

## МЕТОДИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДВОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

Тріангуляцією плоскої області називається її розбиття на деяку сукупність трикутників, що не перетинаються.

Тріангуляцією Делоне називається множина трикутників, що не перетинаються и для яких виконується умова: в коло, описане навколо довільного трикутника, не потрапляє ні одна вершина, що належить будь-якому іншому трикутнику (рис. 1).

Базовим поняттям в тріангуляції плоских областей є діаграма Воронова. Діаграмою Воронова для деякої множини точок на площині називається сукупність полігональних (багатокутних) фігур, що утворюються лініями, перпендикулярними відрізкам, що з'єднують задані точки (рис. 2).

Найбільш розповсюдженими алгоритмами є:

- алгоритм Ватсона;
- алгоритм Лавсона (рис. 3);
- комбінований алгоритм Ватсона та Лавсона;
- алгоритм послідовного розбиття;
- алгоритм ділення та включення;
- покроковий алгоритм;
- модифікований ієрархічний алгоритм;
- алгоритм Рапперта.

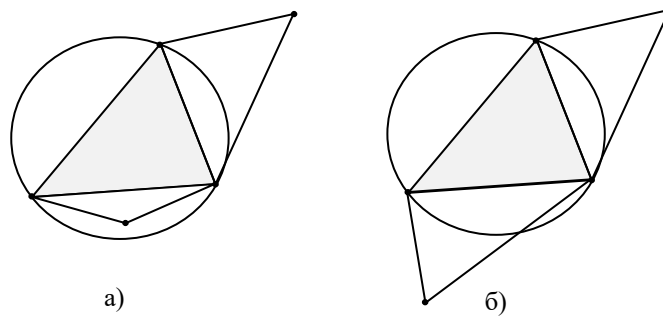


Рис. 1. Приклади а) триангуляції та б) триангуляції Делоне

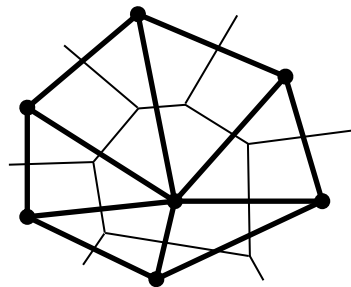


Рис. 2. Діаграма Воронова

інформації.

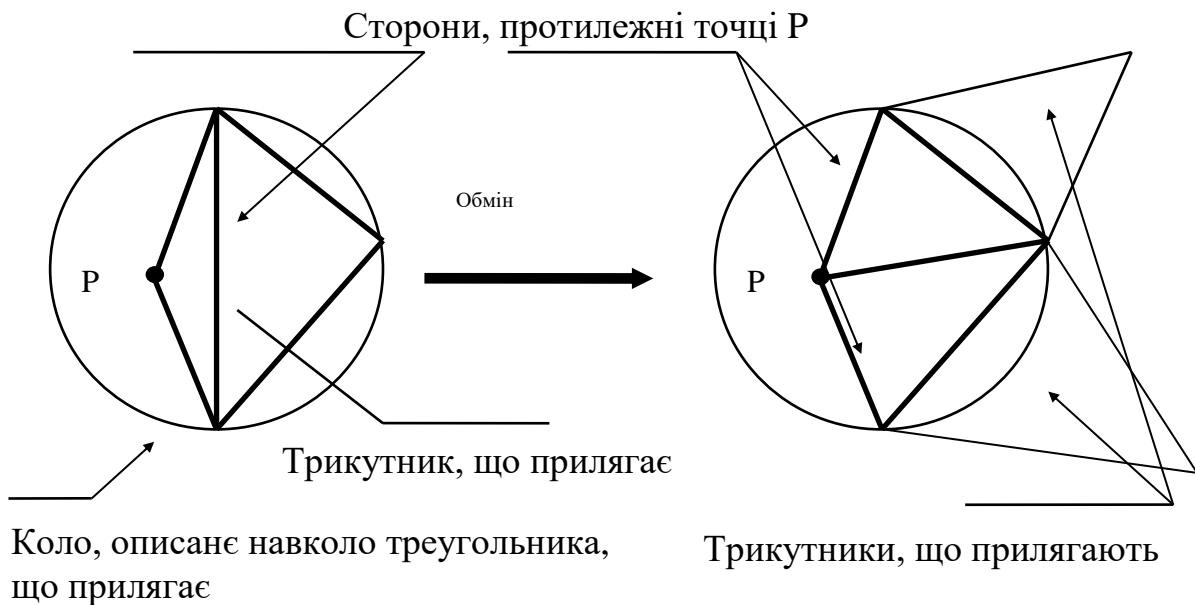


Рис. 3. Обмінний алгоритм Лавсона

Загальна блок-схема комбінованого алгоритму Ватсона-Лавсона приведена на рис. 4.

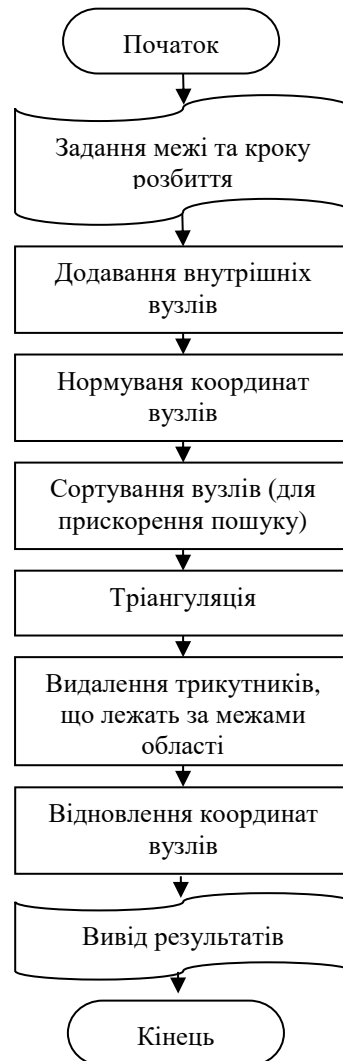


Рис. 4. Блок-схема комбінованого алгоритма триангуляції Ватсона-Лавсона

Головною перепорою, що виникає при використанні даного алгоритму, є пошук та видалення зайвих трикутників при триангуляції багатозв'язних та невивуклих областей (рис. 5). Дана проблема зводиться до розв'язання задачі про приналежність точки (наприклад, геометричного центру трикутника) заданому багатокутником (межі області).

Відома велика кількість методів та алгоритмів розв'язання даної задачі:

- підрахунок кількості перетинів межі області промінів, проведених з точки, що тестується (рис. 6);

- визначення величини кута, що утворюється відрізками, що з'єднує точку, що тестується, та сусідні вершини контуру (рис. 7).

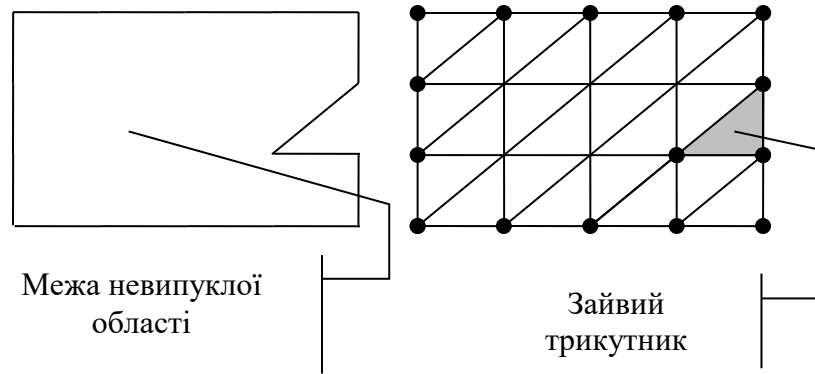


Рис. 5. Проблема зайвого трикутника

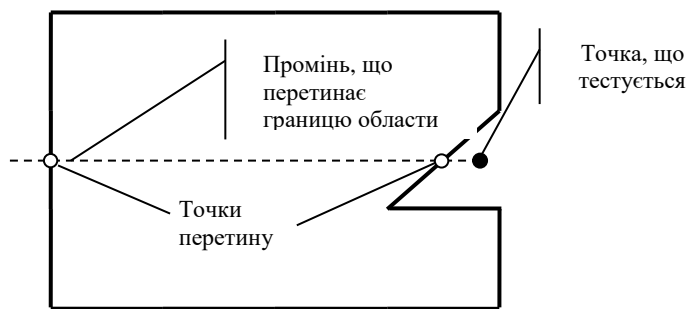


Рис. 6. Визначення приналежності точки замкнутого контуру шляхом підрахунку кількості перетинів променя, проведеного

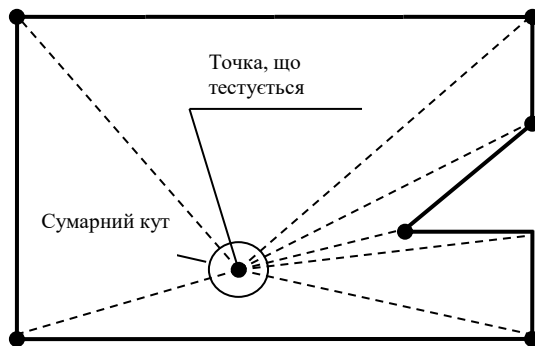


Рис. 7. Визначення приналежності точки замкнутого контуру шляхом підрахунку суми кутів

Алгоритм Рапперта:

а)отримання первісної («грубої») триангуляції плоскої області шляхом задання деякої сукупності точок на її межі;

б)оптимізація даної триангуляції шляхом введення в сітку нових вузлів з подальшим перетворенням розбиття в триангуляцію Делоне.

Терміни та визначення:

Елемент (element) – трикутник.

Вузол (node) – точка, у якій збігаються ребра елементів, що дотикаються.

Сегмент (segment) – відрізок, що з'єднує сусідні точки, які лежать на межі області.

Ребро (edge) – відрізок, по якому межують сусідні елементи.

Включена точка (encroached point) – довільна точка поточного розбиття, що знаходиться всередині кола, радіусом якої є довільний сегмент.

«Неправильний» трикутник (bad triangle) — елемент з характеристиками (кути, площа), що не задовольняють заданим обмеженням на триангуляцію.

Алгоритм Рапперта складається з двох базових процедур:

- розбиття «неправильного» трикутника шляхом введення нового вузла;
- розбиття сегментів шляхом введення нового вузла.

Розбиття «неправильного» трикутника відбувається так:

а)обчислюються координати кола, описаної навколо елемента, що підлягає розбиттю;

б)в центр кола добавляється новий вузол;

в)вихідний елемент видаляється та замінюється на знов утворенні (рис. 8).

Розбиття сегмента відбувається у тому випадку, коли у коло, діаметром якої він є, потрапляє вузол, що йому не належить (рис. 9). Тоді такий «неправильний» сегмент поділяється так:

- сегмент поділяється навпіл;
- в середину сегмента добавляється новий вузол;
- видаляється трикутник, ребром якого є вихідний межовий сегмент;
- будуються нові трикутники.

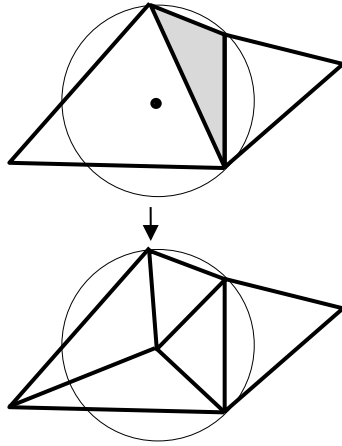


Рис. 8. Розбиття «неправильного» трикутника

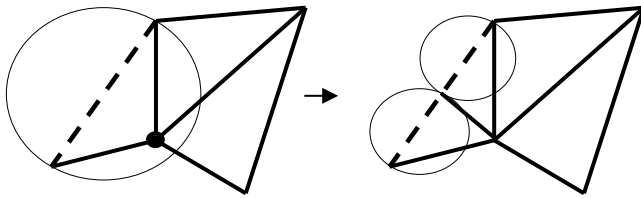


Рис. 9. Розбиття «неправильного» сегмента

Критерій якості сітки – мінімальний кут сітки.

Додатковий критерій – максимальна площа елемента.

Загальна блок-схема застосування алгоритму Рапперта для автоматичної оптимізації триангуляції можна надати так (рис. 10).

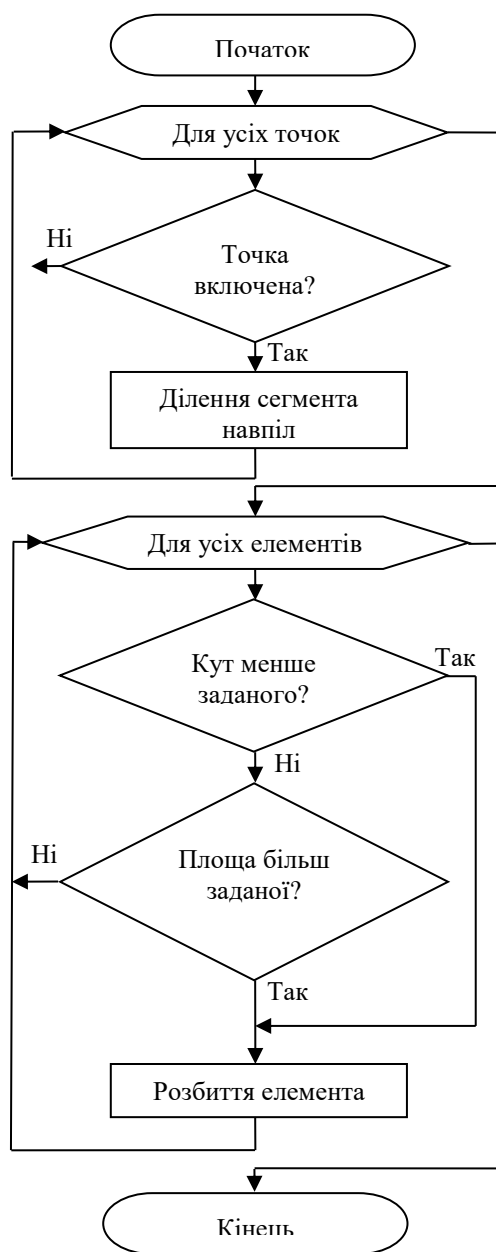


Рис. 10. Блок-схема алгоритма Рапперта

Процедура оптимізації якості сітки, що базується на повороті діагоналі: два суміжні трикутника, що мають спільну грань, утворюють чотирикутник, діагональ у якому можна провести різними способами (рис. 11).

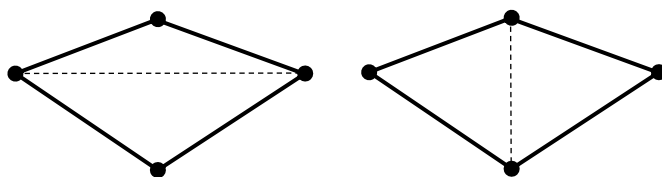


Рис. 11. Процедура повороту діагоналі

При застосуванні алгоритму Рапперта можливі такі проблеми. При виконанні розбиття рівнобічних трикутників, можуть виникати нові елементи з нульовою площею. (рис. 12). Одним із способів подолання даної проблеми є додавання нової точки при розбитті трикутника не строго в центр описаного кола, а в деякій його окіл. Іншим способом є виключення виродженого трикутника з сітки.

Другою проблемою є розбиття трикутника, коли центр описаного навколо нього кола лежить за його межами. Одним із можливих варіантів розв'язання даної проблеми є перевірка на попадання точки, що додається, в трикутник. (рис. 13).

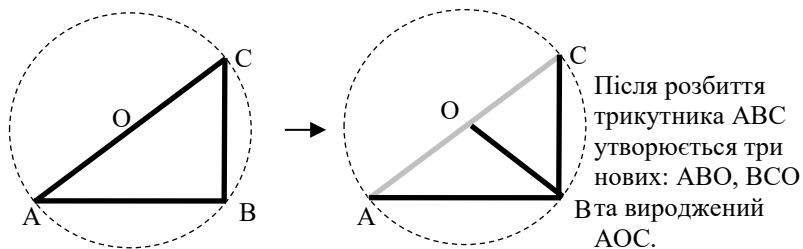


Рис. 12. Утворення виродженого трикутника

Наступною проблемою є дискретизація областей, в геометрії яких присутні гострі кути (рис. 14).

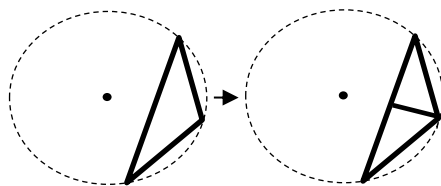


Рис. 13. Розбиття витянутого трикутника



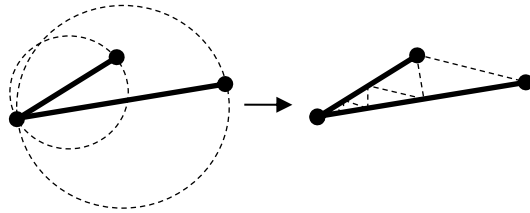


Рис. 14. Заиклення процедури ділення сегмента при гострому куті

Спосіб розв'язання проблеми: «неправильний» сегмент при гострому куті поділяється не посередині, а в найближчій до середини точці перетину даного сегменту та концентричних кіл з центрами в вершині кута (рис. 15).

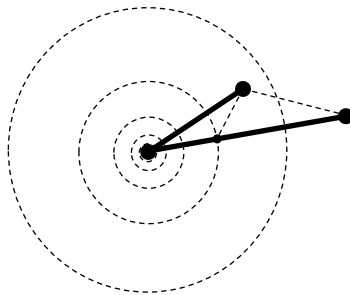


Рис. 15. Ділення сегмента способом концентричних кіл

## МЕТОДИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТРИВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

### Методи побудови дискретного представлення складних об'єктів чотирикутними та шестигранними елементами

Методи дискретизації на чотирикутні елементи поділяють на дві великі групи: 1) методи отримання структурованої (блочно-структурованої) сітки; 2) методи отримання неструктурованої сітки.

Базова відмінність між структурованою та неструктурованою сіткою полягає у структурі даних, за допомогою якої описується сітка. Структурована сітка чотирикутників складається з множини координат, які можуть бути відображені елементами матриці (рис. 1): сусідні точки сітки будуть сусідніми елементами матриці.

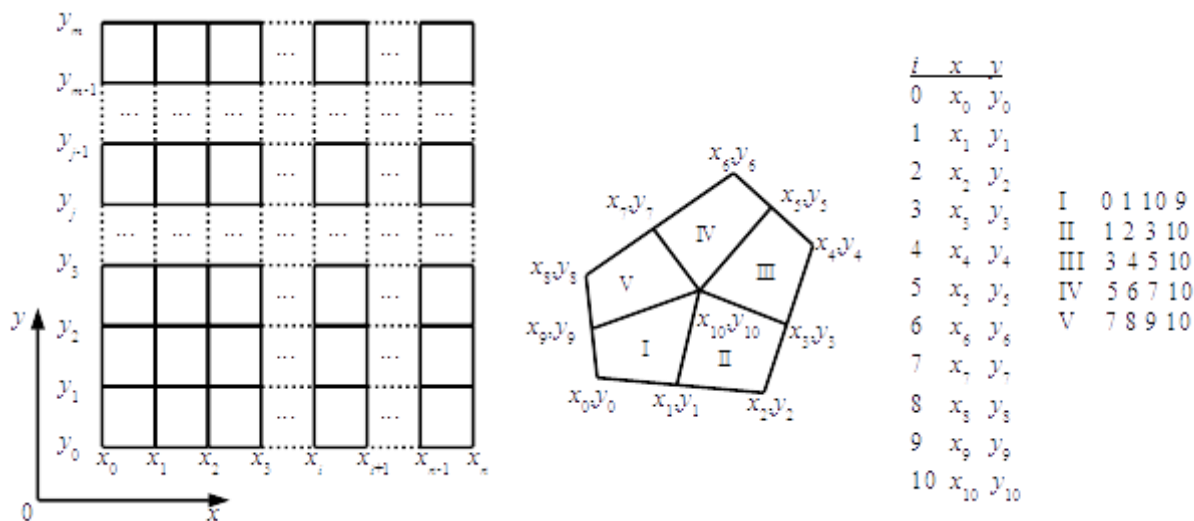


Рис.1. Структурована та неструктурована сітки

Неструктурована сітка не може бути описана подібним чином та потребує додаткової інформації про структуру зв'язків між вузлами. Найбільш розповсюдженим є використання двох таблиць: таблиці координат вузлів та таблиці

зв'язків між ними (рис. 1). Перевагою неструктурованої сітки є можливість додавання/видалення вузлів та елементів у відповідності з геометричними особливостями конструкції або фізичної постановки задачі без глобальної перебудови сітки.

Методи отримання неструктурованих сіток чотирикутних та шестигранних елементів: прямі та непрямі. Прямі методи використовують безпосередню побудову чотирикутних комірок всередині заданої границі, в той час як непрямі методи базуються на перетворенні вихідної триангуляції заданої області.

### Структуровані та блочно-структуровані сітки

Одним із підходів є представлення тіл, в основі якого лежить ідея трансформування сітки, визначеній на одиничному кубі, в потрібну геометрію за допомогою відображення  $F : [0,1]^3 \rightarrow \Omega$  (рис. 2).

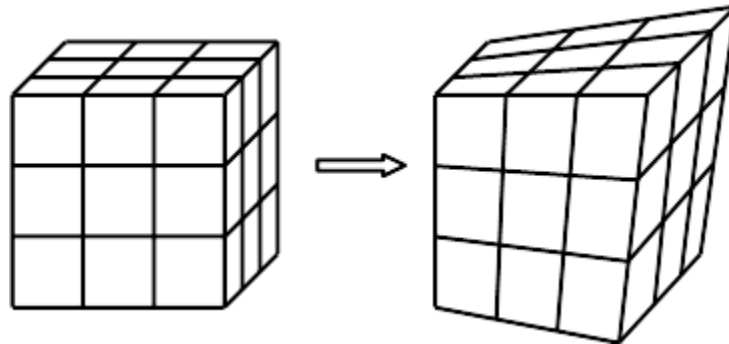


Рис. 2. Відображення сітки, визначеній на одиничному кубі на потрібну геометрію

Проблему дискретизації тіл більш складної форми при такому підході розв'язують методи декомпозиції та блочної декомпозиції, які основані на ідеї (напівавтоматичної або автоматичної) декомпозиції тіла на кубоподібні блоки.

## Фронтальні методи

Основна ідея прямих фронтальних методів генерації полягає в використанні початкової дискретизації межі та подальшому пошаровому заповненні вихідної області дискретними елементами (рис. 3).

Основні недоліки: 1) складності пошуку вироджених елементів при перетині двох фронтів; 2) складність уникнення пустот.

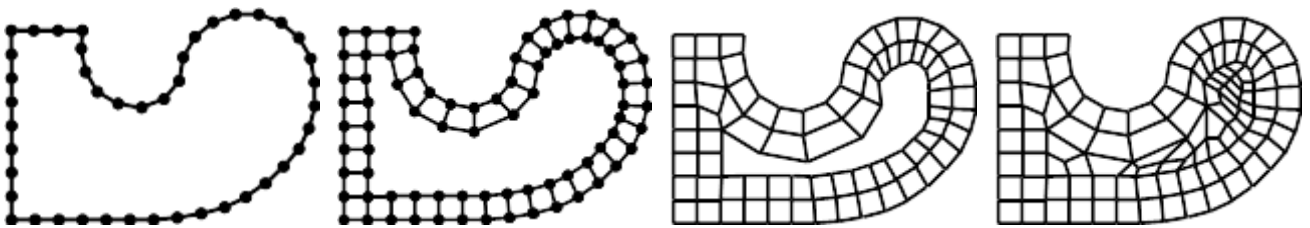


Рис. 3. Прямий фронтальний метод

Непрямі фронтальні методи використовують попередньо побудовану трикутну сітку та наступну трансформацію трикутників у чотирикутники. Для них відсутня проблема елементів, що перетинаються, та вони захищені від появи пустот всередині контуру.

## Просторовий вигін континуума

В основу просторового вигону континуума (the Spatial Twist Continuum), покладено STC-представлення сітки: нехай дана неструктурована сітка чотирикутних елементів  $M = (V, E, F)$ , тоді STC-представлення  $M' = (V', E', F')$  визначається так:

- 1) середня точка  $v'$  кожної грани  $f \in F$  є вузлом  $V'$ ;
- 2) кожному ребру  $e \in E$  відповідає ребро  $e' = (v'_1, v'_2) \in E'$ , де  $v'_1$  та  $v'_2$  – середні точки суміжних в ребрі  $e$  чотирикутників.

Кожному вузлу  $v \in V$  відповідає грань  $f \in F'$ , що визначається середніми точками суміжних в  $v$  чотирикутників (рис. 4).

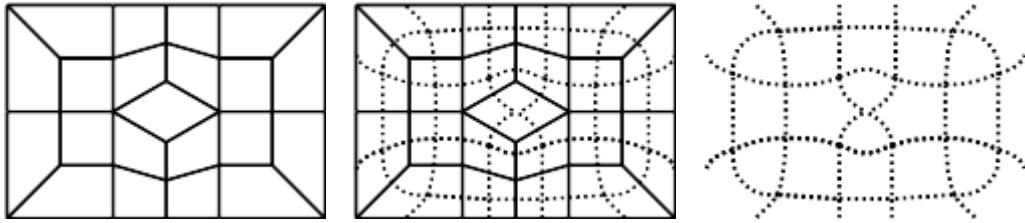


Рис. 4. Сітка чотирикутних елементів та STC-представлення

Для побудови сітки чотирикутних елементів необхідно: 1) додати хорди, що з'єднують межові сегменти; 2) додати хорди, що усувають вироджені елементи; 3) побудувати амбівалентне представлення.

Застосування цього методу для дискретизації на множену шестигранників (рис. 5).

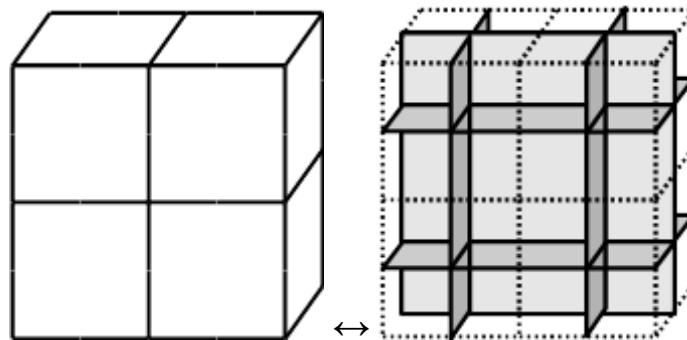


Рис. 5. STC-представлення шестигранних елементів

### Методи суперпозиції

Алгоритми даного класу як вихідні дані використовують сітку, яка більш або менш просто може бути побудована й покриває область навколо об'єкта  $\Omega$ , після чого вихідне розбиття адаптується до межі  $\Omega$ . Існує два основних підходи до адаптації вихідної сітки до межі об'єкта: сітковий та проєкційний методи.

У сітковому методі всі комірки, розташовані зовні об'єкта  $\Omega$  або дуже близько до його межі, виключаються із розгляду, а комірки, що залишилися, визначають початкову сітку (комірки із сірим фоном на рис. 6). Потім простір між межею  $\Omega$  та початковою сіткою заповнюється елементами (рис. 6). Принципово є те, що структура остаточної дискретизації залежить від структури початкової сітки.

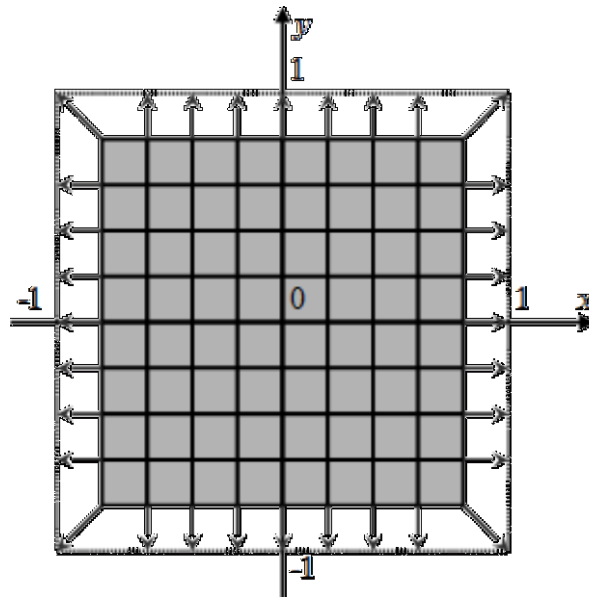


Рис. 6. Дискретизація квадрата

Альтернативним способом адаптації первісної сітки до межі  $\Omega$  є метод проєкції. На початковому етапі відбувається конструювання структурованої сітки, що покриває об'єкт  $\Omega$ , але (на відміну від сіткового методу) всі комірки залишаються на площині. Вузли сітки переміщуються в характерні точки  $\Omega$  та потім на ребра  $\Omega$ , повністю покриваючи межу об'єкта ребрами елементів. При цьому можуть виникати вироджені елементи.