Завдання 2. Елементи алгебри логіки. Синтез логічних схем на елементах комбінаційного типу

Для опису схем комбінаційних цифрових пристроїв (КЦП) з жорсткою (апаратною) логікою використовується математичний апарат булевих функцій – алгебра логіки (Буля). Змінні x_1,x_2 ., x_n є двійковими, якщо вони можуть приймати тільки значення: 0 або 1.

Функція двійкових змінних f ($x_1,x_2,...,x_n$) є булевою, якщо вона, також як і її аргумент, приймає тільки два значення: 0 або 1. Зв'язки між вхідними і вихідними сигналами в комбінаційних схемах аналітично описуються булевими функціями. Існують різні способи завдання або представлення булевих функцій: словесний опис функцій, табличний спосіб (функція представляється у вигляді таблиць істинності), алгебраїчний спосіб, при невеликій кількості змінних – за допомогою карт Карно.

Від таблиць істинності можна перейти до форми алгебраїчного представлення функцій. У такій формі зручно проводити різні перетворення функцій, наприклад з метою їх мінімізації. Основні булеві функції одної та двох змінних, їх позначення і найменування приведені в таблиці 2. 1, графічне зображення на рис. 2. 1.

Таблиця 2. 1. – Основні функції алгебри логіки для однієї і двох змінних

Функції	Аргумент X=0 У=0	Аргумент X=0 У=1	Аргумент X=1 У=0	Аргумент X=1 У=1	Позначення функції	Найменування функції
$F_1(x)$	0	0	0	0	0	Константа «0»
$F_2(x)$	1	1	1	1	1	Константа «1»
$F_3(x)$	0	0	1	1	x	Змінна «х»
$F_4(x)$	1	1	0	0	$\overline{x}$	Інверсія – «НІ»
$F_5(x.y)$	0	1	1	1	$x \vee y$	Диз'юнкція – «АБО»
$F_6(x.y)$	0	0	0	1	$x \cdot y$	Кон'юнкція –«І»
$F_7(x.y)$	0	1	1	0	$x \oplus y$	Складання по модулю 2
$F_8(x.y)$	1	0	0	0	$x \downarrow y$; $(\overline{x \vee y})$	Стрілка Пірса (АБО-НІ)
$F_9(x.y)$	1	1	1	0	$x \vert y$; $(\overline{x \cdot y})$	Штрих Шеффера (І-НІ)
$F_{10}(x.y)$	1	0	0	1	$x \infty y$	Рівнозначність

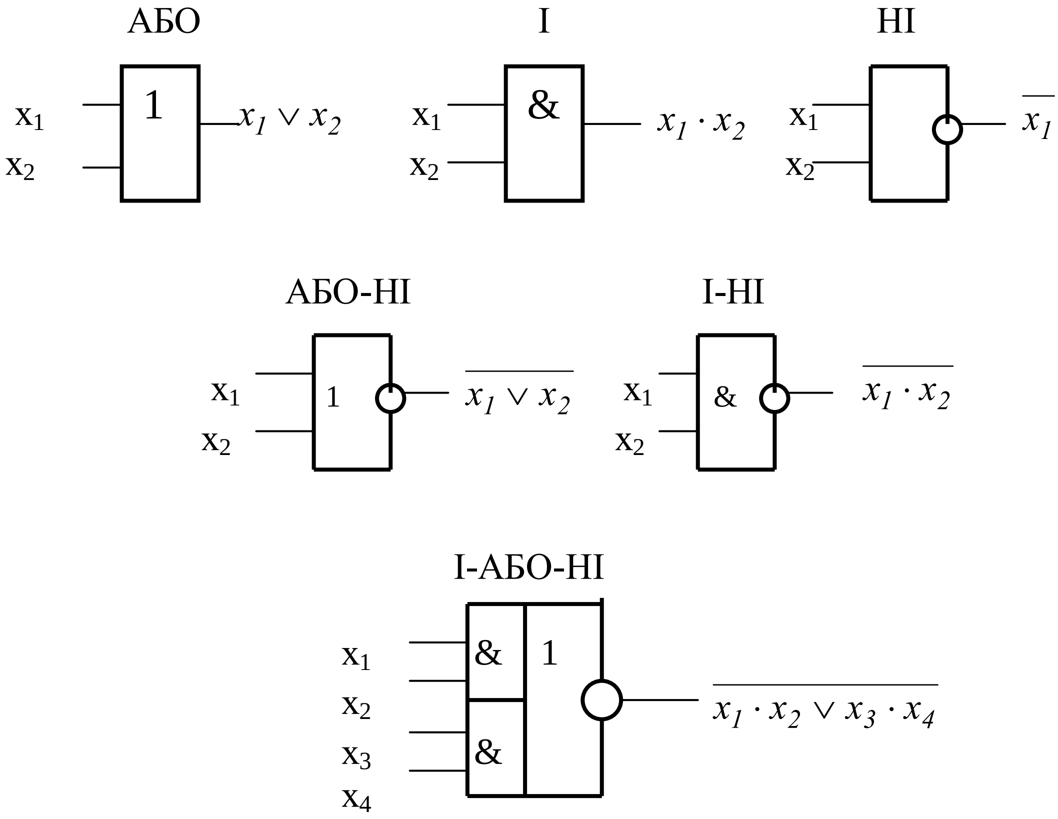

Рис. 2. 1 – Графічне позначення логічних елементів на схемах

Основні теореми алгебри логіки:

$x \vee 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
$x \vee 1 = 1$	$x \cdot x_{...} x = x$
$x \vee x \vee x_{...} \vee x = x$	$\overline{x} \cdot x = 0$
$\overline{x} \vee x = 1$	$\overline{\overline{x}} = x$

Теореми для двох змінних і більше:

$x \vee y = y \vee x$; $\quad x \cdot y = y \cdot x$ (закон переміщення),

$x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (сполучний закон)

$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$x(y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$ (розподільний закон)

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$; $\overline{x \vee y \vee z} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ (теорема де-Моргана)

$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; $\overline{xyz} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

Якщо система містить функції $F_1(x,y) = x \cdot y$ (кон'юнкція), $F_2(x,y) = x \vee y$ (диз'юнкція), $F_3(x) = \overline{x}$ (заперечення), то вона є функціонально повною, тобто за допомогою даного набору логічних функцій можна реалізувати функції алгебри логіки будь-якого вигляду.

Проте з цієї системи можна виключити деякі функції без порушення функціональної повноти. Функціонально повною буде також система, що складається з однієї єдиної булевої функції «штрих Шеффера», - $F(x,y)=\overline{x\cdot y}$. У цій системі інверсію, диз'юнкцію, кон'юнкцію отримують, використовуючи закони і теореми алгебри логіки:

$$\bar{x}=\overline{x\cdot x};\quad x\vee y=\overline{\overline{(x\cdot x)}\,\overline{(y\cdot y)}}=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}=x\vee y;\qquad x\cdot y=\overline{\overline{x\cdot y}}=x\cdot y.$$

Реалізація логічних елементів за допомогою елементів І-НІ «штрих Шеффера» показана на рис. 2. 2.

НЕ І І-АБО-НЕ

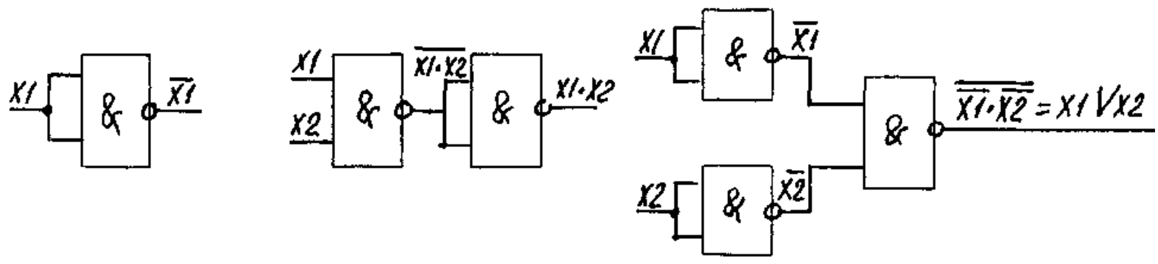

Рис. 2. 2 - Реалізація різних логічних функцій за допомогою елементів І-НІ:

Можливо показати, що функціонально повною є система, що складається з булевої функції «стрілка Пірса».

Технічний аналог булевої функції – комбінаційна схема, що виконує відповідне цій функції перетворення інформації.

Елементарні логічні операції над двійковими змінними реалізуються електронними схемами – електронними логічними елементами або просто логічними елементами (ЛЕ). Число входів ЛЕ відповідає числу аргументів відповідної булевої функції. Один і той же закон перетворення інформації можливо реалізувати, використовуючи різні типи комбінацій ЛЕ і зв'язків між ними.

Для набору ЛЕ можна ввести поняття функціональної повноти, подібно до того, як це було зроблено для випадку системи булевих функцій. Набір ЛЕ має функціональну повноту, якщо за допомогою кінцевого числа цих елементів можливо будувати схему з будь-яким законом функціонування. Будь-яка комбінаційна схема може бути побудована із застосуванням лише трьох видів логічних елементів (АБО, НІ, І), сукупність яких є функціонально повною системою.

Логічні функції, що є диз'юнкціями окремих членів, кожний з яких, у свою чергу, є деякою функцією, що містить тільки кон'юнкції і інверсії, називають ***логічними функціями диз'юнктивної форми***. Форма представлення диз'юнктивної функції, в якій інверсія застосовується лише безпосередньо до аргументів, але не до складніших функцій від цих аргументів, називається ***диз'юнктивною нормальною формою*** представлення функцій (ДНФ), наприклад:

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1.\overline{x_2}\vee x_2\cdot x_3\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\,.$$

Якщо ж кожен член диз'юнктивної нормальної функції від *n* аргументів містить всі ці *n* аргументів, частина з яких входить в нього з інверсією, а частина – без неї, то така форма представлення функції називається ***досконалою диз'юнктивною нормальною формою*** (ДДНФ);

Наприклад, функція задана в табличній формі:

X_1	X_2	X_3	У
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тоді ДДНФ буде:

$$У=\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\,.$$

Для реалізації отриманої функції необхідно мати чотири 3-входових елементів «І» і один 4-входовий елемент «АБО» та 3 елементи НІ (див. рис.2. 3).

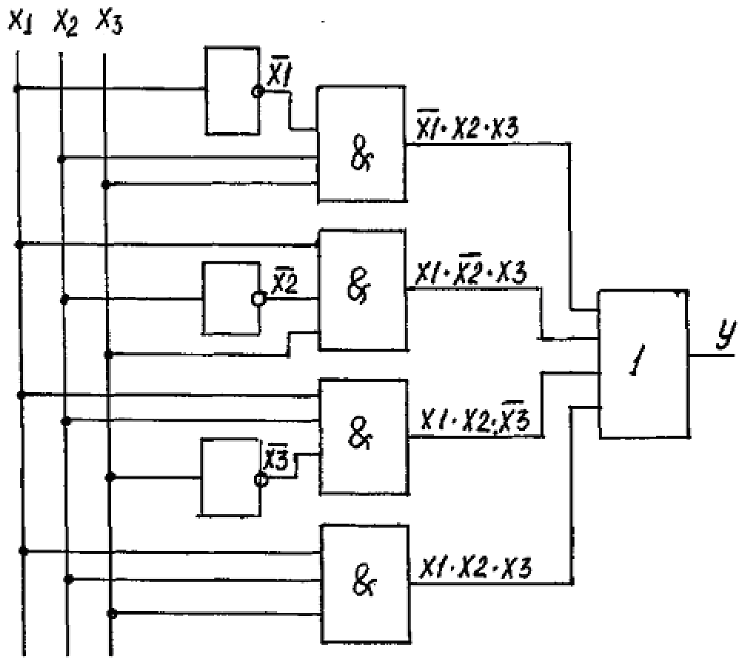

Рис. 2. 3 - Функціональна схема для виконання заданої функції алгебри логіки

Логічні функцій, такі, що є кон'юнкцією окремих членів, кожний з яких є функція, що містить тільки диз'юнкції і інверсії, називаються ***логічними функціями кон'юнктивної форми***. За аналогією з диз'юнктивними формами можливі кон'юнктивні нормальні форми (КНФ) і досконалі кон'юнктивні нормальні форми (ДКНФ).

Можливість запису функцій в диз'юнктивних і кон'юнктивних формах визначається виходячи з наступного. Розглянемо довільну логічну функцію від *n* аргументів типу конституенти одиниці, яка повністю визначається завданням набору, що обертає її в одиницю. У цьому наборі деякі аргументи можуть бути рівними «1», а інші рівні «0».

Складемо кон'юнкцію від всіх *n* аргументів, причому ті аргументи, які у вказаному наборі рівні «0», візьмемо з інверсією, а аргументи рівні «1» – без інверсії. Якщо всі аргументи відповідатимуть заданому набору, то функція перетворюється в кон'юнкцію *n* одиниць і буде рівна «1». Для решти всіх наборів хоч би один аргумент відрізняється від заданого набору, а значить, і вся кон'юнкція перетворюється в «0». Таким чином, довільна функція від *n* аргументів типу конституенти «1» може бути виражена через кон'юнкцію і інверсію. Наприклад, функція чотирьох аргументів, яка перетворюється в «1» при *x1=0, x2=1, x3=1, x4=0* і в «0» на решті всіх наборів, може бути записана у вигляді:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\,.$$

Аналогічно можливо показати, що довільну логічну функцію від *n* аргументів типу конституенти нуля можна виразити через диз'юнкцію і інверсію. Наприклад, якщо функція чотирьох аргументів при

x1=1, x2=0, x3=1, x4=1

пертворюється в «0», а на решті всіх наборів рівна «1», то вона матиме вигляд:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_4}\,.$$

Довільна функція може бути виражена через функції диз'юнкції, кон'юнкції і інверсії як у вигляді ДДНФ чи ДКНФ, так і у вигляді ДНФ чи КНФ.

Функція у вигляді ДДНФ може бути отримана на основі таблиці істинності при використанні наступного правила запису ДДНФ.

<u>Необхідно записати стільки членів у вигляді кон'юнкцій всіх аргументів, скільки одиниць містить функція в таблиці. Кожна кон'юнкція має відповідати набору аргументів, що обертають функцію в «1», і якщо в цьому наборі значення аргументу рівне «0», то в кон'юнкцію входить інверсія даного аргументу</u>.

Наприклад, по таблиці істинності функції:

X_1	0	1	0	1	0	1	0	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	0	1	1	1	1
$F(x_1,x_2,x_3)$	0	1	0	1	1	0	1	0

можна записати функцію в ДДНФ у вигляді:

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 .$$

Функція у вигляді ДКНФ також може бути отримана безпосередньо з таблиці істинності при використанні наступного правила.

<u>Необхідно записати стільки кон'юктівних членів, що є диз'юнкціями всіх аргументів, при скількох наборах функція рівна «0», і якщо в наборі значення аргументу рівне «1», то в диз'юнкцію входить інверсія цього аргументу</u>.

Наприклад, по приведеній вище таблиці істинності можна записати функцію в ДКНФ в наступному вигляді:

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

.

Слід зазначити, що будь-яка функція має єдині ДДНФ і ДКНФ. У ряді випадків така форма запису не є найпростішою для виразу заданої функції в аналітичній формі і можна спростити логічний вираз не порушуючи значення функції. Методи такого спрощення функції називають методами мінімізації (синтезу).

В результаті мінімізації логічні функції можуть бути представлені в МДНФ або в МКНФ з мінімальним числом членів і з мінімальним числом аргументів в кожному членові. Для спрощення виразів функцій алгебри логіки розроблені як графічні (за допомогою карт Карно), так і алгебраїчні.

Приклад рішення: фунція представлена наступною таблицею істинності

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$F(x_1,x_2,x_3)$	0	0	0	1	0	1	1	1

У ДДНФ функція буде виражена в наступному вигляді:

$$Y = \overline{x_1} \cdot x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Після мінімізації з використанням основних теорем алгебри логіки отримаємо:

$$Y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 =$$

$$= x_2 \cdot x_3 (\overline{x_1} \vee x_1) \vee x_1 \cdot x_3 (\overline{x_2} \vee x_2) \vee x_1 x_2 (\overline{x_3} \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 .$$

Для спощення використана теорема алгебри логіки $\overline{x} \vee x = 1$.

Схема з'єднань ЛЕ із застосуванням 2-, 3-входових елементів вказана на рис. 2. 4.

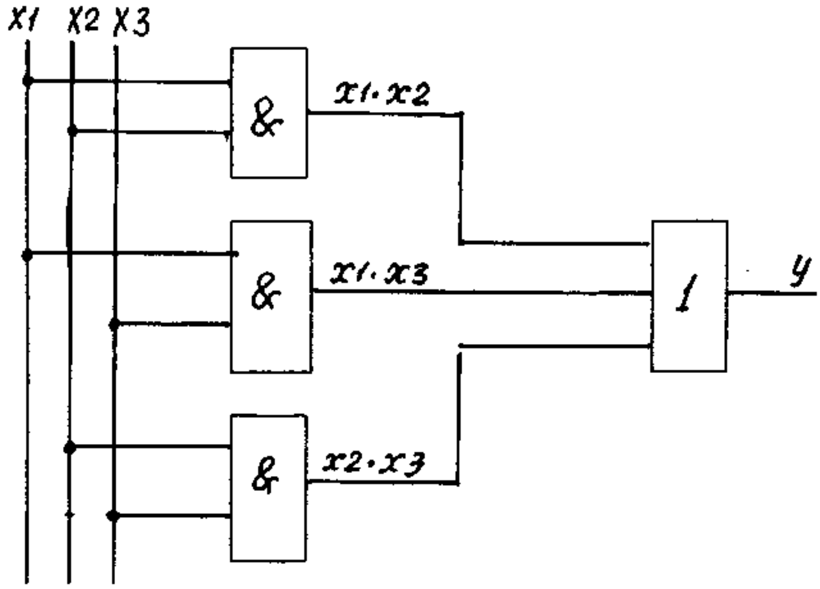

Рис. 2. 4 - Функціональна схема для заданої функції після мінімізації функції.

Мінімізація функцій логіки із застосуванням карт Карно

При невеликому числі змінних досить зручний графічний метод спрощення виразів для функцій алгебри логіки за допомогою карт Карно. Карта Карно є певною формою таблиці істинності для двох, трьох і чотирьох аргументів, як показано на рис.2.5, *а* - *в*.

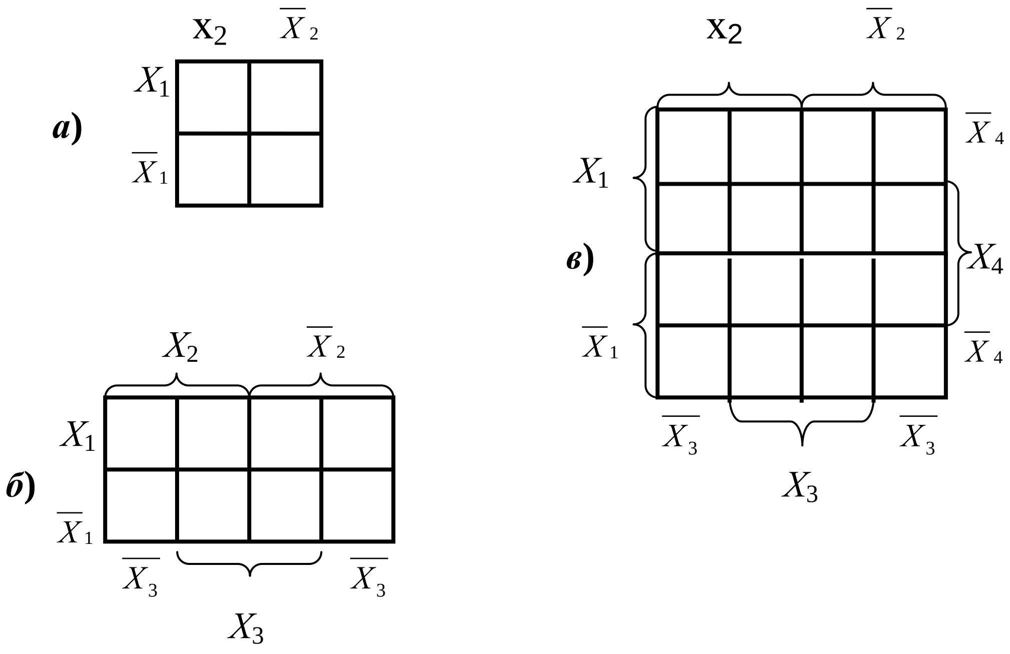

Рис. 2. 5 Таблиці карт Карно: *а*) для двох аргументів; *б*) для трьох аргументів; *в*) для чотирьох аргументів

Кожна клітка відповідає певному набору аргументів, причому цей набір визначається привласненням значення 1 аргументам, на перетині рядків і стовпців яких розташована клітинка. Число клітинок карти рівне числу можливих наборів значень аргументів і при числі аргументів n рівне 2n. У кожну клітинку карти записується значення функції при відповідному цій клітинці наборі значень аргументів. Наприклад, якщо функція задана таблицею істинності (див. таблицю 2. 2), то у формі карти Карно ця функція буде представлена так, як показано на рис. 2. 6, а.

Таблиця 2. 2 - Таблиця істинності функції $F(x_1x_2x_3)$

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$F(x_1x_2x_3)$	0	1	0	1	0	0	1	1

При цьому клітинки верхнього рядка відповідають наступним наборам (див. рис. 2. 6.а):

перша клітинка: $x_1 = 1$; $x_2=1$; $\overline{x}_3 = 1$
друга клітинка: $x_1 = 1$; $x_2=1$; $x_3=1$
третя клітинка: $\overline{x}_1 = 1$; $x_2=1$; $x_3=1$
четверта клітинка: $\overline{x}_1 = 1$, $\overline{x}_2 = 1$, $x_3=1$.

При записі функції в мінімальній формі за картми Карно використовуються наступні правила.

Всі клітинки, що містять 1, об'єднуються в замкнуті області. При цьому кожна область має бути прямокутником з числом клітинок $2k$, де k=0, 1, 2, 3, 4 ... . Області можуть перетинатися, і одні і ті ж клітинки можуть входити в різні області.

Потім проводиться запис мінімального виразу в диз'юнктивній нормальній формі ДНФ. Кожна область в такому записі представляється членом, число аргументів в якому на k менше загального числа аргументів функції n (рівне n-k). Кожен член ДНФ складається лише з тих аргументів, які для відповідної області мають значення або без інверсій, або тільки з інверсією.

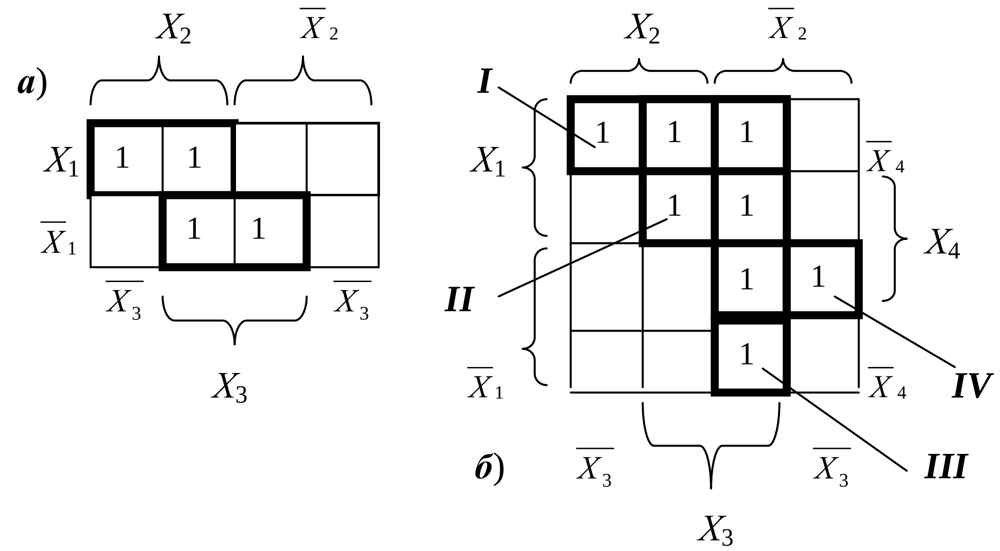

Рис. 2. 6 - Карта Карно: *а*) для функції $F(x_1,x_2,x_3)$ – для трьох аргументів; *б*) для функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ – для чотирьох аргументів

Таким чином, при охваті клітинок карти замкнутими областями слід прагнути, щоб число областей було мінімальним, оскільки при цьому буде мінімальним число членів в ДНФ, а кожна область містила можливо більше число клітинок, оскільки при цьому число аргументів в членах буде мінімальним.

Так, для функції трьох аргументів, представленої на рис. 2. 6.*а*, клітинки, що містять 1, охоплюються двома областями. У кожній області дві клітинки, і так як $2k = 2$, то, отже $k = 1$. Тому для цих областей n-k=3-1=2. В результаті в ДНФ буде два члени і в кожному з них по два аргументи. Першій області відповідає імпліканта x_1x_2, а другій області – імпліканта $\bar{x}_1x_3$. Отже, мінімальна ДНФ для цієї функції буде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

Прикладом завдання функції чотирьох аргументів за допомогою карти Карно може служити карта, приведена на рис. 2. 6.*б*, де виділено чотири області. Першу і четверту області мають по дві клітинки; для них n-k=3 і відповідні ним члени будуть $x_1x_2\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$. Області II і III містять по чотири клітинки, і в ДНФ вони будуть відображені членами, що містять по два аргументи x_1x_3 і $\bar{x}_2x_3$. Таким чином, мінімальна форма функції буде

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\overline{x_4}\vee x_1x_3\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_4.$$

При побудові замкнутих областей допускається згортання карти в циліндр як по горизонтальній, так і по вертикальній вісі з об'єднанням протилежних граней карти. Представлення функції і мінімізація її за допомогою карт Карно ускладнюється, якщо число аргументів більше чотирьох.

Так, для представлення функції п'яти аргументів необхідно використовувати дві карти, кожна з яких є картою чотирьох змінних; одна для x_5=1, а інша для x_5=0. Ці карти розташовуються одна над іншою, і області обхвату клітинок можуть бути тривимірними, тобто в одну область можуть входити клітинки двох карт.

Для мінімізації функцій з числом аргументів більше 7-8 карти Карно практично не використовуються, і в таких випадках використовуються методи алгебри, такі як метод Квайна, метод невизначених коефіцієнтів і ін.

При побудові логічних схем в якости базисних функцій окрім диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення можуть бути використані і інші функції, створюючі повну систему. В цьому випадку мінімальні форми можуть бути отримані переходом від базису «диз'юнкція, кон'юнкція і інверсія» до нового базису шляхом відповідних перетворень.

Наприклад, при переході до базису у вигляді функції Шеффера використовуються інверсія і формули Моргана.

ЗАВДАННЯ

1. По заданій таблиці істинності (таблиця 2. 3) розробити логічний вираз функції в ДНФ:

- провести мінімізацію логічного виразу, використовуючи теореми алгебри логіки;
- по отриманому виразу розробити схему з'єднань ЛЕ;
- перевірити правильність перетворень шляхом аналізу комбінацій аргументів в отриманні заданої функції із застосуванням комп'ютера для розробленої схеми з'єднань ЛЕ:

- запустити програму kmap445.exe;

- провести вибір варіанту карти Карно для заданої кількості аргументів шляхом ініціалізації відповідного значка панелі, що відображає сітку карти Карно;

- задати варіанти функцій на панелі програми таким чином:

у таблиці вікна з переліком наборів провести вибір заданих наборів аргументів згідно завданню для всіх необхідних варіантів функцій, відзначивши маніпулятором у відповідних вікнах програми або встановити у відповідні клітинки карти Карно маніпулятором значки відповідно до значень варіантів функцій;

- звірити результат обчислень, виконаний згідно програмі kmap445.exe з отриманим раніше;

2. Розробити логічний вираз функції в КНФ та її реалізацію.

Таблиця 2. 3 - Варіанти завдання логічних функцій

X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$	$У_4$	$У_5$	$У_6$	$У_7$	$У_8$	$У_9$	$У_{10}$
0	**0**	**0**	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	**0**	**1**	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	**1**	**0**	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	**1**	**1**	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	**0**	**0**	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	**0**	**1**	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	**1**	**0**	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	**1**	**1**	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1

3. Розробити логічну схему КЦП за особистим вибором.

Контрольні питання для самостійної перевірки:

1. Пояснити суть основних функцій алгебри логіки для одного і двох аргументів.
2. Перечислити системи булевих функцій, що мають функціональну повноту.
3. Логічний базис та його використання.
4. Способи завдання булевих функцій?

5. У чому полягає завдання мінімізації булевих функцій?
6. Поясніть суть й ознаки ДНФ і ДДНФ та МДНФ, КНФ і ДКНФ та МКНФ.
7. Способи виразу довільної функції для елементів КЦП.
8. Представте карту Карно для 2, 3, 4 аргументів.
9. Принципи представлення функцій і спосіб мінімізації із застосуванням карти Карно.