$ поліномів $L_n^\alpha(x)$:

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n. \tag{V.80}$$

Отже, поліноми Лаґерра утворюють ортогональну з вагою $x^\alpha e^{-x}$ повну систему функцій

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, & m = n. \end{cases} \tag{V.81}$$

Поліномам Лаґерра, як і поліномам Ерміта, відповідають ортогональні та нормовані з вагою $\rho(x) = 1$ функції

$$\Phi_n^\alpha(x) = \frac{L_n^\alpha(x)}{||L_n^\alpha(x)||}\, x^{\alpha/2} e^{-x/2}, \tag{V.82}$$

$$\int\limits_0^\infty \Phi_m^\alpha(x)\Phi_n^\alpha(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n, \quad \alpha > -1. \tag{V.83}$$

Ці функції дорівнюють нулю на безмежності ($x = +\infty$). З рівняння (V.75) для поліномів Лаґерра випливає, що $\Phi_n^\alpha(x)$ є розв'язками рівняння

$$\frac{d}{dx}\left(xy'\right) + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right) y = 0 \qquad \text{(V.84)}$$

при $\lambda_n = n + \dfrac{\alpha+1}{2}$. Щоб отримати рівняння для $\tilde{y} = \Phi_n^\alpha(x)$ з рівняння для $y = L_n^\alpha(x)$, потрібно зробити підстановку

$$\tilde{y} = \frac{x^{\alpha/2}e^{-x/2}}{||y||}\, y \qquad \Rightarrow \qquad y = x^{-\alpha/2}e^{x/2}\, ||y||\, \tilde{y}.$$

На зазначимо зауважимо, що існує такий зв'язок між поліномами Лаґерра і поліномами Ерміта:

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n n! 2^{2n} L_n^{-1/2}(x^2), \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n n! 2^{2n+1} x L_n^{1/2}(x^2). \end{aligned}$$

3.4. Поліноми Якобі

Розв'язками рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\, y'\right] + \lambda(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0$$

є ***поліноми Якобі***[10] $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\lambda = \lambda_n = n(\alpha+\beta+n+1)$.

Часткові випадки цих поліномів:

1: $\alpha = \beta = 0$ — ***поліноми Лежандра*** $P_n(x)$. Вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &\left[(1-x^2)y'\right]' + \lambda y = 0, \\ &\quad a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) = 1 - x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad q = 0, \end{aligned}$$

[10]Карл Ґустав Якобі (Carl Gustav Jakob Jacobi, 1804–1851) — прусський математик.

де $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'язки рівняння

$$\left[(1-x^2)y'\right]' - \frac{m^2}{1-x^2}\, y + \lambda y = 0,$$

$$a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) = 1 - x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}$$

називають ***приєднаними функціями Лежандра***.

2: $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ — ***поліноми Чебишова***[11] ***(першого роду)*** $T_n(x)$ є розв'язками рівняння

$$\left(\sqrt{1-x^2}\, y'\right)' + \lambda \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, y = 0,$$

або

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0,$$

$$a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) = \sqrt{1-x^2}, \ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ q = 0.$$

при $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

3: $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ — ***поліноми Чебишова (другого роду)*** $U_n(x)$ є розв'язками рівняння

$$\left((1-x^2)^{3/2}\, y'\right)' + \lambda \sqrt{1-x^2}\, y = 0,$$

$$a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) = (1-x^2)^{3/2}, \quad \rho(x) = \sqrt{1-x^2}, \ q = 0.$$

при $\lambda = \lambda_n = n(n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

---

[11] Пафнутій Чебишов (Пафнутий Львович Чебышёв, 1821–1894) — російський математик. Поширене написання "Чебишев" пов'язане з традиційним у російському правописі опусканням діакритичного значка над буквою "ё" (українською — Чебишóв).

4: $\alpha = \beta = \nu - \dfrac{1}{2}$ — ***поліноми Ґеґенбауера***[12] $C_n^{(\nu)}(x)$ є розв'язками рівняння

$$\Big((1-x^2)^{\nu+1/2}\,y'\Big)' + \lambda\,(1-x^2)^{\nu-1/2}\,y = 0,$$
$$a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) = (1-x^2)^{\nu+1/2},$$
$$\rho(x) = (1-x^2)^{\nu-1/2}, \quad q = 0.$$

при $\lambda = \lambda_n = n(n+2\nu)$, $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки у всіх цих рівняннях коефіцієнт $p(x)$ дорівнює нулю принаймні на одному з кінців інтервалу (a, b), то рівняння, крім обмежених на цьому кінці розв'язків, мають і необмежені там розв'язки. Для їхнього вилучення задають умову обмеженості: якщо $p(a) = 0$ і $p(b) = 0$, то $|y(a)| < \infty$ і $|y(b)| < \infty$.

§ 4. Циліндричні функції

Розглянемо задачу Штурма–Ліувілля для круга $0 \leqslant r \leqslant r_0$. У полярних координатах одержуємо рівняння

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0,$$

$$v\big|_{r=r_0} = 0, \qquad v \not\equiv 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Підставимо його в рівняння і відокремимо змінні:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \qquad \mu = \text{const}.$$

Звідси випливає, що

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

[12] Леопольд Ґеґенбауер (Leopold Gegenbauer, 1849–1903) — австрійський математик.

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R = 0, \qquad R(r_0) = 0.$$

Унаслідок однозначності розв'язку $\Phi(\varphi)$ має бути періодичною функцією, тобто $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Ця умова дає $\mu = n^2$, де n — ціле число. Приймемо $x = \sqrt{\lambda}\, r$, одержимо рівняння для циліндричних функцій, або ***рівняння Бесселя*** n***-го порядку***

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0,$$

або (V.85)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Розв'язки рівняння (V.85) називають ***циліндричними функціями***. До рівняння (V.85) приводять також задачі для рівняння Лапласа і хвильового рівняння у випадку, коли область D є круговим циліндром.

Рівняння Бесселя ν-го порядку

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{V.86}$$

(ν — довільне дійсне або комплексне число, дійсну частину якого можна вважати додатною) має особливу точку при $x = 0$. Тому шукатимемо розв'язок $y(x)$ у формі степеневого ряду

$$y(x) = x^\sigma \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots\right), \tag{V.87}$$

де $a_0 \neq 0$. Підставимо ряд (V.87) у рівняння (V.86) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0\left(\sigma^2 - \nu^2\right) = 0, \\ a_1\left[(\sigma+1)^2 - \nu^2\right] = 0, \\ a_2\left[(\sigma+2)^2 - \nu^2\right] + a_0 = 0, \\ \ldots \\ a_k\left[(\sigma+k)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} = 0. \end{array}\right. \tag{V.88}$$

$$(k = 2, 3, \ldots) \tag{V.89}$$

З першого рівняння знаходимо $\sigma = \pm\nu$, тому що $a_0 \neq 0$. Приймемо $\sigma = \nu$. Тоді, якщо $\nu \neq 1/2$, з другого рівняння знаходимо $a_1 = 0$. Далі

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k)^2 - \nu^2}.$$

Оскільки $\sigma = \nu$, то

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(2\nu + k)k}.$$

Очевидно, що $a_{2m+1} = 0$ для всіх цілих додатних m і

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(\nu + m)m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(\nu + m)(\nu + m - 1)\ldots(\nu + 1)m!}.$$

Використаємо властивість гамма-функції (V.6)

$$\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s).$$

Приймемо $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$, одержимо

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)}.$$

Отже, ми побудували формальний розв'язок рівняння (V.86) у вигляді ряду

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad \text{(V.90)}$$

який називають ***функцією Бесселя першого роду ν-го порядку*** (рис. V.8.). Ряд

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k - \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \qquad \text{(V.91)}$$

що відповідає $\sigma = -\nu$, є другим розв'язком рівняння (V.86), лінійно незалежним від $J_\nu(x)$. Ряди (V.90) і (V.91) збіжні в цілій комплексній площині. Для нецілих значень ν загальний розв'язок рівняння (V.86) і, отже, довільну циліндричну функцію порядку ν можна записати так:

$$y_\nu(x) = C_1(\nu)J_\nu(x) + C_2(\nu)J_{-\nu}(x), \tag{V.92}$$

де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ — сталі, залежні від індекса ν.

Якщо ж ν дорівнює цілому числу n, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{V.93}$$

Доведемо це. Маємо

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \end{aligned}$$

тому що $\Gamma(k-n+1) = \infty$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (див. с. 272). В останній сумі зробимо заміну змінної підсумовування $s = k - n$, тоді

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Отже, для цілих значень $\nu = n$ функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійнозалежні, і з них неможливо побудувати загальний розв'язок рівняння (V.86), тобто довільну циліндричну функцію цілого порядку. Щоб одержати для цього випадку лінійно незалежний з $J_\nu(x)$ розв'язок рівняння (V.86), уводять ***функції Ноймана***:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{V.94}$$

(рис. V.9; їх також називають ***функціями Бесселя другого роду***, або ***функціями Вебера***[13], і часто позначають $Y_\nu(x)$).

Підстановка у формулу (V.94) замість ν цілого числа n дає у правій частині невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, тому що $\sin n\pi = 0$, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ і $\cos n\pi = (-1)^n$. У цьому випадку функцію Ноймана визначають як границю

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Існує теорема, за якою функції $J_\nu(x)$ і $N_\nu(x)$ лінійно незалежні для будь-яких значень ν. Тому загальний розв'язок рівняння (V.86), а отже, й довільну циліндричну функцію порядку ν, можна записати так:

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x). \tag{V.95}$$

Використаємо зображення функцій Бесселя у вигляді ряду (V.90), безпосередньою перевіркою визначимо тотожності:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left\{\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right\} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},\\ \frac{d}{dx}\left\{x^\nu J_\nu(x)\right\} = x^\nu J_{\nu-1}(x).\end{gathered} \tag{V.96}$$

Виконаємо в цих формулах диференціювання, одержимо

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x), \tag{V.97}$$

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x). \tag{V.98}$$

Звідси випливає рекурентна формула

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x). \tag{V.99}$$

[13]Гайнріх Фрідріх Вебер (Heinrich Friedrich Weber, 1843–1912) — німецький математик.

Виявляється, що функції Бесселя півцілого порядку можна виразити через елементарні функції. Справді, безпосереднім підсумовуванням ряду (V.90) можна визначити правильність формул

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \qquad \text{і} \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad \text{(V.100)}$$

Для функції $J_{n+1/2}(x)$, де n — ціле число, послідовно застосувавши формулу (V.99), одержимо

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[p_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + q_n\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) \right],$$

де $p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — поліном степеня n відносно $\frac{1}{x}$; $q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — поліном степеня $n-1$ відносно $\frac{1}{x}$, $p_n(0) = 1$, $q_n(0) = 0$.

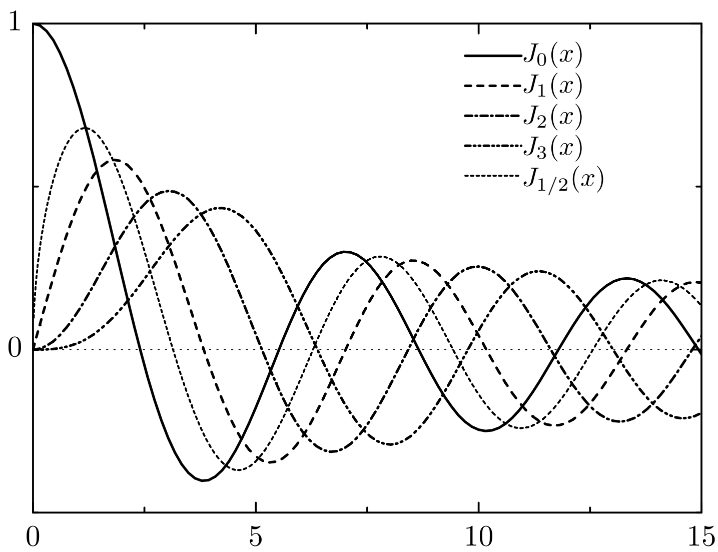


Рис. V.8. Функції Бесселя.

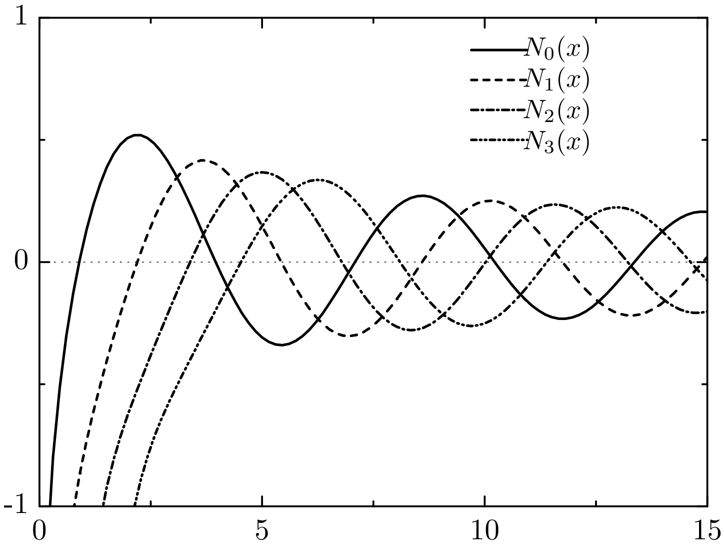


Рис. V.9. Функції Ноймана.

Із функціями $J_{n+1/2}(x)$ пов'язані ***сферичні функції Бесселя***

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \tag{V.101}$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x).$$

Вони є розв'язками рівняння

$$x^2 y'' + 2xy' + \left[x^2 - n(n+1)\right] y = 0. \tag{V.102}$$

Для сферичних функцій Бесселя правильне зображення

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x},$$

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

Перші три функції мають вигляд

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x},\\
j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x},\\
j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2},\\
y_0(x) &= -\frac{\cos x}{x},\\
y_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x},\\
y_2(x) &= \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right)\frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2},
\end{aligned}$$

З § 2 відомо, що власні функції задачі Штурма–Ліувілля ортогональні з вагою $\rho(x)$. Оскільки функції Бесселя є власними функціями крайової задачі, сформульованої на початку цього параграфа, то властивість ортогональності має вигляд

$$\int\limits_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right) r\,dr = 0, \qquad m_1 \neq m_2,$$

де $\mu_m^{(0)}$ — корені рівняння $J_n\left(\sqrt{\lambda}\,r_0\right) = 0$ і $\lambda_m^{(0)} = \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2$; $m = 1, 2, 3, \ldots$ — власні значення. Обчислимо норму власних функцій $R_1(r) = J_n(\alpha_1 r)$, де $\alpha_1 = \mu_m^{(0)}/r_0$. Для цього введемо функцію $R_2(r) = J_n(\alpha_2 r)$, де α_2 — довільний параметр. Функції $R_1(r)$ і $R_2(r)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR_1}{dr}\right) + \left(\alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_1 = 0,\\
\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR_2}{dr}\right) + \left(\alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_2 = 0,
\end{aligned}$$

причому $R_1(r_0) = 0$. Помножимо перше рівняння на R_2, а друге на R_1, віднімемо від першого рівняння друге і, проінтеґрувавши результат за r у межах від 0 до r_0, матимемо

$$\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right) \int\limits_0^{r_0} r R_1(r) R_2(r)\, dr + \left[r\left(R_1' R_2 - R_1 R_2'\right)\right]\Big|_0^{r_0} = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{r_0} r R_1(r) R_2(r)\, dr &= -\frac{1}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}\Big[r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0) \\ &\qquad - r_0 J_n(\alpha_1 r_0)\alpha_2 J_n'(\alpha_2 r_0)\Big] \\ &= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \qquad \text{(V.103)}\end{aligned}$$

Перейдемо до границі $\alpha_2 \to \alpha_1$ і розкриємо невизначеність у правій частині, одержимо вираз для квадрата норми:

$$||R_1(r)||^2 = ||J_n(\alpha_1 r)||^2 = \int\limits_0^{r_0} r R_1^2(r)\, dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\alpha_1 r_0)\right]^2,$$

або

$$\int\limits_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2. \qquad \text{(V.104)}$$

Унаслідок загальних властивостей власних функцій крайових задач (див. § 2) справджується теорема: будь-яку двічі диференційовну функцію $f(r)$, яка обмежена при r_0 й обертається в нуль при $r = r_0$, можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right),$$

де

$$A_m = \frac{\int\limits_0^{r_0} f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr}{||J_n||^2}, \qquad ||J_n||^2 = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2.$$

4.1. Різні типи циліндричних функцій

Поряд із функціями Бесселя першого роду $J_\nu(x)$ прикладне значення мають інші типи розв'язків рівняння Бесселя. Насамперед це ***функції Ганкеля першого і другого роду*** $H_\nu^{(1)}(x)$ і $H_\nu^{(2)}(x)$ — комплексно-спряжені розв'язки рівняння Бесселя. З погляду фізичного застосування основною характеристикою функцій Ганкеля є асимптотична поведінка (тобто поведінка в разі великих значень арґумента). Тому визначимо функції Ганкеля як циліндричні функції, що мають таку асимптотику:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{V.105}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{V.106}$$

де крапками позначено члени вищого порядку малості відносно $\frac{1}{x}$. Можна довести, що будь-яка циліндрична функція однозначно визначається своєю асимптотикою при $x \to \infty$. Тому умови (V.105) і (V.106) визначена функції $H_\nu^{(1)}(x)$ і $H_\nu^{(2)}(x)$ однозначно. Виділимо дійсну й уявну частини, запишемо функції Ганкеля так:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{V.107}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{V.108}$$

де функції

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right], \tag{V.109}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right], \tag{V.110}$$

мають таку асимптотичну поведінку:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad \text{(V.111)}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad \text{(V.112)}$$

що випливає з формул (V.105) і (V.106).

Оскільки будь-який розв'язок рівняння Бесселя в разі нецілого ν є лінійною комбінацією функцій $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$, то

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \qquad \text{(V.113)}$$

де C_1 і C_2 — константи, які потрібно знайти. Для цього порівняємо головні члени асимптотичних розкладів, для яких, зрозуміло, рівність (V.113) також виконується:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right] &= C_1 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &+ C_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right). \qquad \text{(V.114)}\end{aligned}$$

Перетворимо арґумент другого доданка до вигляду $\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\nu\right] = \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\cos\pi\nu - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\sin\pi\nu.\end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у (V.114) і скористаємось формулою Ейлера (I.11), одержимо C_1 і C_2:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{i\sin\pi\nu}, \\ C_1 &= -C_2 e^{-i\pi\nu}. \end{aligned}$$

Отже,

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{i\sin\pi\nu}\left[e^{-i\pi\nu} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right]. \qquad \text{(V.115)}$$

Аналогічно

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i\,\sin\pi\nu}\left[e^{i\pi\nu}J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right]. \qquad \text{(V.116)}$$

Якщо $\nu = n + \dfrac{1}{2}$, тобто ν набуває півцілих значень, то функції Ганкеля і Ноймана виражають через елементарні функції. Зокрема, при $\nu = \dfrac{1}{2}$ маємо

$$\begin{aligned}
N_{1/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\\
H_{1/2}^{(1)}(x) &= J_{1/2}(x) + iN_{1/2}(x) =\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)},\\
H_{1/2}^{(2)}(x) &= J_{1/2}(x) - iN_{1/2}(x) =\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - i\,\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Циліндричні функції можна розглядати не лише при дійсних, а й при комплексних значеннях арґумента. Підставимо в ряд (V.90), що визначає $J_\nu(x)$, замість x величину ix:

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x),$$

де

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad \text{(V.117)}$$

— дійсна функція. $I_\nu(x)$ називають ***модифікованими функціями Бесселя***, або ***функціями Бесселя уявного арґумента***. Аналогічно вводять функції $I_{-\nu}(x)$, якщо $\nu = n$, то $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Циліндричні функції уявного арґумента є розв'язками ***модифікованого рівняння Бесселя***:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{V.118}$$

Його другим лінійно-незалежним від $I_\nu(x)$ розв'язком є ***модифіковані функції Ганкеля (функції Макдоналда***[14]***)*** $K_\nu(x)$, які визначаються за допомогою функцій Ганкеля уявного арґумента:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{V.119}$$

Функції $I_\nu(x)$ і $K_\nu(x)$ є дійсними функціями x (рис. V.10.).

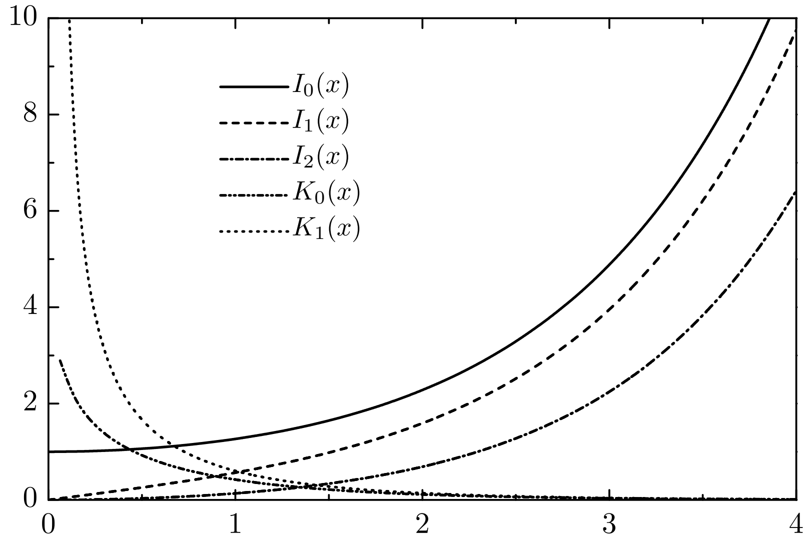


Рис. V.10. Модифіковані функції Бесселя.

[14]Аян Макдоналд (Ian G. Macdonald, нар. 1928) — британський математик.

4.2. Асимптотичне зображення циліндричних функцій

Для асимптотичних зображень циліндричних функцій $y_\nu(x)$ у разі великих додатних значень змінної x справджується така теорема:

Теорема. Будь-який дійсний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{V.120}$$

у разі великих додатних значень змінної x має асимптотичне зображення

$$y_\nu(x) = \frac{A_0}{\sqrt{x}} \sin(x + \delta_0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{V.121}$$

де A_0, δ_0 — сталі, які, взагалі кажучи, залежать від ν.

Це твердження легко перевірити безпосередньою підстановкою функції у рівняння (V.120). Наведена теорема застосовна до функцій Бесселя і Ноймана, однак незастосовна до функцій Ганкеля — їхнє асимптотичне зображення задають формули (V.105) і (V.106).

Використаємо формулу (V.111), одержимо асимптотику $I_\nu(x)$:

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x \tag{V.122}$$

в разі великих значень арґумента x. З асимптотичного виразу для $H_\nu^{(1)}(x)$ знаходимо

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}. \tag{V.123}$$

Формули (V.122) і (V.123) засвідчують, що $K_\nu(x)$ експоненціально спадають, функції ж $I_\nu(x)$ експоненціально зростають при $x \to \infty$. Звідси випливає лінійна незалежність цих функцій і, отже, можливість зображення будь-якого розв'язку модифікованого рівняння Бесселя (V.118) як лінійної комбінації

$$y(x) = A\, I_\nu(x) + B\, K_\nu(x). \tag{V.124}$$

Важливою властивістю циліндричних функцій є їхня поведінка при $x \to 0$. Внаслідок леми 1 § 2 цього розділу функції $H_\nu^{(1,2)}(x)$ і $N_\nu(x)$ при $x \to 0$ прямують до безмежності, оскільки $J_\nu(0)$ — скінченне. Точніше кажучи,

$$H_0^{(1)}(x), H_0^{(2)}(x), N_0(x) \sim \ln \frac{1}{x},$$

тому що $J_0(0) = 1 \neq 0$;

$$H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x), N_\nu(x) \sim \frac{1}{x^\nu} \qquad \text{при } \nu > 0,$$

тому що $J_\nu(x) \sim x^\nu$ при $x \to 0$.

Наостанок наведемо без доведення декілька теорем, які стосуються нулів циліндричних функцій, оскільки, як відомо (див. § 4), ортогональність функцій Бесселя пов'язана з нулями самих функцій і їхніх похідних.

Теорема 1. Нулі будь-якої циліндричної функції прості, крім, можливо, $x = 0$.

Наслідок. Усі нулі циліндричних функцій з $\nu \geqslant 0$ ізольовані.

Теорема 2. Усі нулі функцій Бесселя $J_\nu(x)$ з дійсними $\nu > -1$ дійсні.

Теорема 3. Будь-яка циліндрична функція $y_\nu(x)$, що набуває дійсних значень на дійсній осі, має нескінченну кількість нулів.

Теорема 4. Нулі функцій $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ і $\varphi_\nu(x) = xJ'_\nu(x) + hJ_\nu(x)$ з додатним ν зростають зі зростанням ν.

Теорема 5. Функції $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ не мають спільних нулів, крім, можливо, $x = 0$.

§ 5.* Функції Ейрі

Функції Ейрі[15] $\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$ є двома лінійно незалежними розв'язками такого диференціального рівняння:

$$y'' - xy = 0. \tag{V.125}$$

[15]Джордж Бідделл Ейрі (Sir George Biddell Airy, 1801–1892) — англійський математик і астроном.

У фізичних задачах вони з'являються, наприклад, під час вивчення дифракції від точкового джерела світла, а також у разі розв'язування рівняння Шрьодінґера для трикутної потенціальної ями.

Для дійсних значень арґумента функція $\mathrm{Ai}(x)$ визначена інтеґралом

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \tag{V.126}$$

Інтеґральне зображення функції $\mathrm{Bi}(x)$ має дещо складніший вигляд:

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt. \tag{V.127}$$

Функції Ейрі можна виразити через модифіковані функції Бесселя:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \tag{V.128}$$

$$\mathrm{Bi}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]. \tag{V.129}$$

У разі великих значень арґумента асимптотичну поведінку цих функцій задають співвідношення

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, x^{1/4}}\, e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \tag{V.130}$$

$$\mathrm{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x^{1/4}}\, e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}, \tag{V.131}$$

а в границі великих від'ємних чисел вони відрізняються лише фазою:

$$\mathrm{Ai}(-x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{V.132}$$

$$\mathrm{Bi}(-x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{V.133}$$

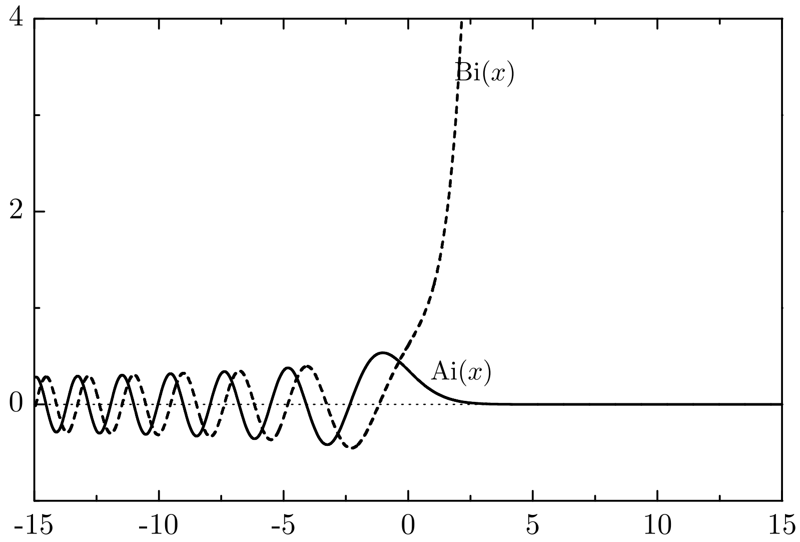


Рис. V.11. Функції Ейрі.

Графіки функцій $\mathrm{Ai}(x)$ і $\mathrm{Bi}(x)$ наведено на рис. V.11.

Значення функцій Ейрі та їхніх похідних у точці $x = 0$ виражають через Γ-функцію:

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \qquad \mathrm{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \tag{V.134}$$

$$\mathrm{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \qquad \mathrm{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \tag{V.135}$$

Для прикладу, обчислимо перше з наведених значень:

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\frac{t^3}{3}\,dt = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \exp\left(i\frac{t^3}{3}\right)\,dt.$$

Розглянемо контур, зображений на рис. V.12, який складається з відрізка дійсної осі $[0, R]$ (C_1), дуги сектора з кутовою величиною $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ (C_R) і другого прямолінійного відрізка, що закінчується в початку координат C_2. Оскільки підінтеґральна функція не має особливостей, то за теоремою Коші

$$\oint\limits_{C=C_1+C_R+C_2} \exp\left(i\frac{\zeta^3}{3}\right)\, d\zeta = 0.$$

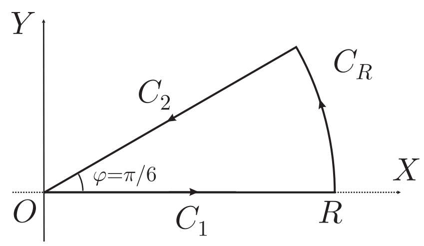


Рис. V.12. Контур інтеґрування для знаходження Ai(0).

При $R \to \infty$ інтеґрал за C_R прямує до нуля, тому шуканий інтеґрал $\int\limits_{C_1} = -\int\limits_{C_2}$. Для розрахунку інтеґрала по контуру C_2 перейдемо до полярних координат $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $d\zeta = e^{i\varphi}\, d\rho$, оскільки на контурі $\varphi = \pi/6 = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_2} \exp\left(i\frac{\zeta^3}{3}\right)\, d\zeta &= \int\limits_{\infty}^{0} \exp\left(i\frac{\rho^3}{3}e^{i\frac{\pi}{6}\cdot 3}\right)\, e^{i\frac{\pi}{6}} d\rho = \\ &= -e^{i\frac{\pi}{6}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho^3}{3}\right)\, d\rho,\end{aligned}$$

де враховано, що $e^{i\pi/2} = i$.

Далі переходимо до змінної $t = \rho^3/3$, $d\rho = 3^{-\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}-1}\, dt$:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho^3}{3}\right)\, d\rho = \frac{1}{3^{2/3}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{3}-1}\, dt = \frac{1}{3^{2/3}}\, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Унаслідок цих перетворень шукане значення функції Ейрі буде

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3^{2/3}}\, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \mathrm{Re}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3^{2/3}}\, \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{6},$$

де ми скористалися властивістю (V.10). Остаточно матимемо, як і повинно бути,

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

§ 6. Сферичні функції

6.1. Найпростіші сферичні функції

Сферичні функції так само широко застосовують у математичній фізиці, як і циліндричні. Сферичні функції введені з огляду вивчення розв'язків рівняння Лапласа у сферичних координатах методом відокремлення змінних. Зокрема, якщо шукати розв'язок рівняння у вигляді

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi),$$

то для $R(r)$ і $Y(\theta, \varphi)$ одержимо

$$(r^2 R')' - \lambda R = 0, \tag{V.136}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi} + \lambda Y = 0. \tag{V.137}$$

Неперервні в області $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ розв'язки рівняння (V.137) такі, що $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$, називають ***сферичними функціями***.

Розглянемо спочатку сім'ю сферичних функцій, незалежних від змінної φ. У цьому випадку рівняння (V.137) набуває вигляду

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dY}{d\theta}\right) + \lambda Y = 0. \tag{V.138}$$

Зробимо в ньому заміну змінної $x = \cos\theta$, одержимо

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dY}{dx}\right] + \lambda Y = 0. \tag{V.139}$$

Це є рівнянням Лежандра. Неперервні на відрізку $[-1,1]$ розв'язки цього рівняння (див. § 3) існують тільки за значень $\lambda = n(n+1)$, де n — довільне ціле невід'ємне число, і цими розв'язками є поліноми Лежандра $P_n(x)$. Отже, поліноми Лежандра $P_n(\cos\theta)$ — це сферичні функції, незалежні від змінної φ. Ці функції іноді називають ***зональними сферичними функціями***, їхні властивості розглянуто в параграфі § 3.

6.2. Приєднані функції Лежандра

Якщо обмежені розв'язки рівняння (V.137) шукати у вигляді

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \qquad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

то для функцій $\Theta(\theta)$ і $\Phi(\varphi)$ одержимо рівняння

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big[\Theta'(\theta)\sin\theta\Big] + \Big(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\Big)\Theta(\theta) = 0, \tag{V.140}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0. \tag{V.141}$$

З умови періодичності функції $\Phi(\varphi)$ знаходимо $\mu = m^2$ (m — ціле число). Тому

$$\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi,$$

де A, B — константи. У рівнянні (V.140) зробимо заміну змінної $x = \cos\theta$. Одержимо

$$(1-x^2)\Theta_{xx} - 2x\Theta_x + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0. \tag{V.142}$$

При $m = 0$ воно збігається з рівнянням Лежандра. Треба знайти неперервні на відрізку $[-1,1]$ розв'язки цього рівняння. Нехай $\Theta_\lambda(x)$ — такі розв'язки. Тоді функції $A\Theta_\lambda(\cos\theta)\cos m\varphi + B\Theta_\lambda(\cos\theta)\sin m\varphi$ будуть шуканими сферичними функціями.

Неперервні на відрізку $[-1,1]$ розв'язки рівняння (V.142) називають ***приєднаними функціями Лежандра***. Для їхнього знаходження перейдемо до нової функції $v(x)$ за формулою

$$\Theta(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}v(x), \tag{V.143}$$

тоді рівняння (V.142) перепишемо так:

$$\left(1-x^2\right)v''-2x(m+1)v'+[\lambda-m(m+1)]v=0, \tag{V.144}$$

або

$$\left[\left(1-x^2\right)^{m+1}v'\right]'+[\lambda-m(m+1)]\left(1-x^2\right)^m v=0. \tag{V.145}$$

Таке саме рівняння одержують з рівняння Лежандра, якщо продиференціювати його m разів.

Однак рівняння Лежандра має неперервні і m разів диференційовні на відрізку $[-1,1]$ розв'язки лише за значень $\lambda=\lambda_n=$ $=n(n+1)$, де n — довільне ціле невід'ємне число, якими є поліноми Лежандра $P_n(x)$. Отже, лише при $\lambda=\lambda_n$ рівняння (V.145) має неперервні на відрізку $[-1,1]$ розв'язки, якими є похідні m-го порядку від поліномів Лежандра $P_n(x)$, тобто для приєднаних функцій Лежандра маємо

$$P_n^{(m)}(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}. \tag{V.146}$$

Зрозуміло, що $P_n^{(0)}(x)\equiv P_n(x)$, $P_n^{(m)}(x)\not\equiv 0$ тільки при $m\leqslant n$. Згідно з лемою 2 (див. § 2), другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (V.142) має в точках $x=\pm1$ особливості типу $A_1(1-x)^{-m/2}$ і $A_2(1+x)^{-m/2}$. Із загальної теорії, викладеної в § 2, випливає, що приєднані функції Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ утворюють ортогональну систему. Обчислимо норму цих функцій. Для цього в рівнянні (V.145) замінимо $m+1$ на m:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]= \tag{V.147}$$

$$=-[\lambda-m(m-1)]\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Уведемо позначення

$$L^m_{n,k} = \int_{-1}^{1} P^{(m)}_n(x) P^{(m)}_k(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^m P_k(x)}{dx^m}\, dx$$

і проінтеґруємо частинами:

$$\begin{aligned} L^m_{n,k} &= \left[\frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \left(1-x^2\right)^m\right]\Bigg|_{-1}^{1} - \\ &\quad - \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right] dx. \end{aligned}$$

Перший доданок дорівнює нулю з огляду на співмножник $\left(1-x^2\right)^m$, а підінтеґральний вираз за допомогою співвідношення (V.147) перетворимо так:

$$L^m_{n,k} = [n(n+1) - m(m+1)] L^{m-1}_{n,k} = (n+m)(n-m+1) L^{m-1}_{n,k}.$$

З цієї рекурентної формули випливає

$$\begin{aligned} L^m_{n,k} &= (n+m)(n+m-1)\dots(n+1)n\dots(n-m+1)L^0_{n,k} = \\ &= \frac{(n+m)!}{n!} \frac{n!}{(n-m)!} L^0_{n,k} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L^0_{n,k}. \end{aligned}$$

Вираз для $L^0_{n,k}$ дає формула (V.56), оскільки $P^{(0)}_n(x) = P_n(x)$. Отже,

$$\int\limits_{-1}^{1} P^{(m)}_k(x) P^{(m)}_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n, \end{cases} \qquad \text{(V.148)}$$

тобто приєднані функції Лежандра утворюють повну систему ортонормованих функцій.

6.3. Фундаментальні сферичні функції

З наведеного вище випливає, що функції $\Theta_\lambda(\cos\theta)\cos m\varphi$ і $\Theta_\lambda(\cos\theta)\sin m\varphi$ — сферичні. Тут $\Theta_\lambda(x)$ — розв'язки рівняння (V.142), які є приєднаними функціями Лежандра. Отже, функції

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$$

і

$$\begin{aligned} Y_n^{-m}(\theta,\varphi) &= P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \\ Y_n^0(\theta,\varphi) &= P_n^{(0)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

— це сферичні функції. Їх називають також ***фундаментальними сферичними функціями*** n***-го порядку***, або ***сферичними гармоніками порядку*** n ***степеня*** m (рис. V.13). Далі ми використовуватимемо еквівалентне означення, яке виявляється зручнішим для деяких фізичних задач:

$$Y_{nm}(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Індекс m може набувати $2n+1$ різних значень. Очевидно, що лінійна комбінація

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=-n}^{n} C_m Y_{nm}(\theta,\varphi) \tag{V.149}$$

також буде сферичною функцією.

При $\lambda = n(n+1)$ рівняння (V.136) має розв'язки

$$R_1(r) = r^n \qquad \text{і} \qquad R_2(r) = r^{-(n+1)},$$

тоді розв'язки рівняння Лапласа запишемо так:

$$\begin{aligned} &u_1(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n(\theta,\varphi), \\ &u_2(r,\theta,\varphi) = r^{-(n+1)} Y_n(\theta,\varphi), \end{aligned} \tag{V.150}$$

тобто вони є гармонічними функціями. Їх називають ***кульовими функціями*** n***-го порядку***.

Отже, сферичні функції n-го порядку є значеннями кульових функцій n-го порядку на одиничній сфері.

Доведемо тепер, що сферичні функції ортогональні, тобто

$$\oiint\limits_{S_1} Y_n^*(\theta,\varphi)Y_s(\theta,\varphi)\,d\Omega = 0, \qquad \text{якщо } n \neq s,$$

де $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, або

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,Y_n^*(\theta,\varphi)Y_s(\theta,\varphi) = 0. \tag{V.151}$$

Варто звернути увагу на те, що в умові ортогональності для комплекснозначних функцій фіґурує операція комплексного спряження.

Для доведення зазначимо, що фундаментальні сферичні функції ортогональні:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,Y_{nk}^*(\theta,\varphi)Y_{sp}(\theta,\varphi) = 0 \tag{V.152}$$

$$\text{при } k \neq p \text{ або } n \neq s,$$

тому що

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,Y_{nk}^*(\theta,\varphi)Y_{sp}(\theta,\varphi)$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\,e^{ip\varphi}\,d\varphi \int\limits_{-1}^{1} P_n^{(k)}(x)P_s^{(p)}(x)\,dx = 0.$$

Справді, якщо $k \neq p$, то перший інтеґрал у правій частині дорівнює нулю, якщо ж $k = p$, але $n \neq s$, то нулю дорівнює другий інтеґрал (через ортогональність приєднаних функцій Лежандра). З ортогональності фундаментальних сферичних функцій і з формули (V.149) випливає властивість ортогональності (V.151).

Обчислимо квадрат норми

$$\begin{aligned} \left|\left|Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|\right|^2 &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \, \left|Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|^2 = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \, e^{im\varphi} \, d\varphi \int\limits_{-1}^{1} \left[P_n^{(m)}(x)\right]^2 \, dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\left|\left|Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|\right|^2 = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad \text{(V.153)}$$

Можна довести, що кульові функції $r^n Y_n(\theta,\varphi)$ є однорідними гармонічними поліномами n-го степеня за змінними x, y, z.

Фундаментальні сферичні функції можна розглядати як власні функції крайової задачі: знайти значення параметра λ і відповідні скінченні розв'язки рівняння

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0,$$

які неперервні в області $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ і задовольняють умову періодичності $Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi)$.

Числа $\lambda_n = n(n+1)$, де n — цілі невід'ємні числа, є власними значеннями цієї крайової задачі, а фундаментальні сферичні функції $Y_{nm}(\theta,\varphi)$, $m = 0, 2, \ldots, n$ — власні функції, що їм відповідають. Сукупність фундаментальних сферичних функцій вичерпує всі лінійно-незалежні розв'язки рівняння (V.137).

Сферичні функції утворюють повну систему функцій, і довільну двічі неперервно диференційовну функцію $f(\theta,\varphi)$ можна розкласти в ряд

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{mn} e^{im\varphi} P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

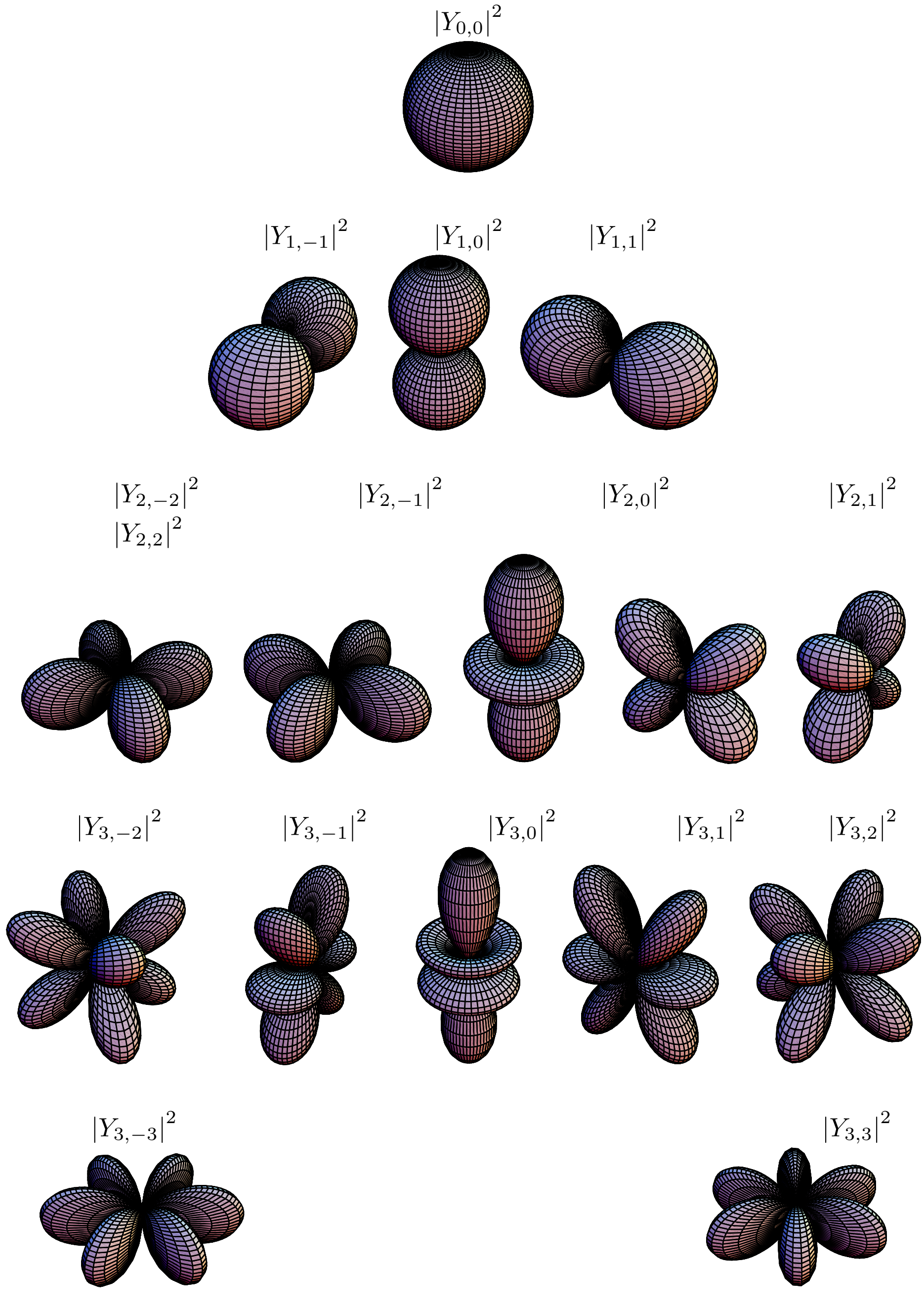


Рис. V.13. Сферичні гармоніки.

де коефіцієнти Фур'є A_{mn} визначають за формулою:

$$A_{mn} = \frac{1}{\left|\left|Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|\right|^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \, f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{-im\varphi}.$$

§ 7.* Функції Матьє

У фізичних задачах, пов'язаних з об'єктами еліптичної форми, виникають нові цікаві функції, розрахунок яких виявляється непростим завданням. У цьому параграфі ми розглянемо ***рівняння Матьє***[16]

$$y'' + (a - 2q\cos 2x)y = 0. \tag{V.154}$$

Його можна отримати внаслідок переходу в рівнянні Лапласа до ***координат еліптичного циліндра***

$$x = \rho \operatorname{ch} u \cos v, \qquad y = \rho \operatorname{ch} u \sin v, \qquad z = z, \tag{V.155}$$

де ρ — додатна константа.

Уперше це рівняння виникло в задачі про коливання еліптичної мембрани. Принагідно зазначимо, що аналогічну форму мають рівняння деяких задач, пов'язаних з періодичними потенціалами, наприклад, рівняння руху математичного маятника, точка підвісу якого виконує вертикальні гармонічні коливання.

У загальному випадку розв'язки рівняння (V.154) не є періодичними функціями, однак далі ми обмежимося розв'язками, що мають період 2π. Їм відповідають власні значення параметра a (їх називають характеристичними), залежні від q. Ті значення, що відповідають ***парним*** розв'язкам, позначають a_n, а ті, що відповідають непарним, — b_n. Парні розв'язки рівняння (V.154) назива-

[16]Еміль Леонар Матьє (Émile Léonard Mathieu, 1835–1890) — французький математик.

ють ***еліптичними косинусами*** і позначають $\mathrm{ce}_n(q,x)$, а непарні — ***еліптичними синусами*** і позначають $\mathrm{se}_n(q,x)$ (рис. V.14).

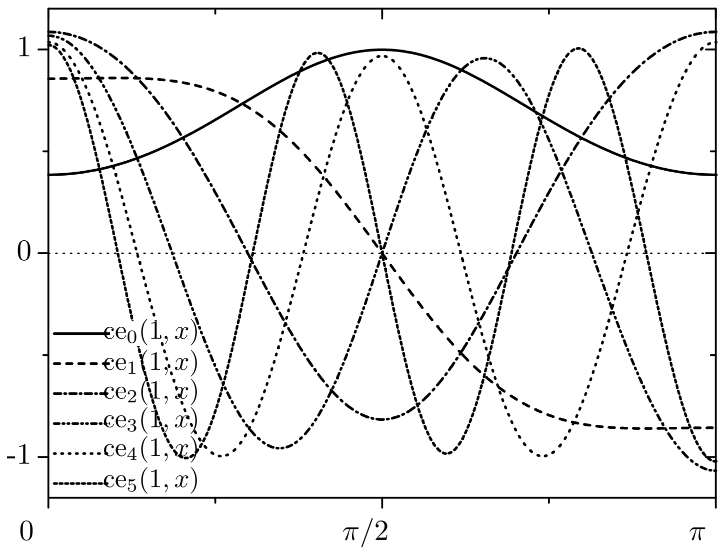


Рис. V.14. Функції Матьє.

Для власних значень a_n і b_n правильні такі твердження[17]:

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots, \qquad \text{якщо } q > 0,$$
$$a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < b_4 < \dots, \qquad \text{якщо } q < 0.$$

При $q \to 0$ власні значення $a_n, b_n \sim n^2$, і відповідні розв'язки прямують до звичайних косинуса або синуса.

Зобразимо розв'язок рівняння (V.154) у вигляді ряду Фур'є

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(A_m \cos mx + B_m \sin mx \Big)$$

і отримаємо після підстановки в рівняння певні рекурентні співвідношення між коефіцієнтами A_m і B_m, тоді можна довести, що

[17]Див. наприклад, Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица и И. Стиган.* — Москва : Наука, 1979. — Гл. 20.

власні значення a_n і b_n є коренями таких рівнянь, записаних через так звані ланцюгові дроби:

$$a_{2n}: \qquad V_0 - \cfrac{2}{V_2 - \cfrac{1}{V_4 - \cfrac{1}{V_6 - \ldots}}} = 0;$$

$$a_{2n+1}: \qquad V_1 - 1 - \cfrac{1}{V_3 - \cfrac{1}{V_5 - \cfrac{1}{V_7 - \ldots}}} = 0;$$

$$b_{2n}: \qquad V_2 - \cfrac{2}{V_4 - \cfrac{1}{V_6 - \cfrac{1}{V_8 - \ldots}}} = 0;$$

$$b_{2n+1}: \qquad V_1 + 1 - \cfrac{1}{V_3 - \cfrac{1}{V_5 - \cfrac{1}{V_7 - \ldots}}} = 0;$$

де $V_m = (a - m^2)/q$.

У разі малих значень параметра q розклади функцій $\mathrm{se}_n(q, x)$, $\mathrm{ce}_n(q, x)$ у ряд мають вигляд

$$\mathrm{ce}_0(x, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \cos 2x + \ldots, \tag{V.156}$$

$$\mathrm{ce}_1(x, q) = \cos x - \frac{1}{8} \cos 3x + \ldots, \tag{V.157}$$

$$\mathrm{se}_1(x, q) = \sin x - \frac{1}{8} \sin 3x + \ldots, \tag{V.158}$$

$$\mathrm{ce}_n(x, q) = \cos nx - q \left[\frac{\cos(n+2)x}{4(n+1)} - \frac{\cos(n-2)x}{4(n-1)} \right] + \ldots, \tag{V.159}$$

$$\mathrm{se}_n(x, q) = \sin nx - q \left[\frac{\sin(n+2)x}{4(n+1)} - \frac{\sin(n-2)x}{4(n-1)} \right] + \ldots \qquad (n \geq 2). \tag{V.160}$$

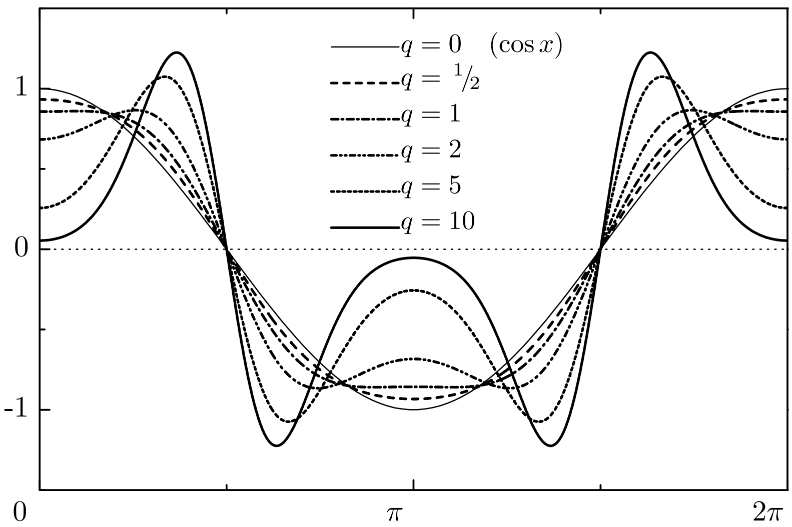


Рис. V.15. Функція $\mathrm{ce}_1(q, x)$.

На рис. V.15 зображено залежність функції $\mathrm{ce}_1(q, x)$ для різних q порівняно з функцією $\cos x$.

§ 8.* Гіпергеометрична функція

Найзагальніший вигляд цієї функції можна записати як ***гіпергеометричний ряд***:

$$ {}_nF_m(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ldots (a_n)_k}{(b_1)_k \ldots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{(V.161)} $$

де $(a)_k$ — символ Похгаммера (V.8):

$$ (a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a). $$

Ця функція задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$ \left(\frac{d}{dz} \prod_{k=1}^{m} \left(z\frac{d}{dz} + b_k - 1 \right) - \prod_{k=1}^{n} \left(z\frac{d}{dz} + a_k \right) \right) w(z) = 0. \quad \text{(V.162)} $$

У фізичних задачах найчастіше виникає ***гіпергеометрична функція (Ґаусса)***, що відповідає $n = 2$, $m = 1$:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \qquad \text{(V.163)} $$

Вона задовольняє таке диференціальне рівняння другого порядку:

$$ z(1-z)\frac{d^2F(z)}{dz^2} + \Big(c - (a+b+1)z\Big)\frac{dF(z)}{dz} + abF(z) = 0. \qquad \text{(V.164)} $$

Для ${}_2F_1(a, b; c; z)$ справджується таке інтеґральне зображення:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\, dt $$

$$ (\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0). \qquad \text{(V.165)} $$

Часткове значення

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad \text{(V.166)} $$

$$ c \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0. $$

Інші часткові випадки гіпергеометричної функції:

$$ {}_0F_1(; a; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_k} \frac{z^k}{k!}. \qquad \text{(V.167)} $$

Вироджена гіпергеометрична функція (Куммера[18]):

$$ {}_1F_1(a; b; z) \equiv F(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}. \qquad \text{(V.168)} $$

Елементарні функції, як і більшіть спеціальних, можна записати як часткові випадки гіпергеометричного ряду. Зокрема,

[18]Ернст Едуард Куммер (Ernst Eduard Kummer, 1810–1893) — німецький математик.

справджуються такі зображення через вироджену гіпергеометричну функцію:

$$\begin{aligned}
H_{2n}(z) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} F\left(-n; \frac{1}{2}; z^2\right), \\
H_{2n+1}(z) &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2z\, F\left(-n; \frac{3}{2}; z^2\right), \\
L_n^\alpha(z) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(-n; \alpha+1; z\right), \\
J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{e^{-iz}}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; 2iz\right), \qquad \nu > -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Гіпергеометрична функція Аппеля[19] — функція двох змінних:

$$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{m!\,n!\,(c)_{m+n}}\, x^m\, y^n. \quad \text{(V.169)}$$

Через цю функцію, наприклад, виражають такий інтеґрал:

$$\int_0^1 x^m (x+a)^n (bx+c)^k\, dx = \quad \text{(V.170)}$$

$$= \frac{a^n\, c^k}{1+m}\, x^{1+m}\, F_1\left(1+m, -n, -k, 2+m, -\frac{x}{a}, -\frac{bx}{c}\right).$$

§ 9.* Еліптичні функції

Розглянемо функції, які мають таку властивість:

$$f(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = f(z), \quad \text{(V.171)}$$

де m, n — цілі числа, ω_1, ω_2 — деякі комплексні константи, а відношення $\tau = \omega_1/\omega_2$ має ненульову уявну частину (для визначеності додатну):

$$\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0. \quad \text{(V.172)}$$

[19] Поль Аппель (Paul Émile Appell, 1855–1930) — французький математик.

Справді, якщо τ буде дійсним раціональним числом, то $f(z)$ буде звичайною періодичною функцією, а якщо τ не є раціональним числом, то $f(z)$ зводиться до константи.

Властивість (V.171) нагадує звичайне означення періодичної функції, однак у цьому випадку функція $f(z)$ є періодичною у двох напрямах (***двоперіодичною***).

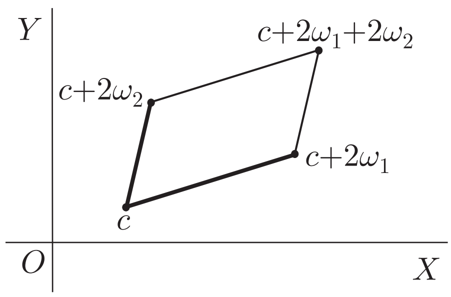


Рис. V.16. Фундаментальний паралелограм.

Мероморфну двоперіодичну функцію називають ***еліптичною функцією*** (зміст цієї назви стане зрозумілим пізніше). Величини $2\omega_1, 2\omega_2$ називають ***примітивними періодами*** функції $f(z)$, якщо будь-який її період ω, тобто таке число, що $f(z+\omega) = f(z)$, можна записати у вигляді $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, де m, n — цілі числа. Зазначимо, що ***теорема Якобі*** доводить неможливість існування функцій з $n \geqslant 3$ примітивними періодами, а випадок $n = 2$ можливий лише за умови, що відношення примітивних періодів не є дійсною величиною.

Завдяки властивості періодичності (V.171) аналіз функції $f(z)$ у всій комплексній площині можна звести до так званого ***фундаментального паралелограма*** або ***паралелограма періодів*** з вершинами в точках $c, c+2\omega_1, c+2\omega_2, c+2\omega_1+2\omega_2$, де c — довільна точка. У цьому разі до фундаментального паралелограма зачисляють лише ті сторони, які сходяться у вершині c (рис. V.16).

Кількість полюсів еліптичної функції (з урахуванням кратності) у фундаментальному паралелограмі називають ***порядком***

еліптичної функції. Можна довести, що мінімальний порядок дорівнює двом. Тому найпростішими еліптичними функціями є ті, що мають у фундаментальному паралелограмі 1) один полюс другого порядку або 2) два полюси першого порядку.

9.1. $\wp$-функція Веєрштрасса

До еліптичних функцій першого типу належить ***функція Веєрштрасса*** $\wp(z)$ (читають "пе" — це стилізована латинська літера P):

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2) = \\ = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(z-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2} \right], \tag{V.173}$$

де штрих біля знака суми означає вилучення доданка з $m = n = 0$.

Функція $\wp(z)$ є парною і має полюси другого порядку в точках $2m\omega_1 + 2n\omega_2$. Її розклад у ряд в околі точки $z = 0$ має вигляд

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^3 + \ldots, \tag{V.174}$$

де так звані ***інваріанти***

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^4}, \\ g_3 &= 140 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^6}. \end{aligned} \tag{V.175}$$

Ці величини однозначно задають функцію $\wp = \wp(z; g_2, g_3)$.

Функція Веєрштрасса задовольняє таке (нелінійне) диференціальне рівняння:

$$\left[\wp'(z)\right]^2 = 4\,[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3, \tag{V.176}$$

тобто, іншими словами, вона є розв'язком (інтеґралом) рівняння

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{V.177}$$

або

$$z = \int\limits_{\wp(z)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}. \qquad \text{(V.178)}$$

Рівняння (V.176) дає змогу виразити всі похідні функції $\wp(z)$ через $\wp(z)$ і $\wp'(z)$:

$$\begin{aligned} \wp'' &= 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}, \\ \wp''' &= 12\wp\wp' \\ \wp^{(\mathrm{IV})} &= 120\wp^3 - 18g_2\wp - 12g_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Можна довести, що будь-яку еліптичну функцію $f(z)$ виражають через $\wp$ і $\wp'$:

$$f(z) = R_1(\wp) + R_2(\wp)\wp',$$

де R_1, R_2 — раціональні функції.

9.2. Еліптичні інтеґрали

Еліптичним інтеґралом називають інтеґрал вигляду

$$\int R(z, w)\, dz, \qquad \text{(V.179)}$$

де R — раціональна функція своїх арґументів; w — поліном третього або четвертого степеня, який не має кратних коренів:

$$w^2 = a_4 z^4 + 4a_3 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_1 z + a_0. \qquad \text{(V.180)}$$

Однією з найпростіших задач, у якій виникає інтеґрал типу (V.179), є задача про знаходження довжини дуги еліпса. Саме з цим і пов'язані назви "еліптичні інтеґрали", "еліптичні функції".

Нехай еліпс задано параметричними рівняннями

$$x = a \sin t, \qquad y = b \cos t.$$

Диференціал довжини дуги

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t\right)\, dt^2 = a^2\left(1 - k^2 \sin^2 t\right)\, dt^2,$$

де

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Інтеґрал

$$L = \int d\ell = a \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \tag{V.181}$$

не виразити через елементарні функції. Заміною змінної $z = \sin t$ його зводять до вигляду

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt = \int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz = \int \frac{1 - k^2 z^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\, dz,$$

що є частковим випадком (V.179).

У загальному випадку інтеґрал (V.179) можна звести до вигляду

$$\int \tilde{R}(x, \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}\,)\, dx \tag{V.182}$$

де $\tilde{R}$ — також раціональна функція своїх арґументів.

До канонічної форми

$$4x^3 - g_2 - g_3 \tag{V.183}$$

поліном четвертого степеня (V.180) зводять за допомогою перетворення

$$z = \alpha + \frac{w'(\alpha)}{4\left[x - \dfrac{1}{24} w''(\alpha)\right]}, \tag{V.184}$$

де α — один з коренів $w(z)$. У цьому разі

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \tag{V.185}$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{V.186}$$

У загальному випадку (V.182) виражають через деяку раціональну функцію від x і

$$w = \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3},$$

а також такі три типи еліптичних інтеґралів:

$$z = \int \frac{dx}{w} \tag{V.187}$$

— ***еліптичний інтеґрал першого роду***,

$$\int \frac{x\,dx}{w} \tag{V.188}$$

— ***еліптичний інтеґрал другого роду***,

$$\frac{1}{2} \int \frac{w + w_0}{x - x_0} \frac{dx}{w} \tag{V.189}$$

— ***еліптичний інтеґрал третього роду***.

Пригадуючи (V.178), бачимо, що оберненою до першого інтеґрала буде функція Веєрштрасса: $x = \wp(z)$, тому нескладно довести, що $w = \wp'(z)$. Величини, відповідно, $w_0 = \wp'(a)$, $x_0 = \wp(a)$, де a — деяка константа.

Обчислюючи довжину дуги еліпса, ми звели задачу до іншого вигляду запису еліптичних інтеґралів. Далі ми розглянемо такі три функції: ***еліптичний інтеґрал першого роду***

$$F(\varphi; k) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \tag{V.190}$$

еліптичний інтеґрал другого роду

$$E(\varphi; k) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\; d\theta, \tag{V.191}$$

еліптичний інтеґрал третього роду

$$\Pi(\varphi; k, c) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - c\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}. \qquad (V.192)$$

Величину k називають ***еліптичним модулем***, $m = k^2$ — ***параметром***, а c — ***характеристикою***. Еліптичний модуль задовольняє умову $0 < k^2 < 1$, граничні значення відповідають виродженим випадкам, коли еліптичні інтеґрали зводяться до елементарних функцій.

У позначеннях еліптичних інтеґралів також використовують ***модулярний кут*** α: $\sin\alpha = k$, причому в цьому разі арґументи розділяють знаком \:

$$F(\varphi\backslash\alpha) = F(\varphi; \sin\alpha) = F(\varphi; k).$$

Якщо в наведених означеннях $\varphi = \pi/2$, то відповідні інтеґрали називають ***повними***.

Повний еліптичний інтеґрал першого роду

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} = \int\limits_0^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}. \qquad (V.193)$$

Повний еліптичний інтеґрал другого роду

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\; d\theta = \int\limits_0^{1} \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\; dz. \qquad (V.194)$$

Повний еліптичний інтеґрал третього роду

$$\Pi(c, k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - c\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}. \qquad (V.195)$$

Якщо еліптичні інтеґрали записано через $\sin^2\theta$, то це ***форма Лежандра***. Запис, аналогічний до другої рівності у формулах (V.193), (V.194), називають ***формою Якобі***.

9.3. Функції Якобі

Обернені до еліптичних інтеґралів ***еліптичні функції Якобі*** визначають так:

$$z = F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \operatorname{am} z \quad \text{(V.196)}$$

— ***амплітуда*** z,

$$\operatorname{sn} z = \sin(\operatorname{am} z) \quad \text{(V.197)}$$

— ***синус амплітуди*** z, а також $\operatorname{cn} z$ (***косинус амплітуди***) і $\operatorname{dn} z$ (***дельта амплітуди***):

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} z &= \cos(\operatorname{am} z) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, && \text{(V.198)} \\ \operatorname{dn} z &= \Delta(k, \operatorname{am} z) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}. && \text{(V.199)} \end{aligned}$$

Ці функції залежать від двох змінних (z і k), однак параметр k явно, як зазвичай, не пишуть.

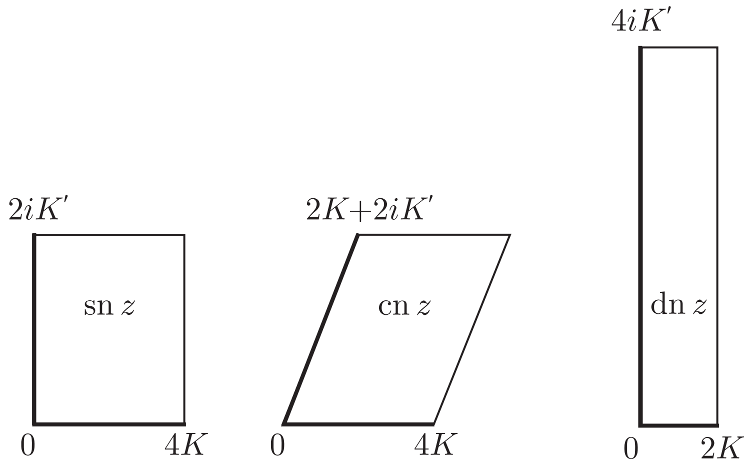


Рис. V.17. Фундаментальні паралелограми для функцій Якобі.

Еліптичні функції Якобі належать до другого типу еліптичних функцій, визначеного у вступній частині, тобто у фундаментальному паралелограмі вони мають два полюси першого порядку.

У граничних випадках ($k = 0$ і $k = 1$) отримують тригонометричні й гіперболічні функції:

$$\operatorname{sn}(z,0) = \sin z, \qquad \operatorname{cn}(z,1) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{dn}(z,0) = 1,$$
$$\operatorname{sn}(z,1) = \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{cn}(z,0) = \cos z, \qquad \operatorname{dn}(z,1) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}.$$

Періоди еліптичних функцій Якобі визначають модуль k і ***доповняльний модуль*** $k' = \sqrt{1-k^2}$. Позначимо $K = K(k)$ і $K' = K(k')$. Примітивними періодами функції $\operatorname{sn} z$ є $4K$, $2iK'$; функції $\operatorname{cn} z$ — $4K$, $2K + 2iK'$; функції $\operatorname{dn} z$ — $2K$, $4iK'$. Фундаментальні паралелограми цих функцій для заданого k мають однакові площі (рис. V.17).

§ 10.* Деякі функції, які трапляються у фізичних задачах

10.1. Функція (інтеґрал) помилок. Інтеґрали Френеля

Задачі теорії ймовірностей і статистики, пов'язані з використанням ***нормального розподілу***, часто потребують уведення ***функції (інтеґрала) помилок***:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt, \tag{V.200}$$

для зручності використовують також ***додаткову функцію помилок***:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt. \tag{V.201}$$

Розв'язування деяких оптичних задач, що стосуються теорії дифракції, приводить до ***інтеґралів Френеля***[20]

$$C(x) = \int\limits_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt, \tag{V.202}$$

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt, \tag{V.203}$$

які не можна виразити через елементарні функції. Графіки цих функцій показано на рис. V.18.

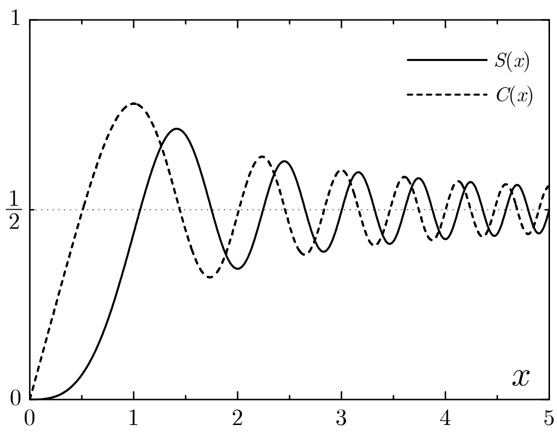


Рис. V.18. Інтеґрали Френеля.

10.2. Інтеґральні функції

Інтеґрування виразів, що містять добутки обернених степенів змінної на тригонометричні функції або експоненту, не можна виконати в елементарних функціях. У таких випадках уводять ***інтеґральні функції***. Розглянемо далі їхні традиційні означення.

[20]Оґюстен-Жан Френель (Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827) — французький фізик.

Інтеґральний синус

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \tag{V.204}$$

(рис. V.19). Наприклад, знайдемо значення цієї функції на безмежності.

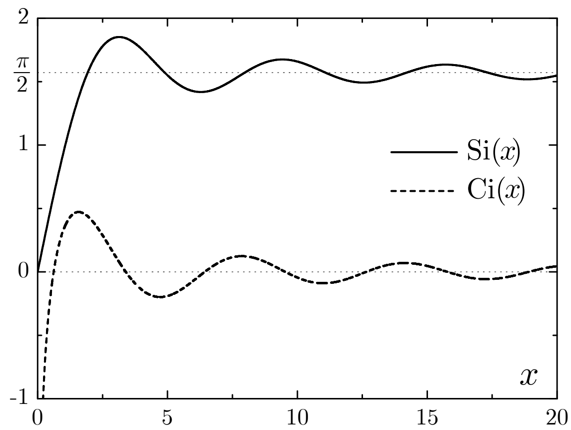


Рис. V.19. Інтеґральні синус і косинус.

З урахуванням парності підінтеґральної функції запишемо низку простих перетворень:

$$\mathrm{Si}(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\, dt.$$

Замикаючи дійсну вісь півколом у верхній півплощині і враховуючи, що полюс підінтеґральної функції потрапляє на границю контуру, отримаємо

$$\mathrm{Si}(\infty) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Подібно до інтеґрального синуса вводять ***інтеґральний косинус***

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \qquad (\mathrm{V}.205)$$

(рис. V.19), а також ***інтеґральні показникові функції***

$$\mathrm{Ei}(x) = -P\int\limits_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt \qquad (x > 0), \qquad (\mathrm{V}.206)$$

$$\mathrm{E}_n(z) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n}\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \qquad (\mathrm{V}.207)$$

Із функцією $\mathrm{Ei}(x)$ пов'язаний ***інтеґральний логарифм***

$$\mathrm{li}(x) = P\int\limits_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt, \qquad x > 1, \qquad (\mathrm{V}.208)$$

який задовольняє співвідношення $\mathrm{li}(z) = \mathrm{Ei}(\ln z)$.

10.3. Поліноми і числа Бернуллі

Поліноми Бернуллі[21] $B_n(x)$ ґенерує твірна функція

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^\infty B_n(x)\frac{t^n}{n!}. \qquad (\mathrm{V}.209)$$

Значення цих поліномів у точці $x = 0$ називають ***числами Бернуллі***

$$B_n = B_n(0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \qquad (\mathrm{V}.210)$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \ \ldots; \qquad B_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

[21] Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик.

Через числа Бернуллі визначають коефіцієнти ряду Тейлора для тригонометричних і гіперболічних функцій танґенса й котанґенса. Вони також входять у ***формулу Ейлера–Маклорена*** для переходу від дискретної суми до інтеґрала:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \approx \int_a^b f(t)\,dt + \frac{1}{2}\Big[f(b) + f(a)\Big] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\Big[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\Big]. \qquad \text{(V.211)}$$

10.4. Дзета-функція Рімана та її узагальнення

Дзета-функція Рімана — одна з важливих спеціальних функцій, які застосовують у математиці (зокрема, у теорії чисел), а також у фізичних задачах, пов'язаних, наприклад, із квантовими розподілами Бозе–Айнштайна[22] і Фермі–Дірака[23].

Вихідним є означення у вигляді суми обернених степенів:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \qquad \text{(V.212)}$$

Подальший виклад буде ґрунтуватися переважно на оригінальній праці Рімана[24]. Використовуючи інтеґральне зображення Ейлера для Γ-функції (V.1) у вигляді

$$\int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-nt}\, dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

[22]Сат'єндранат Бозе (Satyendra Nath Bose, সত্যেন্দ্র নাথ বসু, 1894–1974), — індійський (бенґальський) фізик; Альберт Айнштайн (Albert Einstein, 1879–1955) — фізик-теоретик.

[23]Енріко Фермі (Enrico Fermi, 1901–1954) — італійський фізик.

[24]*Riemann B.*, Monatsberichte der Königlichen Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, November 1859, S. 671–680.

і підсумовуючи цю рівність за n, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-nt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

або, підсумовуючи геометричну проґресію

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} \left[\frac{1}{1-e^{-t}} - 1\right] dt = \Gamma(s)\zeta(s),$$

остаточно будемо мати таке інтеґральне зображення ζ-функції:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{V.213}$$

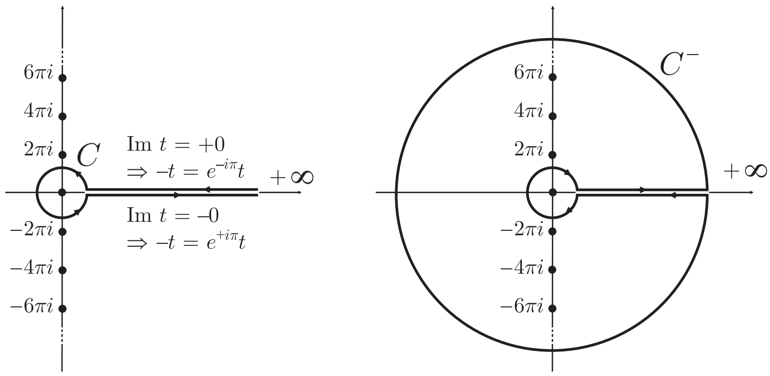
Далі розглянемо інтеґрал

$$\oint_C \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1}\, dt,$$

де контур C починається в точці $+\infty$ на дійсній осі, обходить початок координат у додатному напрямі й повертається у точку $+\infty$. У цьому разі особливі точки підінтеґральної функції, за винятком нуля, тобто $\pm 2\pi n i$, $\;n = 1, 2, 3 \ldots$, не повинні потрапити всередину контуру (рис. V.20,а). Багатозначну функцію $(-t)^{s-1}$ розумітимемо в сенсі головного значення.

$$\oint_C \frac{(-t)^{s-1}}{e^t - 1}\, dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{\left(e^{-i\pi} t\right)^{s-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{i\pi} t\right)^{s-1}}{e^t - 1}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{i\pi} t\right)^{s-1} - \left(e^{-i\pi} t\right)^{s-1}}{e^t - 1}\, dt = -2i \sin \pi s \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt,$$



а б

Рис. V.20. Контури інтеґрувань для ζ-функції.

Отже, маємо зображення ζ-функції у вигляді контурного інтеґрала

$$2\Gamma(s)\zeta(s)\sin\pi s = i\oint\limits_C \frac{(-t)^{s-1}}{e^t-1}\,dt, \tag{V.214}$$

або

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(-t)^{s-1}}{e^t-1}\,dt. \tag{V.215}$$

Якщо s — ціле, $s \leqslant 0$, то

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}(-1)^{s-1}\oint\limits_C \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt = (-1)^s\Gamma(1-s)\operatorname*{res}_{z=0}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}.$$

Використаємо формулу (V.210), отримаємо

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= (-1)^s\Gamma(1-s)\operatorname*{res}_{z=0} z^{s-2}\frac{z}{e^z-1} = \\ &= (-1)^s\Gamma(1-s)\operatorname*{res}_{z=0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^{k+s-2}.\end{aligned}$$

Лишок (коефіцієнт біля $\frac{1}{z}$) матимемо при $k = 1 - s$:

$$\zeta(s) = (-1)^s \Gamma(1-s) \frac{B_{1-s}}{(1-s)!},$$

або остаточно

$$\zeta(s) = (-1)^s \frac{B_{1-s}}{(1-s)}, \qquad s = 0, -1, -2, \dots . \tag{V.216}$$

Коли s — парне (але не нуль), то відповідне число Бернуллі дорівнює нулю й отримуємо так звані ***тривіальні нулі***. Інші значення такі:

$$\zeta(0) = B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}.$$

Теорема. Дзета-функція Рімана є аналітичною в усій комплексній площині, за винятком точки $s = 1$, де вона має простий полюс із лишком 1.

Для доведення цього твердження розіб'ємо інтеґрал у формулі (V.213) на два (пам'ятаймо, що $\operatorname{Re} s > 1$):

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt. \tag{V.217}$$

Очевидно, що другий інтеґрал не має особливостей для всіх s, тобто він є цілою функцією, яку далі позначатимемо $f(s)$. Легко побачити, що функція $1/(e^t - 1)$ має в точці $t = 0$ простий полюс і розкладається в ряд так:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + g(t),$$

де $g(t)$ є мероморфною функцією з полюсами першого порядку в точках $2m\pi i$, $m = \pm 1, \pm 2 \dots$. Тому для $|t| < 2\pi$ матимемо ряд

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n.$$

Для першого інтеґрала у формулі (V.217)

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt = \int_0^1 t^{s-2}\,dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^{s+n-1}\right) dt$$
$$= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^1 t^{s+n-1}\,dt = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{s+n}.$$

Отже,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = f(s) + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{s+n}. \qquad \text{(V.218)}$$

Оскільки $\Gamma(s)$ має в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$ прості полюси, а отже, $1/\Gamma(s)$ має у цих точках прості нулі, то $\zeta(s)$ має при $s = 0, -1, -2, \ldots$ усувні особливості. З того ж, що $\Gamma(1) = 1$, випливає твердження теореми про полюс у точці $s = 1$ з лишком 1.

Якщо $\operatorname{Re} s < 0$, то, замість обчислювати інтеґрал за контуром C, можна розглянути протилежно орієнтований контур C^-, що охоплює особливі точки (полюси першого порядку) підінтеґральної функції $2\pi n i$, $n \neq 0$ (див. рис. V.20.б). За теоремою Коші про лишки (пам'ятаймо про протилежний знак!):

$$\oint_{C^-} \frac{(-t)^{s-1}}{e^t-1}\,dt = -2\pi i \sum_n \operatorname*{res}_{z=2\pi n i} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} = -2\pi i \sum_n (-2\pi n i)^{s-1} =$$
$$= -(2\pi)^s i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i^{s-1}}{n^{1-s}} + \frac{(-i)^{s-1}}{n^{1-s}}\right]$$
$$= -(2\pi)^s i \left[\frac{i^s}{i} + \frac{(-i)^s}{-i}\right] \zeta(1-s) = -(2\pi)^s 2i \sin\frac{\pi s}{2} \zeta(1-s).$$

З урахуванням (V.214) отримаємо

$$\Gamma(s)\zeta(s)\sin\pi s = (2\pi)^s \sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)$$

або, враховуючи властивість Γ-функції (V.10), маємо одне з функціональних рівнянь для ζ-функції:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \qquad \text{(V.219)}$$

Далі, за допомогою тієї ж властивості,

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

Помічаючи, що $1 - s = 2\dfrac{1-s}{2}$ і $1 - \dfrac{s}{2} = \dfrac{1-s}{2} + \dfrac{1}{2}$, застосуємо тут формулу подвоєння для Γ-функції (V.14) і помножимо ще отриману рівність зліва і справа на $\pi^{-s/2}$:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 2^s\pi^{s/2}2^{-s}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

або

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \qquad \text{(V.220)}$$

тобто функція $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$ симетрична щодо заміни s на $(1-s)$ (***формула відбивання для дзета-функції***). За допомогою цієї формули з (V.216) зокрема матимемо

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Тут зазначимо, що з рівняння (V.219) відразу видно тривіальні нулі ζ-функції у точках $s = -2, -4, -6, \ldots$. Згідно з ***гіпотезою Рімана***, усі ***нетривіальні нулі*** ζ-функції лежать на прямій $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ (так звана ***критична пряма***). Рівняння (V.219) також засвідчує, що такі нетривіальні нулі є симетричними відносно дійсної осі (рис. V.21).

Гіпотеза Рімана про нулі ζ-функції досі не доведена, хоча її правильність сьогодні перевірено для кількох трильйонів нулів.

Це твердження є надзвичайно важливим у тих питаннях теорії чисел, які стосуються закономірностей розподілу простих чисел.

Свого часу Ейлер довів, що суму (V.212) можна довести також як такий добуток:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \tag{V.221}$$

де p означає всі прості числа, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$.

Еквівалентність означень (V.212) і (V.221) можна показати так. Оскільки величина p^{-s} завжди менша від одиниці, то маємо під знаком добутку суму геометричної проґресії:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \\
&= \left(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + \dots\right)\left(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + 3^{-3s} + \dots\right) \times \\
&\times \left(1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \dots\right)\left(1 + 7^{-s} + 7^{-2s} + \dots\right)\dots = \\
&= 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 2^{-2s} + 5^{-s} + 2^{-s}3^{-s} + 7^{-s} + 2^{-3s} + \dots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},
\end{aligned}$$

остання рівність випливає з того, що кожне натуральне число можна розкласти на прості множники єдиним способом.

Узагальненнями суми типу (V.212) є ***полілогарифм***

$$\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}, \tag{V.222}$$

узагальнена дзета-функція, або ***дзета-функція Гурвіца***[25]:

$$\zeta(s, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,\ \operatorname{Re} a > 0, \tag{V.223}$$

[25]Адольф Гурвіц (Adolf Hurwitz, 1859–1919) — німецький математик.

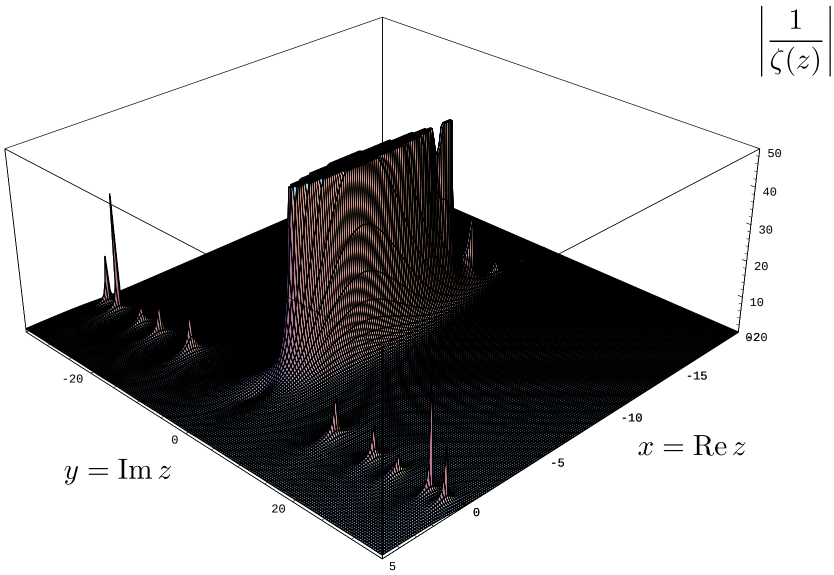


Рис. V.21.

трансцендент Лерха[26]:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^s}. \tag{V.224}$$

Через полілогарифм виражають, зокрема, інтеґрали, що виникають у разі обчислень у статистичній фізиці, пов'язаних з квантовими розподілами Фермі–Дірака (верхній знак) і Бозе–Айнштайна (нижній знак):

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^{s-1}\,dt}{z^{-1}e^t \pm 1} = \mp\Gamma(s)\,\mathrm{Li}_s(\mp z). \tag{V.225}$$

Доведемо, як можна отримати ці результати на прикладі розпо-

[26]Матьяш Лерх (Mathias (Matyás) Lerch, 1860–1922) — чеський математик.

ділу Бозе–Айнштайна:

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{z^{-1}e^t-1} = \Gamma(s)\,\mathrm{Li}_s(z).$$

Перетворимо підінтеґральну функцію так:

$$\begin{aligned}\frac{t^{s-1}}{z^{-1}e^t-1} &= \frac{t^{s-1}}{1-ze^{-t}}\,\frac{1}{z^{-1}e^t} = \frac{ze^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}} \\ &= ze^{-t}t^{s-1}\sum_{k=0}^\infty \left(ze^{-t}\right)^k = t^{s-1}\sum_{k=1}^\infty z^k e^{-kt}.\end{aligned}$$

Розписуючи суму геометричної проґресії, ми скористалися тим, що $ze^{-t} < 1$. Підставимо результат перетворень в інтеґрал, отримаємо очікуване значення

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{z^{-1}e^t-1} = \sum_{k=1}^\infty z^k \int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-kt}\,dt = \sum_{k=1}^\infty z^k\,\frac{1}{k^s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\,\mathrm{Li}_s(z).$$

Функцію $\mathrm{Li}_s(z)$ у фізиці часто називають ***функцією Бозе*** і позначають $g_s(z)$.

З означення полілогарифма видно його зв'язок із ζ-функцією Рімана:

$$\mathrm{Li}_n(1) = \zeta(n). \tag{V.226}$$

Інтеґрал (V.225), який відповідає розподілові Фермі–Дірака, при $z = 1$ зводиться до $\mathrm{Li}_s(-1)$:

$$\mathrm{Li}_s(-1) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^s}.$$

Цю суму можна виразити через дзета-функцію Рімана:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^s} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^s} = 2^{1-s}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}, \\ &\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^s} = \left(2^{1-s}-1\right)\zeta(s).\end{aligned}$$

Тому

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^t+1} = (1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s). \qquad \text{(V.227)}$$

У разі від'ємних значень n функція $\mathrm{Li}_n(x)$ зводиться до дробово-раціональної, зокрема,

$$\mathrm{Li}_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Безпосередньо з означення (V.222) також легко довести, що

$$\mathrm{Li}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x},$$

$$\mathrm{Li}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

— саме з останньою рівністю і пов'язана назва “полілогарифм”.

§ 11. Приклади застосування спеціальних функцій

11.1. Гармонічний осцилятор

У квантовій механіці поведінку частинки в полі потенціальних сил описує ***рівняння Шрьодінґера***

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + V(x,y,z,t)\Psi, \qquad \text{(V.228)}$$

де $\hbar$ — стала Планка; μ — маса частинки; V — її потенціальна енерґія в силовому полі; $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$ — ***хвильова функція***; Δ — оператор Лапласа.

Якщо потенціал не залежить від часу, $V = V(x,y,z)$, то можливі так звані ***стаціонарні стани***, що відповідають заданій енерґії E, тобто існують розв'язки типу

$$\Psi(x,y,z,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\Psi_0(x,y,z). \qquad \text{(V.229)}$$

Підставимо цей вираз у рівняння (V.228), отримаємо ***стаціонарне рівняння Шрьодінґера***

$$\Delta\Psi_0 + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V)\Psi_0 = 0, \tag{V.230}$$

де E — власне значення, яке треба знайти. Далі для спрощення замість Ψ_0 писатимемо Ψ:

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0. \tag{V.231}$$

Якщо зовнішнього поля немає, $V = 0$, то рівняння (V.231) перепишемо так:

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\Psi = 0. \tag{V.232}$$

Легко зауважити подібність цього рівняння до хвильового рівняння класичної фізики

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \tag{V.233}$$

де $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — хвильове число; λ — довжина хвилі.

Величина $|\Psi(x, y, z)|^2 dx\, dy\, dz$ має зміст імовірності перебування частинки всередині елементарного об'єму $dx\, dy\, dz$ в точці простору з координатами (x, y, z). Тому на функцію Ψ накладають ***умову нормування***

$$\iiint |\Psi(x, y, z)|^2 dx\, dy\, dz = 1, \tag{V.234}$$

де інтеґрування відбувається по всьому доступному для частинки простору, тобто сумарна ймовірність знайти частинку дорівнює одиниці.

Рівняння Шрьодінґера для одновимірного гармонічного осцилятора має вигляд

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi(x)}{x^2} + \big[E - V(x)\big]\Psi(x) = 0,$$

де $V(x) = \frac{\mu\omega_0^2}{2}\,x^2$, ω_0 — власна частота осцилятора.

Знайдемо спектр власних значень енерґії E і відповідні власні функції з рівняння

$$\Psi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}\,x^2\right)\Psi = 0 \tag{V.235}$$

з додатковою умовою нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2\,dx = 1. \tag{V.236}$$

Уведемо позначення

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \qquad \xi = \frac{x}{x_0}, \tag{V.237}$$

для функції $\Psi(\xi)$ одержимо рівняння

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2\right)\Psi = 0 \tag{V.238}$$

з додатковою умовою нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{x_0}. \tag{V.239}$$

Розв'язком цієї задачі (див. рівняння (V.69)) будуть функції

$$\Psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,\frac{1}{\left[2^n\,n!\sqrt{\pi}\,\right]^{1/2}}\,e^{-\xi^2/2}\,H_n(\xi),$$

що відповідають власним значенням

$$\lambda_n = 2n + 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Повернемось до попередніх позначень, одержимо

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,\frac{1}{\left[2^n\,n!\sqrt{\pi}\,\right]^{1/2}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}\,H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \tag{V.240}$$

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{V.241}$$

У класичній механіці енерґія гармонічного осцилятора може набувати неперервних значень. Як видно з (V.241), енерґія квантового гармонічного осцилятора набуває лише дискретних значень E_n, тобто ***квантується***. Число n, що визначає номер квантового рівня, називають ***головним квантовим числом***. У найнижчому квантовому стані $n = 0$ енерґія осцилятора відмінна від нуля і дорівнює

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}.$$

11.2. Рух електрона в кулонівському полі

Однією з важливих задач квантової механіки є задача про рух електрона в кулонівському полі ядра, тобто задача про спектр атома водню і спектри атомів з одним валентним електроном (воднеподібних атомів).

В атомі водню електрон перебуває в кулонівському електростатичному полі ядра (протона), тому потенціальна енерґія $V(x, y, z)$

$$V = -\frac{e^2}{r}, \tag{V.242}$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — відстань електрона від ядра; $-e$ — заряд електрона; $+e$ — заряд ядра.

Рівняння Шрьодінґера в цьому випадку має вигляд

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi = 0. \tag{V.243}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти такі значення E, для яких рівняння (V.243) має розв'язок, який неперервний у всьому просторі й який задовольняє умову нормування

$$\iiint |\Psi(x, y, z)|^2 dx\, dy\, dz = 1. \tag{V.244}$$

Уведемо сферичну систему координат з початком у нерухомому ядрі

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\Psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\Psi=0 \qquad \text{(V.245)}$$

і будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=\chi(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \qquad \text{(V.246)}$$

Візьмемо до уваги диференціальне рівняння для сферичних функцій $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)+\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=0,$$

одержимо

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr}+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\chi=0. \qquad \text{(V.247)}$$

Уведемо величини

$$a=\frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \qquad E_0=\frac{\mu e^4}{\hbar^2}=\frac{e^2}{a}$$

і приймемо

$$\rho=\frac{r}{a}, \qquad \varepsilon=\frac{E}{E_0} \qquad (\varepsilon<0). \qquad \text{(V.248)}$$

Тоді рівняння (V.247) перепишемо так

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\chi}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)\chi=0. \qquad \text{(V.249)}$$

За допомогою підстановки

$$\chi=\frac{1}{\sqrt{\rho}}y \qquad \text{(V.250)}$$

рівняння (V.249) зведемо до вигляду

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{s^2}{4\rho^2}\right)y=0, \qquad \text{(V.251)}$$

де $s = 2\ell + 1$.

Якщо ввести нову незалежну змінну

$$x = \rho\sqrt{-8\varepsilon}, \tag{V.252}$$

то замість рівняння (V.251) одержимо

$$xy'' + y' - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x}\right)y + \lambda y = 0 \tag{V.253}$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x}\right)y + \lambda y = 0, \tag{V.254}$$

де

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \tag{V.255}$$

що збігається з рівнянням (V.84). Знайдені там власні значення

$$\lambda = n_r + \frac{s+1}{2}, \tag{V.256}$$

а власні функції виражені через узагальнені поліноми Лаґерра:

$$y_{n_r}(x) = x^{s/2}e^{-x/2}L^s_{n_r}(x). \tag{V.257}$$

З урахуванням $s = 2\ell + 1$ одержимо

$$\lambda = n_r + \ell + 1 = n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{V.258}$$

Ціле число n називають ***головним квантовим числом***, n_r — ***радіальним квантовим числом***, ℓ — ***орбітальним квантовим числом***.

З формул (V.248), (V.255) і (V.258) отримаємо квантовані значення енерґії

$$E_n = -\frac{2\mu e^2}{\hbar^2 n^2}. \tag{V.259}$$

Вони залежать лише від головного квантового числа n.

Тепер знайдемо власні функції водневого атома, для цього потрібно знати радіальні функції $\chi(\rho)$. За допомогою формул (V.257), (V.252), (V.250), (V.255), (V.256) можна написати

$$\chi_{n\ell}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n}\right)^{\ell} e^{-\rho/n} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \qquad \text{(V.260)}$$

де A_n — множник нормування, що визначають з умови

$$\int\limits_0^{\infty} \rho^2 \chi_{n\ell}^2(\rho)\, d\rho = 1. \qquad \text{(V.261)}$$

Обчислимо A_n, одержимо такий вираз для нормованих радіальних функцій:

$$\chi_{n\ell}(\rho) = \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^{\ell} e^{-\rho/n} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \text{(V.262)}$$

І остаточно

$$\Psi_{n\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\chi_{n\ell}(\rho). \qquad \text{(V.263)}$$

Число m ($m = 0.\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\ell$) називають ***магнітним квантовим числом***. Оскільки n_r завжди додатне ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$), то для заданого n, згідно з формулою

$$n = n_r + \ell + 1$$

квантове число ℓ не може бути більшим від $n-1$ ($\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Тому за певного значення головного квантового числа n число ℓ може набувати n значень $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, кожному з яких відповідає $2\ell + 1$ значення m. Звідси випливає, що заданому значенню енерґії E_n, тобто заданому значенню n відповідає

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

різних власних функцій. Отже, кожен рівень енерґії має виродження кратності n^2.

Іншою характерною рисою розглянутої задачі для рівняння Шрьодінґера є існування неперервного спектра додатних власних значень (будь-яке додатне число E є власним значенням рівняння (V.243)). У цьому випадку електрон уже не зв'язаний з ядром, однак усе ще перебуває в його полі (йонізований атом водню).

11.3. Плоский математичний маятник

Розглянемо плоский маятник масою m і довжиною ℓ, що перебуває в полі тяжіння g (рис. V.22). Лаґранжіан системи

$$L = T - U = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} - mgy \tag{V.264}$$

можна записати через кут відхилення маятника від вертикалі φ ($x = \ell \sin\varphi$, $y = -\ell\cos\varphi$):

$$L = m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi.$$

Рівняння руху (рівняння Лаґранжа другого роду)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \tag{V.265}$$

матиме вигляд

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = 0, \tag{V.266}$$

або

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0, \qquad \text{де} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{V.267}$$

Ми не будемо обмежуватися випадком малих значень кута відхилення, коли $\sin\varphi \simeq \varphi$.

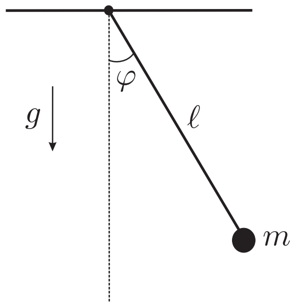


Рис. V.22. Плоский математичний маятник.

Домножимо обидві частини рівняння (V.267) на $\dot\varphi$ та проінтеґруємо один раз за часом t, отримаємо

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} - \omega^2\cos\varphi = -\omega^2\cos\varphi_0, \tag{V.268}$$

де у сталій інтеґрування $\varphi_0 = \varphi(0)$ (для зручності виберемо початковим момент часу $t = 0$, коли маятник перебуває у крайньому положенні, тобто швидкість $\dot\varphi = 0$).

Після розділення змінних отримаємо

$$\sqrt{2}\,\omega\,dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \tag{V.269}$$

і

$$\sqrt{2}\,\omega\int_{t_0}^{t} dt' = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\cos\varphi' - \cos\varphi_0}}. \tag{V.270}$$

Далі перейдемо до половинних кутів, $2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = 1 - \cos\varphi$,

$$2\,\omega(t - t_0) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2} - \sin^2\dfrac{\varphi'}{2}}}. \tag{V.271}$$

Після заміни змінних

$$\sin\frac{\varphi'}{2} = z\sin\frac{\varphi_0}{2} \tag{V.272}$$

отримаємо

$$\omega t = \int\limits_0^Z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad \text{де} \quad k = \sin\frac{\varphi_0}{2}, \quad Z = \frac{1}{k}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Цей інтеґрал є еліптичним інтеґралом першого роду:

$$\omega(t-t_0) = F(Z;k). \tag{V.273}$$

Оберненою до F є функція Якобі sn:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\,\mathrm{sn}\left(\omega(t-t_0);\sin\frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{V.274}$$

Отже, ми отримали розв'язок φ рівняння (V.266) як функцію часу t. Функція sn має дійсний період $4K(k)$, тому φ буде періодичною функцією з періодом $4K(k)/\omega$.

Розглянемо далі випадок, коли точка підвісу маятника виконує вертикальні коливання за законом $A\cos\Omega t$. Тоді координата $y = -\ell\cos\varphi + A\cos\Omega t$, а лаґранжіан після вилучення повної похідної за часом матиме вигляд

$$L = m\ell^2\dot\varphi^2 + mg\ell\cos\varphi + mA\Omega^2\ell\cos\Omega t\,\cos\varphi. \tag{V.275}$$

Рівняння (V.265) можна записати у вигляді

$$\ddot\varphi + \left[\frac{g}{\ell} + \frac{A\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t\right]\sin\varphi = 0. \tag{V.276}$$

Для малих кутів $\sin\varphi \simeq \varphi$ після заміни змінної $\Omega t = 2x$ матимемо

$$\varphi''(x) + \left[\frac{4}{\Omega^2}\frac{g}{\ell} + 2\,\frac{2A}{\ell}\cos 2x\right]\varphi(x) = 0, \tag{V.277}$$

що збігається з рівнянням (V.154) для функції Матьє з такими значеннями параметрів:

$$a = \frac{4}{\Omega^2}\frac{g}{\ell} = \frac{4\omega^2}{\Omega^2}, \qquad q = -\frac{2A}{\ell}.$$

Розділ VI.

Елементи варіаційного числення

§ 1. Поняття функціонала. Неперервність функціонала

У математиці й фізиці часто трапляються змінні величини, які називають ***функціоналами***. Під таким терміном розуміють, загалом, способи, правила чи рецепти, згідно з якими функціям з деякого класу поставлено у відповідність числа, тобто функціонал відображає деяку множину функцій $\{f(x)\}$ на певну числову множину[1]. Функціонали позначатимемо $\mathcal{J}[y]$. Нагадаємо, що ***функція*** — це відображення між двома числовими множинами (які можуть збігатися). Натомість ***оператор*** відображає множину функцій у множину функцій (наприклад, оператор диференціювання). Порівняння понять функції, функціонала й оператора схематично зображено на рис. VI.1.

Нижче наведемо деякі приклади функціоналів.

1. Означений інтеґрал (він переводить функцію у числове значення відповідного інтеґрала).

[1]Поняття функціонала введено в розділі III.

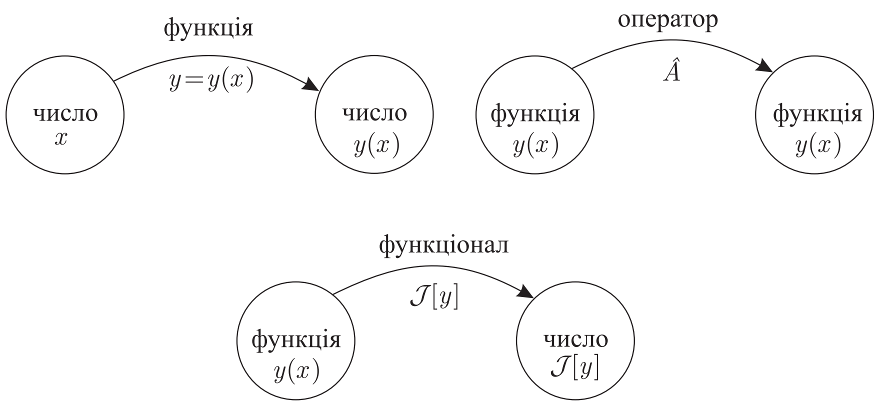


Рис. VI.1.

2. Довжина L кривої лінії у площині XOY між точками a, b подана інтеґралом

$$\begin{aligned} L &= \int\limits_a^b dl = \int\limits_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \\ &= \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx, \end{aligned} \tag{VI.1}$$

де $y(x)$ є рівняння кривої.

3. Нехай тіло рухається в площині XOY по кривій $y(x)$ від точки a до точки b зі швидкістю $v = v(x, y)$. Тоді час руху тіла

$$T = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{v(x, y, (x))}\, dx. \tag{VI.2}$$

4. Варіаційне числення започаткував 1696 р. Й. Бернуллі формулюванням задачі про час руху тіла у вертикальній площині під дією сили тяжіння. Нехай точки a і b не розташовані на одній вертикальній прямій, а тіло починає рухатись з точки a без початкової швидкості (рис. VI.2). Тоді для швидкості $v(x, y)$ маємо

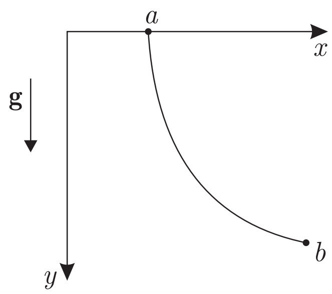


Рис. VI.2.

$v = \sqrt{2gy(x)}$ і з (VI.2) одержимо час руху T у вигляді такого функціонала:

$$T = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx. \qquad \text{(VI.3)}$$

Предметом варіаційного числення, головно, є знаходження ***екстремалей***, тобто таких функцій, які дають екстремальні значення функціоналів. Зокрема, у прикладах (VI.2), (VI.3) йдеться про функції $y(x)$, які дають мінімальні значення L чи T. Криву $y(x)$, яка дає мінімальне значення функціонала (VI.3), називають ***брахістохроною*** (від *гр.* $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ — найкоротший і $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ — час). Тому задачу Й. Бернуллі називають ***задачею про брахістохрону***.

Л. Ейлер розв'язав так звану ***ізопериметричну задачу*** (відому ще як ***задача Дідони***[2]): серед плоских замкнених кривих довжиною L знайти таку, яка охоплює найбільшу площу. Такою кривою є коло. Ще згадаємо ***задачу Плато***[3] про знаходження кривої $y(x)$, що сполучає задані точки a та b площини XOY, яка

[2] Дідона (*лат.* Dido, *гр.* $\Delta\iota\delta\acute{\omega}$), — міфічна засновниця Карфагену, яка за угодою з місцевим царем викупила для заснування міста стільки землі, скільки змогла покрити шкурою вола. Дідона розрізала шкуру на паски й охопила ними цілу гору. Див. також: *Верґілій*, Енеїда. Кн. I, 367–369).

[3] Жозеф Антуан Фердінанд Плато (Joseph Antoine Ferdinand Plateau, 1801–1883) — бельгійський фізик.

в разі обертання навколо осі абсцис утворює поверхню найменшої площі.

У фізиці з варіаційним численням пов'язані так звані варіаційні принципи, що виражають найбільш загальні фізичні закономірності, починаючи з класичної механіки і до квантової теорії поля.

Будемо розглядати функціонали, які визначені на деякій множині диференційовних функцій. Далі матимемо справу з поняттям неперервності функціонала. Для цього для відповідної множини функцій треба увести поняття близькості її елементів, а отже, необхідним є поняття відстані між ними, аналогічне, наприклад, відстані між точками евклідового простору. Відповідне поняття у просторі (множині) функцій називають нормою і позначають $||y||$. Її наділяють такими властивостями. Для деякого елемента $y(x)$ множини розглядуваних функцій норма $||y||$:

1. $||y|| = 0$ тільки для $y(x) \equiv 0$;
2. $||\alpha y|| = |\alpha|\ ||y||$, α — числа, у тім числі комплексні;
3. $||y_1 + y_2|| \le ||y_1|| + ||y_2||$.

Найчастіше розглядають такі множини, або класи функцій.

Клас C. Елементами є всі неперервні на відрізку $[a, b]$ функції. Норма в C означена так: $||y|| = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$ (далі позначення $x\in [a, b]$ не пишемо). Дві функції $y(x)$ і $y_0(x)$ ***близькі***, якщо $||y - y_0|| < \delta$, тобто крива $y(x)$ розташована у смузі шириною 2δ, яка повторює форму $y_0(x)$ (рис. VI.3).

Клас C^1. Для функціоналів вигляду

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \qquad \text{(VI.4)}$$

треба увести клас C^1 — множину визначених на $[a, b]$ неперервних разом з першими похідними на цьому відрізку функцій, причому норма в C^1 означена як $||y_1|| = \max|y(x)| + \max|y'(x)|$. Тоді $y(x)$ і $y_0(x)$ близькі, якщо

$$||(y(x) - y_0(x)|| < \delta \quad \text{і} \quad ||y'(x) - y_0'(x)|| < \delta, \qquad \forall x \in [a, b].$$

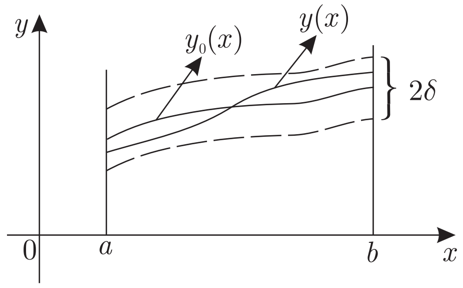


Рис. VI.3.

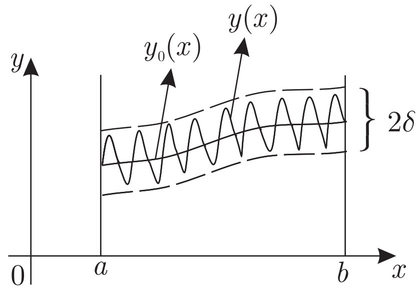


Рис. VI.4.

Аналогічно можна ввести ***класи*** C^n, а також простори для функцій більшої кількості змінних. Норму для функцій класу C^n позначатимемо $||y||_n$.

Тепер уведемо поняття неперервності функціонала: функціонал $\mathcal{J}[y]$ називають неперервним у "точці" $y_0(x)$, якщо для довільного $\delta > 0$ існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$||\mathcal{J}[y] - \mathcal{J}[y_0]|| < \varepsilon$, як тільки $||y - y_0||_1 < \delta$.

Для функціонала вигляду (VI.4), якщо $y \in C$, функціонал $\mathcal{J}[y]$

може не бути неперервним. Зокрема, нехай

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Криві $y(x)$ і $y_0(x)$ можуть бути близькими (рис. VI.4), проте їхні довжини суттєво відрізняються. Якщо $y \in C^1$, тобто $||y - y_0||_1 < \delta$, то функціонал $\mathcal{J}[y]$ неперервний.

§ 2. Варіація функціонала. Необхідна умова екстремуму функціонала

Поняття варіації функціонала за своєю аналогічне поняттю диференціала для звичайних функцій. Варіацію функціонала $\mathcal{J}[y]$ позначають $\delta\mathcal{J}[y] \equiv \delta\mathcal{J}$, вона визначає головну частину його приросту, коли функція $y(x)$ змінюється на деяку величину $\delta y(x) \equiv h(x) = y(x) - y_0(x)$.

Далі використаємо поняття лінійного функціонала $\varphi[h]$, для якого виконуються умови: 1. $\varphi[h]$ — неперервний; 2. $\varphi[h_1 + h_2] = \varphi[h_1] + \varphi[h_2]$; 3. $\varphi[ah] = a\varphi[h]$, де a — число.

Означення. ***Варіацією*** $\delta\mathcal{J}$ функціонала $\mathcal{J}[y]$ називатимемо такий лінійний функціонал $\varphi[h]$, який відрізняється від приросту

$$\delta\mathcal{J} = \mathcal{J}[y + h] - \mathcal{J}[h] \tag{VI.5}$$

на мале значення вище першого порядку відносно норми $||h||$, тобто

$$\Delta\mathcal{J} = \varphi[h] + \alpha||h|| \tag{VI.6}$$

і $\alpha \to 0$, коли $||h|| \to 0$. Тоді $\varphi[h] \equiv \delta\mathcal{J}$.

За допомогою поняття варіації функціонала визначимо необхідні умови екстремуму функціонала.

Означення. Функціонал $\mathcal{J}[y]$ досягає за умови $y = y_0$ ***екстремуму***, якщо $\mathcal{J}[y] - \mathcal{J}[y_0]$ зберігає знак у деякому околі кривої $y_0(x)$.

Теорема. Для того, щоб функціонал $\mathcal{J}[y]$ при $y = y_0$ досягав екстремуму, необхідно, щоб його варіація перетворюється в нуль при $y = y_0$, тобто $\delta\mathcal{J} = 0$ при $y = y_0$. Розглянемо для визначеності мінімум, тоді

$$\mathcal{J}[y_0 + h] - \mathcal{J}[y_0] \geq 0 \tag{VI.7}$$

для всіх h таких, що $||h||_1$ мала. Але

$$\mathcal{J}[y_0 + h] - \mathcal{J}[y_0] = \varphi[h] + \alpha||h|| \tag{VI.8}$$

і $\alpha \to 0$ при $||h|| \to 0$. Припустимо, що $\varphi[h] \neq 0$ при достатньо малих h. Тоді знак виразу (VI.8) буде визначений першим доданком як головною частиною приросту функціонала. Проте $\varphi[h]$ — лінійний функціонал, тому

$$\varphi[-h] = -\varphi[h] \tag{VI.9}$$

і головна частина приросту може мати різний знак за різних h, що суперечить умові мінімуму. Отже, $\varphi[h] = 0$ при $||h|| \to 0$, що доводить теорему.

§ 3. Проста задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера

Сформулюємо так звану просту задачу варіаційного числення.

Нехай у функціоналі $\mathcal{J}[y]$ функція $F(x, y, y')$ має неперервні частинні похідні за всіма змінними до другого порядку включно. Серед усіх функцій $y(x) \in C_1$, що мають неперервну похідну, і

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{VI.10}$$

знайти таку, яка дає екстремум функціонала

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{VI.11}$$

Отже, проста задача варіаційного числення полягає в знаходженні екстремуму функціонала (VI.11) на множині всіх гладких функцій, що з'єднують дві задані точки.

Нехай $h(x)$ — приріст $y(x)$, причому

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{VI.12}$$

Обчислимо приріст функціонала (VI.11).

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J} &= \int\limits_a^b F(x, y+h, y'+h')\, dx - \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \\ &= \int\limits_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right]\, dx + \ldots,\end{aligned}$$

де точки позначають малі члени вищого порядку відносно h, h'. Вираз

$$\int\limits_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')\right]\, dx \tag{VI.13}$$

є лінійним функціоналом $\varphi[h]$, який становить головний приріст $\delta\mathcal{J}$ функціонала $\mathcal{J}[y]$. Отже,

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b (F_y h + F_{y'} h')\, dx = 0. \tag{VI.14}$$

Розглянемо

$$\int\limits_a^b F_{y'} h'\, dx = F_{y'} h\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} F_{y'}\, h\, dx = -\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\, F_{y'}\, h\, dx,$$

де в разі інтеґрування частинами використані умови (VI.12). Тоді

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) h\, dx = 0. \tag{VI.15}$$

Скористаємось ***основною лемою варіаційного числення***, яка стверджує, що у випадку, коли $\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$, де $f(x)$ — неперервна функція, а $h(x)$ — довільна гладка функція на проміжку $[a,b]$ і $h(a) = h(b) = 0$, то на цьому проміжку $f(x) \equiv 0$. На її підставі з (VI.15) отримуємо рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{VI.16}$$

Рівняння (VI.16) називають ***рівнянням Ейлера для простої варіаційної задачі***. Інтеґральні криві рівняння Ейлера називають ***екстремалями***. Рівняння (VI.16) є диференціальним рівнянням другого порядку, тому його розв'язки містять дві довільні сталі, які визначають з умов (VI.10).

У загальнішому випадку залежності від вищих похідних

$$\mathcal{J}[y(x)] = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) dx$$

варіацію функціонала записують так:

$$\delta\mathcal{J}[y(x)] = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\,\delta y^{(n)}\right) dx,$$

і для екстремалей отримаємо ***рівняння Ейлера–Пуассона***:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} \mp \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \tag{VI.17}$$

§ 4. Складніші задачі варіаційного числення

4.1. Екстремум функціонала від функції двох незалежних змінних $u(x, y)$

Нехай маємо функціонал

$$\mathcal{J}[u] = \iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy, \tag{VI.18}$$

де $u(x, y)$ — неперервна функція разом з похідними до другого порядку включно в D і набуває на границі Γ області D заданих значень. Знайдемо, за яких умов функція $u(x, y)$ дає екстремум функціонала (VI.18). Нехай $u(x, y) \to u(x, y) + h(x, y)$, причому $h(x, y)\Big|_\Gamma = 0$ (за аналогією із задачею з закріпленими кінцями).

Запишемо приріст

$$\Delta I = \mathcal{J}[u + h] - \mathcal{J}[u] = \tag{VI.19}$$
$$= \iint\limits_D \Big[F(x, y, u + h, u_x + h_x, u_y + h_y) - F(x, y, u, u_x, u_y)\Big]\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_D \big(F_u h + F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y\big)\, dx\, dy + \ldots,$$

де крапками позначені малі величини вищого порядку відносно h, h_x, h_y. Останній вираз у (VI.19) становить головну частину приросту і є варіацією функціонала (VI.18). Інтеґрал

$$\iint\limits_D \big(F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y)\big)\, dx\, dy$$

запишемо так:

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h)\right] dx\, dy -$$
$$- \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) h\, dx\, dy.$$

Перший інтеґрал перетворимо за формулою Ґріна:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_\Gamma P dx + Q dy.$$

Тоді

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h)\right] dx\, dy = \int\limits_\Gamma h(F_{u_x}\, dy - F_{u_y}\, dx) = 0,$$

оскільки $h\Big|_\Gamma = 0$. Отже,

$$\delta\mathcal{J}[u] = \iint\limits_D \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) h\, dx\, dy. \qquad \text{(VI.20)}$$

Умовою екстремуму є $\delta\mathcal{J}[u] = 0$. Існує лема, згідно з якою інтеґрал (VI.20) дорівнює нулю, якщо для неперервної разом з першими похідними функції $h(x, y)$ такої, що $h(x, y)\big|_\Gamma = 0$, підінтеґральна функція $F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}$ дорівнює нулю.

Отже, умова $\delta\mathcal{J}[u] = 0$ дає таке так зване ***рівняння Ейлера–Остроградського***:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0, \qquad \text{(VI.21)}$$

— рівняння в частинних похідних другого порядку. Його розв'язок шукають за заданої умови на функцію $u(x, y)$ на границі області Γ, тобто $u(x, y)\Big|_\Gamma = f(x, y)$.

4.2. Варіаційна задача з "закріпленими кінцями" у випадку n невідомих функцій

Розглянемо функціонал

$$\mathcal{J}[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx, \qquad \text{(VI.22)}$$

де функції $y_i(x)$ задовольняють граничні умови

$$y_i(a) = A, \quad y_i(b) = B, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{VI.23}$$

Знайдемо необхідні умови екстремуму функціонала (VI.22). Для цього обчислимо його варіацію подібно до того, як це робилося у випадку простої варіаційної задачі. Тоді отримаємо, що

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i \, dx. \tag{VI.24}$$

Усі варіації $h_i(x)$ незалежні між собою, тому одну з них приймемо $h_i(x) \neq 0$, а всі інші виберемо такими, що дорівнюють нулю. Тоді

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i = 0,$$

звідки

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0.$$

Вибираючи по черзі одну з $h_i \neq 0$, отримаємо систему n рівнянь Ейлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{VI.25}$$

Отже, для того, щоб криві $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, давали екстремум функціонала (VI.22), необхідно, щоб функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ задовольняли рівняння Ейлера (VI.25). Ця система рівнянь складається з n рівнянь другого порядку, тому її загальний розв'язок містить $2n$ довільних сталих, які визначають з граничних умов (VI.23).

4.3. Варіаційні задачі на умовний екстремум

Часто виникає задача про знаходження екстремуму функціонала (VI.22), причому допустимі функції задовольняють не тільки умови (VI.23), а ще й додаткові умови

$$f_j(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k < n. \tag{VI.26}$$

Такі додаткові умови називають ***в'язями***, а задачу на знаходження екстремуму за наявності в'язей — задачею на умовний екстремум, або задачею Лаґранжа. Якщо в'язі (VI.26) не містять похідних $y_1', \ldots, y_n'$, то їх називають ***голономними***, у протилежному разі — ***неголономними***.

Обмежимось випадком голономних в'язей у найпростішому варіанті, коли $n = 2$, $k = 1$.

Отже, розглянемо функціонал

$$\int_a^b F(x, y, z, y', z')\, dx \tag{VI.27}$$

на допустимих кривих $y = y(x)$, $z = z(x)$, що належать до поверхні

$$f(x, y, z) = 0. \tag{VI.28}$$

Теорема. Якщо криві $y(x)$ та $z(x)$ реалізують умовний екстремум функціонала (VI.27) і належать до поверхні (VI.28), причому у жодній її точці похідні f_y і f_z не перетворюються в нуль одночасно, то існує така функція $\lambda(x)$, що криві $y(x)$ та $z(x)$ є екстремалями функціонала

$$\int_a^b (F + \lambda f)\, dx, \tag{VI.29}$$

тобто задовольняють диференціальні рівняння

$$F_y + \lambda f_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z + \lambda f_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \tag{VI.30}$$

Доведення. Нехай криві $y(x)$ та $z(x)$ реалізують екстремум функціонала (VI.29), а криві $\bar{y}(x)$ та $\bar{z}(x)$ — відповідно, близькі до них допустимі функції. Приймемо, що $\bar{y} - y = h_1$ і $\bar{z} - z = h_2$ відмінні від нуля в околі (α, β) деякої точки $x_0 \in [a, b]$. Уведемо величини σ_1 та σ_2, такі, що

$$\sigma_1 = \int_\alpha^\beta h_1\,dx, \quad \sigma_2 = \int_\alpha^\beta h_2\,dx. \tag{VI.31}$$

Очевидно, що

$$f(x, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z)$$

і

$$\int_a^b \left[f(x, \bar{y}, \bar{z}) - f(x, y, z)\right]\,dx = 0.$$

Для достатньо малого околу точки x_0 маємо

$$\int_a^b \left[f(x, y + h_1, z + h_2) - f(x, y, z)\right]\,dx = \int_a^b (f_y h_1 + f_z h_2)\,dx + \varepsilon_1 =$$
$$= f_y\big|_{x=x_0}\sigma_1 + f_z\big|_{x=x_0}\sigma_2 + \varepsilon_2 = 0,$$

де ε_1, ε_2 — малі величини вищого порядку відносно σ_1, σ_2. Припустимо, що $f_z \neq 0$ у точці x_0, тоді

$$\sigma_2 = -\frac{f_y}{f_z}\sigma_1 + \varepsilon_2. \tag{VI.32}$$

Для приросту функціонала (VI.27) з урахуванням вибору h_1, h_2 і співвідношення (VI.32) маємо

$$\Delta\mathcal{J} = \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\bigg|_{x=x_0}\sigma_1 + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\bigg|_{x=x_0}\sigma_2 + \varepsilon_3 =$$
$$= \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{f_y}{f_z}\left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\right]_{x=x_0}\sigma_1 + \varepsilon_4,$$

де ε_3, ε_4 — малі величини вищого порядку відносно σ_1, σ_2. Умовою екстремуму є рівність нулю головної частини цього приросту. Отже, отримаємо

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{f_y}{f_z}\left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right) = 0$$

або

$$\frac{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}}{f_y} = \frac{F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}}{f_z}. \tag{VI.33}$$

Спільне значення відношень (VI.33) — це деяка функція $\lambda(x)$, і отримуємо рівняння (VI.30), що й треба було довести. Рівняння (VI.30) називають ***рівняннями Ейлера–Лаґранжа***, а множник $\lambda(x)$ — ***множником Лаґранжа***. Розв'язки рівнянь (VI.30) містять сталі інтеґрування та функцію $\lambda(x)$, які знаходять з умов (VI.23) та (VI.28).

Наведена вище теорема допускає узагальнення на довільні n і k, а також на випадок неголономних в'язей. У всіх випадках задачу на умовний екстремум розв'язують так. Від функції F в інтеґралі (VI.22) треба перейти до функції $\Phi = F+ + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) f_j$, де f_j — функції вигляду (VI.26), а $\lambda_j(x)$ — множники Лаґранжа. Далі розглядаємо функціонал

$$\mathcal{J}[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b \Phi(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx \tag{VI.34}$$

і шукаємо його екстремум з умови рівності нулю його варіації, що приводить до рівнянь Ейлера–Лаґранжа

$$\Phi_{y_i} - \frac{d}{dx}\Phi_{y'} = 0, \tag{VI.35}$$

розв'язки якого містять сталі інтеґрування та функції $\lambda_j(x)$. Їх знаходять з умов (VI.23) та (VI.26).

§ 5. Варіаційна задача з рухомими кінцями

Розглянемо функціонал вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \qquad \text{(VI.36)}$$

і нехай кінці тих кривих, на яких цей функціонал визначений, можуть рухатись довільно. Це означає, що коли для кривої $y(x)$ кінці мають координати x_0 і x_1, то для кривої $\bar{y}(x) = y(x) + h(x)$, де $h(x)$ — мала зміна функції, кінці мають координати $x_0 + \delta x_0$, $x_1 + \delta x_1$ (рис. VI.5). Отже, функції $y(x)$ і $\bar{y}(x)$ визначені на різних проміжках.

Для того, щоб подальші формули мали зміст, будемо продовжувати криві за допомогою дотичних прямих на їхніх кінцях (тобто лінійної апроксимації). Наприклад, у ситуації, яка зображена на рис. VI.5, криву $\bar{y}(x)$ продовжимо дотичною до точки x_0, а криву $y(x)$ — до точки $x_1 + \delta x_1$.

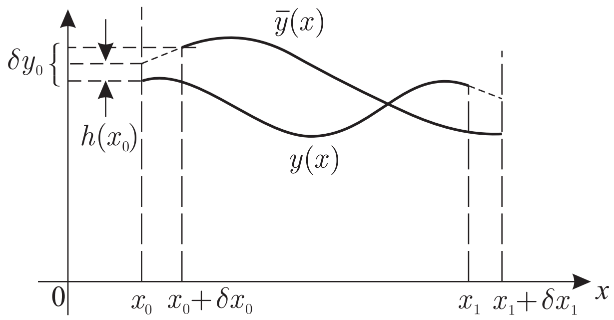


Рис. VI.5.

Запишемо приріст функціонала (VI.36)

$$\delta\mathcal{J} = \mathcal{J}[y+h] - \mathcal{J} =$$
$$= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y+h, y'+h')\,dx - F(x, y, y')\right]\,dx + \tag{VI.37}$$
$$+ \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h')\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+h, y'+h')\,dx.$$

Залишаючи доданки, лінійні щодо малих величин h, h', δx_0, δx_1, отримаємо основну частину приросту, тобто варіацію функціонала $\delta\mathcal{J}[y]$ у вигляді

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}[y] \;&=\; \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right]\,dx + \\ &+\; F(x, y, y')\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - F(x, y, y')\Big|_{x=x_0}\delta x_0,\end{aligned}$$

а після інтеґрування частинами другого доданка в інтеґралі отримаємо

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}[y] \;&=\; \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y + \frac{d}{dx}F_{y'}\right) h\,dx + \\ &+\; F_{y'}h\Big|_{x_0}^{x_1} + F\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - F\Big|_{x=x_0}\delta x_0.\end{aligned} \tag{VI.38}$$

Приймемо до уваги, що зміна координати y на кінцях кривої $y(x)$ пов'язана як із переходом до кривої $\bar{y}(x) = y(x) + h(x)$, так і зі зміною координати x на δx, тобто

$$\begin{aligned}\delta y\big|_{x_0} &= h(x_0) + y'(x_0)\delta x_0,\\ \delta y\big|_{x_1} &= h(x_1) + y'(x_1)\delta x_1.\end{aligned}$$

Тоді

$$h\big|_{x_0} = \delta y\big|_{x_0} - y'\big|_{x_0}\delta x_0, \quad h\big|_{x_1} = \delta y\big|_{x_1} - y'\big|_{x_1}\delta x_1.$$

Для варіації $\delta\mathcal{J}[h]$ остаточно маємо

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}[y] &= \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y + \frac{d}{dx}F_{y'}\right) h\,dx + \\ &+ (F - F_{y'}y')\delta x\bigg|_{x_0}^{x_1} + F_{y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}.\end{aligned} \tag{VI.39}$$

Сформулюємо таку варіаційну задачу: знайти екстремум функціонала (VI.36), визначеного на кривих $y(x)$, кінці яких лежать на деяких фіксованих лініях $y = \varphi_0(x)$ і $y = \varphi_1(x)$. Використаємо вираз (VI.39) для варіації $\delta\mathcal{J}[h]$. Зазначимо, що коли деяка крива дає екстремум розглядуваного функціонала серед допустимих кривих, то вона тим більше дає екстремум і відносно усіх кривих, що мають однакові кінцеві точки. Тому шукана крива має бути екстремаллю, тобто задовольняти рівняння Ейлера. Отже, у вирази (VI.39) перший доданок перетворюється в нуль, і ми отримуємо

$$\delta\mathcal{J}[y] = (F - F_{y'}y')\,\delta x\bigg|_{x_0}^{x_1} + F_{y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}. \tag{VI.40}$$

Однак

$$\begin{aligned}\delta y_1 = \delta y(x_1) = \varphi_1'\delta x_1 + \alpha_1,\\ \delta y_0 = \delta y(x_0) = \varphi_0'\delta x_0 + \alpha_0,\end{aligned}$$

де α_0, α_1 — безмежно малі величини порядку вище від першого. Остаточно умову екстремуму $\delta\mathcal{J}[y] = 0$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}[y] &= \big[F + F_{y'}(\varphi_1' - y')\big]\bigg|_{x=x_1}\delta x_1 - \\ &- \big[F + F_{y'}(\varphi_0' - y')\big]\bigg|_{x=x_0}\delta x_0 = 0.\end{aligned} \tag{VI.41}$$

Оскільки δx_0 і δx_1 — незалежні прирости, то з (VI.41) отримаємо

$$\begin{aligned} \big[F + F_{y'}(\varphi_1' - y')\big]\Big|_{x=x_1} &= 0, \\ \big[F + F_{y'}(\varphi_0' - y')\big]\Big|_{x=x_0} &= 0. \end{aligned} \tag{VI.42}$$

Одержані граничні умови (VI.42) називають ***умовами трансверсальності***. Про криву $y = y(x)$, яка задовольняє ці умови, кажуть, що вона трансверсальна до кривих $\varphi_0(x)$ і $\varphi_1(x)$.

Отже, для розв'язку варіаційної задачі з рухомими кінцями спочатку записують і розв'язують рівняння Ейлера, а сталі інтеґрування знаходять з умов трансверсальності.

§ 6. Варіаційні методи розв'язування крайових задач. Метод Рітца

У випадку варіаційної задачі, коли функціонал визначений на функціях $u(x, y)$ двох незалежних змінних (див. § 4, пункт 1), рівняння Ейлера (VI.21) для екстремалей є диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних для шуканої функції $u(x, y)$. Ця функція на границі області Γ набуває заданого значення $u(x, y)\big|_\Gamma = f(x, y)$. Отже, маємо справу з крайовою задачею Діріхле. Зокрема, Й. Діріхле довів, що розв'язування крайових задач для рівняння Лапласа еквівалентне розв'язуванню деякої варіаційної задачі. Суть варіаційного методу розв'язування крайових задач полягає у знаходженні функціонала, для якого рівняння у частинних похідних є рівнянням Ейлера. Мінімізуючи функціонал, знаходять екстремалі, тобто розв'язки крайової задачі. У цьому разі зрозуміло, що не йдеться про безпосереднє розв'язування рівняння Ейлера, а про застосування інших методів розв'язування варіаційної задачі, найчастіше наближених. Розглянемо один з таких — так званий ***метод Рітца***[4].

Пояснимо ідею методу Рітца на прикладі функціонала $\mathcal{J}[y]$, визначеного на множині функцій класу C_1. Вона полягає в тому, що значення функціонала $\mathcal{J}[y]$ розглядають не на всій множині функцій $y(x) \in C_1$, а лише на лінійних комбінаціях $y_n(x)$ деяких спеціально обраних функцій $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x)$. Функції $y_n(x)$ повинні бути допустимими у розглядуваній задачі, що накладає певні обмеження на вибір функцій $W_i(x)$.

Отже, функції $y_n(x)$ записують так:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x), \tag{VI.43}$$

де α_i — числові коефіцієнти. Підстановка (VI.43) у функціонал $\mathcal{J}[y]$ перетворює його після інтеґрування за x у функцію n змінних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Умова екстремуму функціонала зводиться тоді до умови екстремуму функції $\mathcal{J}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ багатьох змінних, тобто до системи рівнянь

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{VI.44}$$

Важливу роль у разі застосування методу Рітца відіграє вибір функцій $W_i(x)$. Якщо ці функції вибрані вдало, то можна обмежитись меншою кількістю параметрів для одержання задовільних результатів. На практиці часто обмежуються зовсім невеликим числом параметрів, іноді навіть одним.

Розглянемо крайові задачі, зокрема, задачу Діріхле для одиничного квадрата

$$u_{xx} + u_{yy} = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \tag{VI.45}$$

$$u = 0 \ \text{ на границі квадрата.} \tag{VI.46}$$

[4]Вальтер Рітц (Walther Ritz, 1878–1909) — швейцарський фізик-теоретик.

Легко перевірити, що рівняння Ейлера (VI.21) для функціонала

$$\mathcal{J}[u] = \int\limits_0^1 (u_x^2 + u_y^2 + 2uf)\,dx\,dy \tag{VI.47}$$

є рівнянням функціонала (VI.45). Отже, розв'язок $u(x, y)$ задачі Діріхле — це та сама функція, яка мінімізує функціонал (VI.47).

Розв'яжемо задачу Діріхле (VI.45), (VI.46) методом Рітца. Функцію $u_n(x, y)$, що мінімізує функціонал (VI.47), шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j W_j(x, y), \tag{VI.48}$$

де функції $W_j(x, y)$ вибрані такими, що дорівнюють нулю на границі квадрата. Оберемо їх, наприклад, так:

$$W_1(x, y) = xy(1-x)(1-y),$$

$$W_{2m}(x, y) = x^m W_1(x, y), \quad W_{2m+1}(x, y) = y^m W_1(x, y),$$

$$m = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2},$$

n — довільно обране непарне число. Тоді

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= xy(1-x)(1-y) \times \\ &\times (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \ldots + \alpha_{n-1} x^m + \alpha_n y^m). \end{aligned} \tag{VI.49}$$

Функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[u_n] &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial W_j}{\partial x} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial W_j}{\partial y} \right]^2 + \right. \\ &+ \left. 2f \sum_{j=1}^{n} \alpha_j W_j \right\} dx\,dy = \mathcal{J}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

є тепер функцією коефіцієнтів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Щоб знайти мінімум $\mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, прирівняємо до нуля частинні похідні

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_1} &= 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left\{\left[\frac{\partial W_j}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x} + \right.\right. \\
&+ \left.\left.\frac{\partial W_j}{\partial y}\frac{\partial W_1}{\partial y}\right]\alpha_j + fW_1\right\} dx\, dy = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} &= 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left\{\left[\frac{\partial W_j}{\partial x}\frac{\partial W_n}{\partial x} + \right.\right. \\
&+ \left.\left.\frac{\partial W_j}{\partial y}\frac{\partial W_n}{\partial y}\right]\alpha_j + fW_n\right\} dx\, dy = 0.
\end{aligned}$$

Якщо переписати ці рівняння в матричному вигляді, то отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\hat{A}\alpha = \beta, \tag{VI.50}$$

де $A = (A_{ij})$ — матриця розміром $n \times n$, елементи якої обчислюють за формулами

$$A_{ij} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial W_j}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial W_j}{\partial y}\right] dx\, dy, \tag{VI.51}$$

$\beta = (\beta_i)$ — вектор з компонентами

$$\beta_i = -\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)W_i(x,y)\, dx\, dy, \tag{VI.52}$$

$\alpha = (\alpha_i)$ — невідомий вектор, компоненти якого є коефіцієнтами у наближеному розв'язку (VI.50). Розв'язавши систему рівнянь (VI.50) відносно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, отримаємо мінімізуючу функцію (VI.50) і, отже, наближений розв'язок задачі Діріхле.

§ 7. Варіаційна похідна

Між аналізом функцій багатьох змінних і варіаційним численням функціоналів існує аналогія, яку використаємо для введення поняття варіаційної похідної (таку похідну ще називають функціональною).

Насамперед зазначимо, що диференціал деякої функції багатьох змінних $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ є

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i, \tag{VI.53}$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частинні похідні. ВІдповідно, варіація функціонала $\delta J[y]$ означена як лінійний функціонал за приростом $h(x)$ функції $y(x)$ у фіксованій точці x. Далі для $h(x)$ зручно використовувати позначення $\delta y(x)$, тобто $h(x) \equiv \delta y(x)$.

Нагадаємо формулу (VI.15) для $\delta J[y]$:

$$\delta J[y] = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y(x)\, dx. \tag{VI.54}$$

Уведемо позначення

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\delta J[y]}{\delta y(x)} \tag{VI.55}$$

і (VI.54) запишемо у вигляді

$$\delta J[y] = \int\limits_a^b \frac{\delta J[y]}{\delta y(x)}\, \delta y(x)\, dx. \tag{VI.56}$$

Структури виразів (VI.53) і (VI.56) однакові. Якщо поставити у відповідність індексу i у (VI.53) змінну x у (VI.56), то далі є очевидними такі співвідношення:

$$\sum_i \ldots \to \int_a^b \ldots \, dx,$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to J[y(x)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \to \frac{\delta J[y]}{\delta y(x)},$$

$$dx_i \to \delta J[y].$$

Тому вираз $\dfrac{\delta J[y]}{\delta y(x)}$ називатимемо ***похідною функціонала*** $J[y]$ ***за*** $y(x)$. Суттєво акцентуємо увагу ось на чому: так само, як частинну похідну від функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ беремо за змінною з фіксованим індексом i, варіаційну похідну від функціонала $J[y]$ беремо за $y(x)$ у фіксованій точці x. Тому приріст $y(x)$ при фіксованому x називають ***варіацією функції*** $y(x)$ і позначають $\delta y(x)$, тоді як приріст (точніше, його головну частину) функції $y(x)$ у разі переходу від точки x до точки $x + dx$ називають ***диференціалом функції*** $y(x)$ і позначають $dy(x)$.

Варіаційна похідна $\dfrac{\delta J[y]}{\delta y(x)}$ визначає зміну функціонала за рахунок зміни $y(x)$ у фіксованій точці x, а варіація $\delta J[y]$ є “сумою” таких змін у всіх точках $x \in [a, b]$, тобто відповідним інтеґралом за змінною x (VI.56), так само як диференціал функції багатьох змінних $f(x_1, \ldots, x_n)$ є сумою (VI.53) внесків при переході від точок x_i до точок $x_i + dx_i$.

Уведемо поняття варіаційної похідної точніше і переконаємось, що формула (VI.55) справджується. Обмежимось функціоналом $J[y] = \displaystyle\int_a^b F(x, y, y')\, dx$.

Відрізок $[a, b]$ розіб’ємо на $n + 1$ однакових частин точками

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = b, \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x,$$

а криву $y(x)$ замінимо ламаною з вершинами

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Тоді функціонал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx$$

можна наближено замінити сумою

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x, \tag{VI.57}$$

яка є функцією n змінних $y_1, \ldots, y_n$.

Обчислимо частинну похідну

$$\frac{\partial J(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k}$$

і знайдемо її граничне значення ($n \to \infty$) в разі необмеженого зростання кількості точок поділу

$$\frac{\partial J(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} = F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x + \tag{VI.58}$$
$$+F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right),$$

де враховано, що змінна y_k входить у два доданки з $i = k$ та $i = k - 1$ виразу (VI.57).

При $\Delta x \to 0$ права частина (VI.59) прямує до нуля, тому для отримання скінченного виразу треба рівність (VI.59) поділити на Δx. Тоді отримаємо

$$\frac{\partial J}{\partial y_k \Delta x} = F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - \tag{VI.59}$$
$$-\frac{1}{\Delta x}\left[F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right)\right].$$

При $\Delta x \to 0$ вираз (VI.60) прямує до границі

$$F_y(x, y.y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y'),$$

яку називають ***варіаційною похідною функціонала*** $J[y]$ і позначають

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y(x)}.$$

Отже,

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y(x)} = F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y'),$$

що збігається з виразом (VI.55).

Список літератури

[1] *Адамян В. М.* Вступ до математичної фізики : Навч. посіб. / *В. М. Адамян, М. Я. Сушко.* — Одеса : Астропринт, 2003. — 320 с. (Укр. та англ. мовами).

[2] *Адамян В. М.* Варіаційне числення : Навч. посіб. / *В. М. Адамян, М. Я. Сушко.* — Одеса : Астропринт, 2005. — 128 с.

[3] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции / *В. Я. Арсенин.* — Москва : Наука, 1984. — 382 с.

[4] *Будылин А. М.* Вариационное исчисление / *А. М. Будылин.* — Санкт-Петербург, 2001. — 197 с. <http://www.phys.spb.ru/Stud/Lectures/Budylin/var.pdf>.

[5] *Будылин А. М.* Ряды и интеґралы Фурье / *А. М. Будылин.* — Санкт-Петербург, 2002. — 137 с. <http://www.phys.spb.ru/Stud/Lectures/Budylin/fourier.pdf>.

[6] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики : Учебник / *В. С. Владимиров.* — Москва : Наука, 1988. — 512 с.

[7] *Гельфанд И. М.* Вариационное исчисление / *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* — Москва : Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1961. — 228 с.

[8] *Евграфов М. А.* Аналитические функции / *М. А. Евграфов.* — Москва : Наука, 1968. — 472 с.

[9] *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / *Г. Корн, Т. Корн.* — Москва : Наука, 1974. — 832 с.

[10] *Краснов М. Л.* Вариационное исчисление / *М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев.* — Москва : Наука, 1973. — 192 с.

[11] *Краснов М. Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / *М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.* — Москва : Наука, 1971. — 256 с.

[12] *Курант Р.* Методы математической физики / *Р. Курант, Д. Гильберт.* — Москва ; Ленинград : Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1951. — Т. 1. — 476 с.; Т. 2. — 544 с.

[13] *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* — Москва : Наука, 1973. — 736 с.

[14] *Мартиненко В. С.* Операционное исчисление / *В. С. Мартиненко.* — Київ : Вища школа, 1973. — 268 с.

[15] *Піх С. С.* 1001 задача з математичної фізики / *С. С. Піх, А. А. Ровенчак, Ю. С. Криницький.* — Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2006. — 328 с.

[16] *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики / *Г. М. Положій.* — Київ : Рад. шк., 1959. — 479 с.

[17] *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики / *Р. Рихтмайер.* — Т. 1. — Москва : Мир, 1982. — 486 с.; Т. 2. — Москва : Мир, 1984. — 382 с.

[18] *Свешников А. Г.* Теория функций комплексной переменной / *А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов.* — Москва : Наука, 1974. — 319 с.

[19] *Свідзинський А.* Математичні методи теоретичної фізики / *А. Свідзинський.* — Київ : Вид-во Олени Теліги, 1998. — 442 с. *Свідзинський А.* Математичні методи теоретичної фізики / *А. Свідзинський.* — 2-ге вид., перероб. і доп. — Луцьк : Вежа, 2001. — 563 с.

[20] *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики / *С. Л. Соболев.* — Москва : Наука, 1966. — 443 с.

[21] Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица и И. Стиган.* — Москва : Наука, 1979. — 832 с.

[22] *Тальянський І. І.* Методи математичної фізики. Ч. 1. Теорія функцій комплексної змінної. Узагальнені функції : Тексти лекцій. — Львів : Ред-вид. відділ Львів. ун-ту, 1995. — 70 с.; Ч. 2. Рівняння математичної фізики. Операційне числення. Варіаційне числення : Тексти лекцій. — Львів : Ред-вид. відділ Львів. ун-ту, 1996. — 67 с. Ч. 3. Спеціальні функції : Тексти лекцій. — Львів : Ред-вид. відділ Львів. ун-ту, 1999. — 80 с.

[23] *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* — Москва : Наука, 1966. — 724 с.

[24] *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / *С. Фарлоу.* — Москва : Мир, 1985. — 384 с.

[25] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. / *Г. М. Фихтенгольц.* — Москва : Наука, 1969.

[26] *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения / *Л. Я. Цлаф.* — Москва : Наука, 1970. — 192 с.

[27] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс / *Г. Е. Шилов.* — Москва : Наука, 1965. — 328 с.

[28] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / *Л. Э. Эльсгольц.* — Москва : Наука, 1969. — 424 с.

[29] MathWorld: the web most extensive mathematics resource. — `http://mathworld.wolfram.com`.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Світлана Семенівна Піх,
Олександр Михайлович Попель,
Андрій Адамович Ровенчак,
Ілля Ісакович Тальянський

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Літературний редактор **Мирослава Мартиняк-Жовтанецька**
Технічний редактор **Світлана Сеник**
Верстальник **Олена Кіктєва**

Підписано до друку ??.??.2011 Формат 60×90 $^1/_{16}$
Папір офсетний. Ґарнітура “Computer Modern”
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 22.3
Зам. . Наклад ???? прим.

Методи математичної фізики / *С. С. Піх, О. М. Попель, А. А. Ровенчак, І. І. Тальянський.* — Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. — 404 с.
ISBN 978-966-613-...