Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Л.Л. ЗАЙЦЕВА
А.В. НЕТРЕБА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2008

Зайцева Л.Л., Нетреба А.В.
Збірник задач з аналітичної геометрії. – К.: Видавничо–поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 200 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, Пилипенко А.Ю.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Єфіменко С.В.

Наведено завдання для практичних занять з аналітичної геометрії. Посібник містить завдання різного рівня складності для аудиторної та самостійної роботи. Наведено приклади розв’язання типових задач.

Для студентів, викладачів фізико-математематичних спеціальностей

Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 13 від 19 травня 2008 року)

Зміст

Передмова

В посібнику запропоновано задачі для забезпечення навчальним матеріалом практичні заняття з курсу "Аналітична геометрія". Структура посібника повністю відповідає послідовності практичних занять першої частини курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра", яка читається на фізичному та радіофізичному факультетах Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Посібник містить як прості задачі, спрямовані на розкриття властивостей геометричних об'єктів і вміння застосовувати основні формули аналітичної геометрії, так і задачі підвищеної складності, призначені для поглибленого вивчення навчальної дисципліни та організації самостійної роботи студентів. При складанні посібника автори спирались на власний багаторічний досвід викладання на фізичному і радіофізичному факультетах Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Деяка частина запропонованих задач запозичена з класичних збірників [3, 6, 7, 10]. Разом з тим, посібник містить значну кількість оригінального матеріалу.

На початку кожного розділу коротко перераховуються основні теоретичні поняття, якими повинен володіти студент для того, щоб приступати до розв'язання задач. Ознайомитись з теоретичним матеріалом читач може в [2, 5, 9] (основна рекомендована література) або, більш детально, в [1, 4, 8]. З метою полегшення самостійного вивчення матеріалу у кожному розділі детально розібрані приклади розв'язання типових задач, переважну більшість яких проілюстровано рисунками.

Посібник орієнтований на роботу викладачів та студентів, які викладають чи вивчають аналітичну геометрію в обсязі, передбаченому навчальними програмами фізичних, математичних та технічних спеціальностей університетів та інших вищих навчальних закладів.

1 Визначники II і III порядків, їх властивості. Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь II та III порядків

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Методи обчислення визначників II та III порядків. Властивості визначників.

2. Системи лінійних рівнянь II та III порядків. Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь II та III порядків. Необхідна і достатня умова існування єдиного розв'язку системи лінійних рівнянь II та III порядків.

3. Обчислення визначників старших порядків методом зведення до визначників менших порядків. Формула Лапласа.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Обчислити визначники другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо визначники, користуючись правилами обчислення визначників:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - (-3) \cdot 4 = 7.$$

Приклад 1.2. Обчислити визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & -11 & -2 \\ 5 & 8 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо перший визначник:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Для запам'ятовування цієї відповіді зручно використовувати один з наступних методів:

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}};$$

а) метод "зірочка":

б) метод "допоміжних стовпчиків":

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \\ \hline - & - & - & & \end{array};$$

в) метод розкладу по довільному рядку або стовпчику (покажемо на прикладі першого рядка):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо другий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & -11 & -2 \\ 5 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-11) \cdot (-7) + 9 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) -$$

$$-(-3) \cdot (-11) \cdot 5 - (-2) \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot (-7) = -6$$

Приклад 1.3. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>. Обчислимо перший визначник, скориставшись наступними перетвореннями: додамо до другого рядка перший; додамо до третього рядка перший, помножений на (-2). В результаті отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 0 & -9 \\ -7 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо визначник по елементах другого стовпчика, після чого винесемо коефіцієнт 9 з першого рядка і обчислимо отриманий визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 0 & -9 \\ -7 & 0 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -9\,(6-7) = 9.$$

Обчислимо другий визначник, скориставшись наступними перетвореннями: додамо до другого і до третього рядків перший, помножений на (-1). В результаті отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ c-a & a-c & 0 \\ c-b & b-c & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо визначник по елементах третього стовпчика, після чого винесемо коефіцієнти $(c-a)$ з першого і $(c-b)$ з другого рядка, після чого обчислимо отриманий визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ c-a & a-c & 0 \\ c-b & b-c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c \\ c-b & b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (c-a)\,(c-b) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1.4. Обчислити визначники четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 \\ -7 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & -5 & -7 \\ 8 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} -4 & 0 & -7 & -5 \\ -3 & -7 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо перший визначник. Для спрощення обчислень розкладемо його по рядку або стовпчику, який містить найбільшу кількість нулів, в даній ситуації по другому стовпчику:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 \\ -7 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & -5 & -7 \\ 8 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 5 & -5 & -7 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 5 & -5 & -7 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -7 & 5 & 4 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -7 & 5 & 4 \\ 5 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-24) + (-66) = -18.$$

Знайдемо другий визначник. Розкладемо його по першому рядку:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -7 & -5 \\ -3 & -7 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ -5 & -5 & 8 \end{vmatrix} + (-7) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & -7 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-5) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -3 & -7 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot (-741) - 7 \cdot 567 + 5 \cdot 194 = -35.$$

Приклад 1.5. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x - 9y = 2, \\ -2x + 3y = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x - 7y - 2z = -3, \\ 7x - 6y + z = -3, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Для першої системи лінійних рівнянь маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

звідки робимо висновок, що система має єдиний розв'язок. Знайдемо його, для цього обчислимо ще два визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -48, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -38.$$

Таким чином,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -16; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{38}{3}.$$

Для другої системи лінійних рівнянь маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -7 & -2 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

звідки робимо висновок, що система має єдиний розв'язок. Знайдемо його, для цього обчислимо ще три визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -7 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -23,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -7 & -3 \\ 7 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Таким чином,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{13}; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{23}{13}; \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Приклад 1.6. Довести, що однорідна система лінійних рівнянь третього порядку

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0 \end{cases}$$

має єдиний нульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язання. З теореми Крамера відомо, що система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$. Тому залишилось перевірити, що цей розв'язок буде нульовим. Дійсно,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix},$$

звідки

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Твердження доведено.

Приклад 1.7. Дослідити, при яких значеннях параметрів система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, несумісна, має безліч розв'язків? У випадках, коли система сумісна, вказати всі розв'язки системи.

а) $\begin{cases} 2x - 3y = b + 1, \\ ax + 9y = 3b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x + 3y - z = b, \\ -8x + 7y + az = -5, \\ 4x - 2y + 6z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a+1)\,x+y+z=1, \\ x+(a+1)\,y+z=a, \\ x+y+(a+1)\,z=a^2. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>. а) Визначник системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & 9 \end{vmatrix} = 3\,(6+a)\,,$$

звідки $\Delta \neq 0$ (тобто система має єдиний розв'язок) тоді і тільки тоді, коли $a \neq -6$. Знайдемо цей розв'язок, для цього обчислимо ще два визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b+1 & -3 \\ 3b & 9 \end{vmatrix} = 9\,(2b+1)\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & b+1 \\ a & 3b \end{vmatrix} = 6b - ab - a.$$

Таким чином,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3\frac{2b+1}{6+a}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6b-ab-a}{3\,(6+a)}.$$

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ (ця умова виконується, коли $a = -6$, $b = -1/2$), тоді система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$, але $\Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$ (ця умова виконується, коли $a = -6$, $b \neq -1/2$), тоді система несумісна.

б) Визначник системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -8 & 7 & a \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 4\,(a-3)\,,$$

звідки $\Delta \neq 0$ (тобто система має єдиний розв'язок) тоді і тільки тоді, коли $a \neq 3$. Знайдемо цей розв'язок, для цього обчислимо ще три визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b & 3 & -1 \\ -5 & 7 & a \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3a + 2ab + 42b + 87,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & b & -1 \\ -8 & -5 & a \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\,(a + ab + 12b + 27)\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & b \\ -8 & 7 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -12\,(b + 2)\,.$$

Таким чином,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3\frac{3a + 2ab + 42b + 87}{4\,(a-3)},$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a + ab + 12b + 27}{a-3}, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -3\frac{b+2}{a-3}.$$

Якщо $\Delta = 0$, але $\Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$ або $\Delta_3 \neq 0$ (ця умова виконується, коли $a = 3$, $b \neq -2$), тоді система несумісна.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (ця умова виконується, коли $a = 3$, $b = -2$), тоді метод Крамера не дає відповіді щодо сумісності системи для систем лінійних рівнянь третього порядку і вище. В цій ситуації можливі два випадки: або система буде мати безліч розв'язків або буде несумісною. Для того, щоб дати відповідь, розв'яжемо систему при цих умовах. Зробимо такі перетворення: до другого рівняння додамо перше, помножене на (-2) (результат запишемо замість другого рівняння); до третього рівняння додамо перше (результат запишемо замість третього рівняння). Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} -4x + 3y - z = -2, \\ \qquad\quad y + 5z = -1, \\ \qquad\quad y + 5z = -1; \end{cases}$$

В результаті зроблених перетворень, отримано два однакових рівняння, одне з них викреслимо. Далі виразимо змінні x і y через змінну z, як через параметр:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} - 4z, \\ y = -1 - 5z. \end{cases}$$

Таким чином, якщо $a = 3$, $b = -2$ тоді система має безліч розв'язків: $x = -\dfrac{1}{4} - 4t$, $y = -1 - 5t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

в) Визначник системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2 (a+3),$$

звідки $\Delta \neq 0$ (тобто система має єдиний розв'язок) тоді і тільки тоді, коли $a \neq 0$ і $a \neq -3$. Знайдемо цей розв'язок, для цього обчислимо ще три визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1+a & 1 \\ a^2 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a\left(2 - a^2\right),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1+a \end{vmatrix} = a^2 + a - 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a\left(a^3 + 2a^2 - a - 1\right).$$

Таким чином,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2 - a^2}{a(a+3)}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2(a+3)},$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 1}{a(a+3)}.$$

Коли $a = 0$, тоді $\Delta = 0$, але $\Delta_2 \neq 0$, звідки випливає, що система несумісна.

Коли $a = -3$, тоді $\Delta = 0$, але $\Delta_1 \neq 0$, звідки випливає, що система несумісна.

Задачі для самостійної роботи

1.1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1+i & 1+3i \\ 1-2i & 1+2i \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & -1 \\ \alpha & \sqrt{\alpha} \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$.

1.2. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} -\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -1 & \alpha \end{vmatrix}$.

1.3. Обчислити визначники, розклавши їх по рядках з найбільшою кількістю нулів:

а) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ -a & 0 & b \\ c & d & e \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$.

1.4. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} m+\alpha & m-\alpha & \alpha \\ n+\alpha & 2n-\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} \alpha x & \alpha^2+x^2 & 1 \\ \alpha y & \alpha^2+y^2 & 1 \\ \alpha z & \alpha^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$;

і) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

ї) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

1.5. Довести тотожності, не розкриваючи визначників:

а) $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1+x_2}{2} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{x_1-x_2}{2} & \dfrac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$

д) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

1.6. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0;$ в) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 6 & 3-\lambda & -8 \\ 3 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$ г) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

1.7. Довести, що якщо всі елементи визначника третього порядку дорівнюють ± 1, то значення визначника буде парним числом.

1.8. Нехай рівно три елемента визначника третього порядку дорівнюють 1, і всі інші — дорівнюють 0. Яких значень може набувати такий визначник?

1.9. Знайти найбільше значення, якого може набувати визначник третього порядку за умови, що всі його елементи дорівнюють ± 1.

1.10. Знайти найбільше значення визначника третього порядку за умови, що всі його елементи дорівнюють $+1$ або 0.

1.11. Як зміниться визначник третього порядку, якщо переставити стовпчики матриці, розмістивши їх у зворотному порядку.

1.12. Як зміниться визначник третього порядку, елементами якого є комплексні числа, якщо всі елементи визначника замінити комплексно спряженими числами?

1.13. Пояснити, як зміниться визначник третього порядку, якщо всі елементи визначника відобразити симетрично відносно

а) головної діагоналі; б) другої великої діагоналі.

1.14. а) Довести, що

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

є многочленом другого порядку відносно λ і обчислити його коефіцієнти;

б) Довести, що

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

є многочленом третього порядку відносно λ і обчислити його коефіцієнти.

1.15. Обчислити визначники четвертого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & 8 & 5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ -3 & 8 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

г) $\begin{vmatrix} -3 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

1.16. Числа $1887, 5355, 3672, 1479$ діляться на 17. Не обчислюючи визначника, пояснити, чому число

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

також ділиться на 17.

1.17. Обчислити визначник четвертого порядку, знаючи, що сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами.

1.18. Обчислити визначник четвертого порядку, елементи якого задані умовами:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в) $a_{ij} = |i - j|$.

1.19. Методом Крамера розв'язати системи лінійних рівнянь другого порядку:

а) $\begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 5x - 4y = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 7y = -30, \\ -3x + 2y = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ -20x + 8y = -28; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -x + 12y = -3, \\ 2x - 24y = -9; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -2x - 6y = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$

1.20. Методом Крамера розв'язати системи лінійних рівнянь третього порядку:

а) $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 1, \\ -4x - 3y + 2z = 10, \\ 7x + 8y - z = -13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y + z = -4, \\ -4x + 5y + z = 12, \\ 2x - 7y - 2z = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x + y + 2z = 7, \\ x - 2y + 4z = -4, \\ 8x + 5y - 2z = 23; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x - 4y + 9z = -11, \\ x - 5y + 7z = -17, \\ 8x - y + 7z = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ x + 5y - 3z = 3, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 9x + y + 4z = -5, \\ -3x + 8y + 2z = -7, \\ -2x - 3y - 2z = 5; \end{cases}$

є) $\begin{cases} -4x + 8y - 9z = 3, \\ -x + 5y - 12z = -2, \\ 6x - 10y + 7z = -7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = -3, \\ x + 2y + 7z = -4, \\ -4x - 8y + 8z = 1. \end{cases}$

1.21. Дослідити, при яких значеннях параметрів система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, несумісна, має безліч розв'язків? У випадках, коли система сумісна, вказати всі розв'язки системи.

а) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ ax + 5y = -2a - 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax + 7y = 1, \\ x - y = 2b - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax - 8y = 3, \\ -2x + ay = 2b - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax - by = 1, \\ ax + 5y = -2a - 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x + ay + 6z = -3, \\ 4x - 2y + 4z = 1, \\ 3x + 7y + 2z = b; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -5x + 3y - 8z = 4, \\ 3x - y + 6z = b, \\ ax + 3y + 2z = 2; \end{cases}$

є) $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} (a+1)\,x + y + z = a^2 + 3a, \\ x + (a+1)\,y + z = a^3 + 3a^2, \\ x + y + (a+1)\,z = a^4 + 3a^3; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$

1.22. Навести приклад систем лінійних рівнянь третього порядку, для яких виконуються умови $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ і система

а) має безліч розв'язків;

б) несумісна.

2 Поняття вектора. Лінійні операції над векторами

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Вектор, довжина(модуль) вектора, орт вектора, колінеарні вектори, компланарні вектори, рівні вектори.

2. Множення вектора на число, додавання векторів (правило трикутника, правило паралелограма), властивості лінійних операцій над векторами.

3. Лінійна комбінація векторів, лінійна залежність або незалежність векторів, координати лінійної комбінації векторів, базис, координати вектора в базисі, ортонормований базис (ОНБ), критерій колінеарності векторів у координатній формі, напрямні косинуси вектора.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Нехай

$$\vec{a} = \{1, 2, 0\}, \vec{b} = \{-2, -1, 2\}, \vec{c} = \{1, 1, -1\}, \vec{d} = \{3, 2, 1\}.$$

Знайти координати вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} + \vec{d}$.

Розв'язання. Оскільки кожна координата лінійної комбінації векторів є такою ж самою лінійною комбінацією відповідних координат цих векторів, то

$$3\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} + \vec{d} = \{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 3,$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 2, \quad 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 1\} = \{-1, 3, 8\}.$$

Приклад 2.2. В просторі задано вектор $\vec{a}$ довжиною 4. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що кут між $\vec{a}$ і першим координатним вектором дорівнює $2\pi/3$, кут між $\vec{a}$ і другим координатним вектором дорівнює $\pi/4$ (базис є ортонормованим).

Розв'язання. Нехай $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ це кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з координатними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ відповідно. Відомо, що $\cos\varphi_1 = -1/2$, $\cos\varphi_2 = 1/\sqrt{2}$. Тоді

$$\cos\varphi_3 = \pm\sqrt{1 - \cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2} = \pm 1/2,$$

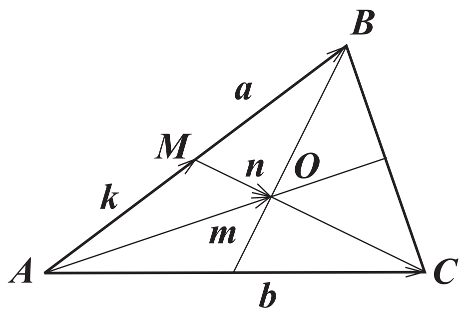
$$\vec{a} = \{|\vec{a}|\cos\varphi_1, |\vec{a}|\cos\varphi_2, |\vec{a}|\cos\varphi_3\} = \left\{\mp 2, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\right\}.$$

Приклад 2.3. У трикутнику ABC точка M — середина відрізку AB, точка O — це точка перетину медіан. Приймаючи за базисні вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\vec{k} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{m} = \overrightarrow{AO}$ і $\vec{n} = \overrightarrow{MO}$.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}, \vec{m}, \vec{n}$.

Тоді

$$\vec{k} = \frac{1}{2}\,\vec{a}, \quad \vec{n} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{k}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{3}\,\vec{b} - \frac{1}{6}\,\vec{a},$$



$$\vec{m} = \vec{k} + \vec{n} = \frac{1}{2}\,\vec{a} + \frac{1}{3}\,\vec{b} - \frac{1}{6}\,\vec{a} = \frac{1}{3}\,\vec{a} + \frac{1}{3}\,\vec{b}.$$

Таким чином, $\vec{k} = \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}, \vec{m} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \vec{n} = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right\}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}$.

Приклад 2.4. Нехай

$$\vec{a} = \{1, 2, 3\}, \vec{b} = \{2, 1, 1\}, \vec{c} = \{1, -1, -1\}, \vec{d} = \{9, 3, -6\}.$$

а) довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є базисом у просторі;

б) знайти координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язання. а) Три вектори є базисом у просторі тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. Це означає, що рівність $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ повинна виконуватись тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Перевіримо це, записавши дану рівність покоординатно (якщо нуль-вектор є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тоді кожна координата нуль-вектора є такою ж самою лінійною комбінацією відповідних координат векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$):

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, щоб дана система лінійних рівнянь мала єдиний нульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб визначник системи не дорівнював нулю (див. приклад 1.6). Дійсно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

б) Нехай $\vec{d} = \{x, y, z\}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Це означає, що кожна координата вектора $\vec{d}$ є такою ж самою лінійною комбінацією відповідних координат векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Запишемо це:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + y - z = -6 \end{cases}$$

Ця система має єдиний (єдиність випливає з того, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є базисом в $\mathbb{R}^3$) розв'язок $x = -9, y = 13, z = -8$.

Задачі для самостійної роботи

2.1. Нехай $\vec{a} = \{-1, 2, 3\}, \vec{b} = \{1, 0 - 1\}, \vec{c} = \{-1, 1, 1\}, \vec{d} = \{4, 2, 0\}$. Знайти координати вектора

а) $2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} + \vec{d}$;

в) $3(\vec{a} + \vec{b}) - 4\vec{c} - \vec{d}$;

б) $3\vec{d} - 5\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$;

г) $3(\vec{c} - \vec{a}) - 5(\vec{b} - \vec{d})$.

2.2. Нехай кут між вектором $\vec{a}$ і першим координатним вектором дорівнює $3\pi/4$, кут між вектором $\vec{a}$ і третім координатним вектором дорівнює $\pi/3$. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо відомо, що його довжина дорівнює 2.

2.3. Визначити координати вектора, який утворює з координатними осями однакові кути, якщо його довжина дорівнює $\sqrt{3}$.

2.4. Перевірити, що чотири точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ є вершинами трапеції.

2.5. Визначити, які з наступних трійок векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ будуть лінійно залежними. У тому випадку, коли це можливо, представити вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a}=\{5,2,1\}, \quad \vec{b}=\{-1,4,2\}, \quad \vec{c}=\{-1,-1,6\};$

б) $\vec{a}=\{6,4,2\}, \quad \vec{b}=\{-9,6,3\}, \quad \vec{c}=\{-3,6,3\};$

в) $\vec{a}=\{6,-18,12\}, \quad \vec{b}=\{-8,24,-16\}, \quad \vec{c}=\{8,7,3\}.$

2.6. Нехай задані вектори $\vec{a}=\{1,5,3\}$, $\vec{b}=\{6,-4,-2\}$, $\vec{c}=\{0,-5,7\}$, $\vec{d}=\{-20,27,-35\}$. Підібрати числа α,β і γ так, щоб вектори $\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}$ і $\vec{d}$ утворювали замкнену ламану лінію, якщо початок кожного наступного вектора з'єднати з кінцем попереднього.

2.7. Перевірити, що вектори $\vec{a}=\{4,1,-1\},\vec{b}=\{1,2,-5\},\vec{c}=\{-1,1,1\}$ утворюють базис у просторі. Знайти в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ координати векторів

а) $\vec{l}=\{4,4,-5\};$ б) $\vec{m}=\{2,4,-10\};$ в) $\vec{n}=\{0,3,-4\}.$

2.8. З однієї точки простору відкладено три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Довести, що кінець вектора $\vec{c}$ тоді і тільки тоді лежить на відрізку, з'єднуючому кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, коли виконується рівність $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, де $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\alpha+\beta=1$. У якому співвідношенні кінець вектора $\vec{c}$ ділить цей відрізок?

2.9. Нехай $\vec{r_1},\vec{r_2}$ — радіус-вектори точок A і B. Знайти

а) радіус-вектор $\vec{r_3}$ точки M, яка лежить на відрізку AB, якщо $|AM| : |BM| = m : n$;

б) радіус-вектор $\vec{r_4}$ точки N, яка лежить на прямій AB, ззовні відрізка AB, якщо $|AN| : |BN| = m : n$.

2.10. Задано дві точки $A(3, -2)$ і $B(1, 4)$. Точка M лежить на прямій AB, причому $|AM| = 3|AB|$. Знайти координати точки M, якщо

а) точки M і B лежать по один бік від точки A;

б) точки M і B лежать по різні боки від точки A.

2.11. Три точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ не лежать на одній прямій і є послідовними вершинами паралелограма. Знайти координати четвертої вершини D цього паралелограма.

2.12. Знаючи радіус-вектори $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \vec{r_4}$ вершин A, B, D, A_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, виразити через них радіус-вектори інших вершин.

2.13. Довести, що радіус-вектор центра правильного багатокутника є середнім арифметичним радіус-векторів його вершин.

2.14. У площині трикутника ABC знайти точку O таку, що

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Чи існують такі точки зовні трикутника?

2.15. У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина відрізка BC і точка O — точка перетину діагоналей. Приймаючи за базисні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{KD}$.

2.16. Точки E і F є серединами сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Довести, що

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

2.17. Задано правильний шестикутник $ABCDEF$. Приймаючи за базисні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AF}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

2.18. В тетраедрі $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q — середини ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC відповідно, S — точка перетину медіан трикутника ABC. Приймаючи за базисні вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, знайти в цьому базисі координати векторів

а) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{KQ}$;

в) $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{KS}$.

2.19. Задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Приймаючи за початок координат вершину A, а за базисні вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$, знайти в цьому базисі координати

а) вершин C, B_1, C_1;

б) точок K і L — середин ребер A_1B_1 і CC_1 відповідно;

в) точок M і N перетину діагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ і ABB_1A_1 відповідно;

г) точки O — перетину діагоналей паралелепіпеда.

3 Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Проекція вектора на вектор. Скалярний добуток векторів, властивості скалярного добутку, скалярний добуток векторів у координатній формі, скалярний добуток векторів у координатній формі в ОНБ, застосування скалярного добутку векторів для обчислення довжини вектора та кута між векторами, критерій ортогональності векторів.

2. Права, ліва трійка векторів. Векторний добуток векторів, властивості векторного добутку, векторний добуток векторів у координатній формі в ОНБ, обчислення площі паралелограма за допомогою векторного добутку.

3. Мішаний добуток векторів, властивості мішаного добутку, мішаний добуток векторів у координатній формі в ОНБ, застосування мішаного добутку векторів для дослідження, чи є трійка векторів компланарною, правою або лівою, обчислення об'єму паралелепіпеда або трикутної піраміди за допомогою мішаного добутку.

Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1. Нехай

$$\vec{a}=\{1,-1,2\},\vec{b}=\{-3,1,0\},\vec{c}=\{-1,1,2\}.$$

Знайти

а) $\vec{b}(\,\vec{a},\vec{c}\,)-\vec{c}(\,\vec{a},\vec{b}\,)$;

б) $|\,\vec{a}\,|^2+|\,\vec{c}|^2+(\,\vec{a},\vec{b}\,)(\,\vec{b},\vec{c}\,)$;

в) $\text{Пр}_{\,\vec{c}}(2\vec{a}+\vec{b}\,)$;

г) $\text{Пр}_{\vec{a}-2\vec{c}}(3\vec{a}+2\vec{b}\,)$;

д) $\angle(\,\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\,)$;

е) $\angle(\,2\vec{a}+\vec{c},2\vec{b}-\vec{c}\,)$.

Розв'язання. а) Обчислимо скалярні добутки

$$(\,\vec{a},\vec{c}\,)=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 2=2,$$

$$(\,\vec{a},\vec{b}\,)=1\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+2\cdot 0=-4,$$

звідки

$$\vec{b}(\,\vec{a},\vec{c}\,)-\vec{c}(\,\vec{a},\vec{b}\,)=2\vec{b}+4\vec{c}=\{-10,6,8\}\,.$$

б) За допомогою скалярного добутку обчислимо довжини векторів

$$|\,\vec{a}\,|^2=(\,\vec{a},\vec{a}\,)=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2=6,$$

$$|\,\vec{c}\,|^2=(\,\vec{c},\vec{c}\,)=(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 2=6,$$

а також, знайдемо

$$(\,\vec{b},\vec{c}\,)=(-3)\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 2=4,$$

звідки
$$|\,\vec a\,|^2+|\,\vec c|^2+(\,\vec a,\vec b\,)(\,\vec b,\vec c\,)=6+6+(-4)\cdot 4=-4.$$

в) Обчислимо
$$2\vec a+\vec b=\{-1,-1,4\}\,,$$
$$(\,2\vec a+\vec b,\vec c\,)=-1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+4\cdot 2=8,$$
звідки
$$\text{Пр}\,_{\vec c}(\,2\vec a+\vec b\,)=\frac{(\,2\vec a+\vec b,\vec c\,)}{|\,\vec c\,|}=\frac{8}{\sqrt6}.$$

г) Обчислимо
$$3\vec a+2\vec b=\{-3,-1,6\}\,,\quad \vec a-2\vec c=\{3,-3,-2\}\,,$$
$$|\,\vec a-2\vec c\,|=\sqrt{(\,\vec a-2\vec c,\vec a-2\vec c\,)}=$$
$$=\sqrt{3\cdot 3+(-3)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2)}=\sqrt{22},$$
$$(\,3\vec a+2\vec b,\vec a-2\vec c\,)=-3\cdot 3+(-1)\cdot(-3)+6\cdot(-2)=-18$$
звідки
$$\text{Пр}\,_{\vec a-2\vec c}(\,3\vec a+2\vec b\,)=\frac{(\,3\vec a+2\vec b,\vec a-2\vec c\,)}{|\,\vec a-2\vec c\,|}=\frac{-18}{\sqrt{22}}.$$

д) Обчислимо
$$\vec a-\vec c=\{2,-2,0\}\,,\quad \vec b-\vec c=\{-2,0,-2\}\,,$$
$$|\,\vec a-\vec c\,|=\sqrt{(\,\vec a-\vec c,\vec a-\vec c\,)}=\sqrt{2\cdot 2+(-2)\cdot(-2)+0\cdot 0}=2\sqrt2,$$
$$|\,\vec b-\vec c\,|=\sqrt{(\,\vec b-\vec c,\vec b-\vec c\,)}=$$
$$=\sqrt{(-2)\cdot(-2)+0\cdot 0+(-2)\cdot(-2)}=2\sqrt2,$$
$$(\,\vec a-\vec c,\vec b-\vec c\,)=2\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+0\cdot(-2)=-4,$$
звідки
$$\angle(\,\vec a-\vec c,\vec b-\vec c\,)=\arccos\frac{(\,\vec a-\vec c,\vec b-\vec c\,)}{|\,\vec a-\vec c\,|\,|\,\vec b-\vec c\,|}=\arccos\frac{-4}{-8}=\frac{\pi}{3}.$$

е) Обчислимо

$$2\vec{a}+\vec{c}=\{1,-1,6\}, \quad 2\vec{b}-\vec{c}=\{-5,1,-2\},$$

$$|\,2\vec{a}+\vec{c}\,| = \sqrt{(\,2\vec{a}+\vec{c}, 2\vec{a}+\vec{c}\,)} = \sqrt{1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+6\cdot 6} = \\ = \sqrt{38},$$

$$|\,2\vec{b}-\vec{c}\,| = \sqrt{(\,2\vec{b}-\vec{c}, 2\vec{b}-\vec{c}\,)} = \\ = \sqrt{(-5)\cdot(-5)+1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)} = \sqrt{30},$$

$$(\,2\vec{a}+\vec{c}, 2\vec{b}-\vec{c}\,) = 1\cdot(-5)+(-1)\cdot 1+6\cdot(-2) = -18,$$

звідки

$$\angle(\,2\vec{a}+\vec{c}, 2\vec{b}-\vec{c}\,) = \arccos\frac{(\,2\vec{a}+\vec{c}, 2\vec{b}-\vec{c}\,)}{|\,2\vec{a}+\vec{c}\,|\,|\,2\vec{b}-\vec{c}\,|} = \\ = \arccos\frac{-18}{\sqrt{38}\,\sqrt{30}} = \pi - \arccos\frac{9}{285}.$$

Приклад 3.2. Задані два неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє такі умови:

а) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ — компланарні;

б) $(\,a, x\,) = 1, (\,b, x\,) = 0$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ — компланарні, то можна вважати, що вони лежать на одній площині. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ можна розглядати як базис на цій площині, оскільки вони неколінеарні. Нехай $\vec{x} = \{\alpha, \beta\}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}$, тобто $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. З другої умови випливає, що

$$(\,\vec{a}, \vec{x}\,) = (\,\vec{a}, \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\,) = \alpha(\,\vec{a}, \vec{a}\,) + \beta(\,\vec{a}, \vec{b}\,) = 1,$$

$$(\,\vec{b}, \vec{x}\,) = (\,\vec{b}, \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\,) = \alpha(\,\vec{b}, \vec{a}\,) + \beta(\,\vec{b}, \vec{b}\,) = 0.$$

З цих двох рівнянь знайдемо α і β. Зауважимо, що ця система має єдиний розв'язок, оскільки $(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2>0$ (нерівність Коші-Буняковського)[1]. Таким чином,

$$\alpha=\frac{(\vec{b},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2},\quad \beta=-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2}$$

і

$$\vec{x}=\frac{\vec{a}(\vec{b},\vec{b})-\vec{b}(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2}.$$

Приклад 3.3. Довжини базисних векторів загальної декартової системи координат у просторі дорівнюють відповідно $\sqrt{3}, 2$ і 1, кути між базисними векторами дорівнюють $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=\pi/6$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\pi/4$. Обчислити довжини векторів $\vec{a},\vec{b}$ і кут між ними, які в заданому базисі мають координати $\{2,1,-1\}$ та $\{-3,-1,1\}$ відповідно.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$, тому

$$\vec{a}=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\qquad \vec{b}=-3\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

Перш ніж знаходити довжини сторін і кути трикутника, обчислимо всі можливі скалярні добутки базисних векторів:

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=|\vec{e}_1|^2=3,\quad (\vec{e}_2,\vec{e}_2)=|\vec{e}_2|^2=4,\quad (\vec{e}_3,\vec{e}_3)=|\vec{e}_3|^2=1,$$

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=3,$$
$$(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=|\vec{e}_2||\vec{e}_3|\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\sqrt{2},$$
$$(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=|\vec{e}_1||\vec{e}_3|\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=\frac{3}{2}.$$

Квадрат довжини вектора $\vec{a}$ дорівнює:

$$|\vec{a}|^2=(\vec{a},\vec{a})=(-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3)=4(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+$$

$$+(\vec{e}_2,\vec{e}_2)+(\vec{e}_3,\vec{e}_3)-4(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+4(\vec{e}_1,\vec{e}_3)-2(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=11-2\sqrt{2},$$

[1]У загальному випадку нерівність Коші-Буняковського має такий вигляд $(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2\geq 0$, причому знак рівності має місце тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

звідки $|\vec{a}| = \sqrt{11 - 2\sqrt{2}}$.

Квадрат довжини вектора $\vec{b}$ дорівнює:

$$|\vec{b}|^2 = (\vec{b}, \vec{b}) = (-3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 9(\vec{e}_1, \vec{e}_1) +$$

$$+ (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + (\vec{e}_3, \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - 6(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + 2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 5 + 2\sqrt{2},$$

звідки $|\vec{b}| = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

Знайдемо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Для цього необхідно знайти скалярний добуток цих векторів:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 6(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) -$$

$$-(\vec{e}_3, \vec{e}_3) - 5(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{15}{2}.$$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \arccos \frac{15}{2\sqrt{11 - 2\sqrt{2}}\,\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} =$$

$$= \arccos \frac{15}{2\sqrt{47 + 12\sqrt{2}}}.$$

Приклад 3.4. Нехай $\vec{a} = \{-3, 3, 8\}$, $\vec{b} = \{3, -2, -6\}$. Обчислити векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Чому дорівнює площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

Розв'язання. Позначимо через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортонормований базис, в якому задані координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 3 & 8 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{e}_3 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Таким чином, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \{-2, 6, -3\}$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює модулю векторного добутку цих векторів:

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \sqrt{4+36+9} = 7.$$

Приклад 3.5. Знайти вектор $\vec{x}$ із системи:

$$\begin{cases} \vec{x} \perp \vec{a} = 2\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \\ \vec{x} \perp \vec{b} = 6\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \\ |\,\vec{x}\,| = 7, \\ \angle(\,\vec{x},\vec{e}_3\,)\text{— тупий.} \end{cases}$$

Розв'язання. З умов $\vec{x} \perp \vec{a}$ і $\vec{x} \perp \vec{b}$ випливає, що вектор $\vec{x}$ колінеарний векторному добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Це означає, що $\vec{x} = \alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, де α — невідомий параметр, який знайдемо з інших умов. Обчислимо $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — ортонормований базис, в якому задані координати векторів):

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -9 & 4 \\ 6 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -21\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 + 42\vec{e}_3.$$

Тобто $\vec{x} = -21\alpha\vec{e}_1 + 14\alpha\vec{e}_2 + 42\alpha\vec{e}_3$. Абсолютне значення параметра α можна знайти, виходячи з відомої довжини $\vec{x}$:

$$|\,\vec{x}\,| = \sqrt{21^2\alpha^2 + 14^2\alpha^2 + 42^2\alpha^2} = 49\,|\alpha| = 7,$$

звідки $|\,\alpha\,| = 1/7$ або $\alpha = \pm 1/7$.

Відомо, що $\angle(\,\vec{x},\vec{e}_3\,)$ — тупий. Це означає, що третя координата вектора $\vec{x}$ від'ємна, тобто $\alpha = -1/7$.

Таким чином, $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\alpha\vec{e}_2 - 6\alpha\vec{e}_3$.

Приклад 3.6. Нехай $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{c} = -5\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$. Знайти мішаний добуток $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ при $\lambda = -1$. При яких значеннях параметра λ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні? є правою трійкою? є лівою трійкою?

Розв'язання. Нехай $\lambda = -1$. Мішаний добуток $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ дорівнює визначнику, який складається з координат векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, записаних по рядках (або стовпчиках) у відповідному порядку:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 3.$$

Обчислимо мішаний добуток $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ при всіх значеннях параметра λ :

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = 4 + \lambda.$$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює 0. Ця умова виконується, коли $\lambda = -4$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є правою трійкою тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток додатний. Ця умова виконується, коли $\lambda > -4$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є лівою трійкою тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток від'ємний. Ця умова виконується, коли $\lambda < -4$.

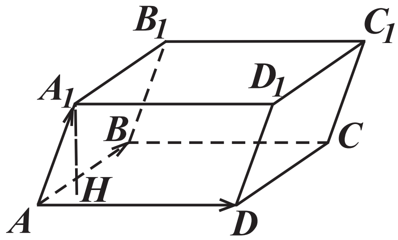
Приклад 3.7. Нехай $A\,(6, 2, 4)\,,\ B\,(4, 1, 2)\,,\ C\,(7, 3, 7)\,,\ A_1\,(9, 3, 2)\,.$ Знайти об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чому дорівнює висота паралелепіпеда, опущена з вершини A_1 на грань $ABCD$?

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, на яких побудовано заданий паралелепіпед:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2, -1, -2\}\,, \quad \overrightarrow{AC} = \{1, 1, 3\}\,, \quad \overrightarrow{AA_1} = \{3, 1, -2\}\,.$$

Тоді V — об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, дорівнює модулю мішаного добутку векторів, на яких побудовано паралелепіпед:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\right)\right|,$$



де

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

тоді $V = 3$ куб.од.

Нехай A_1H — висота паралелепіпеда, опущена з вершини A_1 на грань $ABCD$, S — площа паралелограма $ABCD$. Відомо, що об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи (паралелограма $ABCD$) на довжину висоти $A_1H : V = S \cdot A_1H$. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких він побудований:

$$S = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \right|,$$

де

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

тоді

$$S = |-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3| = \sqrt{18}.$$

Тоді

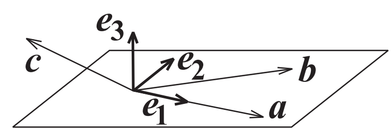
$$A_1H = \frac{V}{S} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 3.8. Довести тотожність:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Неважко перевірити, що рівність виконується, якщо хоча б один з векторів дорівнює нуль-вектору, тому надалі ми будемо вважати, що $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ і $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Зафіксуємо вектор одиничної довжини, колінеарний вектору $\vec{a}$. Позначимо його $\vec{e}_1$. Виберемо вектор одиничної довжини $\vec{e}_2$, ортогональний $\vec{e}_1$, таким чином, щоб, вектори $\vec{e}_2$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були компланарні. Вектор $\vec{e}_3$ виберемо так, щоб трійка $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворювала правий ортонормований базис.



У цьому базисі вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мають координати $\{a_1, 0, 0\}$, $\{b_1, b_2, 0\}$, $\{c_1, c_2, c_3\}$, відповідно. Тоді

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = (a_1 b_2 c_3)^2 .$$

Покажемо, що права частина рівності, яку потрібно довести, дорівнює такому ж самому виразу. Запишемо всі скалярні добутки, які входять до визначника, через координати векторів:

$$\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 b_1 & a_1 c_1 \\ a_1 b_1 & b_1^2 + b_2^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 \\ a_1 c_1 & b_1 c_1 + b_2 c_2 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_1^2 + b_2^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 \\ c_1 & b_1 c_1 + b_2 c_2 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix} .$$

В останній рівності двічі винесено за знак визначника коефіцієнт a_1 (з першого рядка і першого стовпчика). Далі скористаємось властивостями визначників: віднімемо від другого рядка перший, помножений на число

b_1; віднімемо від третього рядка перший, помножений на число c_1. У результаті отримаємо:

$$a_1^2 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_1^2+b_2^2 & b_1c_1+b_2c_2 \\ c_1 & b_1c_1+b_2c_2 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{vmatrix} = a_1^2 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2^2 & b_2c_2 \\ 0 & b_2c_2 & c_2^2+c_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} b_2^2 & b_2c_2 \\ b_2c_2 & c_2^2+c_3^2 \end{vmatrix} = a_1^2\left(b_2^2\left(c_2^2+c_3^2\right) - b_2^2c_2^2\right) = a_1^2b_2^2c_3^2.$$

Тотожність доведено.

Задачі для самостійної роботи

Скалярний добуток

3.1. Задано вектори

$$\vec{a} = \{2, 1, -1\},\ \vec{b} = \{-3, 3, -1\},\ \vec{c} = \{1, 1, 1\},\ \vec{d} = \{-1, 2, 2\}.$$

Обчислити

а) $(\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{d})$;

б) $|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - 10(\vec{a}, \vec{c})$;

в) $\vec{c}(\vec{d}, 2\vec{a} + \vec{b}) + \vec{d}(\vec{b} - \vec{c}, \vec{a})$;

г) $\vec{a}(2\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}, \vec{c}) - 3\vec{b}(\vec{a} - \vec{d}, \vec{c})$;

д) $(2\vec{b} + 3\vec{c}, 3\vec{b} - 5\vec{d}) + (5\vec{c} - 2\vec{d}, 3\vec{d} + 2\vec{c})$;

е) $(\vec{b} - \vec{d}, \vec{b} + \vec{c})(2\vec{a} + \vec{d}, \vec{b} - 2\vec{d})$;

є) $\angle(\vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{d})$;

ж) $\angle(\vec{a} + \vec{b} - \vec{d}, 2\vec{a} + \vec{c})$;

з) $\text{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + 3\vec{d})$;

и) $\text{Пр}_{2\vec{a}-3\vec{c}}(2\vec{b} - \vec{c})$;

і) $\text{Пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(-3\vec{c} + 2\vec{d})$;

ї) $\text{Пр}_{\vec{d}-\vec{b}-5\vec{c}}(4\vec{b} - 3\vec{a})$.

3.2. Задано вектори

$$\vec{a} = \{-1, -1, 1\},\ \vec{b} = \{5, 1, -3\},\ \vec{c} = \{-2, 3, 1\},\ \vec{d} = \{1, 1, 4\}.$$

Обчислити

а) $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{c},\vec{d})$;

б) $|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{b},\vec{d})$;

в) $\vec{a}(\vec{b},\vec{c}+\vec{d})-\vec{b}(\vec{a}+\vec{c},\vec{d})$;

г) $\vec{c}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c},\vec{d})+3\vec{d}(\vec{c}+\vec{b},\vec{d})$;

д) $(3\vec{a}-\vec{d},2\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{b}-\vec{d},\vec{c}+\vec{a})$;

е) $(\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{d})(\vec{b}+3\vec{c},\vec{a}+2\vec{d})$;

є) $\angle(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}-\vec{d})$;

ж) $\angle(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d},\vec{b}+2\vec{c})$;

з) $\text{Пр}_{\vec{a}}(2\vec{c}-\vec{d})$;

и) $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a}-3\vec{d})$;

і) $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(-2\vec{b}-\vec{c})$;

ї) $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}(4\vec{a}-5\vec{c})$.

3.3. Довести, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ взаємно перпендикулярні.

3.4. Задано три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ такі, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Обчислити $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$.

3.5. У трикутнику ABC проведено висоту AH. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AH}$ в базисі, утвореному векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

3.6. З однієї точки відкладено три вектори $\vec{a}=\{0,-3,4\}$, $\vec{b}=\{4,1,-8\}$ і $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ має одиничну довжину і ділить навпіл кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Обчислити координати вектора $\vec{c}$.

3.7. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $\vec{a}\neq\vec{0}$. Обчислити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональну проекцію вектора $\vec{b}$ на пряму, напрям якої визначається вектором $\vec{a}$.

3.8. Задано вектор $\vec{a}=\{1,-1,2\}$. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{b}$ на пряму, напрям якої визначається вектором $\vec{a}$, і ортогональну складову вектора $\vec{b}$ відносно цієї прямої, якщо вектор $\vec{b}$ має координати:

а) $\{2,-2,4\}$; б) $\{1,1,2\}$; в) $\{4,0,-2\}$.

3.9. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Подати вектор $\vec{b}$ у вигляді суми двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ таким чином, щоб вектор $\vec{x}$ був колінеарен вектору $\vec{a}$, а вектор $\vec{y}$ був ортогональним вектору $\vec{a}$.

3.10. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{n}$. Знайти вектор $\vec{b}$, який є ортогональною проекцією вектора $\vec{a}$ на площину, перпендикулярну вектору $\vec{n}$.

3.11. Задано три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ ($\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні). Знайти вектор $\vec{x}$, який є ортогональною проекцією вектора $\vec{c}$ на площину, паралельну векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3.12. Знайти суму ортогональних проекцій вектора $\vec{a}$ на сторони правильного трикутника.

3.13. Задано три некомпланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти вектор $\vec{x}$ з системи рівнянь

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 1, \quad (\vec{b}, \vec{x}) = 0, \quad (\vec{c}, \vec{x}) = 0.$$

3.14. Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ загальної декартової системи координат на площині дорівнюють відповідно 4 і 2, а кут між базисними векторами дорівнює $2\pi/3$. Відносно цієї системи координат задані вершини трикутника $A(-2, 2), B(-2, -1), C(-1, 0)$. Знайти довжини сторін і кути трикутника.

3.15. Довжини базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ загальної декартової системи координат в просторі дорівнюють відповідно 3, $\sqrt{2}$ і 4, кути між базисними векторами дорівнюють $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pi/4$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \pi/3$. Обчислити довжини сторін і кути паралелограма, побудованого на векторах, які мають у цьому базисі координати $\{1, -3, 0\}$ і $\{-1, 2, 1\}$.

3.16. Довжини ребер AA_1, AB і AC паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють, відповідно $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. Кути $\angle BAC$, $\angle A_1AC$ і $\angle A_1AB$ дорівнюють, відповідно, α, β і γ. Знайти довжину діагоналі AC_1.

Векторний добуток

3.17. Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ утворюють:

а) ортонормований правий базис;

б) ортонормований лівий базис;

в) ортогональний правий базис.

Виразити векторні добутки $\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2\right]$, $\left[\vec{e}_2, \vec{e}_3\right]$, $\left[\vec{e}_3, \vec{e}_1\right]$ через вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

3.18. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = \{16, 0, 5\}$, $\vec{b} = \{5, -1, 1\}$;

б) $\vec{a} = \{2, 6, 3\}$, $\vec{b} = \{-3, -8, -5\}$;

в) $\vec{a} = \{-5, -2, 4\}$, $\vec{b} = \{11, 7, -6\}$;

г) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 13\vec{e}_3$, $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$;

д) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$;

е) $\vec{a} = 10\vec{e}_1 - 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$, $\vec{b} = 9\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$.

3.19. Знайти площу трикутника ABC, якщо:

а) $A(6, 5, 4)$, $B(5, 1, 1)$, $C(6, 4, 3)$;

б) $A(4, -5, -7)$, $B(5, -4, -10)$, $C(7, -6, -6)$;

в) $A(-7, 2, 5)$, $B(-5, 3, 6)$, $C(-5, 6, 7)$;

г) $A(7, 3, -5)$, $B(6, 5, -4)$, $C(8, 6, -3)$.

3.20. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}, \vec{n}$, якщо:

а) $\vec{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ та $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, крім того $|\,\vec{a}\,| = |\,\vec{b}\,| = 5$, $\angle(\,\vec{a}, \vec{b}\,) = \pi/4$;

б) $\vec{m} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ та $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, крім того $|\,\vec{a}\,| = 4$, $|\,\vec{b}\,| = 5$, $\angle(\,\vec{a}, \vec{b}\,) = \pi/6$;

в) $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{n} = 11\vec{a} + 5\vec{b}$, крім того $|\,\vec{a}\,| = 3$, $|\,\vec{b}\,| = 6$, $\angle(\,\vec{a}, \vec{b}\,) = \pi/3$.

3.21. Задано три точки A, B, C і D, які не лежать на одній прямій. Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Знайти BH — довжину висоти трикутника ABC, опущену з вершини B.

3.22. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущену з вершини B, якщо:

а) $A\,(6, 3, 6)\,,\ B\,(4, 5, 5)\,,\ C\,(5, 4, 7)\,;$

б) $A\,(-2, 2, -9)\,,\ B\,(0, 7, -9)\,,\ C\,(-3, -3, -10)\,;$

в) $A\,(-1, 0, 4)\,,\ B\,(2, 2, 2)\,,\ C\,(1, 3, 3)\,;$

г) $A\,(-4, 1, 2)\,,\ B\,(-8, 7, 5)\,,\ C\,(-4, 4, 3)\,.$

3.23. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ і $\vec{n} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ були колінеарними, якщо

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0?$$

3.24. Відомо, що $\vec{a} = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$, $\vec{b} = \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$, $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Знайти довжини векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ і кути між ними.

3.25. Довести, що для трьох неколінеарних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ рівності $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

3.26. Знайти вектор $\vec{x}$ із системи:

а) $\begin{cases} (\,\vec{x}, \vec{e}_1\,) = 3, \\ \left[\vec{x}, \vec{e}_1\right] = -2\vec{e}_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \vec{x} \perp \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{x} \perp -2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \\ (\,\vec{x}, 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\,) = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \vec{x} \perp 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{x} \perp 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2, \\ (\,\vec{x}, -3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,) = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \vec{x} \perp 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{x} \perp 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \\ |\,\vec{x}\,| = 9, \\ \angle(\,\vec{x}, \vec{e}_2\,) \text{— тупий.} \end{cases}$ д) $\begin{cases} \vec{x} \perp -4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3, \\ \vec{x} \perp -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \\ |\,\vec{x}\,| = 10, \\ \angle(\,\vec{x}, \vec{e}_3\,) \text{— гострий.} \end{cases}$

3.27. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2, 1, 2\}$ і $\vec{b} = \{-2, 2, 1\}$ можуть бути ребрами куба. Знайти вектор, який є третім ребром куба.

3.28. Довести тотожності:

а) $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\,\vec{a}, \vec{c}\,) - \vec{c}(\,\vec{a}, \vec{b}\,)$; б) $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] = \vec{b}(\,\vec{a}, \vec{c}\,) - \vec{a}(\,\vec{b}, \vec{c}\,)$.

3.29. Знайти необхідну і достатню умову того, що виконується рівність

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right].$$

3.30. Довести тотожності:

а) $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|^2 = \begin{vmatrix} (\,\vec{a}, \vec{a}\,) & (\,\vec{a}, \vec{b}\,) \\ (\,\vec{a}, \vec{b}\,) & (\,\vec{b}, \vec{b}\,) \end{vmatrix}$;

б) $(\,\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\,) = \begin{vmatrix} (\,\vec{a}, \vec{c}\,) & (\,\vec{a}, \vec{d}\,) \\ (\,\vec{b}, \vec{c}\,) & (\,\vec{b}, \vec{d}\,) \end{vmatrix}$.

3.31. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — медіани трикутника ABC. Довести, що площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює $3/4$ площі трикутника ABC.

Мішаний добуток

3.32. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, заданих координатами:

а) $\vec{a} = \{1, -1, 1\}\,,\ \vec{b} = \{7, 3, -5\}\,,\ \vec{c} = \{-2, 2, -2\}\,;$

б) $\vec{a} = \{3, 5, 1\}\,,\ \vec{b} = \{4, 0, -1\}\,,\ \vec{c} = \{2, 1, 1\}\,;$

в) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{c} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$

г) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{b} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{c} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$

3.33. Визначити, чи є компланарними вектори:

а) $\vec{a} = \{2, 3, 5\}\,,\ \vec{b} = \{7, 1, -1\}\,,\ \vec{c} = \{3, -5, -11\}\,;$

б) $\vec{a} = \{2, 0, 1\}\,,\ \vec{b} = \{5, 3, -3\}\,,\ \vec{c} = \{3, 3, -4\}\,;$

в) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{b} = 9\vec{e}_1 - 11\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3,\ \vec{c} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3;$

г) $\vec{a} = 8\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{b} = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{c} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$

3.34. Визначити, правою чи лівою є трійка векторів:

а) $\vec{a} = \{-4, 2, 3\}\,,\ \vec{b} = \{-1, 2, 2\}\,,\ \vec{c} = \{-7, 3, 3\}\,;$

б) $\vec{a} = \{-5, -2, -1\}\,,\ \vec{b} = \{1, 3, -2\}\,,\ \vec{c} = \{-2, -3, 2\}\,;$

в) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{b} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,\ \vec{c} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$

г) $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,\ \vec{b} = -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,\ \vec{c} = -4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$

3.35. Визначити, при яких значеннях параметра λ вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є компланарними, утворюють праву трійку, утворюють ліву трійку:

а) $\vec{a} = \{-1, -3, -5\}$, $\vec{b} = \{-3, -1, -3\}$, $\vec{c} = \{\lambda, -5, -7\}$;

б) $\vec{a} = \{1, \lambda, -3\}$, $\vec{b} = \{4, -3, -2\}$, $\vec{c} = \{-7, 5, 1\}$;

в) $\vec{a} = -4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3$, $\vec{c} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

г) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{c} = -4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

3.36. Три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ відкладені з однієї точки. Знайти

а) об'єм трикутної призми, основа якої побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а бічне ребро на векторі $\vec{c}$;

б) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

3.37. Знайти об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо:

а) $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 2)$, $C(-1, 2, -1)$, $A_1(3, -4, -2)$;

б) $A(-2, 5, 3)$, $B(8, 7, 3)$, $C(-9, 1, 4)$, $A_1(-5, -1, 5)$;

в) $A(5, 6, 6)$, $B(8, 5, 1)$, $C(6, 5, 4)$, $A_1(-3, 5, 8)$;

г) $A(-5, 8, 7)$, $B(-8, 9, 8)$, $C(-7, 7, 7)$, $A_1(-4, 6, 5)$.

3.38. Знайти об'єм тетраедра $ABCD$, якщо:

а) $A(-8, 3, -3)$, $B(-9, 1, -7)$, $C(-10, 4, 1)$, $D(-6, 4, -1)$;

б) $A(-6, 1, -3)$, $B(-9, 8, -6)$, $C(1, 10, -4)$, $D(-6, -7, 0)$;

в) $A(7, -2, 5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(8, 0, 2)$, $D(2, -4, 4)$;

г) $A(-5, 2, 6)$, $B(2, 4, 0)$, $C(-4, -3, 2)$, $D(-1, 9, 7)$.

3.39. Чи лежать точки A, B, C і D в одній площині, якщо:

а) $A(-2, 5, 3)$, $B(9, 7, 3)$, $C(-9, 1, 4)$, $D(-5, -1, 5)$;

б) $A(8,1,4)$, $B(6,3,8)$, $C(5,2,2)$, $D(3,4,6)$;

в) $A(-8,8,3)$, $B(-6,5,4)$, $C(-10,9,5)$, $D(-7,5,6)$;

г) $A(-8,0,1)$, $B(-11,1,3)$, $C(-14,2,5)$, $D(-5,7,9)$.

3.40. Задано чотири точки A, B, C і D, які не лежать в одній площині. Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Знайти DH — довжину висоти тетраедра $ABCD$, опущену з вершини D.

3.41. Знайти DH — довжину висоти тетраедра $ABCD$, опущену з вершини D, якщо

а) $A(5,-4,-5)$, $B(8,-6,-3)$, $C(7,-6,-4)$, $D(6,-4,-2)$;

б) $A(-4,2,6)$, $B(-3,0,8)$, $C(-2,1,7)$, $D(-9,1,9)$;

в) $A(5,-3,6)$, $B(7,-4,7)$, $C(4,-1,7)$, $D(3,-2,1)$;

г) $A(6,-3,-5)$, $B(5,-2,-2)$, $C(9,-2,-6)$, $D(7,1,-4)$.

3.42. Чи є компланарними вектори $\vec{a} = 2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{c} = 2\vec{p}+5\vec{r}$, якщо вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ некомпланарні?

3.43. Задано три некомпланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. При яких значеннях параметра λ вектори $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}, 4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}, 7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$ компланарні?

3.44. Довести:

а) якщо $\left[\vec{a},\vec{b}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right] + \left[\vec{c},\vec{a}\right] = \vec{0}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні;

б) якщо вектори $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ компланарні, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні;

в) якщо вектори $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ компланарні, то вони колінеарні.

3.45. З однієї точки проведено три некомпланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. Довести, що площина, яка проходить через кінці цих векторів перпендикулярна до вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$.

3.46. Довести тотожності:

а) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2 + \left|\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right]\right|^2 = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|^2 |\,\vec{c}|^2$;

б) $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right] = \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) - \vec{d}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)$;

в) $\vec{d}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a}\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right) + \vec{b}\left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}\right) + \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$;

г) $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{b}, \vec{c}\right], \left[\vec{c}, \vec{a}\right]\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2$.

3.47. Довести тотожності:

а) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \end{vmatrix}$;

б) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \\ (\vec{a}, \vec{z}) & (\vec{b}, \vec{z}) & (\vec{c}, \vec{z}) \end{vmatrix}$.

4 Рівняння прямої на площині, площини і прямої в просторі у векторній формі

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Векторно-параметричне рівняння прямої на площині. Рівняння прямої на площині, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Нормальне рівняння прямої на площині. Напрямний вектор прямої. Вектор нормалі до прямої.

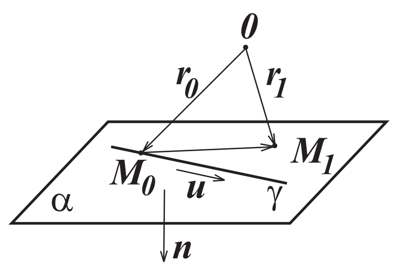
2. Векторно-параметричне рівняння площини. Рівняння площини у вигляді мішаного добутку. Рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Нормальне рівняння площини. Вектор нормалі до площини.

3. Векторно-параметричне рівняння прямої в просторі. Рівняння прямої у вигляді векторного добутку. Загальне рівняння прямої в просторі (як перетин двох площин). Напрямний вектор прямої.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Скласти нормальне рівняння площини, яка проходить через пряму $\gamma : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$ і точку $M_1(\vec{r}_1)$, яка не лежить на цій прямій.

Розв'язання. Вектор $\vec{u}$ є напрямним вектором прямої γ, $\vec{r}_0$ — радіус-вектор деякої точки (позначимо її M_0), яка належить прямій γ.



Для того, щоб скласти нормальне рівняння площини (позначимо її α), необхідно вказати вектор нормалі до площини і радіус-вектор точки, яка належить площині. Така точка відома з умови задачі (точка $M_1(\vec{r}_1)$ або довільна точка прямої γ).

Знайдемо вектор нормалі. Оскільки точки M_0 і M_1 належать площині α, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ паралельний α. Оскільки пряма γ належить α, то вектор $\vec{u}$ паралельний площині α. Це означає, що вектор $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u}\right] = \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{u}\right]$ перпендикулярний до α, тобто є вектором нормалі до α.

Можемо скласти нормальне рівняння площини α :

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_1, \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{u}\right]\right) = 0 \quad \text{або} \quad \left(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{u}\right) = 0.$$

Розкриємо дужки.

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u}\right)=\left(\vec{r},\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u}\right)-\left(\vec{r}_1,\vec{r}_1,\vec{u}\right)+\left(\vec{r}_1,\vec{r}_0,\vec{u}\right)=$$

$$=\left(\vec{r},\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u}\right)-\left(\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{u}\right).$$

В останній рівності ми скористалися тим, що мішаний добуток дорівнює 0, якщо хоча б два множники однакові. Крім того, ми в останньому доданку поміняли місцями два множника, і знак змінився на протилежний. Таким чином, нормальне рівняння площини α :

$$\alpha:\left(\vec{r},\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u}\right)=\left(\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{u}\right)$$

Приклад 4.2. Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі

$$\gamma_1:\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{u}_1 t \quad \text{і} \quad \gamma_2:\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{u}_2 t$$

а) перетинаються в одній точці; в) збігаються;

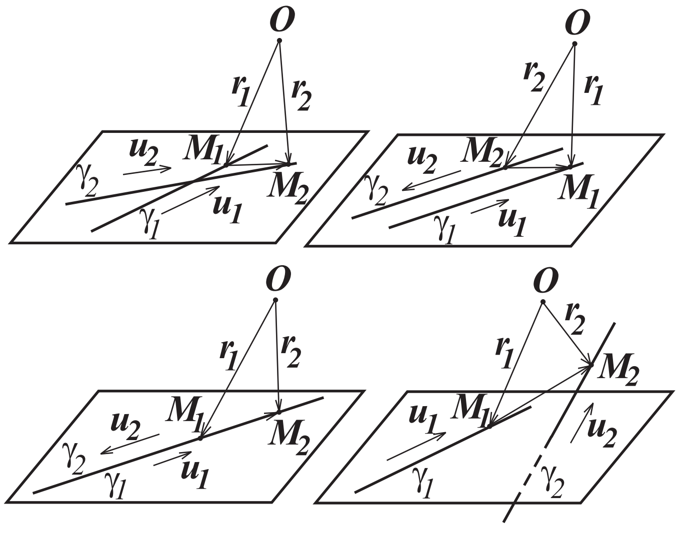
б) паралельні, але не збігаються; г) мимобіжні.

Розв'язання. Вектор $\vec{u}_1$ є напрямним вектором прямої γ_1, $\vec{r}_1$ — радіус-вектор деякої точки (позначимо її M_1), яка належить прямій γ_1. Аналогічно для прямої γ_2 : $\vec{u}_2$ — напрямний вектор γ_2, $\vec{r}_2$ — радіус-вектор деякої точки (позначимо її M_2), яка належить прямій γ_2.

Запишемо умову того, що прямі γ_1 і γ_2 лежать в одній площині (це може бути у випадку, коли прямі перетинаються, паралельні або збігаються). Це виконується тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ є компланарними, тобто коли мішаний добуток цих векторів дорівнює 0 :

$$\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=0.$$

а) прямі γ_1 і γ_2 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині, але не є паралельними. Прямі не є паралельними тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори не



є колінеарними (їх векторний добуток не дорівнює $\vec{0}$). Таким чином, відповідь:

$$\begin{cases} \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = 0, \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \neq \vec{0}; \end{cases}$$

б) прямі γ_1 і γ_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори колінеарні (їх векторний добуток дорівнює $\vec{0}$). Прямі не збігаються тоді і тільки тоді, коли пряма, яку проведено через точки M_1 і M_2, непаралельна прямим γ_1 і γ_2. Це виконується, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ і $\vec{u}_1$ (або $\vec{u}_2$) не є колінеарними (їх векторний добуток не дорівнює $\vec{0}$). Таким чином, відповідь:

$$\begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0}, \\ \left[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{u}_1\right] \neq \vec{0}; \end{cases}$$

в) прямі γ_1 і γ_2 збігаються тоді і тільки тоді, коли, по-перше, вони паралельні (напрямні вектори колінеарні) і мають хоча б одну спільну точку. Друга умова буде виконуватися, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ і

$\vec{u}_1$ (або $\vec{u}_2$) є колінеарними. Таким чином, відповідь:

$$\begin{cases} \left[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{u}_1\right] = \vec{0}, \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0}. \end{cases}$$

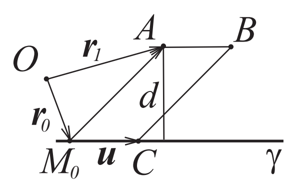
г) прямі γ_1 і γ_2 є мимобіжними тоді і тільки тоді, коли вони не лежать в одній площині. Прямі не лежать в одній площині, коли вектори $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ не є компланарними, тобто, коли мішаний добуток цих векторів не дорівнює 0 :

$$\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \neq 0.$$

<u>Приклад</u> 4.3. Знайти відстань від точки $A(\vec{r}_1)$ до прямої

$$\gamma : \left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}.$$

<u>Розв'язання</u>. Вектор $\vec{u}$ є напрямним вектором прямої γ, $\vec{a}$ — деякий фіксований вектор. Нехай $M_0(\vec{r}_0)$ — це деяка точка, яка належить γ. Вважаємо, що початок вектора $\vec{u}$ збігається з точкою M_0.



Відстань від точки A до прямої γ дорівнює площі паралелограма $ABCM_0$ (побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0A} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ і $\vec{u}$), поділеній на довжину відрізка M_0C (вектора $\vec{u}$):

$$d = \operatorname{dist}(A, \gamma) = \frac{\mathrm{S}_{ABCM_0}}{|\vec{u}|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0A}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} =$$

$$= \frac{\left|\left[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{u}\right]\right|}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{\left|\left[\vec{r}_1, \vec{u}\right] - \left[\vec{r}_0, \vec{u}\right]\right|}{|\,\vec{u}\,|}.$$

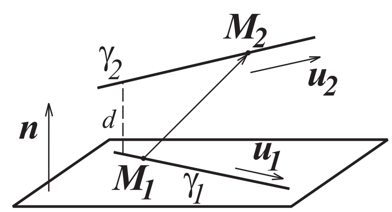
У другій рівності скористалися тим, що площа паралелограма дорівнює довжині векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Оскільки точка $M_0(\vec{r}_0)$ належить прямій γ, то $\left[\vec{r}_0, \vec{u}\right] = \vec{a}$. Таким чином, відповідь:

$$\operatorname{dist}(A, \gamma) = \frac{\left|\left[\vec{r}_1, \vec{u}\right] - \vec{a}\right|}{|\,\vec{u}\,|}.$$

<u>Приклад</u> 4.4. Знайти відстань між двома мимобіжними прямими

$$\gamma_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}_1 t \quad \text{і} \quad \gamma_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}_2 t.$$

<u>Розв'язання</u>. Вектор $\vec{u}_1$ є напрямним вектором прямої γ_1, $\vec{r}_1$ — радіус-вектор деякої точки (позначимо її M_1), яка належить прямій γ_1. Аналогічно для прямої γ_2 : $\vec{u}_2$ — напрямний вектор γ_2, $\vec{r}_2$ — радіус-вектор деякої точки (позначимо її M_2), яка належить прямій γ_2.



Вектор $\vec{n} = \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]$ перпендикулярний кожній з прямих γ_1 і γ_2. Тоді відстань між прямими дорівнює модулю проекції на вектор $\vec{n}$ довільного вектора, початок якого лежить на одній прямій, а кінець — на другій (візьмемо, наприклад, вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$):

$$d = \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \left|\text{Пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_1M_2}\right| = \frac{\left|(\,\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}\,)\right|}{|\,\vec{n}\,|} =$$

$$= \frac{\left|\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right|}.$$

Зауважимо, що $\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right| \neq 0$, оскільки прямі мимобіжні.

Задачі для самостійної роботи

Рівняння прямої на площині

4.1. Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}_2 t$

а) перетинаються в одній точці;

б) паралельні, але не збігаються;

в) збігаються.

4.2. Знайти кут між прямими, які задані рівняннями:

а) $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}_2 t$;

б) $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$ і $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$.

4.3. Дві прямі задані рівняннями $(\vec{r}, \vec{n}) = D$ і $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$, причому $(\vec{u}, \vec{n}) \neq 0$. Знайти радіус-вектор точки перетину прямих.

4.4. Задана точка M_0 з радіус-вектором $\vec{r}_0$ і пряма $\gamma : (\vec{r}, \vec{n}) = D$. Знайти радіус-вектори

а) проекції точки M_0 на пряму γ;

б) точки M_1, яка симетрична точці M_0 відносно γ.

4.5. Знайти відстань від точки M_0 з радіус-вектором $\vec{r}_0$ до прямої, яка задана рівнянням

а) $(\vec{r}, \vec{n}) = D$;

б) $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$.

Рівняння площини і прямої в просторі

4.6. Записати рівняння

а) площини $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v$ у вигляді $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D$;

б) прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$ у вигляді $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}$;

в) прямої $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}$ у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$;

г) прямої $(\,\vec{r}, \vec{n}_i\,) = D_i, i = 1, 2$ у вигляді $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}$;

д) прямої $(\,\vec{r}, \vec{n}_i\,) = D_i, i = 1, 2$ у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$.

4.7. Знайти необхідну і достатню умову того, що площини

$$(\,\vec{r}, \vec{n}_1\,) = D_1 \quad \text{і} \quad (\,\vec{r}, \vec{n}_2\,) = D_2$$

а) перетинаються по прямій;

б) паралельні, але не збігаються;

в) збігаються.

4.8. Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі

$$\left[\vec{r}, \vec{u}_1\right] = \vec{a}_1 \quad \text{і} \quad \left[\vec{r}, \vec{u}_2\right] = \vec{a}_2$$

а) перетинаються в одній точці;

б) паралельні, але не збігаються;

в) збігаються;

г) мимобіжні.

4.9. Задана пряма $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$ і площина $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D$. За якої необхідної і достатньої умови

а) вони перетинаються в одній точці;

б) паралельні (не мають спільних точок);

в) пряма лежить у площині.

4.10. Знайти радіус-вектор точки перетину прямої

а) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$, б) $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}$

з площиною $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, якщо $(\vec{u}, \vec{n}) \neq 0$.

4.11. Точка M_0 визначається радіус-вектором $\vec{r}_0$. Скласти рівняння:

а) прямої, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $(\vec{r}, \vec{n}) = D$;

б) площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно прямій $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$.

4.12. Скласти нормальне рівняння площини, яка проходить через пряму $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}$ і точку $M_1(\vec{r}_1)$, яка не лежить на цій прямій.

4.13. Задана точка $M_0(\vec{r}_0)$ і площина $\alpha : (\vec{r}, \vec{n}) = D$. Знайти радіус-вектор

а) проекції точки M_0 на площину α;

б) точки M_1, яка симетрична точці M_0 відносно α.

4.14. Задана точка $M_0(\vec{r}_0)$ і пряма $\gamma : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$. Знайти радіус-вектор

а) проекції точки M_0 на пряму γ;

б) точки M_1, яка симетрична точці M_0 відносно γ.

4.15. Скласти рівняння

а) проекції прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$ на площину $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, якщо $(\vec{u}, \vec{n}) \neq 0$;

б) прямої, яка перетинає пряму $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$ під прямим кутом і проходить через точку $M_0(\vec{r}_0)$, що не лежить на цій прямій (перпендикуляра, який опущений з точки $M_0(\vec{r}_0)$ на пряму $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$);

в) прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}_2 t$ і проходить через точку $M_0(\vec{r}_0)$, яка не лежить на жодній з цих прямих;

г) прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}_2 t$ під прямим кутом (спільного перпендикуляра до цих прямих).

4.16. Знайти відстань:

а) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до площини $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D$;

б) між двома паралельними площинами $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}u + \vec{b}v$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}u + \vec{b}v$;

в) між двома паралельними площинами $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D_1$ і $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D_2$;

г) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$;

д) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до прямої, яка є перетином площин $(\,\vec{r}, \vec{n}_1\,) = D_1$ і $(\,\vec{r}, \vec{n}_2\,) = D_2$.

е) між двома паралельними прямими $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{u}t$;

є) між двома паралельними прямими $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}_1$ і $\left[\vec{r}, \vec{u}\right] = \vec{a}_2$;

ж) між двома мимобіжними прямими $\left[\vec{r}, \vec{u}_1\right] = \vec{a}_1$ і $\left[\vec{r}, \vec{u}_2\right] = \vec{a}_2$.

4.17. Задана пряма $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t$ і площина $(\,\vec{r}, \vec{n}\,) = D$, які не паралельні між собою. Точка M лежить на прямій і віддалена від площини на відстань ρ. Знайти радіус-вектор точки M.

5 Загальне рівняння прямої на площині. Загальне рівняння площини в просторі.

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Загальне рівняння прямої на площині. Координати вектора нормалі до прямої

і напрямного вектора прямої. Побудова рівняння прямої на площині за відомими вектором нормалі (напрямним вектором) і точкою прямої.

2. Загальне рівняння площини в просторі. Координати вектора нормалі до площини. Побудова рівняння площини за відомими вектором нормалі і точкою площини. Побудова рівняння площини за відомими парою неколінеарних векторів, паралельних площині, і точкою площини.

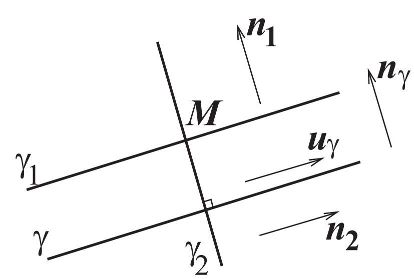
Приклади розв'язання задач

<u>Приклад</u> 5.1. На площині задана пряма γ рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точка $M(x_0, y_0)$, яка не лежить на γ (тобто $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$). Скласти

а) рівняння прямої γ_1, яка проходить через точку M і паралельна γ;

б) рівняння прямої γ_2, яка проходить через точку M і перпендикулярна до γ.

<u>Розв'язання</u>. Відомо, що $\vec{n}_\gamma$ — вектор нормалі до прямої γ, має координати $\vec{n}_\gamma = \{A, B\}, \vec{u}_\gamma$ — напрямний вектор прямої γ, має координати $\vec{u}_\gamma = \{-B, A\}$. Позначимо через $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ вектори нормалі до прямих γ_1 і γ_2 відповідно.



Тоді

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_\gamma = \{A, B\}, \quad \vec{n}_2 = \vec{u}_\gamma = \{-B, A\}.$$

Складемо рівняння прямої γ_1, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}_1 = \{A, B\}$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0,$$

$$Ax + By + C_1 = 0, \quad C_1 = -Ax_0 - By_0.$$

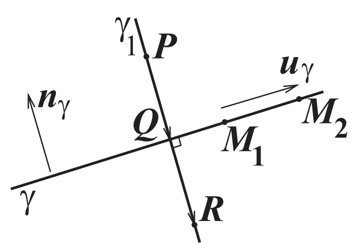
Складемо рівняння прямої γ_2, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}_2 = \{-B, A\}$:

$$-B\,(x - x_0) + A\,(y - y_0) = 0,$$

$$-Bx + Ay + C_2 = 0, \quad C_2 = Bx_0 - Ay_0.$$

Приклад 5.2. Знайти точку Q, яка є проекцію точки $P(-1, 2)$ на пряму γ, яка проходить через точки $M_1(-3, -1)$ і $M_2(-2, 1)$. Знайти точку R, симетричну точці P відносно γ.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої γ.



Напрямний вектор прямої γ має координати $\vec{u}_\gamma = \overrightarrow{M_1M_2} = \{1, 2\}$. Тоді $\vec{n}_\gamma$ — вектор нормалі до γ має координати $\vec{n}_\gamma = \{-2, 1\}$ і рівняння γ має вигляд

$$-2\,(x + 3) + (y + 1) = 0, \quad -2x + y - 5 = 0.$$

Зауважимо, що точка P не лежить на γ. Складемо рівняння прямої γ_1 — прямої, яка проходить через точку P і перпендикулярна до γ. Для цього скористаємося результатом задачі 5.1:

$$\gamma_1 : x + 2y - 3 = 0.$$

Точка Q є перетином прямих γ і $\gamma_1 : Q = \gamma \cap \gamma_1$. Знайдемо її координати.

$$\begin{cases} -2x + y - 5 = 0, \\ \quad x + 2y - 3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -7/5, \\ y = 11/5. \end{cases}$$

Таким чином, $Q\left(-7/5, 11/5\right)$.

Знайдемо координати точки R (позначимо їх (x_1, y_1)). Зауважимо, що $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$. Запишемо цю рівність покоординатно

$$\{x_1 + 1, y_1 - 2\} = \{-4/5, 2/5\},$$

звідки $x_1 = -9/5, y_1 = 12/5$. Таким чином, $R\left(-9/5, 12/5\right)$.

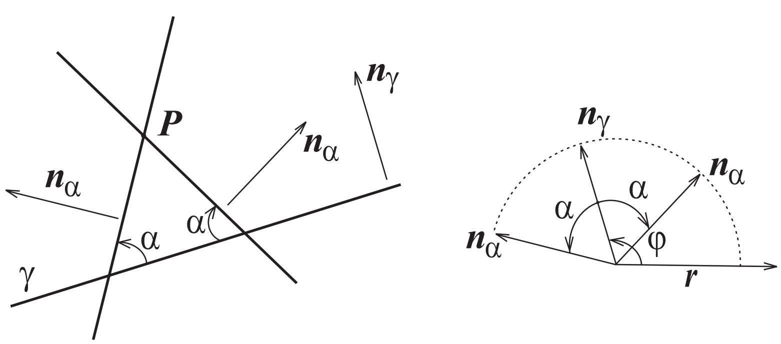
Приклад 5.3. Пряма γ задана рівнянням $Ax + By + C = 0$. Скласти рівняння прямих, які проходять через задану точку $P(x_1, y_1)$ і утворюють з γ кут α.

Розв'язання. Позначимо через $\vec{n}_\gamma$ вектор нормалі до заданої прямої, його координати дорівнюють $\vec{n}_\gamma = \{A, B\}$.

Рівняння шуканої прямої має вигляд

$$\gamma_\alpha : \quad A_\alpha(x - x_1) + B_\alpha(y - y_1) = 0,$$

де $\{A_\alpha, B_\alpha\}$ — це координати вектора нормалі до γ_α, позначимо його $\vec{n}_\alpha$. Вектор $\vec{n}_\alpha$ утворює кут α з $\vec{n}_\gamma$.



Знайдемо координати $\vec{n}_\alpha$. Для цього перейдемо до полярної системи координат.

Нехай полярні координати $\vec{n}_\gamma = \{r, \varphi\}$, вони пов'язані з координатами вектора $\vec{n}_\gamma$ в прямокутній декартовій системі координат наступними формулами $A = r\cos\varphi, B = r\sin\varphi$. Тоді в полярній системі координат $\vec{n}_\alpha = \{r, \varphi + \alpha\}$ або $\vec{n}_\alpha = \{r, \varphi - \alpha\}$.

Таким чином, $\vec{n}_\alpha = \{r, \varphi \pm \alpha\}$ або в прямокутній декартовій системі координат

$$A_\alpha = r\cos(\varphi \pm \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha \mp r\sin\varphi\sin\alpha =$$
$$= A\cos\alpha \mp B\sin\alpha,$$
$$B_\alpha = r\sin(\varphi \pm \alpha) = \pm r\cos\varphi\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha =$$
$$= \pm A\sin\alpha + B\cos\alpha.$$

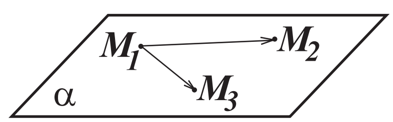
Рівняння прямих γ_α буде таким:

$$(A\cos\alpha \mp B\sin\alpha)(x - x_1) + (\pm A\sin\alpha + B\cos\alpha)(y - y_1) = 0.$$

Приклад 5.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,-1,1)$, $M_3(0,1,2)$.

Розв'язання. Задача має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій. Ця умова виконується, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2,-2,0\}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}\,\{-1,0,1\}$ не є колінеарними. А це дійсно так, оскільки координати цих векторів непропорційні.

Позначимо шукану площину α.



Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ паралельні площині α, точка M_1 (або M_2, або M_3) належить α. Складемо рівняння площини α, яка проходить через задану точку паралельно двом векторам у вигляді мішаного добутку в координатній формі:

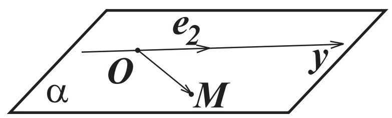
$$\alpha: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини α :

$$\alpha: \quad x + y + z - 3 = 0.$$

Приклад 5.5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,2,1)$ і вісь Oy.

Розв'язання. Позначимо шукану площину α.



Вектор $\vec{e}_2 = \{0,1,0\}$, який визначає напрям осі Oy, паралельний площині α. Вектор $\overrightarrow{OM} = \{1,2,1\}$ паралельний площині α, оскільки точки O, M належать шуканій площині. Складемо рівняння площини α, яка проходить через задану точку $O(0,0,0)$(можна взяти довільну точку осі Oy або точку M) паралельно двом векторам у вигляді мішаного добутку в координатній формі:

$$\alpha : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини α :

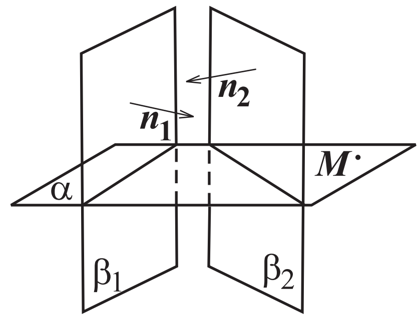
$$\alpha : \quad x - z = 0.$$

Приклад 5.6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,2,1)$ перпендикулярно двом заданим площинам $\beta_1 : 2x - y + z - 3 = 0$, і $\beta_2 : -x + 3z + 7 = 0$.

Розв'язання. Позначимо шукану площину α.

Вектор нормалі до площини β_1 (позначимо його $\vec{n}_1$) має координати $\vec{n}_1 = \{2,-1,1\}$. Оскільки площина β_1 перпендикулярна площині α, то вектор нормалі до β_1 буде паралельним α. Аналогічно, вектор нормалі до β_2 (позначимо його $\vec{n}_2 = \{-1,0,3\}$) буде паралельним площині α.

Складемо рівняння площини α, яка проходить через задану точку $M(2,2,1)$ паралельно двом векторам ($\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$) у вигляді мішаного добут-



ку в координатній формі:

$$\alpha: \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини α :

$$\alpha: \quad 3x + 7y + z - 21 = 0.$$

Задачі для самостійної роботи

Рівняння прямої на площині

5.1. На площині задана пряма γ і точка M. Скласти рівняння прямої, яка проходять через точку M і

(1) паралельна γ; (2) перпендикулярна до γ

у наступних випадках:

а) $M(2,-3), \quad \gamma: 2x - 3y + 5 = 0;$

б) $M(1,-2), \quad \gamma: 5x - y + 3 = 0;$

в) $M(4,-1), \quad \gamma: -3x + y + 2 = 0.$

5.2. На площині задана пряма γ і точка P. Знайти точку Q, яка є проекцією точки P на γ, і точку R, яка симетрична P відносно γ

а) $P(-6,4)$, $\quad \gamma : 4x - 5y + 3 = 0$;

б) $P(-5,13)$, $\quad \gamma : 2x - 3y - 3 = 0$;

в) $P(-8,12)$, $\quad \gamma$ проходить через $M_1(2,-3), M_2(-5,1)$;

г) $P(8,-9)$, $\quad \gamma$ проходить через $M_1(3,-4), M_2(-1,-2)$.

5.3. Задано трикутник $ABC : A(-2,3),\ B(4,1),\ C(6,-5)$. Написати рівняння медіани, яка проведена з вершини A.

5.4. Знаючи рівняння двох сторін паралелограма $2x + 5y + 6 = 0$ і $x - 3y = 0$, а також одну з його вершин $C(4,-1)$, скласти рівняння двох інших сторін паралелограма.

5.5. Задані середини $M_1(2,3)$, $M_2(-1,2)$ і $M_3(4,5)$ сторін трикутника. Скласти рівняння сторін.

5.6. Задані рівняння двох сторін паралелограма $x - 2y - 10 = 0$ і $x - y - 1 = 0$, а також точка перетину його діагоналей $M(3,-1)$. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма.

5.7. Задані рівняння сторін паралелограма $ABCD : 3x+4y-12 = 0(AB)$ і $5x - 12y - 6 = 0(AD)$, а також середина $E\,(-2, 13/6)$ сторони BC. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма.

5.8. Скласти рівняння прямої, якщо точка $P(2,3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на шукану пряму.

5.9. Задано трикутник $ABC : A(1,-1),\ B(-2,1),\ C(3,5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, який опущений з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

5.10. Задано трикутник ABC : $A(4,6), B(-4,0), C(-1,-4)$. Скласти рівняння висоти, яка опущена з вершини A на сторону BC.

5.11. Сторони трикутника ABC задані рівняннями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$ та $x + 5y - 7 = 0$. Знайти точку перетину його висот.

5.12. Задані дві вершини трикутника $A(-6,2), B(2,-2)$ і точка $H(1,2)$ перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини C.

5.13. Знаючи вершину $A(3,-4)$ трикутника ABC і рівняння двох його висот $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$ скласти рівняння сторони BC.

5.14. Знайти вершину трикутника ABC, якщо відомі сторона AB : $4x+y-12 = 0$, висота $BH : 5x-4y-15 = 0$ і висота $AK : 2x+2y-9 = 0$.

5.15. Написати рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $(1,7)$ і рівняння перпендикулярів $2x + 3y - 10 = 0, x - 2y + 3 = 0$, побудованих у серединах сторін, які виходять з цієї вершини.

5.16. Знайти необхідні і достатні умови того, що дві прямі, задані рівняннями $A_i x + B_i y + C_i = 0, i = \overline{1,2}$:

а) перетинаються; б) паралельні; в) збігаються.

5.17. Дослідити взаємне розташування двох прямих в кожному з наступних випадків:

а) $x - 3y - 2 = 0$ і $2x + y - 1 = 0$;

б) $x + 3y - 1 = 0$ і $2 - 2x - 6y = 0$;

в) $-x - y - 3 = 0$ і $3x + 3y + 1 = 0$;

г) $2x + 4y - 5 = 0$ і $x - y - 3 = 0$;

д) $3x - y - 1 = 0$ і $7 + 2y - 6x = 0$;

е) $4x - 2y - 6 = 0$ і $y - 2x + 3 = 0$.

5.18. Знайти необхідні і достатні умови того, що три прямі, задані рівняннями $A_i x + B_i y + C_i = 0, i = \overline{1,3}$:

а) утворюють трикутник; б) мають єдину спільну точку.

5.19. Дослідити взаємне розташування трьох прямих у кожному з наступних випадків:

а) $x + 2y + 3 = 0, \quad 2x + 3y + 5 = 0, \quad x - y + 7 = 0$;

б) $2x + 5y - 4 = 0, \quad 7x + y - 20 = 0, \quad 3x + 2y - 8 = 0$;

в) $x - y - 2 = 0, \quad 3x + 5y + 4 = 0, \quad 6x - 6y + 1 = 0$;

г) $2x + 3y - 1 = 0, \quad 4x + 6y + 5 = 0, \quad 10x + 15y - 7 = 0$.

5.20. Дана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2, 1)$ під кутом $\pi/4$ до даної прямої.

5.21. Точка $A(-4, 5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - 3y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

5.22. Основою рівнобедреного трикутника є пряма $2x + 3y = 0$, його вершина знаходиться в точці $(2, 6)$, тангенс кута при основі дорівнює $3/2$. Написати рівняння бокових сторін трикутника.

5.23. Задана вершина $C(-3, 2)$ трикутника ABC, тангенси його внутрішніх кутів $\operatorname{tg} A = 1/2, \operatorname{tg} B = 4/3$ і рівняння $2x - y - 2 = 0$ сторони

AB. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.

5.24. Промінь світла спрямований вздовж прямої $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

5.25. Задані дві прямі $x + 3y = 0, x - y + 8 = 0$. Знайти третю пряму так, щоб друга з даних прямих була бісектрисою кута між першою з даних прямих і шуканою прямою.

5.26. Знаючи рівняння $x + 7y - 6 = 0$ сторони AB трикутника ABC і рівняння бісектрис $x + y - 2 = 0, x - 3y - 6 = 0$, які виходять з точок A, B, знайти координати вершини C.

5.27. Скласти рівняння трикутника, якщо відома його вершина $B(2, 6)$, а також рівняння висоти $x - 7y + 15 = 0$ і бісектриси $7x + y + 5 = 0$, проведених з однієї вершини.

5.28. Скласти рівняння трикутника, знаючи його вершину $B(2, -1)$, а також рівняння висоти $3x - 4y + 27 = 0$ і бісектриси $x + 2y - 5 = 0$, проведених з різних вершин.

Рівняння площини в просторі

5.29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, -1, 2)$ паралельно площині:

а) $x - 3y + 2z + 1 = 0$;

б) $x = 5$;

в) $y = 4$;

г) $z = 3$;

д) $\begin{cases} x = 4 - u + v, \\ y = 2 + u + 2v, \\ z = -1 + 7u + 3v. \end{cases}$

5.30. Три грані паралелепіпеда лежать у площинах $x - 3z + 18 = 0$, $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$, а одна з його вершин A має координати $(-1, 3, 1)$. Скласти рівняння інших граней паралелепіпеда.

5.31. Скласти рівняння площини,

а) яка проходить через точку $A(3, 2, -2)$ паралельно векторам $\vec{l} = \{1, -2, -2\}$ і $\vec{m} = \{2, -1, 2\}$;

б) яка проходить через точку $A(2, -3, 3)$ паралельно векторам $\vec{l} = \{0, 3, -1\}$ і $\vec{m} = \{1, 1, 0\}$;

в) яка проходить через точку $A(3, -2, -1)$ паралельно векторам $\vec{l} = \{-1, 4, 2\}$ і $\vec{m} = \{1, 1, 1\}$;

г) яка проходить через точки $A(1, -1, 4)$ і $B(-1, 1, 2)$ паралельно вектору $\vec{l} = \{-2, -1, 3\}$;

д) яка проходить через точки $A(2, 2, -1)$ і $B(1, -1, 2)$ паралельно вектору $\vec{l} = \{1, -3, 4\}$;

е) яка проходить через точки $A(3, -1, 1)$ і $B(2, 0, 2)$ паралельно вектору $\vec{l} = \{2, -3, 1\}$.

5.32. Скласти рівняння площин, які проходять через точку $A(1, 2, 3)$

а) паралельно площині Oxy;

б) паралельно площині Oxz;

в) паралельно площині Oyz;

г) і вісь Ox;

д) і вісь Oy;

е) і вісь Oz.

5.33. Скласти рівняння площини, яка проходить:

а) через точку $A_1(2,-3,3)$ паралельно площині Oxy;

б) через точку $A_2(1,-2,4)$ паралельно площині Oxz;

в) через точку $A_3(-5,2,-1)$ паралельно площині Oyz;

г) через точку $B_1(4,-1,2)$ і вісь Ox;

д) через точку $B_2(1,4,-3)$ і вісь Oy;

е) через точку $B_3(2,-4,7)$ і вісь Oz;

є) через точки $C_1(7,2,-3)$ і $C_2(5,6,-4)$ паралельно осі Ox;

ж) через точки $D_1(2,-1,1)$ і $D_2(3,1,2)$ паралельно осі Oy;

з) через точки $E_1(3,-2,5)$ і $E_2(2,3,1)$ паралельно осі Oz.

5.34. Скласти рівняння площини, яка проходить через три задані точки (якщо ці три точки визначають площину однозначно):

а) $A(2,1,3), B(-1,2,5), C(3,0,1)$;

б) $A(1,-1,3), B(2,3,4), C(-1,1,2)$;

в) $A(3,0,0), B(0,-1,0), C(0,0,4)$;

г) $A(2,1,1), B(2,0,-1), C(2,4,3)$;

д) $A(1,1,2), B(2,3,3), C(-1,-3,0)$;

е) $A(3,-1,2), B(4,-1,-1), C(2,0,2)$.

5.35. Точки $A(1,0,3)$ і $B(-1,2,1)$ є вершинами тетраедра $ABCD$, точка $K(-1,5,2)$ – серединою ребра BC, точка $M(0,1,4)$ – точкою перетину медіан грані BCD. Скласти рівняння площин, в яких лежать грані тетраедра.

5.36. Скласти рівняння площини, яка проходить:

а) через початок координат перпендикулярно площинам $2x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 2y + z = 0$;

б) через точку $A(2, -1, 1)$ перпендикулярно площинам $2x - z + 1 = 0$ і $y = 0$;

в) через точку $A(2, 1, -1)$ перпендикулярно площинам $x - y + 5z + 1 = 0$ і $2x + y - 3 = 0$;

г) через дві точки $A(1, -1, -2)$ і $B(3, 1, 1)$ перпендикулярно площині $x - 2y + 3z - 5 = 0$;

д) через лінію перетину площин $6x - y + z = 0$ і $5x + 3z - 10 = 0$, паралельно осі Ox;

е) через лінію перетину площин $2x - z = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$, паралельно вектору $\vec{l} = \{7, -1, 4\}$.

6 Рівняння прямої в просторі. Взаємне розташування прямої і площини

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

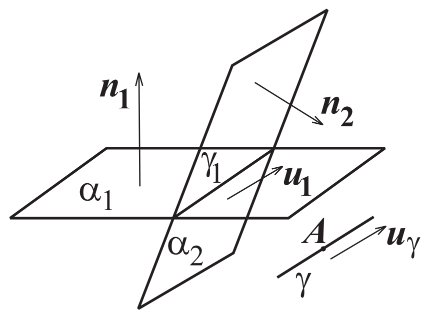
Канонічне рівняння прямої в просторі. Параметричне рівняння прямої в просторі. Напрямний вектор прямої. Рівняння прямої в просторі як перетин двох площин. Взаємозв'язок між різними типами рівнянь прямої в просторі.

Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. Скласти канонічне рівняння прямої γ, яка проходить через точку $A(1, 2, 3)$ паралельно прямій γ_1, що задана рівнянням

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 5 = 0, \\ -2x + y + z + 9 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для того, щоб скласти канонічне рівняння прямої γ, необхідно знати координати довільної точки, яка належить прямій (точка A), і координати напрямного вектора $\vec{u}_\gamma$. З паралельності прямих γ, γ_1 випливає, що $\vec{u}_1$ (напрямний вектор γ_1) дорівнює напрямному вектору прямої $\gamma : \vec{u}_1 = \vec{u}_\gamma$.



Позначимо через α_1 площину $3x - y + 2z - 5 = 0$, її вектор нормалі дорівнює $\vec{n}_1 = \{3, -1, 2\}$, через α_2 площину $-2x + y + z + 9 = 0$, її вектор нормалі дорівнює $\vec{n}_2 = \{-2, 1, 1\}$.

Знайдемо $\vec{u}_1$. Оскільки $\vec{u}_1 \parallel \alpha_1$, то $\vec{u}_1 \perp \vec{n}_1$. Аналогічно, $\vec{u}_1 \perp \vec{n}_2$. Це означає, що

$$\vec{u}_1 = \left[\vec{n}_1, \vec{n}_2\right] = \{-3, -7, 1\} = \vec{u}_\gamma.$$

Таким чином, канонічне рівняння прямої γ має вигляд

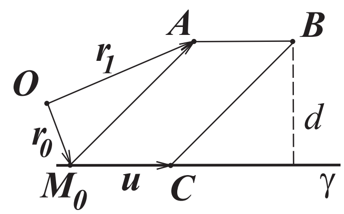
$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{1}.$$

Приклад 6.2. Знайти проекцію точки $A(2, 2, 3)$ на пряму γ, яка задана рівнянням

$$\begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 2t. \end{cases}$$

Знайти точку, яка симетрична точці A відносно γ.

Розв'язання. Проведемо через точку A площину (позначимо її α), яка перпендикулярна прямій γ. Тоді проекцією точки A на пряму γ буде точка (позначимо її A_1), яка є перетином α і $\gamma : A_1 = \text{Пр}_\gamma A = \gamma \bigcap \alpha$.



Знайдемо рівняння площини α. Оскільки α перпендикулярна прямій γ, то напрямний вектор γ буде вектором нормалі до α : $\vec{u}_\gamma = \vec{n}_\alpha$. Напрямний вектор прямої γ має координати $\vec{u}_\gamma = \{1,1,2\} = \vec{n}_\alpha$. Складемо рівняння площини, яка проходить через задану точку (точку A) перпендикулярно заданому вектору (вектору $\vec{n}_\alpha$):

$$(x-2)+(y-2)+2\,(z-3)=0.$$

Розкривши дужки, отримаємо рівняння площини α :

$$\alpha: \quad x+y+2z-10=0.$$

Для того, щоб знайти координати точки A_1, необхідно розв'язати систему рівнянь, яка складається з рівняння прямої γ і площини α :

$$\begin{cases} x=-3+t, \\ y=1+t, \\ z=2t, \\ x+y+2z-10=0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t=2, \\ x=-1, \\ y=2, \\ z=4. \end{cases}$$

Точка A_1 має координати $A_1\,(-1,2,4)$.

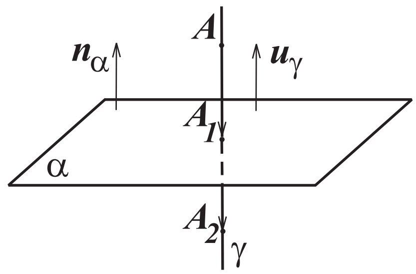
Позначимо через $A_2(x_1,y_1,z_1)$ точку, симетричну точці A відносно γ. Зауважимо, що $\overrightarrow{AA_2}=2\overrightarrow{AA_1}$. Запишемо цю рівність покоординатно:

$$\{x_1-2, y_1-2, z_1-3\} = \{-6,0,2\}\,,$$

звідки $x_1=-4$, $y_1=2$, $z_1=5$. Таким чином, точка A_2 має координати $(-4,2,5)$.

Приклад 6.3. Знайти проекцію точки $A(1,-3,1)$ на площину α, яка задана рівнянням $2x-y+3z-1=0$. Знайти точку, яка симетрична точці A відносно α.

Розв'язання. Проведемо через точку A пряму (позначимо її γ), перпендикулярну площині α. Тоді проекцією точки A на площину α, буде точка A_1, яка є перетином α і γ : $A_1 = \text{Пр}_\gamma A = \gamma \bigcap \alpha$.



Знайдемо рівняння прямої γ. Оскільки γ перпендикулярна α, то вектор нормалі до площини α буде напрямним вектором прямої γ : $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\gamma$. Вектор нормалі до α має координати $\vec{n}_\alpha = \{2, -1, 3\} = \vec{u}_\gamma$. Складемо параметричне рівняння прямої, яка проходить через задану точку A паралельно заданому вектору $\vec{u}_\gamma$:

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Для того, щоб знайти координати точки A_1, необхідно розв'язати систему рівнянь, яка складається з рівняння прямої γ і площини α :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = 1 + 3t, \\ 2x - y + 3z - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} t = -1/2, \\ x = 0, \\ y = -5/2, \\ z = -1/2. \end{cases}$$

Точка A_1 має координати $A_1\,(0, -5/2, -1/2)$.

Позначимо через $A_2(x_1, y_1, z_1)$ точку, симетричну точці A відносно α. Зауважимо, що $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{AA_1}$. Запишемо цю рівність покоординатно:

$$\{x_1 - 1, y_1 + 3, z_1 - 1\} = \{-2, 1, -3\}\,,$$

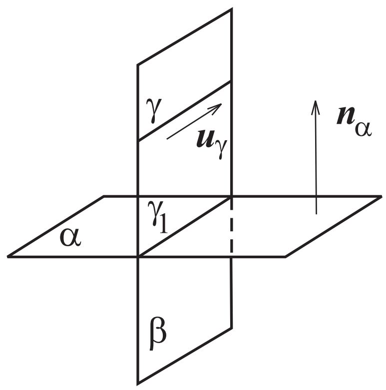
звідки $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $z_1 = -2$. Таким чином, точка A_2 має координати $(-1, -2, -2)$.

<u>Приклад</u> 6.4. Скласти рівняння площини, яка проектує пряму

$$\gamma : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{3}$$

на площину α, задану рівнянням $-x-y+3z-1=0$. Скласти рівняння проекції прямої γ на площину α.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо через β невідому площину, яка проектує пряму γ на α. Ця площина проходить через γ, перпендикулярно площині α. Складемо рівняння β.



Оскільки γ належить β, то кожна точка прямої γ належить β (наприклад, точка $M_0(1,-2,3)$, координати вказано в канонічному рівнянні прямої). Крім того, $\vec{u}_\gamma = \{-2,0,3\}$ (напрямний вектор прямої γ) паралельний β. Площини α і β перпендикулярні, тому $\vec{n}_\alpha = \{-1,-1,3\}$ (вектор нормалі до площини α) буде паралельним площині β. Зауважимо, що $\vec{u}_\gamma$ і $\vec{n}_\alpha$ не колінеарні. Складемо рівняння площини, яка проходить через задану точку, паралельно двом векторам, не колінеарним між собою (рівняння у вигляді мішаного добутку в координатній формі):

$$\beta : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини

$$\beta : 3x+3y+2z-3=0.$$

Позначимо через γ_1 пряму, яка є проекцією γ на α. У даному випадку, найзручніше буде скласти загальне рівняння прямої γ_1, тобто рівняння прямої γ_1 як перетин двох площин α і β :

$$\gamma_1 : \quad \begin{cases} -x - y + 3z - 1 = 0, \\ 3x + 3y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Приклад 6.5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,1,1)$ і перетинає дві задані прямі

$$\gamma_1 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{i} \quad \gamma_2 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{0}.$$

Розв'язання. Пряму, яка перетинає дві задані прямі і проходить через задану точку, можна провести єдиним способом у тому і тільки у тому випадку, коли задані прямі є мимобіжними, а точка не належить жодній із заданих прямих. Підставивши координати точки A в рівняння прямих, пересвідчуємося, що $A \notin \gamma_1, A \notin \gamma_2$. Перевіримо, що γ_1 і γ_2 є мимобіжними. З канонічного рівняння прямої γ_1 випливає, що точка $M_1(-1,3,2)$ належить γ_1, вектор $\vec{u}_1 = \{-1,2,1\}$ паралельний γ_1. Аналогічно, точка $M_2(-4,3,3)$ належить γ_2, вектор $\vec{u}_2 = \{2,1,0\}$ паралельний γ_2. З прикладу 4.2 випливає, що прямі γ_1 і γ_2 будуть мимобіжними тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ некомпланарні. Тобто, коли мішаний добуток $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) \neq 0$. Знайдемо

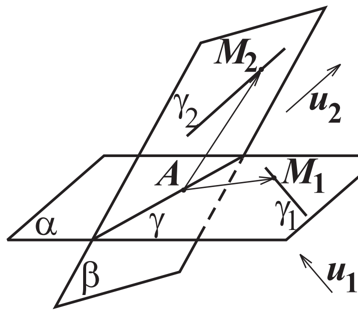
$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким чином, ми перевірили, що задача має єдиний розв'язок.

Проведемо через точку A і пряму γ_1 площину (позначимо її α):

Складемо рівняння площини α, яка проходить через задану точку A, паралельно двом не колінеарним між собою векторам $\vec{u}_1$ і $\overrightarrow{AM_1} = \{-2,2,1\}$ (рівняння в вигляді мішаного добутку в координатній формі):

$$\beta : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини $\alpha : -y+2z-1=0$.

Проведемо через точку A і пряму γ_2 площину (позначимо її β). Складемо рівняння площини β, яка проходить через задану точку A, паралельно двом не колінеарним між собою векторам $\vec{u}_2$ і $\overrightarrow{AM_2} = \{-5, 2, 2\}$ (рівняння в вигляді мішаного добутку в координатній формі):

$$\beta : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння площини

$$\beta : 2x - 4y + 9z - 7 = 0.$$

Шукана пряма (позначимо її γ) буде перетином площин α і β :

$$\gamma_1 : \quad \begin{cases} -y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - 4y + 9z - 7 = 0. \end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи

6.1. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1, 3, 1)$ паралельно прямій

а) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$ б) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+2}{21}$;

в) $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+7}{3}=\dfrac{z-6}{15}$;

г) $\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x=0, \\ z=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y=-1, \\ z=2. \end{cases}$

6.2. Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

а) $A(1,3,-1)$ і $B(4,2,1)$;

б) $A(3,2,5)$ і $B(4,1,5)$;

в) $A(-1,1,2)$ і $B(5,1,2)$;

г) $A(2,-1,-2)$ і $B(-3,0,-4)$.

6.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,-1,2)$ перпендикулярно площині

а) $x-3y+2z+1=0$;

б) $x=5$;

в) $y=4$;

г) $z=3$;

д) $\begin{cases} x=4-u+v, \\ y=2+u+2v, \\ z=-1+7u+3v. \end{cases}$

6.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1,3,1)$ перпендикулярно прямій

а) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 2x+3y+z-1=0; \end{cases}$

б) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{21}$;

в) $\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=0, \\ z=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y=-1, \\ z=2. \end{cases}$

6.5. Скласти рівняння площини, яка проходить а) через точку $A(1,1,2)$ і пряму

$$\begin{cases} x=-1+5t, \\ y=2t, \\ z=1+2t; \end{cases}$$

б) через точку $A(-3,10,2)$ і пряму

$$\begin{cases} x+y-5z+7=0, \\ 3x-y+3z+1=0; \end{cases}$$

в) через точку $A(4,1,1)$ паралельно прямим

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-3}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x+6}{1}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+10}{2};$$

г) через точку $A(7,-1,4)$ паралельно прямим

$$\begin{cases} x-y-z+5=0, \\ 2x-y-6z+11=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} -x+y+3z-9=0, \\ -5x+y-z+2=0. \end{cases}$$

д) через пряму

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{7}$$

паралельно прямій

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-6}{10};$$

е) через пряму

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{2}$$

паралельно прямій

$$\begin{cases} -x+2y-z+3=0, \\ -2x+7y-8z-5=0; \end{cases}$$

є) через пряму
$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-9}{6}=\frac{z-8}{5}$$
перпендикулірно площині $2x-y-z+5=0$;

ж) через пряму
$$\begin{cases} 5x+9y+6z-9=0, \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$
перпендикулярно площині $6x-y+2z+2=0$;

з) через дві паралельні прямі
$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{3}.$$

6.6. Пряма проектується на площину Oyz паралельно осі Ox. Скласти параметричне рівняння проекції, якщо пряма задана рівняннями:

а) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3t, \\ z=1-t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x+2y-3z+2=0. \end{cases}$

6.7. Пряма проектується на площину $x+2y-3z+2=0$ паралельно вектору $\vec{l}=\{2,1,-1\}$. Скласти параметричне рівняння проекції, якщо пряма задана рівняннями:

а) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3t, \\ z=-6-t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ y-3z+4=0. \end{cases}$

6.8. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1,2,-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{l}=\{6,-2,-3\}$ і перетинає пряму
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}.$$

6.9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і перетинає дві задані прямі:

а) $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 5 - 5t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

6.10. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3, -2, -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

6.11. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить паралельно площинам $3x + 12y - 3z - 5 = 0$ і $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ і перетинає прямі

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3} \quad \text{і} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

6.12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1, 1, -1)$ і перетинає дві задані прямі:

а) $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y - z = 0, \\ x + y - 2z + 4 = 0; \end{cases}$

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{-1}$ і $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z-3}{2}.$

6.13. Скласти рівняння прямої, яка перетинає дві прямі

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$$

і паралельна третій прямій

$$\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}.$$

6.14. Задана точка $A(3,-1,1)$. Знайти A_1 — проекцію точки A на площину α і A_2 — точку , яка симетрична точці A відносно α, якщо:

а) $\alpha : x = 0$;

б) $\alpha : y = 0$;

в) $\alpha : z = 0$;

г) $\alpha : x + 2y + 2z + 6 = 0$;

д) $\alpha : 2x + 3y + 6z + 40 = 0$;

е) $\alpha : 2x - y + 3z + 18 = 0$.

6.15. Знайти A_1 — проекцію точки A на площину α і A_2 — точку, яка симетрична точці A відносно α, якщо:

а) $A(3,-4,-6)$, α проходить через точки

$$M_1(-6,1,-5),\ M_2(7,-2,-1) \text{ і } M_3(10,-7,1);$$

б) $A(-3,2,5)$, α проходить через прямі

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0; \end{cases}$$

в) $A(3,-4,-2)$, α проходить через прямі

$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

6.16. Скласти рівняння проекції на площину $x+5y-z-25 = 0$ наступних прямих:

а) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3}$;

б) $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z + 2 = 0; \end{cases}$

в) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$.

6.17. Скласти рівняння прямої, яка симетрична прямій

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

відносно площини $5x - y + z - 4 = 0$.

6.18. Знайти A_1 — проекцію заданої точки A на пряму γ і A_2 — точку, яка симетрична A відносно γ, якщо

а) $A(2, -1, 3), \quad \gamma : \begin{cases} x = 3t, \\ y = -7 + 5t, \\ z = 2 + 2t; \end{cases}$

б) $A(4, 1, 6), \quad \gamma : \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

6.19. Задана точка $A(2, -1, 0)$ і пряма γ. Знайти

(1) відстань від точки A до прямої γ,

(2) координати A_1 — проекції точки A на пряму γ і A_2 — точки, симетричну точці A відносно γ,

(3) рівняння прямої, яка проходить через точку A і перетинає пряму γ під прямим кутом,

якщо

а) $\gamma : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$;

б) $\gamma : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -3 + t; \end{cases}$

в) $\gamma : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + y + z + 2 = 0. \end{cases}$

6.20. Знайти відстань між прямими

а) $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z-1}{-2} \quad$ і $\quad \dfrac{x-5}{-6} = \dfrac{y}{-12} = \dfrac{z}{4}$;

б) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 10 - 3t, \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

6.21. Скласти рівняння спільного перпендикуляра двох прямих (тобто прямої, яка перетинає задані прямі під прямим кутом), знайти відстань між прямими, якщо

а) $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-10}{-1}$ і $\dfrac{x+4}{-7} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$;

б) $\begin{cases} x = 5 + t, \\ y = 3 - t, \\ z = 13 + t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 6 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 10 - t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 7y - 13 = 0, \\ 3y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y - 8 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

6.22. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1, 3, 2)$ паралельно площині Oxy і утворює

а) кут $\pi/4$ з прямою $\begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases}$

б) кут $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ з площиною $x - y = 1$.

6.23. Скласти рівняння площини, яка

а) проходить через точку $A(-1, 2, 1)$ паралельно прямій

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

і утворює кут $\pi/3$ з прямою $\begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases}$

б) проходить через пряму

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

і утворює кут $\pi/4$ з площиною $x - 4y - 8z + 1 = 0$.

7 Нормальне рівняння прямої на площині. Нормальне рівняння площини в просторі

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Нормальне рівняння прямої на площині. Знаходження відхилення і відстані від точки до прямої. Положення точки відносно прямої на площині.

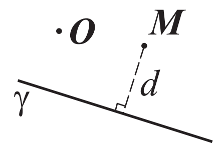
2. Нормальне рівняння площини в просторі. Знаходження відхилення і відстані від точки до площини. Положення точки відносно площини в просторі.

Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1. Знайти відхилення δ і відстань d від точки $M(2,5)$ до прямої $\gamma : 8x - y + 2 = 0$. В одній чи в різних півплощинах відносно γ лежать початок координат і точка M?

Розв'язання. Запишемо нормальне рівняння прямої γ. Нагадаємо, для того, щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального, необхідно це рівняння домножити справа і зліва на нормуючий множник $\mu = \dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (тут вважаємо, що $\operatorname{sign} 0 = 1$):

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \quad \text{або} \quad -\operatorname{sign} C \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$



В нашій ситуації $\mu = \dfrac{-1}{\sqrt{65}}$, нормальне рівняння прямої

$$\gamma : -\frac{8}{\sqrt{65}}x + \frac{1}{\sqrt{65}}y - \frac{2}{\sqrt{65}} = 0.$$

Для того, щоб знайти δ — відхилення від точки M до прямої γ, необхідно в нормальне рівняння прямої замість змінних x, y підставити координати точки M :

$$\delta = \frac{-8}{\sqrt{65}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{65}} \cdot 5 - \frac{2}{\sqrt{65}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Нагадаємо, що відхилення — це відстань від точки до прямої, взята із знаком "+", якщо дана точка і початок координат лежать в різних півплощинах відносно заданої прямої, із знаком "–", якщо в одній.

Таким чином, відстань від точки M до γ дорівнює $d = |\delta| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Точка M і початок координат лежать в одній півплощині відносно γ, оскільки $\delta < 0$.

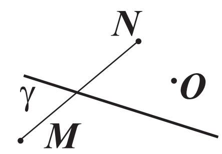
Приклад 7.2. Задана пряма $\gamma : Ax + By + C = 0$ і точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, які не належать γ, тобто $Ax_i + By_i + C \neq 0, i = 1, 2$. Визначити необхідну і достатню умову того, що

а) γ перетинає відрізок MN;

б) γ перетинає продовження відрізку MN за точку M.

Розв'язання. Позначимо через δ_1 і δ_2 відхилення від точок M і N до прямої γ, відповідно. Нагадаємо, що

$$\delta_i = -\operatorname{sign} C \frac{Ax_i + Bx_i + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad i = 1, 2.$$



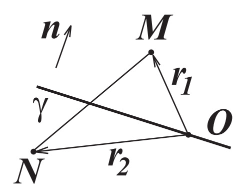
Для того, щоб пряма γ перетинала відрізок MN, необхідно і достатньо, щоб точки M і N лежали в різних півплощинах відносно γ. Нехай γ не проходить через початок координат ($C \neq 0$). Тоді можливі дві ситуації: або M і початок координат лежать в одній півплощині відносно γ, а точка N — в іншій (тобто $\delta_1 < 0$ і $\delta_2 > 0$), або, навпаки, N і початок координат лежать в одній півплощині відносно γ, а точка M — в іншій (тобто $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 < 0$). Таким чином, пряма γ перетинає відрізок MN тоді і тільки тоді, коли числа δ_1 і δ_2 мають різні знаки: $\delta_1\delta_2 < 0$. Маємо,

$$\delta_1\delta_2 = \frac{(\operatorname{sign} C)^2}{A^2 + B^2}\,(Ax_1 + By_1 + C)\,(Ax_2 + By_2 + C)\,.$$

Оскільки, $\dfrac{(\operatorname{sign} C)^2}{A^2 + B^2} > 0$, то умова $\delta_1\delta_2 < 0$ еквівалентна такій:

$$(Ax_1 + By_1 + C)\,(Ax_2 + By_2 + C) < 0. \qquad (1)$$

Зауважимо, що така ж сама умова справедлива і в тому випадку, коли пряма γ проходить через початок координат (тоді $C = 0$). Дійсно, в цій ситуації, для того, щоб пряма γ перетинала відрізок MN необхідно і достатньо, щоб проекції радіус-векторів точок M і N (позначимо їх $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$, відповідно) на вектор нормалі до γ (позначимо його $\vec{n}$) мали б різні знаки: $\text{Пр}_{\vec{n}}\,\vec{r}_1\,\text{Пр}_{\vec{n}}\,\vec{r}_2 < 0$. Оскільки, $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2\}$,



$\vec{n} = \{A, B\}$, тоді

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\,\vec{r}_1 \cdot \text{Пр}_{\vec{n}}\,\vec{r}_2 = \frac{(\,\vec{r}_1, \vec{n}\,)}{|\,\vec{n}\,|} \cdot \frac{(\,\vec{r}_2, \vec{n}\,)}{|\,\vec{n}\,|} = \frac{Ax_1 + By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{Ax_2 + By_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 0.$$

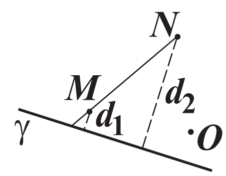
Враховуючи, що знаменник завжди додатний, маємо умову (1).

Таким чином, γ перетинає відрізок MN, якщо виконується (1).

Для того, щоб пряма γ перетинала продовження відрізку MN за точку M необхідно, по-перше, щоб γ не перетинала сам відрізок, тобто, щоб виконувалася умова, протилежна до умови (1) :

$$(Ax_1 + By_1 + C\,)\,(Ax_2 + By_2 + C\,) > 0.$$

По-друге, необхідно, щоб точка M знаходилася ближче до прямої γ, ніж



точка N, тобто, щоб d_1 — відстань від точки M до прямої γ була менше, ніж d_2 — відстань від точки N до γ:

$$d_1 = \frac{|Ax_1 + Bx_1 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} < \frac{|Ax_2 + Bx_2 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = d_2,$$

спростивши цю нерівність, отримаємо другу умову:

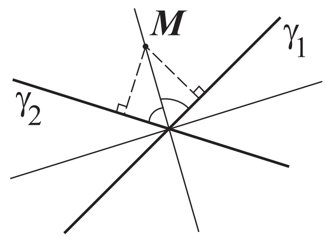
$$|Ax_1 + Bx_1 + C\,| < |Ax_2 + Bx_2 + C\,|\,.$$

Таким чином, пряма γ перетинає продовження відрізку MN за точку M, якщо

$$\begin{cases} (Ax_1 + By_1 + C)\,(Ax_2 + By_2 + C) > 0, \\ |Ax_1 + Bx_1 + C\,| < |Ax_2 + Bx_2 + C\,|\,. \end{cases}$$

Приклад 7.3. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома перетинними прямими $\gamma_1 : 6x + y - 3 = 0$ і $\gamma_2 : 2x + 12y + 9 = 0$.

Розв'язання. Скористаємося фактом, що бісектриси кутів, утворених двома перетинними прямими γ_1 і γ_2, — це геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих. Іншими словами, деяка точка $M\,(x, y)$ належить одній з бісектрис тоді і тільки тоді, коли d_1 — відстань від точки M до прямої γ_1 дорівнює d_2 — відстані від точки M до γ_2 :



$$d_1 = \frac{|6x + y - 3|}{\sqrt{37}} = \frac{|2x + 12y + 9|}{2\sqrt{37}} = d_2.$$

Ця рівність еквівалентна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} 12x + 2y - 6 = 2x + 12y + 9, \\ 12x + 2y - 6 = -2x - 12y - 9. \end{array}\right.$$

Спростивши кожне з рівнянь, отримаємо рівняння двох бісектрис кутів, утворених прямими γ_1 і γ_2 :

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 2y - 3 = 0, \\ 14x + 14y + 3 = 0. \end{array}\right.$$

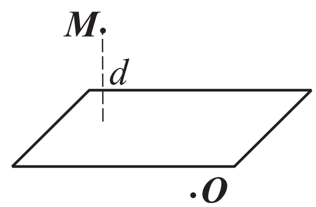
Приклад 7.4. Знайти відхилення δ і відстань d від точки $M\,(2, -1, 4)$ до площини $\alpha : 2x - 3y + z - 4 = 0$. В одній чи в різних півпросторах відносно α лежать початок координат і точка M?

Розв'язання. Запишемо нормальне рівняння площини α. Нагадаємо, для того, щоб звести загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до нормального, необхідно це рівняння домножити справа і зліва на нормуючий множник $\mu = \dfrac{-\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (тут вважаємо, що $\operatorname{sign} 0 = 1$):

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + D = 0$$

або

$$-\operatorname{sign} D \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$



В нашій ситуації $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$, нормальне рівняння

$$\alpha : \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{1}{\sqrt{14}}z - \frac{4}{\sqrt{14}} = 0.$$

Для того, щоб знайти δ — відхилення від точки M до площини α, необхідно в нормальне рівняння площини замість змінних x, y, z підставити координати точки M :

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot 2 - \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot (-1) + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 4 - \frac{4}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Нагадаємо, що відхилення від точки до площини — це відстань від точки до площини, взята із знаком "+", якщо дана точка і початок координат лежать в різних півпросторах відносно заданої площини, із знаком "–", якщо в одній.

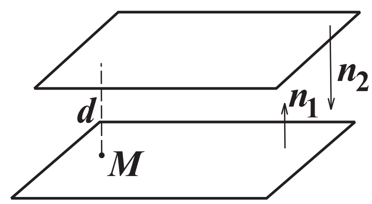
Таким чином, відстань від точки M до α дорівнює $d = |\,\delta\,| = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$. Точка M і початок координат лежать в різних півпросторах відносно α, оскільки $\delta > 0$.

Приклад 7.5. Довести, що площини

$$\alpha_1 : x - 2y - 2z - 8 = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_2 : -2x + 4y + 4z + 1 = 0$$

паралельні і знайти відстань між ними.

Розв'язання. Площини α_1 і α_2 паралельні, оскільки їх вектори нормалі колінеарні. Дійсно, $\vec{n}_1 = \{1, -2, 2\}$ (вектор нормалі до α_1) колінеарен вектору $\vec{n}_2 = \{-2, 4, 4\}$ (вектор нормалі до α_2): $-2\vec{n}_1 = \vec{n}_2$.



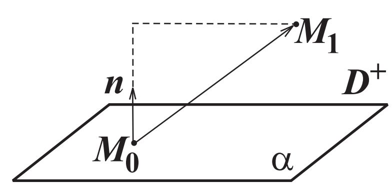
Знайдемо d — відстань між площинами α_1 і α_2. Для цього візьмемо довільну точку, яка належить площині α_1, наприклад, $M\left(8,0,0\right)$, тоді d дорівнює відстані від точки M до площини α_2 :

$$d=\frac{|-2\cdot 8+4\cdot 0+4\cdot 0+1|}{\sqrt{36}}=\frac{5}{2}.$$

Приклад 7.6. Задано площину $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, позначимо через $D^+=\left\{(x,y): Ax+By+Cz+D>0\right\}$ один з півпросторів, на який площина α ділить весь простір. Довести, що вектор $\vec{n}=\{A,B,C\}$ спрямований в бік півпростору D^+.

Розв'язання. Нехай $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ довільна точка площини α, тобто $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Візьмемо довільну точку $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$, яка належить півпростору $D^+: Ax_1+By_1+Cz_1+D>0$. Ми доведемо, що вектор $\vec{n}$ спрямований в бік півпростору D^+, якщо покажемо, що $\text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0M_1}>0$.



Дійсно,

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0M_1}=\frac{(\,\vec{n},\overrightarrow{M_0M_1}\,)}{|\,\vec{n}\,|}=$$

$$=\frac{A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)+C\left(z_1-z_0\right)}{|\,\vec{n}\,|}=$$

$$=\frac{1}{|\,\vec{n}\,|}\left(Ax_1+By_1+Cz_1+D-\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{|\vec{n}\,|}\left(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right) > 0.$$

Приклад 7.7. Задано дві перетинні площини $\alpha_i : A_ix+B_iy+C_iz+D_i = 0$, $i = 1, 2$, і точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, яка не належить жодній з цих площин. Знайти необхідну і достатню умову того, що M_0 лежить всередині гострого двогранного кута, утвореного при перетині площин α_1 і α_2.

Розв'язання. Кожна площина розбиває простір на два підпростори, позначимо їх

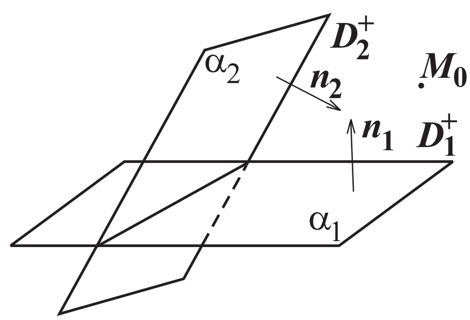
$$D_i^+ = \left\{A_ix + B_iy + C_iz + D_i > 0\right\},$$
$$D_i^- = \left\{A_ix + B_iy + C_iz + D_i < 0\right\},$$

де $i = 1, 2$. Можливі чотири ситуації: а) $M_0 \in D_1^+ \bigcap D_2^+$, б) $M_0 \in D_1^+ \bigcap D_2^-$, в) $M_0 \in D_1^- \bigcap D_2^+$ або г) $M_0 \in D_1^- \bigcap D_2^-$. В кожній з цих ситуацій запишемо умову того, що двогранний кут, в якому знаходиться точка M_0 є гострим.

Розглянемо випадок а). Нехай $M_0 \in D_1^+ \bigcap D_2^+$, тобто

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 > 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 > 0. \end{cases}$$

Нагадаємо (див. задачу 7.6), що $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ (вектори нормалі до площин α_1 і α_2, відповідно) направлені в бік двогранного кута $D_1^+ \bigcap D_2^+$. Отже, двогранний кут $D_1^+ \bigcap D_2^+$ буде гострим,



якщо кут між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ буде тупим, тобто скалярний добуток цих векторів буде від'ємним: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0$. Таким чином, у випадку а) буде така відповідь:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 > 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 > 0, \\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0. \end{cases}$$

Всі інші випадки зводяться до розглянутого вище. Покажемо, як це зробити, на прикладі випадку б). Нехай $M_0 \in D_1^+ \bigcap D_2^-$, тобто

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 > 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 < 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 > 0, \\ -A_2x_0 - B_2y_0 - C_2z_0 - D_2 > 0. \end{cases}$$

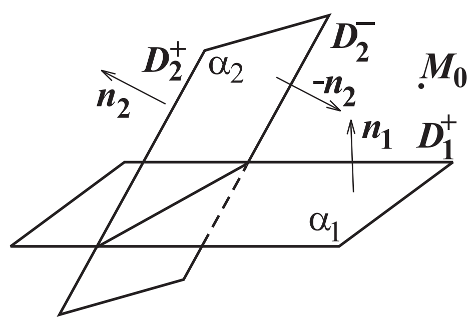
Тоді, розглянувши замість вектора $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, вектор $-\vec{n}_2 = \{-A_2, -B_2, -C_2\}$ отримаємо умову того, що кут між векторами $\vec{n}_1$ і $-\vec{n}_2$ є тупим:

$$(\vec{n}_1, -\vec{n}_2) = -A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 < 0$$

або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0.$$

Це і буде означати, що двогранний кут $D_1^+ \bigcap D_2^-$ буде гострим.



Таким чином, у випадку б) буде така відповідь:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 > 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 < 0, \\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0. \end{cases}$$

Скориставшись схожими міркуваннями, запишемо відповіді у випадках в) і г) :

$$\text{в)} \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 < 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 > 0, \\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 < 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 < 0, \\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0. \end{cases}$$

Всі чотири отримані відповіді можна об'єднати в одну:

$$(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) \times$$
$$\times (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0.$$

Задачі для самостійної роботи

Нормальне рівняння прямої на площині

7.1. Знайти відхилення δ і відстань d від точки M до прямої γ. В одній чи в різних півплощинах відносно γ лежать початок координат і точка M?

а) $M(1, 2), \quad \gamma : x - 7 = 0;$

б) $M(2, -15), \quad \gamma : y + 9 = 0;$

в) $M(3, 4), \quad \gamma : 4x - 3y - 15 = 0;$

г) $M(9, 1), \quad \gamma : -2x + 6y + 7 = 0;$

д) $M(-2,3), \quad \gamma : 3x+5y-8=0$;

е) $M(4,-1), \quad \gamma : 7x-2y+2=0$.

7.2. Точка M є вершиною квадрату, одна із сторін якого лежить на прямій γ. Знайти площу квадрату, якщо:

а) $M(-10,2), \quad \gamma : x+7y+1=0$;

б) $M(8,2), \quad \gamma : x-5y+4=0$.

7.3. Точка M є вершиною прямокутника, дві сторони якого лежать на прямих γ_1 і γ_2. Знайти площу прямокутника, якщо:

а) $M(-4,-7), \quad \gamma_1 : x-3y-12=0, \ \gamma_2 : 3x+y+7=0$;

б) $M(3,-1), \quad \gamma_1 : 3x+5y-1=0, \ \gamma_2 : 5x-3y-20=0$.

7.4. Знайти координати точки M, якщо відомо, що

а) M лежить на прямій $2x-3y+4=0$, причому відстань від точки M до прямої $3x=4y$ дорівнює 2;

б) M лежить на прямій $x+y=8$ та рівновіддалена від точки $N(2,8)$ і від прямої $x-3y+2=0$.

7.5. Задано точки M, N і пряма γ. Визначити, чи перетинає пряма γ відрізок MN, його продовження за точку M або за точку N, якщо:

а) $M(5,4), N(-10,-3), \quad \gamma : x+4=0$;

б) $M(3,3), N(-3,-5), \quad \gamma : y-12=0$;

в) $M(6,1), N(5,-2), \quad \gamma : -3x+4y+11=0$;

г) $M(1,5), N(-3,-4), \quad \gamma : 6x+y-2=0$;

д) $M(-4,2), N(-2,-1), \quad \gamma : -2x+7y-4=0$;

е) $M(7,-4), N(2,3), \quad \gamma : -7x-3y+3=0$;

є) $M(-1,4), N(4,-9), \quad \gamma : 3x+y-3=0$.

7.6. Дві паралельні прямі $\gamma_1 : Ax+By+C_1=0$ і $\gamma_2 : Ax+By+C_2=0$ ділять площину на три області: смугу Δ, яка лежить між прямими, і дві області ззовні цієї смуги. Позначимо через Δ_1 область, яка прилягає до γ_1, через Δ_2, — яка прилягає до γ_2. За якої умови точка $M(x_0,y_0)$ лежить в смузі Δ? в області Δ_1? в області Δ_2?

7.7. Визначити, якій області, Δ, Δ_1 або Δ_2 (див. позначення в задачі 7.6) належить точка M, якщо:

а) $M(7,-2), \ \gamma_1 : -x-5y+4=0, \ \gamma_2 : 4x+20y-5=0$;

б) $M(1,1), \ \gamma_1 : 3x+2y-6=0, \ \gamma_2 : -3x-2y+3=0$;

в) $M(1,-2), \ \gamma_1 : 4x-y+3=0, \ \gamma_2 : 8x-2y+7=0$.

7.8. Задано послідовні вершини чотирикутника $ABCD$. Установити, чи є чотирикутник опуклим, якщо:

а) $A(-3,5), \ B(-1,-4), \ C(7,-1), \ D(2,9)$;

б) $A(-1,6), \ B(1,-3), \ C(4,10), \ D(9,0)$.

7.9. Знайти відстань між паралельними прямими $Ax+By+C_1=0$ та $Ax+By+C_2=0$.

7.10. Довести, що задані прямі паралельні і знайти відстань між ними:

а) $-x+y+4=0$ і $2x-2y+3=0$;

б) $-5x+y-6=0$ і $-15x+3y+12=0$;

в) $-6x + 2y + 8 = 0$ і $3x - y + 5 = 0$;

г) $-12x + 24y + 36 = 0$ і $2x - 4y + 1 = 0$;

д) $3x - 4y + 1 = 0$ і $\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 3t; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -3 + 2t; \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 5 - 4t. \end{cases}$

7.11. Дві сторони квадрата лежать на прямих γ_1 і γ_2. Знайти площу квадрата, якщо:

а) $\gamma_1 : -5x - 5y + 2 = 0$, $\gamma_2 : 10x + 10y + 1 = 0$;

б) $\gamma_1 : x + 3y + 2 = 0$, $\gamma_2 : 3x + 9y + 2 = 0$.

7.12. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює d.

7.13. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до прямої γ дорівнює d, якщо:

а) $d = 2\sqrt{5}$, $\gamma : -x - 2y + 7 = 0$;

б) $d = \sqrt{10}$, $\gamma : -3x + 9y + 5 = 0$.

7.14. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней від яких до двох паралельних прямих $Ax + By + C_1 = 0$ і $Ax + By + C_2 = 0$ дорівнює $k > 0$.

7.15. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддаленого від двох паралельних прямих γ_1 і γ_2, якщо:

а) $\gamma_1 : 5x - y + 6 = 0$, $\gamma_2 : -15x + 3y + 2 = 0$;

б) $\gamma_1 : 4x - 7y + 7 = 0,\ \gamma_2 : 8x - 14y - 3 = 0.$

7.16. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней від яких до двох паралельних прямих γ_1 і γ_2 дорівнює k, якщо:

а) $k = 2,\ \gamma_1 : 12x - 4y + 3 = 0,\ \gamma_2 : -3x + y - 1 = 0;$

б) $k = 3,\ \gamma_1 : -2x + 4y + 3 = 0,\ \gamma_2 : 6x - 12y + 5 = 0.$

7.17. Задано три паралельні прямі $\gamma_i : Ax + By + C_i = 0,\ i = 1, 2, 3$. За якої умови пряма γ_2 лежить в смузі між прямими γ_1 і γ_3? Визначити, за цієї умови, в якому відношенні γ_2 ділить відстань між γ_1 і γ_3?

7.18. Задано три паралельні прямі γ_1, γ_2 і γ_3. Визначити, яка з прямих лежить між двома іншими і у якому відношенні вона ділить відстань між ними, якщо:

а) $\gamma_1 : -2x + 3y - 2 = 0,\ \gamma_2 : 12x - 18y + 7 = 0,$
$\gamma_3 : -6x + 9y - 14 = 0;$

б) $\gamma_1 : 8x - 2y + 3 = 0,\ \gamma_2 : 4x - y - 8 = 0,$
$\gamma_3 : -20x + 5y + 9 = 0.$

7.19. Визначити, за якої умови точки $M\,(x_1, y_1)$ і $N\,(x_2, y_2)$ лежать в одному, в суміжних чи у вертикальних кутах, утворених при перетині прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

7.20. Визначити, чи лежать точки M і N в одному, в суміжних чи у вертикальних кутах, утворених при перетині прямих γ_1 і γ_2, якщо:

а) $M\,(1, -6)\,,\ N\,(4, 6)\ \gamma_1 : 2x + 2y - 1 = 0,\ \gamma_2 : 4x - y + 1 = 0;$

б) $M\,(-2, 6)\,,\ N\,(0, 5)\ \gamma_1 : 8x - 3y + 8 = 0,\ \gamma_2 : 5x - 6y + 7 = 0;$

в) $M\,(-1, 7)\,,\ N\,(2, -8)\ \gamma_1 : x + 5y + 5 = 0,\ \gamma_2 : 9x + 9y - 1 = 0;$

г) $M\,(1,-3)\,,\;N\,(8,7)\;\gamma_1 : 3x+5y-1=0,\;\;\gamma_2 : 2x-y+6=0.$

7.21. Задано дві перетинні, не перпендикулярні прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, а також точка $M(x_0,y_0)$, яка не належить жодній з цих прямих. Знайти косинус того кута між даними прямими, в якому лежить точка M.

7.22. Знайти кут між прямими γ_1 і γ_2, в якому лежить точка M, якщо:

а) $M\,(1,1)\,,\;\gamma_1 : -x+2=0,\;\;\gamma_2 : x-y+3=0;$

б) $M\,(-1,2)\,,\;\gamma_1 : 9x+3y+1=0,\;\;\gamma_2 : 4y+3=0;$

в) $M\,(1,0)\,,\;\gamma_1 : 5x-y-8=0,\;\;\gamma_2 : 7x+y-8=0.$

7.23. Вказати умови необхідні и достатні для того, щоб точка $M\,(x_0,y_0)$ лежала всередині трикутника, сторони якого лежать на прямих $A_ix+B_iy+C_i=0, i=1,2,3.$

7.24. Визначити, чи лежить точка M всередині трикутника, сторони якого лежать на прямих γ_1, γ_2 і γ_3, якщо:

а) $M\,(-1,0)\,,\;\gamma_1 : 3y+4=0,\;\;\gamma_2 : 4x+y+2=0,\;\;\gamma_3 : x+3=0;$

б) $M\,(1,-1)\,,\;\gamma_1 : 2x+5=0,\;\;\gamma_2 : x+2y=0,\;\;\gamma_3 : 3x+5y-1=0;$

в) $M\,(1,0)\,,\;\gamma_1 : 7x+y+1=0,\;\;\gamma_2 : -3x+8y-4=0,\;\;\gamma_3 : x+y=0;$

г) $M\,(0,1)\,,\;\gamma_1 : 2x-3y-1=0,\;\;\gamma_2 : x-6y+8=0,\;\;\gamma_3 : 5x-3y+9=0.$

7.25. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома перетинними прямими $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$.

7.26. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома перетинними прямими:

а) $x - 3y + 5 = 0$ і $3x - y - 2 = 0$;

б) $3x + 4y - 1 = 0$ і $5x + 12y - 2 = 0$;

в) $3x - 6y - 7 = 0$ і $4x - 3y + 2 = 0$;

г) $2x - 3y + 6 = 0$ і $6x - 2y - 9 = 0$.

7.27. Скласти рівняння бісектриси гострого кута, який утворений двома перетинними прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

7.28. Скласти рівняння бісектриси гострого кута, який утворений двома перетинними прямими:

а) $x - 7y - 3 = 0$ і $4x + 4y - 1 = 0$;

б) $2x + y - 2 = 0$ і $3x + 4y - 5 = 0$.

7.29. Скласти рівняння бісектриси тупого кута, який утворений двома перетинними прямими:

а) $3x - y + 5 = 0$ і $2x - 6y + 3 = 0$;

б) $x - 8y + 2 = 0$ і $2x + 4y - 1 = 0$.

7.30. Скласти рівняння бісектриси того кута, утвореного двома перетинними прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, в якому лежить точка $M(x_0, y_0)$.

7.31. Скласти рівняння бісектриси того кута, утвореного двома перетинними прямими γ_1 і γ_2, в якому лежить точка M, якщо:

а) $M(1, 0)$, $\gamma_1 : 3x + 4y - 6 = 0$, і $\gamma_2 : 5x - 12y + 8 = 0$;

б) $M(0, 1)$, $\gamma_1 : x - 3y + 2 = 0$, і $\gamma_2 : 15x - 5y + 1 = 0$;

в) $M\,(1,1)\,,\ \ \gamma_1 : 6x - 3y + 2 = 0,$ і $\gamma_2 : x - 2y - 4 = 0;$

г) $M\,(-1,-2)\,,\ \ \gamma_1 : 2x - 6y - 3 = 0,$ і $\gamma_2 : -4x + 8y + 1 = 0.$

Нормальне рівняння площини в просторі

7.32. Знайти відхилення δ і відстань d від точки M до площини α. В одній чи в різних півпросторах відносно α лежать початок координат і точка M?

а) $M(3,1,1), \quad \alpha : x - 4 = 0;$

б) $M(-3,-1,2), \quad \alpha : 2y + 3 = 0;$

в) $M(-6,1,2), \quad \alpha : 3z - 1 = 0;$

г) $M(-5,-8,1), \quad \alpha : 2x + 2y - z = 0;$

д) $M(2,1,-1), \quad \alpha : 4x - 3z + 9 = 0;$

е) $M(-1,1,-1), \quad \alpha : 10x - 4y + 3z - 4 = 0;$

є) $M(-8,9,-9), \quad \alpha : 5x - y - 8z + 7 = 0;$

ж) $M(4,-1,2), \quad \alpha : 3x - y - 5z - 2 = 0.$

7.33. Точка M є вершиною куба, одна із граней якого лежить на площині α. Знайти об'єм куба, якщо:

а) $M(1,9,-1),\ \ \alpha : x - y - 5z - 6 = 0;$

б) $M(3,1,-10),\ \ \alpha : 4x + 5y - 3z + 3 = 0.$

7.34. Точка M є вершиною паралелепіпеда, три грані якого лежать на площинах α_1, α_2 і α_3. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо:

а) $M(2,-8,1),\ \ \alpha_1 : x + y + z - 4 = 0,\ \ \alpha_2 : -x + 2y - z + 11 = 0,$
$\alpha_3 : 2x - 2z + 1 = 0;$

б) $M(4,1,-2)$, $\alpha_1 : x - 2y + 3z - 3 = 0$, $\alpha_2 : 3x - z - 2 = 0$,
$\alpha_3 : x + 5y + 3z + 1 = 0$.

7.35. Задано точки M, N і площина α. Визначити, чи перетинає площина α відрізок MN, його продовження за точку M або за точку N, якщо:

а) $M(7,-3,0)$, $N(-3,-6,3)$, $\alpha : 2x + 7 = 0$;

б) $M(4,-1,1)$, $N(-3,0,-2)$, $\alpha : 2y - 9z - 9 = 0$;

в) $M(1,-3,3)$, $N(2,1,3)$, $\alpha : x + 5z - 15 = 0$;

г) $M(-4,-4,0)$, $N(-5,5,-5)$, $\alpha : 2x - 2y - 3z + 2 = 0$;

д) $M(4,3,-5)$, $N(1,3,-8)$, $\alpha : x - 4y + 4z + 9 = 0$;

е) $M(1,-2,2)$, $N(1,1,1)$, $\alpha : 3x + 7y - 8z + 8 = 0$;

є) $M(5,-1,2)$, $N(3,-1,-1)$, $\alpha : 4x + 5y + z + 1 = 0$.

7.36. Дві паралельні площини $\alpha_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ і $\alpha_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ділять простір на три області: шар Δ, який лежить між заданими площинами, і дві області ззовні шару. Позначимо через Δ_1 область, яка прилягає до α_1, через Δ_2, — яка прилягає до α_2. За якої умови точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежить в шарі Δ? в області Δ_1? в області Δ_2?

7.37. Визначити, якій області, Δ, Δ_1 або Δ_2 (див. позначення в задачі 7.36) належить точка M, якщо:

а) $M(7,-1,1)$, $\alpha_1 : x - 4y + 4z - 5 = 0$,
$\alpha_2 : -2x + 8y - 8z + 3 = 0$;

б) $M(1,-2,1)$, $\alpha_1 : -2x + 3y + 10z + 4 = 0$,
$\alpha_2 : 2x - 3y - 10z + 5 = 0$;

в) $M(-2,3,1)$, $\alpha_1 : -3x+6y-3z+2=0$,
$\alpha_2 : x-2y+z+6=0$.

7.38. Знайти відстань між паралельними площинами $Ax+By+Cz+D_1=0$ і $Ax+By+Cz+D_2=0$.

7.39. Довести, що задані площини паралельні і знайти відстань між ними:

а) $-4x+3y-6=0$ і $12x-9y-2=0$;

б) $4y+8z+5=0$ і $-2y-4z+7=0$;

в) $-x-7y+2z-7=0$ і $x+7y-2z+1=0$;

г) $2x-y+5z-1=0$ і $-4x+2y-10z-13=0$.

7.40. Дві грані кубу лежать на площинах α_1 і α_2. Знайти об'єм кубу, якщо ;

а) $\alpha_1 : 5x-12z+4=0$, $\alpha_2 : -5x+12z+9=0$;

б) $\alpha_1 : x-5y-8z-6=0$, $\alpha_2 : -2x+10y+16z+3=0$.

7.41. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до площини $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює d.

7.42. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до площини α дорівнює d, якщо:

а) $d=2$, $\alpha : 3x-6y+2z+9=0$;

б) $d=\sqrt{6}$, $\gamma : -x+2y+z+10=0$.

7.43. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней від яких до двох паралельних площин $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ і $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ дорівнює $k > 0$.

7.44. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддаленого від двох паралельних площин α_1 і α_2, якщо:

а) $\alpha_1 : -x + 4z + 1 = 0,\ \alpha_2 : 5x - 20z + 7 = 0$;

б) $\alpha_1 : 3x + y + 8z - 2 = 0,\ \alpha_2 : 9x + 3y + 24z - 8 = 0$.

7.45. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней від яких до двох паралельних площин α_1 і α_2 дорівнює k, якщо:

а) $k = 2,\ \alpha_1 : -x + 3y + 9z - 4 = 0,\ \alpha_2 : 2x - 6y - 18z + 5 = 0$;

б) $k = 3,\ \alpha_1 : 8x - y + 4z - 8 = 0,\ \alpha_2 : -8x + y - 4z + 4 = 0$.

7.46. Задано три паралельні площини $\alpha_i : Ax + By + Cz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. За якої умови площина α_2 лежить в шарі між площинами α_1 і α_3? Визначити, за цієї умови, в якому відношенні α_2 ділить відстань між α_1 і α_3?

7.47. Задано три паралельні площини α_1, α_2 і α_3. Визначити, яка з площин лежить між двома іншими і у якому відношенні вона ділить відстань між ними, якщо:

а) $\alpha_1 : 12x + 4y + 24z + 3 = 0,\ \alpha_2 : 3x + y + 6z - 3 = 0,$
$\alpha_3 : -3x - y - 6z - 6 = 0$;

б) $\alpha_1 : 2x + 5y - z - 7 = 0,\ \alpha_2 : -4x - 10y + 2z + 5 = 0,$
$\alpha_3 : 6x + 15y - 3z + 5 = 0$.

7.48. Визначити, за якої умови точки $M\,(x_1, y_1, z_1)$ і $N\,(x_2, y_2, z_2)$ лежать в одному, в суміжних чи у вертикальних двогранних кутах, утворених при перетині площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

7.49. Визначити, чи лежать точки M і N в одному, в суміжних чи у вертикальних двогранних кутах, утворених при перетині площин α_1 і α_2, якщо:

а) $M\,(1,0,3)\,,\ N\,(1,1,1)\,,\ \alpha_1 : x+3y-4z+8=0,$
$\alpha_2 : 3x+5y-6z+4=0;$

б) $M\,(1,-3,1)\,,\ N\,(3,0,7)\,,\ \alpha_1 : 7x-4y-4=0,$
$\alpha_2 : 2x+5y-z-3=0;$

в) $M\,(1,1,-3)\,,\ N\,(1,-5,0)\,,\ \alpha_1 : -x+y+3z+3=0,$
$\alpha_2 : 2x+y+4z-8=0;$

г) $M\,(1,-1,0)\,,\ N\,(0,1,1)\,,\ \alpha_1 : 6x-4y+z+4=0,$
$\alpha_2 : -5x+3y+4z+7=0.$

7.50. Задано дві перетинні, не перпендикулярні площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, а також точка $M(x_0, y_0, z_0)$, яка не належить жодній з цих площин. Знайти косинус того кута між даними прямими, в якому лежить точка M.

7.51. Знайти кут між площинами α_1 і α_2, в якому лежить точка M, якщо:

а) $M\,(1,1,-1)\,,\ \alpha_1 : 3x-4z+2=0,\ \ \alpha_2 : 2x+2y-z-3=0;$

б) $M\,(1,-3,-2)\,,\ \alpha_1 : 2x-y+3z-2=0,$
$\alpha_2 : 4x-2y+2z+1=0;$

в) $M\,(0,1,0)\,,\ \alpha_1 : x-y+5z-4=0,\ \ \alpha_2 : 3x+y+5z+1=0.$

7.52. Вказати необхідну и достатню умову того, що точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежить всередині тетраедра, сторони якого лежать на площинах $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = \overline{1, 4}$.

7.53. Визначити, чи лежить точка M всередині тетраедра, сторони якого лежать на площинах α_1, α_2, α_3 і α_4, якщо:

а) $M(1, 0, 0)$, $\alpha_1 : x - y + 2z - 4 = 0$, $\alpha_2 : x + 7y + 1 = 0$, $\alpha_3 : 2x + y + z + 1 = 0$, $\alpha_4 : x + 2y - 2 = 0$;

б) $M(0, 1, -3)$, $\alpha_1 : -x + 5z - 1 = 0$, $\alpha_2 : y + z + 1 = 0$, $\alpha_3 : x - 4z = 0$, $\alpha_4 : x + y + 2z + 1 = 0$;

в) $M(1, 0, 1)$, $\alpha_1 : 2x - 1 = 0$, $\alpha_2 : 3x - y - 2z + 1 = 0$, $\alpha_3 : 2y + 3z + 4 = 0$, $\alpha_4 : x + z - 3 = 0$.

7.54. Скласти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених двома перетинними площинами $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

7.55. Скласти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених двома перетинними площинами:

а) $x - 4y + 4z + 4 = 0$ і $5x + 2y + 2z + 10 = 0$;

б) $2x - 5y - 5z - 4 = 0$ і $7x - 2y + z + 2 = 0$;

в) $x + y - 4z + 5 = 0$ і $3x + z - 2 = 0$;

г) $5x - 3y - 4z + 1 = 0$ і $6x + 3y - 5z + 3 = 0$.

7.56. Скласти рівняння бісекторної площини гострого двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

7.57. Скласти рівняння бісекторної площини гострого двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами:

а) $x - 2y + 5z + 6 = 0$ і $4x - 10y + 2z + 7 = 0$;

б) $-3x + y + z + 2 = 0$ і $6x - 9y - 2z + 1 = 0$.

7.58. Скласти рівняння бісекторної площини тупого двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами:

а) $2x - 2y + z + 1 = 0$ і $3x - 6y + 2z + 2 = 0$;

б) $5x - 3y + 6z - 2 = 0$ і $2x - 3y - 8z - 4 = 0$.

7.59. Скласти рівняння бісекторної площини того двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, в якому лежить точка $M(x_0, y_0, z_0)$.

7.60. Скласти рівняння бісекторної площини того двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами α_1 і α_2, в якому лежит точка M, якщо:

а) $M(0,1,0)$, $\alpha_1 : 2x - 7y - 2z - 5 = 0$, $a_2 : 7x + 2y - 2z + 9 = 0$;

б) $M(1,0,0)$, $\alpha_1 : 3x - y - z + 2 = 0$, $a_2 : 3x + 9y - 3z + 7 = 0$;

в) $M(1,1,1)$, $\alpha_1 : 6x + 9y + 2z - 3 = 0$, $a_2 : 2x + 6y + 3z - 2 = 0$;

г) $M(1,0,1)$, $\alpha_1 : y + 3z + 10 = 0$, $a_2 : x + y + 2z - 9 = 0$.

8 Криві другого порядку

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Коло. Рівняння кола. Координати центра, радіус кола.

2. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса. Фокуси, їх координати. Довжини фокальних радіусів довільної точки еліпса. Ексцентриситет еліпса, рівняння директрис. Властивості еліпса як геометричного місця точок. Рівняння дотичної до еліпса.

3. Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи. Фокуси, їх координати. Довжини фокальних радіусів довільної точки гіперболи. Асимптоти гіперболи,їх рівняння. Ексцентриситет гіперболи, рівняння директрис. Властивості гіперболи як геометричного місця точок. Рівняння дотичної до гіперболи.

4. Парабола. Канонічне рівняння параболи. Фокус параболи, рівняння директриси. Довжина фокального радіуса довільної точки параболи. Ексцентриситет параболи. Властивість параболи як геометричного місця точок. Рівняння дотичної до параболи.

5. Рівняння кривих другого порядку в полярній системі координат.

6. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду.

Приклади розв'язання задач

Приклад 8.1. Знайти велику, малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис наступних еліпсів і зобразити їх на рисунку, знайти фокальні радіуси точки M, якщо

а) $36x^2 + 100y^2 = 3600, \quad M\left(-5, 3\sqrt{3}\right);$

б) $100x^2 + 36y^2 = 3600, \quad M\left(3\sqrt{3}, 5\right).$

Розв'язання. а) Запишемо рівняння заданого еліпса в канонічному виді

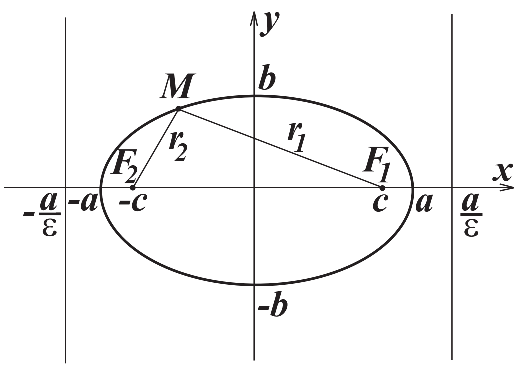
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

звідки $a^2 = 100$, $b^2 = 36$. Таким чином, $a = 10$ — велика піввісь еліпса, $b = 6$ — мала піввісь еліпса.

Для знаходження координат фокусів скористаємося співвідношенням $c^2 = a^2 - b^2$, звідки $c^2 = 100 - 36 = 64$, $c = 8$. Фокуси еліпса мають такі координати $F_1(8, 0)$, $F_2(-8, 0)$.

Ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$.

Рівняння директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{25}{2}$.



Фокальні радіуси точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = -5$, $y_0 = 3\sqrt{3}$) дорівнюють

$$r_1 = F_1M = a - \varepsilon x_0 = 10 - \frac{4}{5} \cdot (-5) = 14,$$

$$r_2 = F_2M = a + \varepsilon x_0 = 10 + \frac{4}{5} \cdot (-5) = 6.$$

б) Запишемо рівняння заданого еліпса в канонічному виді

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1,$$

звідки $a^2 = 36$, $b^2 = 100$. Таким чином, $a = 6$ — мала піввісь еліпса, $b = 10$ — велика піввісь еліпса.

Для знаходження координат фокусів скористаємося співвідношенням $c^2 = b^2 - a^2$, звідки $c^2 = 100 - 36 = 64$, $c = 8$. Фокуси еліпса мають такі координати $F_1(0, 8)$, $F_2(0, -8)$.

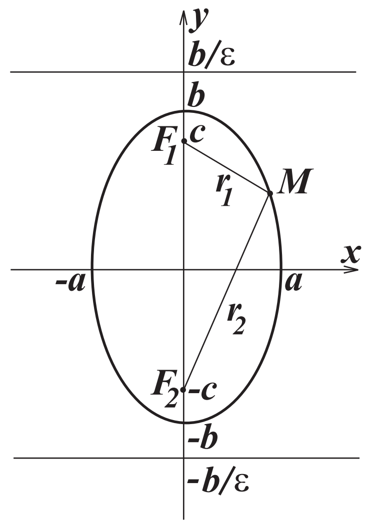
Ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{4}{5}$.

Рівняння директрис: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon} = \pm\dfrac{25}{2}$.

Фокальні радіуси точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = 3\sqrt{3}$, $y_0 = 5$) дорівнюють

$$r_1 = F_1M = b - \varepsilon y_0 = 10 - \frac{4}{5} \cdot 5 = 6,$$

$$r_2 = F_2M = b + \varepsilon y_0 = 10 + \frac{4}{5} \cdot 5 = 14.$$



Приклад 8.2. Знайти дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис наступних гіпербол і зобразити їх на рисунку, знайти фокальні радіуси точки M, якщо

а) $64x^2 - 36y^2 = 2304, \qquad M\left(9, 4\sqrt{5}\right);$

б) $-64x^2 + 36y^2 = 2304, \qquad M\left(-3\sqrt{5}, -12\right).$

Розв'язання. а) Запишемо рівняння заданої гіперболи в канонічному виді

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1,$$

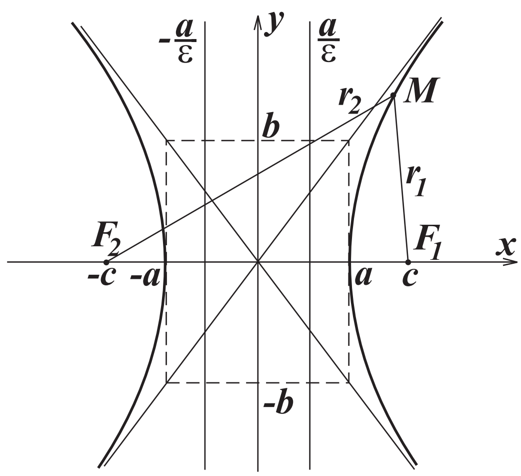
звідки $a^2 = 36$, $b^2 = 64$. Таким чином, $a = 6$ — дійсна піввісь гіперболи, $b = 8$ — уявна піввісь гіперболи.

Для знаходження координат фокусів скористаємося співвідношенням $c^2 = a^2 + b^2$, звідки $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = 10$. Фокуси еліпса мають такі координати $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$.

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{4}{3}x$.

Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$.

Рівняння директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{18}{5}$.



Фокальні радіуси точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = 9$, $y_0 = 4\sqrt{5}$) дорівнюють

$$r_1 = F_1M = \varepsilon x_0 - a = \frac{5}{3} \cdot 9 - 6 = 9,$$

$$r_2 = F_2M = \varepsilon x_0 + a = \frac{5}{3} \cdot 9 + 6 = 21.$$

б) Запишемо рівняння заданої гіперболи в канонічному виді

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1,$$

звідки $a^2 = 36$, $b^2 = 64$. Таким чином, $a = 6$ — уявна піввісь гіперболи, $b = 8$ — дійсна піввісь гіперболи.

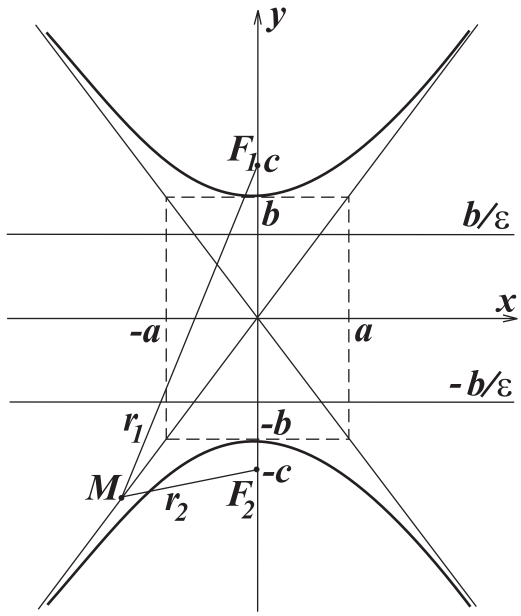
Для знаходження координат фокусів скористаємося співвідношенням $c^2 = a^2 + b^2$, звідки $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = 10$. Фокуси еліпса мають такі координати $F_1(0, 10)$, $F_2(0, -10)$.

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$.

Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$.

Рівняння директрис: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{32}{5}$.

Фокальні радіуси точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = -3\sqrt{5}$, $y_0 =$



$-12)$ дорівнюють

$$r_1 = F_1M = |\varepsilon y_0 - b| = \left|\frac{5}{4}\cdot(-12) - 8\right| = 23,$$

$$r_2 = F_2M = |\varepsilon y_0 + b| = \left|\frac{5}{4}\cdot(-12) + 8\right| = 7.$$

Приклад 8.3. Визначити величину параметра, координати фокуса, рівняння директриси наступних парабол і зобразити їх на рисунку, знайти фокальні радіуси точки M, якщо

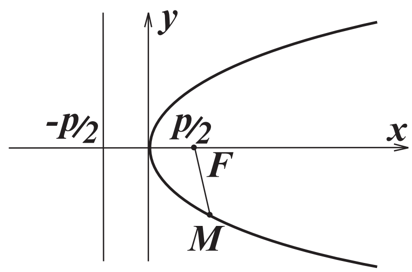
а) $y^2 = 12x, \quad M\left(4, -4\sqrt{3}\right);$ б) $y^2 = -12x, \quad M\left(-4, 4\sqrt{3}\right);$

в) $x^2 = 12y, \quad M\left(6\sqrt{2}, 6\right);$

г) $x^2 = -12y, \quad M\left(-6\sqrt{2}, -6\right).$

Розв'язання. а) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$, звідки $2p = 12$, $p = 6$ — параметр заданої параболи.

Фокус параболи має координати $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, звідки $F(3,0)$.

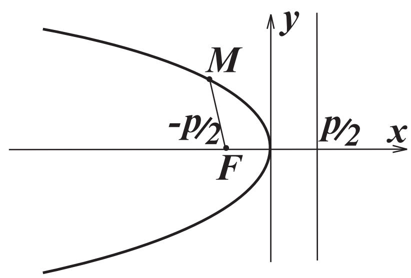


Рівняння директриси: $x = -\dfrac{p}{2} = -3$.

Фокальний радіус точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = 4$, $y_0 = -4\sqrt{3}$) дорівнює

$$r = FM = MK = x_0 + \frac{p}{2} = 4 + 3 = 7.$$

б) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = -2px$, звідки $2p = 12$, $p = 6$ — параметр заданої параболи.



Фокус параболи має координати $F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$, звідки $F(-3, 0)$.

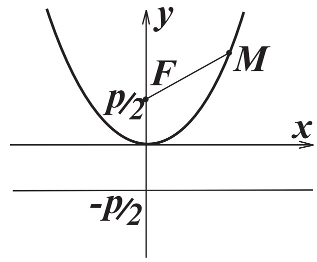
Рівняння директриси: $x = \dfrac{p}{2} = 3$.

Фокальний радіус точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = -4$, $y_0 = 4\sqrt{3}$) дорівнює

$$r = FM = MK = \left|x_0 - \frac{p}{2}\right| = |-4 - 3| = 7.$$

в) Канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$, звідки $2p = 12$, $p = 6$ — параметр заданої параболи.

Фокус параболи має координати $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$, звідки $F(0, 3)$.

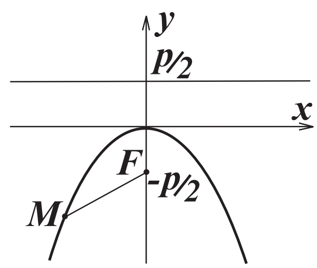


Рівняння директриси: $y = -\dfrac{p}{2} = -3.$

Фокальний радіус точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = 6\sqrt{2}$, $y_0 = 6$) дорівнює

$$r = FM = MK = y_0 + \frac{p}{2} = 6 + 3 = 9.$$

г) Канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = -2py$, звідки $2p = 12$, $p = 6$ — параметр заданої параболи.



Фокус параболи має координати $F\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$, звідки $F(0, -3)$.

Рівняння директриси: $y = \dfrac{p}{2} = 3.$

Фокальний радіус точки $M(x_0, y_0)$ (в нашій ситуації $x_0 = -6\sqrt{2}$, $y_0 = -6$) дорівнює

$$r = FM = MK = \left|y_0 - \frac{p}{2}\right| = |-6 - 3| = 9.$$

Приклад 8.4. а) Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо сума довжин осей дорівнює 16, а відстань між фокусами дорівнює 8;

б) скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що точка $M\left(12, 3\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі і рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{x}{2}$;

в) скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, яка проходить через початок координат і точку $M\left(1, -4\right)$.

<u>Розв'язання</u>. а) Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

оскільки фокуси еліпса F_1 та F_2 знаходяться на осі Ox симетрично відносно початку координат.

За умовою $2a+2b = 16$, звідки $a = 8-b$. Також задано, що $2c = 8$, тому $c = 4$. Величини a, b і c пов'язані між собою співвідношенням $a^2 = b^2+c^2$, тобто $(8-b)^2 = b^2 + 16$. Розв'язавши рівняння, отримаємо, що $b = 3$, $a = 8 - 3 = 5$.

Таким чином, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

б) Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

оскільки фокуси еліпса F_1 та F_2 знаходяться на осі Ox симетрично відносно початку координат. Точка M належить гіперболі, тому $\dfrac{144}{a^2} - \dfrac{27}{b^2} = 1$.

Відомо, що рівняння асимптот гіперболи дорівнюють $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, звідки $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$ або $a = 2b$. Таким чином, для двох невідомих параметрів a і b маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{144}{a^2} - \dfrac{27}{b^2} = 1, \\ a = 2b. \end{cases}$$

Підставивши вираз для a з другого рівняння в перше, отримаємо $\dfrac{144}{4b^2} - \dfrac{27}{b^2} = 1$, звідки $b^2 = 9$ або $b = 3$, $a = 2b = 6$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

в) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$, оскільки парабола, симетрична відносно осі Ox і проходить через початок координат.

За умовою координати точки $M\,(1, -4)$ задовольняють рівняння параболи, тобто $16 = 2p$ або $p = 8$. Таким чином, рівняння параболи має вигляд $y^2 = 16x$.

Приклад 8.5. а) Скласти рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від яких до точок $F_1\,(1, -1)$ і $F_2\,(-1, 1)$ є величина стала і дорівнює 4;

б) скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від точки $F\,(1, 1)$ до відстані до прямої $d : x + y = 0$ є величина стала і дорівнює 2;

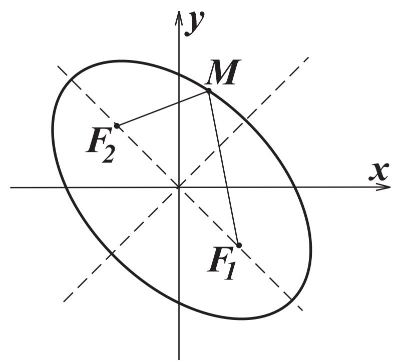
в) скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F\,(1, 0)$ і прямої $d : x - y = 0$.

В кожному з пунктів а)-в) вказати тип геометричної фігури.

Розв'язання. а) Нагадаємо, що еліпс — це геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів еліпса F_1 і F_2) є величина стала і дорівнює $2a = 4$ (довжині великої осі еліпса). Це означає, що задане геометричне місце точок — еліпс. Крім того, деяка точка площини $M\,(x, y)$ належить шуканому еліпсу тоді і тільки тоді, коли $F_1M + F_2M = 4$ або $F_1M = 4 - F_2M$.

Запишемо останню умову через координати точок M, F_1 і F_2 :

$$\sqrt{(1-x)^2 + (-1-y)^2} = 4 - \sqrt{(-1-x)^2 + (1-y)^2}.$$



Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і розкриємо дужки:

$$1 - 2x + x^2 + 1 + 2y + y^2 =$$
$$= 16 - 8\sqrt{2 + 2x - 2y + x^2 + y^2} + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2.$$

Зведемо подібні доданки

$$8\sqrt{2 + 2x - 2y + x^2 + y^2} = 16 + 4x - 4y.$$

Скоротимо обидві частини рівності на 4, піднесемо до квадрату і розкриємо дужки:

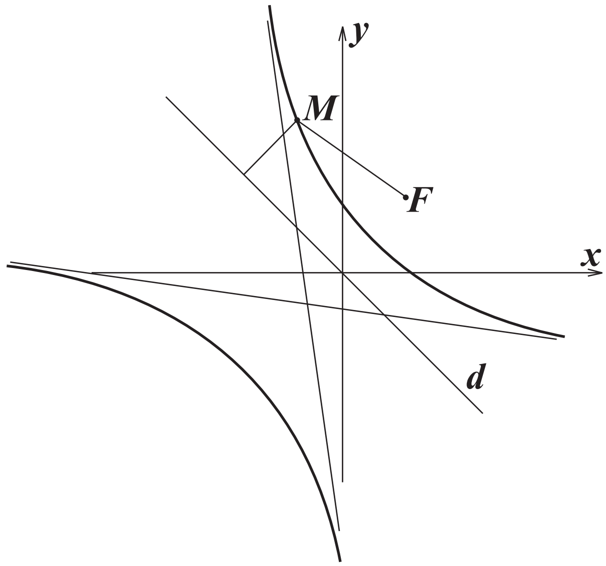
$$4(2 + 2x - 2y + x^2 + y^2) = 16 + x^2 + y^2 + 8x - 8y - 2xy.$$

Звівши подібні доданки, отримаємо шукане рівняння:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8.$$

б) Нагадаємо, що крива другого порядку (еліпс, гіпербола або парабола) — це геометричне місце точок, відношення відстані від яких до деякої точки (фокуса F кривої) до відстані до деякої прямої (директриси d, яка відповідає фокусу F) є величина стала і дорівнює ексцентриситету кривої другого порядку. За умовою це відношення дорівнює 2, тобто ексцентриситет невідомої кривої більше за 1. Це означає, що задане геометричне місце точок — гіпербола.

Деяка точка площини $M\,(x, y)$ належить шуканій гіперболі тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{FM}{\operatorname{dist}(M, d)} = 2$ або $FM = 2\operatorname{dist}(M, d)$. Запишемо



останню умову через координати точок M і F :

$$\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2} = 2\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і розкриємо дужки:

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{2}.$$

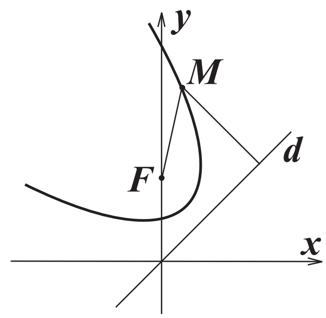
Звівши подібні доданки, отримаємо шукане рівняння:

$$x^2+y^2+4xy+2x+2y-2=0.$$

в) Нагадаємо, що парабола — це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки (фокуса параболи) і заданої прямої (директриси параболи). Це означає, що задане геометричне місце точок — парабола. Крім того, деяка точка площини $M\,(x,y)$ належить шуканій параболі тоді і тільки тоді, коли $FM = \operatorname{dist}(M,d)$.

Запишемо останню умову через координати точок M і F :

$$\sqrt{(1-x)^2+(0-y)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}.$$



Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і розкриємо дужки:

$$1 - 2x + x^2 + y^2 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2}.$$

Звівши подібні доданки, отримаємо шукане рівняння:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 2 = 0.$$

Приклад 8.6. Скласти полярне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в

(а) лівому фокусі еліпса; (б) правому фокусі еліпса.

Розв'язання. Нехай F — це фокус еліпса

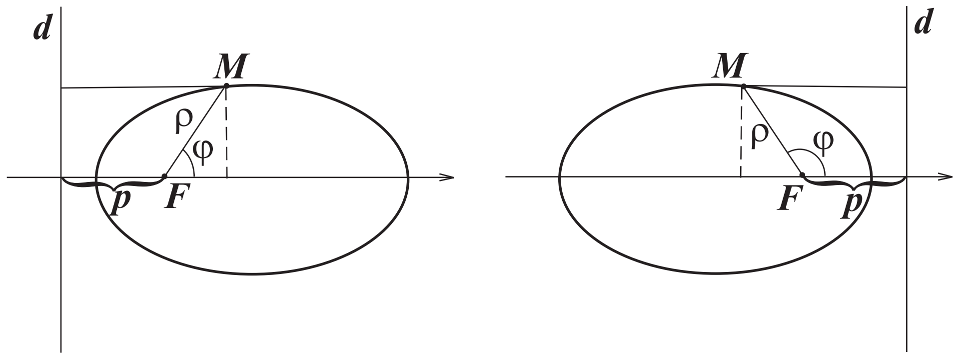
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

в якому знаходиться полюс, d — директриса, яка відповідає цьому фокусу. Позначимо через p параметр еліпса, тобто $p = \operatorname{dist}(F, d)$. Виразимо p через значення a і b :

$$p = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Деяка точка площини $M(\rho, \varphi)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{FM}{\operatorname{dist}(M, d)} = \varepsilon$ або

$$FM = \varepsilon \operatorname{dist}(M, d).$$



Оскільки $FM = \rho$,

$$\operatorname{dist}(M, d) = \begin{cases} p + \rho\cos\varphi, & \text{якщо } F \text{ — лівий фокус,} \\ p - \rho\cos\varphi, & \text{якщо } F \text{ — правий фокус,} \end{cases}$$

тоді M належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = \varepsilon\,(p \pm \rho\cos\varphi)$$

або

$$\rho = \frac{p\,\varepsilon}{1 \mp \varepsilon\cos\varphi},$$

причому знак $'-'$ $('+')$ береться в ситуації, коли полюс знаходиться в лівому (правому) фокусі еліпса.

Параметр еліпса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ дорівнює

$$p = \frac{36}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{9}{2},$$

його екцентриситет дорівнює

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5}, \qquad p\,\varepsilon = \frac{18}{5}.$$

Тоді полярне рівняння заданого еліпса має вигляд:

а) $\rho = \dfrac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ або $\rho = \dfrac{18/5}{1 - (4/5)\cos\varphi}$.

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = \dfrac{18}{5 - 4\cos\varphi}$.

б) $\rho = \dfrac{p\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ або $\rho = \dfrac{18/5}{1 + (4/5)\cos\varphi}$.

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = \dfrac{18}{5 + 4\cos\varphi}$.

<u>Приклад</u> 8.7. Скласти полярне рівняння кожної гілки гіперболи $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в

а) правому фокусі гіперболи; б) лівому фокусі гіперболи.

<u>Розв'язання</u>. Нехай F — це фокус гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

в якому знаходиться полюс, d — директриса, яка відповідає цьому фокусу. Позначимо через p параметр гіперболи, тобто $p = \operatorname{dist}(F, d)$. Виразимо p через значення a і b :

$$p = c - \frac{a}{\varepsilon} = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

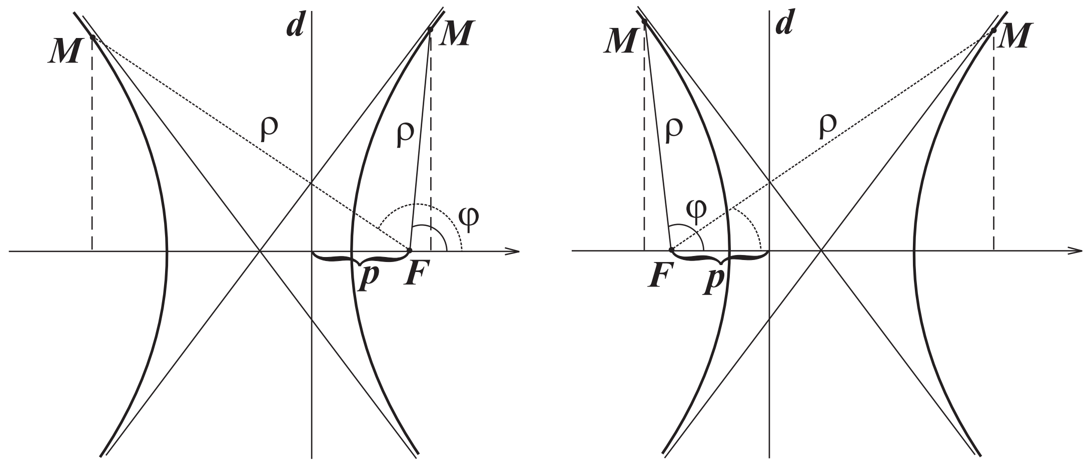
Деяка точка площини $M(\rho, \varphi)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{FM}{\operatorname{dist}(M, d)} = \varepsilon$ або $FM = \varepsilon \operatorname{dist}(M, d)$.

Оскільки $FM = \rho$, а вираз для $\operatorname{dist}(M, d)$ має різний вигляд для кожної гілки гіперболи, а саме, для правої гілки гіперболи

$$\operatorname{dist}(M, d) = \begin{cases} \rho\cos\varphi + p, \text{ якщо } F \text{ — правий фокус,} \\ \rho\cos\varphi - p, \text{ якщо } F \text{ — лівий фокус,} \end{cases}$$

для лівої гілки гіперболи

$$\operatorname{dist}(M, d) = \begin{cases} -p - \rho\cos\varphi, \text{ якщо } F \text{ — правий фокус,} \\ \;\; p - \rho\cos\varphi, \text{ якщо } F \text{ — лівий фокус.} \end{cases}$$



Тоді точка M належить правій гілці гіперболи тоді і тільки тоді, коли $\rho = \varepsilon\,(\rho\cos\varphi \pm p)$ або

$$\rho = \mp\frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi - 1}.$$

Точка M належить лівій гілці гіперболи тоді і тільки тоді, коли $\rho = \varepsilon\,(-\rho\cos\varphi \mp p)$ або

$$\rho = \mp\frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi + 1}.$$

В кожному випадку знак $'-'$ $('+')$ береться в ситуації, коли полюс знаходиться в правому (лівому) фокусі гіперболи.

Параметр гіперболи $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ дорівнює

$$p = \frac{36}{\sqrt{64+36}} = \frac{18}{5},$$

її екцентриситет дорівнює

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{5}{4}, \qquad p\,\varepsilon = \frac{9}{2}.$$

Тоді полярне рівняння заданої гіперболи має вигляд:

а) для правої гілки:

$$\rho = -\frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi - 1} \quad \text{або} \quad \rho = -\frac{9/2}{(5/4)\cos\varphi - 1}.$$

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = \dfrac{18}{4 - 5\cos\varphi}$.

Для лівої гілки:

$$\rho = -\frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi + 1} \quad \text{або} \quad \rho = -\frac{9/2}{(5/4)\cos\varphi + 1}.$$

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = -\dfrac{18}{4 + 5\cos\varphi}$.

б) для правої гілки:

$$\rho = \frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi - 1} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{9/2}{(5/4)\cos\varphi - 1}.$$

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = \dfrac{18}{5\cos\varphi - 4}$.

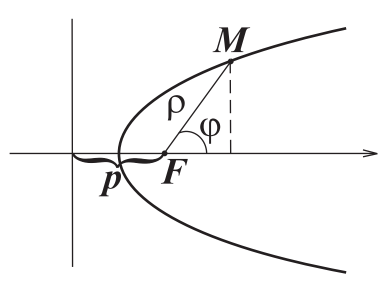
Для лівої гілки:

$$\rho = \frac{p\,\varepsilon}{\varepsilon\cos\varphi + 1} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{9/2}{(5/4)\cos\varphi + 1}.$$

Спростивши, отримаємо шукане рівняння $\rho = \dfrac{18}{5\cos\varphi + 4}$.

Приклад 8.8. Скласти полярне рівняння параболи $y^2 = 12x$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в фокусі параболи.

Розв'язання. Нехай F — це фокус параболи $y^2 = 2px$, в якому знаходиться полюс, d — директриса параболи. Деяка точка площини $M(\rho, \varphi)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли $FM = \mathrm{dist}(M, d)$.



Оскільки $FM = \rho$, $\mathrm{dist}(M, d) = p + \rho\cos\varphi$, тоді M належить параболі тоді і тільки тоді, коли $\rho = p + \rho\cos\varphi$ або

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Параметр параболи $y^2 = 12x$ дорівнює $p = 6$, тоді полярне рівняння заданої параболи має вигляд

$$\rho = \frac{6}{1 - \cos\varphi}.$$

<u>Приклад</u> 8.9. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду, визначити який геометричний образ вони визначають. В кожному випадку зобразити на рисунку осі старої і нової систем координат, а також геометричний образ (якщо це можливо), який визначається цим рівнянням:

а) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 8 = 0$;

б) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

в) $9x^2 - 6xy + y^2 - 10x + 10y - 10 = 0$.

<u>Розв'язання</u>. а) Для того, щоб визначити тип заданої кривої (позначимо її γ), скористаємось результатом задачі 8.100. Знайдемо

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0.$$

Оскільки $\delta > 0$, то робимо висновок, що крива γ є кривою еліптичного типу (еліпсом, виродженим еліпсом або уявним еліпсом).

Знайдемо координати центра γ, для цього скористаємось результатом задачі 8.97, з якої випливає, що координати центра кривої другого порядку задовольняють таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x_0 - y_0 - 2 = 0, \\ -x_0 + 5y_0 + 10 = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок $x_0 = 0$, $y_0 = -2$. Перенесемо початок координат в центр кривої (x_0, y_0) (точку $O'(0, -2)$) за допомогою перетворення

$$\begin{cases} x = \widehat{x} + x_0, \\ y = \widehat{y} + y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \widehat{x}, \\ y = \widehat{y} - 2. \end{cases}$$

Підставимо вирази для x, y в рівняння кривої:

$$5\widehat{x}^2 - 2\widehat{x}\left(\widehat{y} - 2\right) + 5\left(\widehat{y} - 2\right)^2 - 4\widehat{x} + 20\left(\widehat{y} - 2\right) + 8 = 0.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, отримаємо рівняння γ в новій системі координат $\widehat{x}O'\widehat{y}$:

$$5\widehat{x}^2 - 2\widehat{x}\widehat{y} + 5\widehat{y}^2 - 12 = 0. \tag{1}$$

Зауважимо, що отримане рівняння не містить лінійних доданків, а коефіцієнти при доданках в других степенях не змінилися. Подальшого спрощення рівняння (а саме, позбавлення від доданку вигляду $\widehat{x}\widehat{y}$) можна досягти, зробивши поворот системи координат на деякий кут α :

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha, \\ \widehat{y} = \widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Підставимо вирази для $\widehat{x}, \widehat{y}$ в рівняння (1) :

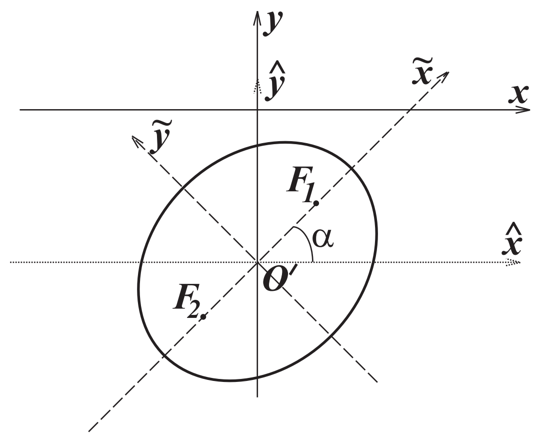
$$5\left(\widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha\right)^2 - 2\left(\widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha\right)\left(\widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha\right) +$$
$$+5\left(\widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha\right)^2 - 12 = 0. \tag{2}$$

Розкривши дужки, знайдемо коефіцієнт при

$$\widetilde{x}\widetilde{y} : -2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

і виберемо кут α так, щоб цей коефіцієнт дорівнював 0 :

$$-2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0.$$



Наприклад, кут $\alpha = \pi/4$ задовольняє це рівняння. Враховуючи, що $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, спростимо (2) :

$$\frac{5}{2}\left(\widetilde{x}-\widetilde{y}\right)^2 - \left(\widetilde{x}-\widetilde{y}\right)\left(\widetilde{x}+\widetilde{y}\right) + \frac{5}{2}\left(\widetilde{x}+\widetilde{y}\right)^2 - 12 = 0.$$

Розкривши дужки і звівши рівняння до канонічного виду, отримаємо

$$\frac{\widetilde{x}^2}{3} + \frac{\widetilde{y}^2}{2} = 1.$$

Це рівняння кривої γ в системі координат $\widetilde{x}O'\widetilde{y}$, яка пов'язана з xOy такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{\sqrt{2}} - 2. \end{cases}$$

З вигляду канонічного рівняння робимо висновок, що крива γ є еліпсом.

б) Для того, щоб визначити тип заданої кривої (позначимо її γ), скористаємось результатом задачі 8.100. Знайдемо

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Так як $\delta < 0$, то робимо висновок, що крива γ є кривою гіперболічного типу (гіперболою або парою перетинних прямих).

Знайдемо координати центра γ, для цього скористаємось результатом задачі 8.97, з якої випливає, що координати центра кривої другого порядку задовольняють таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \ 2y_0 + 8 = 0, \\ 2x_0 + 3y_0 + 6 = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок $x_0 = 3$, $y_0 = -4$. Перенесемо початок координат в центр кривої (x_0, y_0) (точку $O'(3, -4)$) за допомогою перетворення

$$\begin{cases} x = \widehat{x} + x_0, \\ y = \widehat{y} + y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \widehat{x} + 3, \\ y = \widehat{y} - 4. \end{cases}$$

Підставимо вирази для x, y в рівняння кривої:

$$4\left(\widehat{x}+3\right)\left(\widehat{y}-4\right) + 3\left(\widehat{y}-4\right)^2 + 16\left(\widehat{x}+3\right) + 12\left(\widehat{y}-4\right) - 36 = 0.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, отримаємо рівняння γ в новій системі координат $\widehat{x}O'\widehat{y}$:

$$4\widehat{x}\widehat{y} + 3\widehat{y}^2 - 36 = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що отримане рівняння не містить лінійних доданків, а коефіцієнти при доданках в других степенях не змінилися. Подальшого спрощення рівняння (а саме, позбавлення від доданку вигляду $\widehat{x}\widehat{y}$) можна досягти, зробивши поворот системи координат на деякий кут α :

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha, \\ \widehat{y} = \widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Підставимо вирази для $\widehat{x}, \widehat{y}$ в рівняння (3) :

$$4\left(\widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha\right)\left(\widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha\right) + 3\left(\widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha\right)^2 - 36 = 0. \tag{4}$$

Розкривши дужки, знайдемо коефіцієнт при

$$\widetilde{x}\widetilde{y} : 4\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 6\sin\alpha\cos\alpha$$

і виберемо кут α так, щоб цей коефіцієнт дорівнював 0 :

$$4\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 6\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Поділимо праву і ліву частину цього рівняння на $2\cos^2\alpha$:

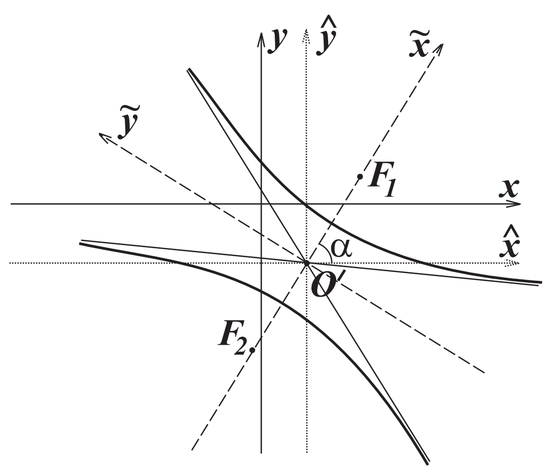
$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0.$$

Отримане квадратне рівняння має два розв'язки $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$ або $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Виберемо другий розв'язок (виключно з міркувань простішого значення) і, скориставшись тригонометричними формулами, знайдемо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

вважаючи, що $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Підставимо отримані вирази в (4) і спростимо рівняння:

$$\frac{4}{5}\left(\widetilde{x} - 2\widetilde{y}\right)\left(2\widetilde{x} + \widetilde{y}\right) + \frac{3}{5}\left(2\widetilde{x} + \widetilde{y}\right)^2 - 36 = 0.$$



Розкривши дужки і звівши рівняння до канонічного виду, отримаємо

$$\frac{\widetilde{x}^2}{9} - \frac{\widetilde{y}^2}{36} = 1.$$

Це рівняння кривої γ в системі координат $\widetilde{x}O'\widetilde{y}$, яка пов'язана з xOy такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\widetilde{x} - 2\widetilde{y}}{\sqrt{5}} + 3, \\ y = \dfrac{2\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{5}} - 4. \end{cases}$$

З вигляду канонічного рівняння робимо висновок, що крива γ є гіперболою.

в) Для того, щоб визначити тип заданої кривої (позначимо її γ), скористаємось результатом задачі 8.100. Знайдемо

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так як $\delta = 0$, то робимо висновок, що крива γ є кривою параболічного типу (параболою, парою паралельних прямих, парою уявних паралельних прямих або парою паралельних прямих, які збігаються).

В даному випадку крива γ не має центра, тому спрощення рівняння (а саме, позбавлення від доданку вигляду $\widehat{x}\widehat{y}$) почнемо з повороту системи координат на деякий кут α :

$$\begin{cases} x = \widehat{x}\cos\alpha - \widehat{y}\sin\alpha, \\ y = \widehat{x}\sin\alpha + \widehat{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Підставимо вирази для $\widehat{x}, \widehat{y}$ в задане рівняння γ :

$$9\left(\widehat{x}\cos\alpha - \widehat{y}\sin\alpha\right)^2 - 6\left(\widehat{x}\cos\alpha - \widehat{y}\sin\alpha\right)\left(\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{y}\cos\alpha\right) +$$
$$+\left(\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{y}\cos\alpha\right)^2 - 10\left(\widehat{x}\cos\alpha - \widehat{y}\sin\alpha\right) + 10\left(\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{y}\cos\alpha\right) - 10 = 0 \tag{5}$$

Розкривши дужки, знайдемо коефіцієнт при

$$\widetilde{x}\widetilde{y} : -16\cos\alpha\sin\alpha - 6\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

і виберемо кут α так, щоб цей коефіцієнт дорівнював 0 :

$$-16\sin\alpha\cos\alpha - 6\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0.$$

Поділимо праву і ліву частину цього рівняння на $2\cos^2\alpha$:

$$3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 8\,\mathrm{tg}\,\alpha - 3 = 0.$$

Отримане квадратне рівняння має два розв'язки $\mathrm{tg}\,\alpha = -1/3$ або $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$. Виберемо другий розв'язок (виключно з міркувань простішого значення) і, скориставшись тригонометричними формулами, знайдемо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

вважаючи, що $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Підставимо отримані вирази в (5) і спростимо рівняння:

$$\frac{9}{10}\left(\widehat{x}-3\widehat{y}\right)^2 - \frac{6}{10}\left(\widehat{x}-3\widehat{y}\right)\left(3\widehat{x}+\widehat{y}\right) + \frac{1}{10}\left(3\widehat{x}+\widehat{y}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt{10}}\left(\widehat{x}-3\widehat{y}\right) +$$

$$+\frac{10}{\sqrt{10}}\left(3\widehat{x}+\widehat{y}\right) - 10 = 0.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, отримаємо

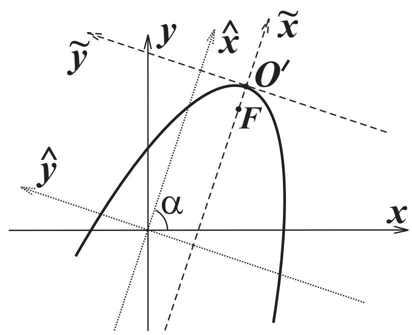
$$\widehat{y}^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}\widehat{x} + \frac{4}{\sqrt{10}}\widehat{y} = 1.$$

Виділимо повний квадрат відносно $\widehat{y}$ і зведемо отримане рівняння до канонічного виду:

$$\left(\widehat{y} + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}\left(\widehat{x} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right).$$

Перенесемо початок координат в точку $O'\left(\dfrac{7}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$ (це координати в $\widehat{x}O\widehat{y}$) за допомогою перетворення

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \widehat{x} - \dfrac{7}{\sqrt{10}}, \\ \widetilde{y} = \widehat{y} + \dfrac{2}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$



В системі координат $\widetilde{x}O'\widetilde{y}$ крива γ має канонічне рівняння

$$\widetilde{y}^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}\widetilde{x}.$$

З вигляду канонічного рівняння робимо висновок, що γ є параболою. Системи координат $\widetilde{x}O'\widetilde{y}$ і xOy пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\widetilde{x} - 3\widetilde{y}}{\sqrt{10}} + \dfrac{13}{10}, \\ y = \dfrac{3\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{10}} + \dfrac{19}{10}. \end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи

Коло

8.1. Скласти рівняння кола, якщо

а) центр кола збігається з початком координат, а його радіус дорівнює 3;

б) центр кола знаходиться в точці $C(2, -3)$, а його радіус дорівнює 7;

в) коло проходить через початок координат, а його центр знаходиться в точці $C(6, -8)$;

г) коло проходить через точку $M(2, 6)$, а його центр знаходиться в точці $C(-1, 2)$;

д) точки $M_1(3,2)$ і $M_2(-1,6)$ є кінцями одного з діаметрів кола;

е) центр кола збігається з початком координат, а пряма $3x-4y+20=0$ є дотичною до кола;

є) центр кола знаходиться в точці $C(1,-1)$, а пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до кола;

ж) коло проходить через точки $M_1(3,1)$ і $M_2(-1,3)$, а його центр лежить на прямій $3x-y-2=0$;

з) коло проходить через три точки $M_1(1,1)$, $M_2(1,-1)$ і $M_3(2,0)$;

и) коло проходить через три точки $M_1(-1,5)$, $M_2(-2,-2)$ і $M_3(5,5)$;

і) центр кола знаходиться в точці $C(3,-1)$, а також відомо, що коло відсікає на прямій $2x-5y+18=0$ хорду, довжина якої дорівнює 6.

8.2. За якої необхідної і достатньої умови рівняння

$$Ax^2+Ay^2+2Bx+2Cy+D=0, \qquad A\neq 0$$

визначає коло? вироджене коло? уявне коло? У першому випадку виразити радіус и координати центра кола через коефіцієнти рівняння.

8.3. Які з наступних рівнянь визначають коло? вироджене коло? уявне коло? У першому і другому випадку знайти координати центра C і радіус R кола:

а) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$;

б) $(x+2)^2+y^2=64$;

в) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$;

г) $x^2+(y-5)^2=5$;

д) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

е) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

є) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$;

ж) $x^2+y^2+x=0$;

з) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$;

и) $x^2 + y^2 + y = 0$;

ї) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

і) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$;

8.4. Скласти рівняння кола радіуса R, яке дотикається осей координат.

8.5. Скласти рівняння кола, якщо точки $M_1\,(x_1, y_1)$ і $M_2\,(x_2, y_2)$ є кінцями одного з його діаметрів.

8.6. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, які не лежать на одній прямій.

8.7. Скласти рівняння кола, яке проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2\,(x_2, y_2)$ знаючи, що його центр лежить на прямій $Ax + By + C = 0$.

8.8. Знайти необхідні і достатні умови того, що пряма
$Ax + By + C = 0$

а) перетинає коло $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;

б) не перетинає це коло;

в) дотикається цього кола.

Еліпс

8.9. Знайти велику, малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис наступних еліпсів і зобразити їх на рисунку:

а) $9x^2 + 25y^2 = 225$;

в) $5x^2 + 16y^2 = 80$;

б) $25x^2 + 9y^2 = 225$;

г) $16x^2 + 5y^2 = 80$.

8.10. Знайти довжини фокальних радіусів точки M для кожного з еліпсів задачі 8.9, якщо:

а) $M\left(-\dfrac{5}{3}, 2\sqrt{5}\right)$;

в) $M\left(2, -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$;

б) $M\left(\dfrac{12}{5}, 3\right)$;

г) $M\left(-\dfrac{\sqrt{265}}{8}, -\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

8.11. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) його осі дорівнюють 12 та 4;

б) велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами 8;

в) мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами 10;

г) відстань між фокусами дорівнює 6, а ексцентриситет 3/5;

д) велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет 3/5;

е) мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет 12/13;

є) відстань між директрисами дорівнює 5, а відстань між фокусами 4;

ж) велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами 16;

з) мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами 13;

и) відстань між директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет 1/2.

8.12. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо:

а) осі дорівнюють 14 і 6;

б) велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами 6;

в) мала вісь дорівнює 6, а відстань між фокусами 16;

г) відстань між фокусами дорівнює 24, а ексцентриситет 12/13;

д) велика вісь дорівнює 26, а ексцентриситет $5/13$;

е) мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $3/5$;

є) відстань між директрисами дорівнює $50/3$, а відстань між фокусами 6;

ж) велика вісь дорівнює 12, а відстань між директрисами 18;

з) мала вісь дорівнює 4, а відстань між директрисами 10;

и) відстань між директрисами дорівнює $32/3$, а ексцентриситет $3/4$.

8.13. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) мала вісь дорівнює 6 і точка $M_1\left(-2\sqrt{5}, 2\right)$ належить еліпсу;

б) велика вісь дорівнює 8 і точка $M_1\,(2, -2)$ належить еліпсу;

в) точки $M_1\left(4, -\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2}, 3\right)$ належать еліпсу;

г) відстань між фокусами дорівнює 8 і точка $M_1\left(\sqrt{15}, -1\right)$ належить еліпсу;

д) ексцентриситет дорівнює $2/3$ і точка $M_1\,(2, -5/3)$ належить еліпсу;

е) точка $M_1\,(8, 12)$ належить еліпсу і відстань від неї до лівого фокуса дорівнює 20;

є) відстань між директрисами дорівнює 10 і точка $M_1\left(-\sqrt{5}, 2\right)$ належить еліпсу.

8.14. В даній системі координат рівняння еліпса має канонічний вигляд. Записати це рівняння, якщо:

а) хорда, яка з'єднує дві вершини еліпса має довжину 5 і нахилена до великої осі під кутом $\arcsin 3/5$;

б) фокусами еліпса є точки $(\pm 1, 0)$ і точка $M_1\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу;

в) відстань від директриси до найближчої вершини дорівнює 4, а до вершини, яка знаходиться на осі Oy дорівнює 8;

г) трикутник з вершинами в фокусах та в кінці малої осі є правильним, а діаметр кола, яке проходить через центр та дві вершини еліпса, дорівнює 7;

д) відрізок осі Ox між фокусом F_1 і більш віддаленою вершиною A_2 великої осі ділиться іншим фокусом F_2 навпіл, а відстань від F_2 до прямої, яка проходить через A_2 і вершину малої осі дорівнює $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$;

е) директрисами еліпса є прямі $x = \pm 4$, а чотирикутник з вершинами в фокусах і кінцях малої осі є квадратом;

є) ексцентриситет еліпса дорівнює $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, а чотирикутник, вершинами якого є вершини еліпса, описаний навколо кола радіуса $24/5$.

8.15. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо:

а) відстань між фокусами дорівнює середньому арифметичному довжин осей;

б) відрізок між фокусом і більш віддаленою вершиною великої осі поділяється іншим фокусом у співвідношенні $2:1$;

в) відстань від фокуса до більш віддаленої вершини великої осі у $1,5$ рази більша за відстань до вершини малої осі;

г) відрізок між фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом;

д) більшу вісь видно з вершин малої осі під кутом $2\pi/3$;

е) відрізок між фокусом і більш віддаленою вершиною великої осі видно з вершин малої осі під прямим кутом;

є) сторони квадрата, вписаного в еліпс, проходять через фокуси еліпса

ж) в нього можна вписати рівносторонній трикутник, одна з вершин якого збігається з вершиною еліпса, яка належить фокальній осі, а протилежна їй сторона трикутника проходить через фокус еліпса.

8.16. На еліпсі $x^2 + 4y^2 = 4$ знайти точки, з яких відрізок, який з'єднує фокуси видно:

а) під кутом $\pi/2$; б) під кутом $2\pi/3$; в) під кутом $5\pi/6$.

8.17. Скласти рівняння еліпса, якщо:

а) велика вісь еліпса дорівнює 26, а фокусами є точки $F_1(-10, 0)$ і $F_2(14, 0)$;

б) мала вісь еліпса дорівнює 2, а фокусами є точки $F_1(-1, -1)$ і $F_2(1, 1)$;

в) ексцентриситет еліпса дорівнює $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а фокусами є точки $F_1\left(-2, 3/2\right)$ і $F_2\left(2, -3/2\right)$;

г) відстань між директрисами еліпса дорівнює $12\sqrt{2}$, а фокусами є точки $F_1(1, 3)$ і $F_2(3, 1)$;

д) точки $F_1(5, 1)$ і $F_2(-1, 1)$ є фокусами, а пряма $3x = 31$ — однією з директрис;

е) точка $F(-6, 2)$ є одним з фокусів, а точка $A(2, 2)$ — кінцем великої осі, ексцентриситет дорівнює $2/3$;

є) осі еліпса паралельні координатним осям, точки $A(4,0)$ та $B(0,4)$ належать еліпсу, а точка B знаходиться на відстані $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ від одного з фокусів та на відстані 6 від відповідної директриси.

8.18. Скласти рівняння еліпса, якщо задано:

а) ексцентриситет $2/3$, фокус $F(2,1)$ і рівняння відповідної директриси $x-5=0$;

б) ексцентриситет $1/2$, фокус $F(-4,1)$ і рівняння відповідної директриси $y+3=0$;

в) ексцентриситет $1/2$, фокус $F(3,0)$ і рівняння відповідної директриси $x+y-1=0$;

г) фокус $F(-1,-4)$, рівняння відповідної директриси $x=2$, а також відомо, що точка $M_1\,(-3,-5)$ належить еліпсу;

д) фокус $F(1,0)$, рівняння відповідної директриси $2x-y-10=0$, а також відомо, що точка $M_1\,(2,-1)$ належить еліпсу;

е) ексцентриситет $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, точка $M_1(3,-1)$ є кінцем малої осі, а також відомо, що фокуси лежать на прямій $y+6=0$.

8.19. Скласти рівняння геометричного місця точок сума відстаней від яких до точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює $2a$, якщо:

а) $F_1\,(0,0)\,,\ F_2\,(6,0)\,,\ a=5;$

б) $F_1\,(0,20)\,,\ F_2\,(0,-7)\,,\ a=13;$

в) $F_1\,(6,1)\,,\ F_2\,(-10,1)\,,\ a=10;$

г) $F_1\,(2,1)\,,\ F_2\,(2,-7)\,,\ a=5;$

д) $F_1(1,1)$, $F_2(-1,-1)$, $a=2$;

е) $F_1(-1,2)$, $F_2(1,-2)$, $a=3$;

є) $F_1(1,0)$, $F_2(3,2)$, $a=2$;

ж) $F_1(0,0)$, $F_2(2,-6)$, $a=4$.

8.20. Скласти рівняння геометричного місця точок відношення відстані від яких до точки F до відстані до прямої γ є величина стала і дорівнює ε, якщо:

а) $F(-1,1)$, $\gamma: 4x-5=0$, $\varepsilon=4/5$;

б) $F(2,4)$, $\gamma: 3y+20=0$, $\varepsilon=3/5$;

в) $F(1,-1)$, $\gamma: x-y-8=0$, $\varepsilon=1/2$;

г) $F(1,1)$, $\gamma: x+y-3=0$, $\varepsilon=2/3$.

8.21. Скласти рівняння сторін квадрата, який вписаний в еліпс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0).$$

Яку частину площі, обмеженої еліпсом складає площа цього квадрату?

8.22. Скласти рівняння сімей еліпсів і зобразити їх на рисунку

а) зі спільними фокусами $(\pm c, 0)$;

б) зі спільними директрисами $x=\pm d$ і спільним центром в початку координат.

8.23. Нехай O — центр еліпса, a, b — його півосі, A і B такі точки еліпса, що прямі OA і OB взаємно перпендикулярні.

а) Довести, що величина $\dfrac{1}{|OA|^2} + \dfrac{1}{|OB|^2}$ є константою для всіх можливих пар точок A і B.

б) Знайти найбільше і найменше значення довжини відрізка AB.

8.24. В еліпс вписано рівносторонній трикутник так, що дві вершини трикутника з координатами $(\pm a, 0)$ збігаються з вершинами еліпса, які лежать на одній осі. Скласти рівняння еліпса.

8.25. Розглядаються всі можливі пари взаємно перпендикулярних діаметрів еліпса та хорди, які з'єднують кінці цих діаметрів. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з центра еліпса на ці хорди.

Гіпербола

8.26. Знайти велику, малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис наступних гіпербол і зобразити їх на рисунку:

а) $16x^2 - 9y^2 = 144$;

б) $-16x^2 + 9y^2 = 144$;

в) $5x^2 - 16y^2 = 80$;

г) $-5x^2 + 16y^2 = 80$.

8.27. Знайти довжини фокальних радіусів точки M для кожної з гіпербол задачі 8.26, якщо:

а) $M\left(-6, 4\sqrt{3}\right)$;

б) $M\left(6\sqrt{2}, 12\right)$;

в) $M\left(8, -\sqrt{15}\right)$;

г) $M\left(-8, -5\right)$.

8.28. Знайти координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ і зобразити їх на рисунку.

8.29. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) її дійсна вісь дорівнює 10, а уявна вісь 8;

б) уявна вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами 10;

в) дійсна вісь дорівнює 16, а ексцентриситет 5/4;

г) уявна вісь дорівнює 16, а ексцентриситет 17/15;

д) уявна вісь дорівнює 12, а рівняння асимптот $y = \pm 3x$;

е) відстань між фокусами дорівнює 20, а рівняння асимптот $3y = \pm 4x$;

є) уявна вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами 32/5;

ж) відстань між фокусами дорівнює 26, а відстань між директрисами 288/13;

з) ексцентриситет дорівнює 3/2, а відстань між директрисами 8/3;

и) відстань між директрисами дорівнює 64/5, а рівняння асимптот $4y = \pm 3x$.

8.30. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо:

а) її дійсна вісь дорівнює 18, а уявна вісь 4;

б) дійсна вісь дорівнює 16, а відстань між фокусами 20;

в) уявна вісь дорівнює 8, а ексцентриситет 3/2;

г) відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет 5/3;

д) дійсна вісь дорівнює 48, а рівняння асимптот $5y = \pm 12x$;

е) відстань між фокусами дорівнює 30, а рівняння асимптот $4y = \pm 3x$;

є) дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між директрисами $72/5$;

ж) уявна вісь дорівнює 12, а відстань між директрисами 10;

з) ексцентриситет дорівнює $7/5$, а відстань між директрисами $50/7$;

и) відстань між директрисами дорівнює $32/5$, а рівняння асимптот $3y = \pm 4x$.

8.31. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) дійсна вісь дорівнює 1 і точка $M_1\,(1, 3)$ належить гіперболі;

б) уявна вісь дорівнює 4 і точка $M_1\left(-7, 2\sqrt{6}\right)$ належить гіперболі;

в) точки $M_1\,(6, -1)$ і $M_2\left(-8, 2\sqrt{2}\right)$ належать гіперболі;

г) відстань між фокусами дорівнює $2\sqrt{5}$ і точка $M_1\left(2\sqrt{5}, 2\right)$ належить гіперболі;

д) ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$ і точка $M_1\,(-5, 3)$ належить гіперболі;

е) точка $M_1\,(9/2, 3)$ належить гіперболі, а рівняння асимптот $3y = \pm 2x$;

є) точка $M_1\left(7, -2\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі і відстань від неї до лівого фокуса дорівнює $4\sqrt{7}$;

ж) відстань між директрисами дорівнює $8/3$ і точка $M_1\,(-3, 5/2)$ належить гіперболі.

8.32. В даній системі координат рівняння гіперболи має канонічний вигляд. Записати це рівняння, якщо:

а) довжина уявної півосі рівна 1, а вершина гіперболи поділяє відстань між фокусами у співвідношенні $4 : 1$;

б) кут між асимптотами, який містить фокус, дорівнює $\pi/3$, а відстань від директриси до найближчої вершини дорівнює $3 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

в) ексцентриситет гіперболи дорівнює 2, а фокуси збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$;

г) фокуси гіперболи збігаються з вершинами еліпса $16x^2+25y^2 = 1600$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса;

д) гіпербола має спільні фокальні хорди з еліпсом $3x^2 + 5y^2 = 15$.

8.33. Знайти ексцентриситет гіперболи, якщо:

а) її осі рівні (рівнобічна гіпербола: $x^2 - y^2 = a^2$);

б) її асимтотами є прямі $y = \pm kx$, $k > 0$;

в) кут між асимптотами, який містить фокус, рівний $2\pi/3$;

г) відношення відстаней від точки $M(5, -4)$, яка належить гіперболі, до директрис дорівнює $2 : 1$;

д) сума відстаней від точки $N(-5, -4)$ до асимптот гіперболи дорівнює $20/3$.

8.34. На гіперболі $4x^2 - y^2 = 4$ знайти точки, з яких відрізок, який з'єднує фокуси видно:

а) під кутом $\pi/2$; б) під кутом $\pi/3$.

8.35. Скласти рівняння гіперболи, якщо:

а) дійсна вісь гіперболи дорівнює 24, а фокусами є точки $F_1(-10, 2)$ і $F_2(16, 2)$;

б) уявна вісь гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$, а фокусами є точки $F_1(-1, -1)$ і $F_2(1, 1)$;

в) ексцентриситет гіперболи дорівнює $5/4$, а фокусами є точки $F_1\,(1, 2)$ і $F_2\,(1, -8)$;

г) відстань між директрисами гіперболи дорівнює $18/5$, а фокусами є точки $F_1(3, 4)$ і $F_2(-3, -4)$;

д) точки $F_1(4, -4)$ і $F_2(-2, 2)$ є фокусами, а асимптоти перетинаються під прямим кутом;

е) точки $F_1(3, -2)$ і $F_2(5, -2)$ є фокусами, а пряма $2x = 7$ — однією з директрис;

є) точка $F(1, 3)$ є одним з фокусів, а точка $A(-4, 3)$ — вершиною, а ексцентриситет дорівнює $3/2$;

ж) точка $F(0, 0)$ є одним з фокусів, а прямі $x \pm y + 2 = 0$ — асимптотами.

8.36. Скласти рівняння гіперболи, якщо задано:

а) ексцентриситет $5/4$, фокус $F(0, 1)$ і рівняння відповідної директриси $5x + 9 = 0$;

б) ексцентриситет $13/12$, фокус $F(-1, 1)$ і рівняння відповідної директриси $13y + 12 = 0$;

в) ексцентриситет $\sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$;

г) фокус $F(-2, -3)$, рівняння відповідної директриси $x+1 = 0$, а також відомо, що точка $M_1\,(-2, -3)$ належить гіперболі;

д) фокус $F(-2,2)$, рівняння відповідної директриси $2x-y-1=0$, а також відомо, що точка $M_1\,(1,-2)$ належить гіперболі.

8.37. Скласти рівняння геометричного місця точок модуль різниці відстаней від яких до точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює $2a$, якщо:

а) $F_1\,(0,0)\,,\ F_2\,(10,0)\,,\ a=3$;

б) $F_1\,(0,6)\,,\ F_2\,(0,-20)\,,\ a=12$;

в) $F_1\,(15,-3)\,,\ F_2\,(-5,-3)\,,\ a=6$;

г) $F_1\,(2,0)\,,\ F_2\,(2,-10)\,,\ a=4$;

д) $F_1\,(1,1)\,,\ F_2\,(-1,-1)\,,\ a=1$;

е) $F_1\,(-1,2)\,,\ F_2\,(1,-2)\,,\ a=2$;

є) $F_1\,(1,0)\,,\ F_2\,(-1,2)\,,\ a=1$;

ж) $F_1\,(0,0)\,,\ F_2\,(2,6)\,,\ a=3$.

8.38. Скласти рівняння геометричного місця точок відношення відстані від яких до точки F до відстані до прямої γ є величина стала і дорівнює ε, якщо:

а) $F\,(-6,1)\,,\ \gamma: 5x-2=0,\ \varepsilon=5/3$;

б) $F\,(2,2)\,,\ \gamma: 5y-1=0,\ \varepsilon=5/4$;

в) $F\,(2,-2)\,,\ \gamma: x-y-1=0,\ \varepsilon=2$;

г) $F\,(1,0)\,,\ \gamma: x+2y-1=0,\ \varepsilon=5/2$.

8.39. Знаючи ексцентриситет еліпса ε, знайти ексцентриситет гіперболи ε', яка має з цим еліпсом спільні фокальні хорди.

8.40. Задана рівнобічна гіпербола $x^2 - y^2 = a^2$. Скласти рівняння еліпса, який має з цією гіперболою спільні фокальні хорди.

8.41. Скласти рівняння сімей гіпербол і зобразити їх на рисунку

а) зі спільними фокусами $(\pm c, 0)$;

б) зі спільними директрисами $x = \pm d$ і спільним центром в початку координат;

в) зі спільними асимптотами $y = \pm kx$.

8.42. Довести, що для гіперболи наступні величини є константами, виразити їх через довжини півосей a і b гіперболи:

а) добуток відстаней від довільної точки гіперболи до її асимптот;

б) площа паралелограма, одна з вершин якого лежить на гіперболі, а дві сторони лежать на асимптотах.

8.43. Довести, що вершини гіперболи і чотири точки перетину її директрис з асимптотами лежать на одному колі. Виразити радіус і центр цього кола через довжини півосей a і b гіперболи.

8.44. Нехай дві гіперболи мають спільні асимптоти. Довести, що

а) якщо ці гіперболи лежать в одній і тій самій парі вертикальних кутів, утворених їх асимптотами, то їх ексцентриситети рівні між собою;

б) якщо ці гіперболи лежать в різних парах вертикальних кутів, утворених їх асимптотами, то добуток їх ексцентриситетів більше або дорівнює 2, причому цей добуток дорівнює 2 тільки для рівносторонніх гіпербол.

8.45. а) Обчислити довжину відрізка асимптоти гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

який з'єднує центр гіперболи з директрисою.

б) Знайти відстань від фокуса цієї гіперболи до її асимптоти.

в) Довести, що основа перпендикуляра, який опущений з фокуса гіперболи на її асимптоту, лежить на директрисі, яка відповідає цьому фокусу.

8.46. Довести, що відстань від довільної точки M гіперболи до фокуса F дорівнює відрізку прямої (яка проходить через цю точку паралельно асимптоті), який з'єднує точку M з директрисою, яка відповідає фокусу F.

8.47. Знайти геометричне місце центрів кіл, відсікаючих на осях Ox і Oy хорди довжиною $2a$ і $2b$ відповідно.

8.48. Знайти геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох протилежних сторін прямокутника дорівнює добутку відстаней до двох інших протилежних сторін.

8.49. Дві протилежні вершини паралелограма лежать на гіперболі, а сторони паралельні асимптотам цієї гіперболи. Довести, що пряма, яка з'єднує дві інші протилежні вершини паралелограма, проходить через центр гіперболи.

8.50. Дві вершини трикутника закріплені в фокусах гіперболи, а третя зміщується вздовж її гілки. Яку лінію описують точки дотику кола, яке вписане в цей трикутник, з його сторонами?

8.51. Дві вершини трикутника закріплені в фокусах гіперболи, а третя зміщується вздовж її гілки. Яку лінію описує при цьому центр кола, яке вписане в цей трикутник?

Парабола

8.52. Визначити величину параметра, координати фокуса, рівняння директриси наступних парабол і зобразити їх на рисунку:

а) $y^2 = 8x$; в) $x^2 = 8y$; д) $y^2 = 6x$; є) $x^2 = 6y$;

б) $y^2 = -8x$; г) $x^2 = -8y$; е) $y^2 = -6x$; ж) $x^2 = -6y$.

8.53. Знайти довжину фокального радіуса точки M для кожної з парабол задачі 8.52, якщо:

а) $M\,(8, -8)\,;$ д) $M\left(4, -2\sqrt{6}\right);$

б) $M\,(-8, 8)\,;$ е) $M\left(-2, 2\sqrt{3}\right);$

в) $M\,(12, 18)\,;$ є) $M\left(3\sqrt{2}, 3\right);$

г) $M\,(-12, -18)\,;$ ж) $M\,(6, -6)\,.$

8.54. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі

а) Ox і проходить через точку $M\,(9, 6)\,;$

б) Ox і проходить через точку $M\,(-1, 3)\,;$

в) Oy і проходить через точку $M\,(10, 20)\,;$

г) Oy і проходить через точку $M\,(4, -8)\,;$

д) Ox і має фокус $F\,(-5, 0)\,;$

е) Ox і має фокус $F(3,0)$;

є) Oy і має фокус $F(0,1)$;

ж) Oy і має фокус $F(0,-4)$;

з) Ox і директрисою є пряма $x=-5$;

и) Ox і директрисою є пряма $x=3$;

і) Oy і директрисою є пряма $y=1$.

ї) Oy і директрисою є пряма $y=-4$;

8.55. В даній системі координат рівняння параболи має канонічний вигляд. Записати це рівняння, якщо:

а) відстань від фокуса до директриси дорівнює 12;

б) довжина хорди, яка проходить через фокус під кутом $\pi/4$ до осі параболи, дорівнює 18.

8.56. На параболі $y^2=10x$ знайти точку M таку, що

а) пряма, яка проходить через точку M і фокус параболи, утворює з віссю Ox кут $\pi/3$;

б) площа трикутника з вершинами в точці M, фокусі параболи і точці перетину осі параболи з директрисою дорівнює 5;

в) відстань від точки M до вершини параболи дорівнює відстані від M до фокуса;

г) відстань від точки M до вершини параболи і до фокуса відносяться як $8:7$.

8.57. Скласти рівняння параболи з параметром p, вершина якої має координати (a,b), а напрям осі збігається а) з додатним напрямом осі Ox;

б) з від'ємним напрямом осі Ox;

в) з додатним напрямом осі Oy;

г) з від'ємним напрямом осі Oy.

8.58. Скласти рівняння параболи, якщо

а) точка $F(7,2)$ є фокусом, а пряма $x = 5$ — директрисою;

б) точка $F(4,3)$ є фокусом, а пряма $y = -1$ — директрисою;

в) точка $F(2,-1)$ є фокусом, а пряма $x - y = 1$ — директрисою;

г) точка $A(-2,-1)$ є фокусом, а пряма $x + 2y = 1$ — директрисою;

д) точка $F(0,1)$ є фокусом, парабола симетрична відносно осі Oy і дотикається осі Ox;

е) вісь параболи паралельна осі Oy, фокус лежить на осі Ox, парабола проходить через початок координат і відсікає на осі Ox відрізок довжини 6.

8.59. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки F і прямої γ, якщо

а) $F(-2,2)$, $\gamma : y + 2 = 0$;

б) $F(1,2)$, $\gamma : y + 1 = 0$;

в) $F(1,0)$, $\gamma : x + y - 2 = 0$;

г) $F(-1,2)$, $\gamma : 2x - y + 5 = 0$.

8.60. Скласти рівняння сім'ї парабол, які:

а) мають спільний фокус $(0,0)$ і симетричні відносно осі Ox;

б) мають спільну директрису $x = 0$ і симетричні відносно осі Ox.

8.61. Задано параболу і деяку пряму, непаралельну осі параболи. Проведено всі можливі хорди параболи, паралельні заданій прямій. Довести, що середини побудованих хорд лежать на прямій, паралельній осі параболи.

8.62. Через фіксовану точку A_0 осі параболи проведено всі можливі хорди. Довести, що добуток відстаней від кінців хорди до осі параболи не залежить від напряму хорди.

8.63. Знайти довжину сторони рівностороннього трикутника, вписаного в параболу $y^2 = 2px$ таким чином, що одна з вершин трикутника збігається з вершиною параболи.

8.64. Знайти множину значень, які може приймати відношення відстані від точки параболи до її вершини до відстані від цієї точки до фокуса.

8.65. Знайти геометричне місце точок, сума відстаней від яких до даної точки і даної прямої є величина стала.

8.66. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються заданого кола і прямої, що не перетинає задане коло.

8.67. Дві параболи, осі яких взаємно перпендикулярні, мають чотири точки перетину. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

Дотичні до кривих другого порядку

8.68. Скласти рівняння дотичної до кривої Γ в точці (x_0, y_0), яка належить Γ, якщо:

а) $\Gamma : x^2 + y^2 = R^2;$

б) $\Gamma : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$

в) $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

г) $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

д) $\Gamma : -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

е) $\Gamma : y^2 = 2px;$

є) $\Gamma : y^2 = -2px;$

ж) $\Gamma : x^2 = 2py;$

з) $\Gamma : x^2 = -2py.$

8.69. Скласти рівняння дотичної до кривої:

а) $x^2 + y^2 = 5$ в точці $(-1, 2)$;

б) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ в точці $(-5, 7)$;

в) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ в точці $(3, 1)$;

г) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ в точці $(3, -3)$;

д) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ в точці $(6, -5)$;

е) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ в точці $(-15/2, 3)$;

є) $-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ в точці $(4, 6)$;

ж) $-\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ в точці $(-7, 4)$;

з) $y^2 = 6x$ в точці $(3/2, -3)$;

и) $y^2 = -10x$ в точці $(-2/5, 2)$;

і) $x^2 = 12y$ в точці $(6, 3)$;

ї) $x^2 = -4y$ в точці $(-4, -4)$.

8.70. За якої необхідної і достатньої умови пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається:

а) $x^2 + y^2 = R^2$;

б) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

г) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

д) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

е) $y^2 = 2px$;

є) $y^2 = -2px$;

ж) $x^2 = 2py$;

з) $x^2 = -2py$.

8.71. Довести, що пряма γ дотикається кривої Γ і знайти координати точки дотику, якщо:

а) $\Gamma : \dfrac{x^2}{48} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, $\gamma : 3x - 2y - 24 = 0$;

б) $\Gamma : \dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, $\gamma : 3x - y - 12 = 0$;

в) $\Gamma : y^2 = 4x$, $\gamma : x + y + 1 = 0$.

8.72. *Оптичні властивості кривих другого порядку.* Довести, що:

а) пряма, яка дотикається еліпса в деякій точці M утворює рівні кути з фокальними радіусами F_1M і F_2M і проходить ззовні кута F_1MF_2;

б) пряма, яка дотикається гіперболи в деякій точці M утворює рівні кути з фокальними радіусами F_1M і F_2M і проходить всередині кута F_1MF_2;

в) пряма, яка дотикається параболи в деякій точці M утворює рівні кути з фокальним радіусам точки M і променем, який починається в точці M і йде паралельно осі параболи в той бік, в який направлені гілки параболи.

8.73. Скласти рівняння кола з центром в точці (x_0, y_0), яке ортогонально перетинає коло $x^2+y^2 = r^2$, за умови, що точка (x_0, y_0) лежить ззовні даного кола.

8.74. Знайти необхідну і достатню умову того, що кола

$$x^2 + y^2 + 2a_ix + 2b_iy + c_i = 0, \qquad i = 1, 2$$

є ортогональними.

8.75. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$. Задана точка $M_0(x_0, y_0)$, яка лежить ззовні цього кола. З точки M_0 до кола проведено дві дотичні M_0T_1 і M_0T_2, (T_1 і T_2 — точки дотику). Скласти рівняння прямої T_1T_2.

8.76. Знайти кут між дотичними до двох рівносторонніх гіпербол в їх спільній точці, якщо осі однієї гіперболи є асимптотами іншої.

8.77. Довести, що відрізок дотичної до гіперболи, який з'єднує її асимптоти, ділиться точкою дотику навпіл.

8.78. Довести, що всі трикутники, утворені асимптотами гіперболи і довільною дотичною до неї, мають одну і ту самі площу s. Виразити цю площу через півосі гіперболи.

8.79. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$, яка відсікає на осях координат рівні відрізки.

8.80. Знайти геометричне місце середин відрізків дотичних до параболи $y^2 = 2px$, з'єднуючих осі координат.

8.81. Знайти радіус найбільшого кола, яке лежить всередині лінії другого порядку (еліпса, гіперболи, параболи) і дотикається цієї лінії в її вершині, що належить фокальній осі.

8.82. Еліпс при русі вздовж площини дотикається двох взаємно перпендикулярних прямих. Яку лінію описує центр еліпса?

8.83. Знайти геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює квадрату відстані до його основи.

8.84. Довести, що добуток відстані від фокуса лінії другого порядку до двох паралельних дотичних до неї дорівнює квадрату малої піввісі у випадку еліпса і квадрату уявної півосі у випадку гіперболи.

8.85. Довести, що пряма, яка з'єднує фокус F параболи з точкою перетину дотичних до параболи в двох довільних її точках M_1 і M_2 ділить навпіл кут M_1FM_2.

8.86. Знайти геометричне місце точок проекцій фокусу

а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи

на всі прямі, які дотикаються відповідної кривої.

Полярні рівняння кривих другого порядку

8.87. Скласти полярне рівняння еліпса, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в

(1) лівому фокусі еліпса; (2) правому фокусі еліпса,

якщо

а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

б) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{81}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{y^2}{144}=1$.

8.88. Скласти полярне рівняння кожної гілки гіперболи, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в

(1) правому фокусі (2) лівому фокусі

гіперболи, якщо

а) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$;

б) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{576}-\dfrac{y^2}{49}=1$.

8.89. Скласти полярне рівняння параболи, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться в фокусі параболи, якщо

а) $y^2=x$; б) $y^2=4x$; в) $y^2=5x$; г) $y^2=10x$.

8.90. Визначити, які лінії задані наступними рівняннями. Якщо крива є еліпсом або гіперболою, знайти її півосі, якщо параболою - знайти її параметр:

а) $\rho=\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$;

б) $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\varphi}$;

в) $\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$;

г) $\rho=-\dfrac{27}{4+5\cos\varphi}$;

д) $\rho = \dfrac{18}{5 + 4\cos\varphi}$;

е) $\rho = \dfrac{36}{5\cos\varphi - 4}$;

є) $\rho = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$;

ж) $\rho = \dfrac{50}{13 - 12\cos\varphi}$;

з) $\rho = \dfrac{3}{2 - 2\cos\varphi}$;

и) $\rho = \dfrac{64}{15 + 17\cos\varphi}$.

8.91. Через фокус параболи проведено всі можливі хорди. На кожній з них від фокуса в напрямку більш віддаленого кінця хорди відкладається відрізок, який дорівнює різниці відрізків, на які фокус ділить хорду. Знайти геометричне місце кінців цих відрізків.

8.92. Довести, що сума обернених величин відрізків, на які фокус лінії другого порядку ділить хорду, що проходить через цей фокус, є величина стала.

Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду

8.93. Довести, що криву другого порядку, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0$$

за допомогою паралельного переносу можна звести до канонічного виду. Вказати зв'язок між старою і новою системами координат. Дослідити тип кривої в залежності від значень параметрів A, B, C, D, E.

8.94. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду, визначити який геометричний образ вони визначають, в кожному випадку зобразити на рисунку осі старої і нової систем координат, а також геометричний образ (якщо це можливо), який визначається цим рівнянням:

а) $7x^2 + 7y^2 + 6x - 2y = 10$;

б) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y = 144$;

в) $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y = 2$;

г) $12x^2 - 12x - 32y = 29$;

д) $9y^2 - 7y = 16$;

е) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$;

є) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;

ж) $x^2 - 5x + 11 = 0$;

з) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;

и) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$.

8.95. Довести, що криву другого порядку, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

за допомогою повороту системи координат можна звести до канонічного виду. Вказати зв'язок між старою і новою системами координат. Дослідити тип кривої в залежності від значень параметрів A, B, C, D, E.

8.96. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду, визначити який геометричний образ вони визначають, в кожному випадку зобразити на рисунку осі старої і нової систем координат, а також геометричний образ (якщо це можливо), який визначається цим рівнянням:

а) $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0$;

б) $9xy + 4 = 0$;

в) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0$;

г) $18x^2 + 24xy + 11y^2 - 3 = 0$;

д) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$;

е) $9x^2 - 6xy + y^2 - 10 = 0$;

є) $81x^2 - 36xy + 4y^2 = 0$;

ж) $3x^2 - 4\sqrt{5}xy + 4y^2 = 0$.

8.97. Довести, що крива другого порядку, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

має центр симетрії тоді і тільки тоді, коли $AC - B^2 \neq 0$, причому координати центра симетрії (x_0, y_0) задовольняють наступну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

8.98. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду, визначити який геометричний образ вони визначають, в кожному випадку зобразити на рисунку осі старої і нової систем координат, а також геометричний образ (якщо це можливо), який визначається цим рівнянням:

а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

б) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;

в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

г) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;

д) $xy + 2x + y = 0$;

е) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

є) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

ж) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;

з) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;

и) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;

і) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;

ї) $225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;

к) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;

л) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$;

м) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$;

н) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 10x - 8y + 41 = 0$;

о) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

8.99. Задано криву другого порядку γ, рівняння якої в деякій системі координат має вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Нехай

$$\widetilde{A}\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{B}\widetilde{x}\widetilde{y} + \widetilde{C}\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{D}\widetilde{x} + 2\widetilde{E}\widetilde{y} + \widetilde{F} = 0$$

рівняння γ в деякій іншій системі координат. Довести, що мають місце рівності

$$A + C = \widetilde{A} + \widetilde{C}, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{B} & \widetilde{C} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} & \widetilde{D} \\ \widetilde{B} & \widetilde{C} & \widetilde{E} \\ \widetilde{D} & \widetilde{E} & \widetilde{F} \end{vmatrix}$$

(тобто величини $S = A + C$, $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ є ортогональними інваріантами кривої другого порядку — вони не змінюються при переході від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої).

8.100. Довести, що крива другого порядку, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

а) є кривою еліптичного типу (еліпсом, виродженим еліпсом або уявним еліпсом), якщо $\delta > 0$ (див. позначення δ в задачі 8.99);

б) є кривою гіперболічного типу (гіперболою або парою перетинних прямих), якщо $\delta < 0$;

в) є кривою параболічного типу (параболою, парою паралельних прямих, парою уявних паралельних прямих або парою паралельних прямих, які збігаються), якщо $\delta = 0$.

8.101. Задано криву другого порядку γ, рівняння якої в деякій системі координат має вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Довести, що

а) корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ є дійсними і одночасно не обертаються в нуль (див. позначення S, δ в задачі 8.99);

б) нехай $K = \lambda_1 - A$, тоді за допомогою заміни змінних

$$\begin{cases} x = \dfrac{B\widetilde{x} - K\widetilde{y}}{\sqrt{B^2 + K^2}}, \\ y = \dfrac{K\widetilde{x} + B\widetilde{y}}{\sqrt{B^2 + K^2}}, \end{cases}$$

тобто повороту системи координат на кут α, де

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{K}{B}, \text{ якщо } B > 0 \\ \pi - \operatorname{arctg} \dfrac{K}{B}, \text{ якщо } B < 0, \end{cases}$$

рівняння γ може бути зведено до вигляду

$$\lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + 2\widetilde{D}\widetilde{x} + 2\widetilde{E}\widetilde{y} + F = 0,$$

де

$$\widetilde{D} = \frac{BD + EK}{\sqrt{B^2 + K^2}}, \qquad \widetilde{E} = \frac{-BK + BE}{\sqrt{B^2 + K^2}}.$$

8.102. Звести рівняння задачі 8.98 до канонічного виду, використовуючи результат задачі 8.101.

9 Поверхні другого порядку

В цьому розділі використовуються такі поняття та результати.

1. Сфера. Рівняння сфери. Координати центра, радіус сфери.

2. Циліндричні поверхні. Рівняння циліндричної поверхні. Напрямна, твірна циліндричної поверхні. Циліндричні поверхні другого порядку. Конічні поверхні. Рівняння конічної поверхні. Напрямна, вершина конічної поверхні. Конічні поверхні другого порядку.

3. Поверхня обертання. Рівняння поверхні обертання. Твірна обертання, вісь обертання. Приклади поверхонь обертання другого порядку: еліпсоїд обертання, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди обертання, еліптичний параболоїд обертання.

4. Еліпсоїд, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд, гіперболічний параболоїд: канонічні рівняння. Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда, гіперболічного параболоїда.

Приклади розв'язання задач

Приклад 9.1. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням навколо осі Oz кривої γ, яка лежить в площині xOz, і задана рівнянням:

а) $F(x,z)=0$;

б) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

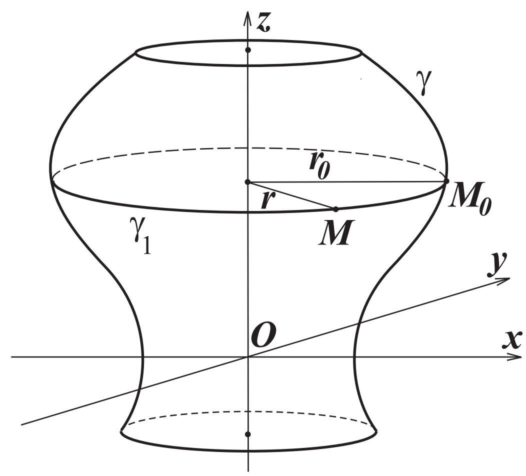
в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$;

д) $x^2=2pz,\ p>0$.

Розв'язання. а) Точка $M\,(x,y,z)$ належить шуканій поверхні обертання тоді і тільки тоді, коли знайдеться точка $M_0\,(x_0,0,z_0)$ заданої кривої γ така, що точки M і M_0 лежать на колі (позначимо його γ_1), причому

- центр γ_1 лежить на осі Oz,



- γ_1 лежить в площині, паралельній xOy (з цієї умови випливає, що $z = z_0$).

Оскільки точка M_0 належить γ, то $F(x_0, z_0) = 0$.

Знайдемо відстань r від точки M до осі Oz : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ця відстань дорівнює радіусу кола γ_1. Аналогічно, знайдемо відстань r_0 від точки M_0 до осі Oz : $r_0 = |x_0|$. Ця відстань так само дорівнює радіусу кола γ_1, тобто $r_0 = r$ або $x_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Об'єднаємо всі знайдені умови в одну систему рівнянь і вилучимо з неї параметри x_0, z_0 :

$$\begin{cases} F(x_0, z_0) = 0, \\ z = z_0, \\ x_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

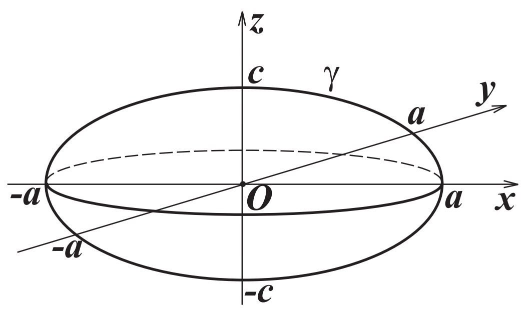
Отримане рівняння і є рівнянням шуканої поверхні обертання.

Таким чином, якщо в площині xOz крива γ задана рівнянням $F(x, z) = 0$, то для того, щоб отримати рівняння поверхні обертання γ навколо осі Oz, достатньо в цьому рівнянні замінити змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

б) Скористаємось результатом пункту а) і замінимо в рівнянні кривої γ змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. В результаті ми отримаємо рівняння поверхні обертання еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ навколо осі Oz :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отримана поверхня називається еліпсоїдом обертання.



в) Скористаємось результатом пункту а) і замінимо в рівнянні кривої γ змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. В результаті ми отримаємо рівняння поверхні обертання гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ навколо осі Oz :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

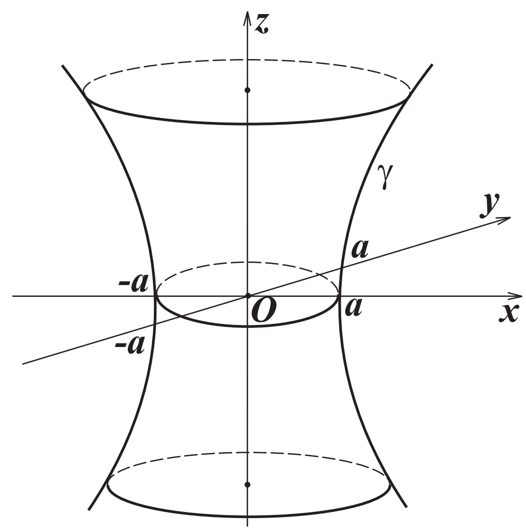
Отримана поверхня називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

г) Скористаємось результатом пункту а) і замінимо в рівнянні кривої γ змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. В результаті ми отримаємо рівняння поверхні обертання гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ навколо осі Oz :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Отримана поверхня називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання.

д) Скористаємось результатом пункту а) і замінимо в рівнянні кривої γ змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. В результаті ми отримаємо рівняння



поверхні обертання параболи $x^2 = 2pz$ навколо осі Oz :

$$x^2 + y^2 = 2pz, \; p > 0.$$

Отримана поверхня називається еліптичним параболоїдом обертання.

Приклад 9.2. Скласти рівняння циліндра, напрямною якого є коло

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \qquad z = 0, \end{cases}$$

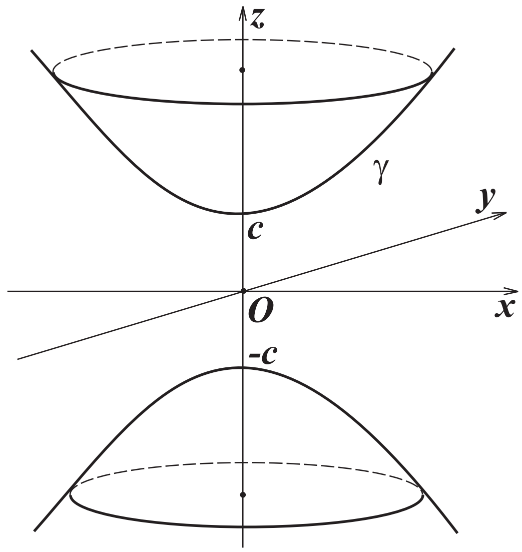
а твірні утворюють з осями координат рівні кути.

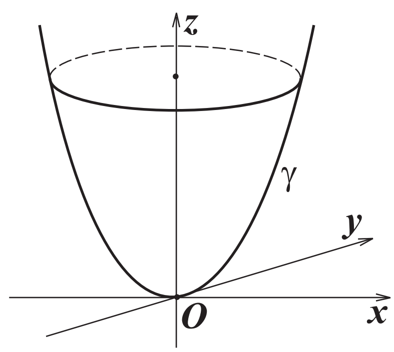
Розв'язання. Вектор $\vec{u} = \{1, 1, 1\}$ (а також довільний вектор, колінеарний $\vec{u}$) утворює рівні кути з осями координат.

Точка $M(x, y, z)$ належить шуканій циліндричній поверхні тоді і тільки тоді, коли знайдеться точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ заданого кола γ така, що вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ колінеарний $\vec{u}$. Іншими словами, знайдеться число $t \in \mathbb{R}$ таке, що $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$. Запишемо цю умову покоординатно: $x - x_0 = t$, $y - y_0 = t$, $z - z_0 = t$.

Оскільки точка M_0 належить γ, то $z_0 = 0$, $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Об'єднаємо всі знайдені умови в одну систему рівнянь і вилучимо з



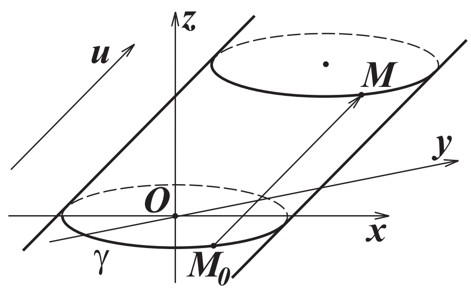


неї параметри x_0, y_0, z_0, t :

$$\begin{cases} x - x_0 = t, \\ y - y_0 = t, \\ z - z_0 = t, \\ z_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 = 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

Отримане рівняння і є рівнянням шуканої циліндричної поверхні.

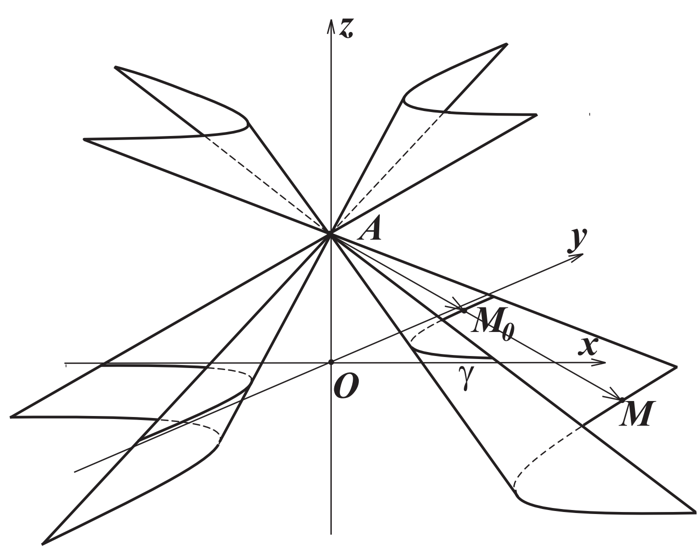
Приклад 9.3. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якого



знаходиться в точці $A(0,0,a)$, а напрямною є гіпербола

$$\gamma : \begin{cases} 2xy = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Точка $M\,(x,y,z)$ належить шуканій конічній поверхні тоді і тільки тоді, коли знайдеться точка $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ заданої гіперболи γ така, що вектор $\overrightarrow{AM_0} = \{x_0, y_0, z_0 - a\}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AM} = \{x, y, z-a\}$. Іншими словами, знайдеться число $t \in \mathbb{R}$ таке, що $\overrightarrow{AM_0} = t\overrightarrow{AM}$. Запишемо цю умову покоординатно: $x_0 = tx$, $y_0 = ty$, $z_0 - a = t(z-a)$.



Оскільки точка M_0 належить γ, то $z_0 = 0$, $2x_0y_0 = a^2$.

Об'єднаємо всі знайдені умови в одну систему рівнянь і вилучимо з неї параметри x_0, y_0, z_0, t :

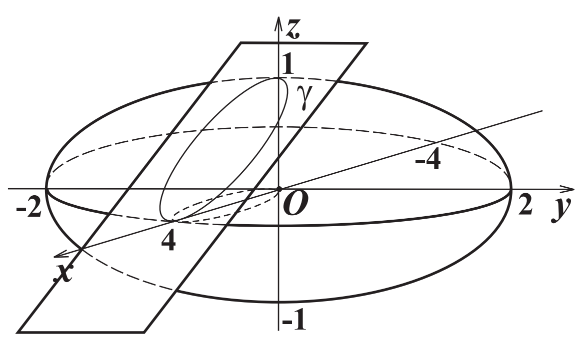
$$\begin{cases} x_0 = tx, \\ y_0 = ty, \\ z_0 - a = t(z-a), \\ z_0 = 0, \\ 2x_0y_0 = a^2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2xy = (a-z)^2.$$

Отримане рівняння і є рівнянням шуканої конічної поверхні.

Приклад 9.4. Знайти проекцію на площину xOy лінії перетину еліпсоїда $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ і площини $x + 4z - 4 = 0$.

Розв'язання. Переріз еліпсоїда і площини (позначимо його γ) задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1, \\ \quad x + 4z - 4 = 0. \end{cases}$$



Для того, щоб знайти проекцію на площину xOy кривої γ, необхідно вилучити з цієї системи змінну z. Для цього виразимо z з другого рівняння $z = \dfrac{4-x}{4}$ і підставимо в перше:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{(4-x)^2}{16} = 1.$$

Розкривши дужки і виділивши повний квадрат відносно змінної x, отримаємо рівняння:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Це рівняння циліндричної поверхні з напрямною, яка паралельна осі Oz і твірною γ. Проекцію на площину xOy кривої γ буде еліпс:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Приклад 9.5. По якій лінії площина $x + y + z + 1 = 0$ перетинає

а) еліптичний параболоїд $x^2 + y^2 = 2z$;

б) гіперболічний параболоїд $x^2 - y^2 = 2z$.

Розв'язання. а) Переріз еліптичного параболоїда і площини (позначимо його γ) задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Виразимо змінну z з другого рівняння $z = 1 - x - y$ і підставимо в перше:

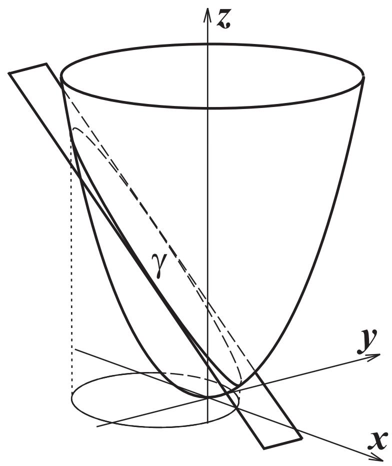
$$x^2 + y^2 = 2(1 - x - y).$$

Розкривши дужки і виділивши повні квадрати відносно x, y, отримаємо

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Це рівняння кругового циліндра з напрямною, яка паралельна осі Oz і твірною γ. Перерізом цього циліндра і заданої площини буде еліпс

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$



б) Переріз гіперболічного параболоїда і площини (позначимо його γ) задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2z, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Виразимо змінну z з другого рівняння $z = 1 - x - y$ і підставимо в перше:

$$x^2 - y^2 = 2(1 - x - y).$$

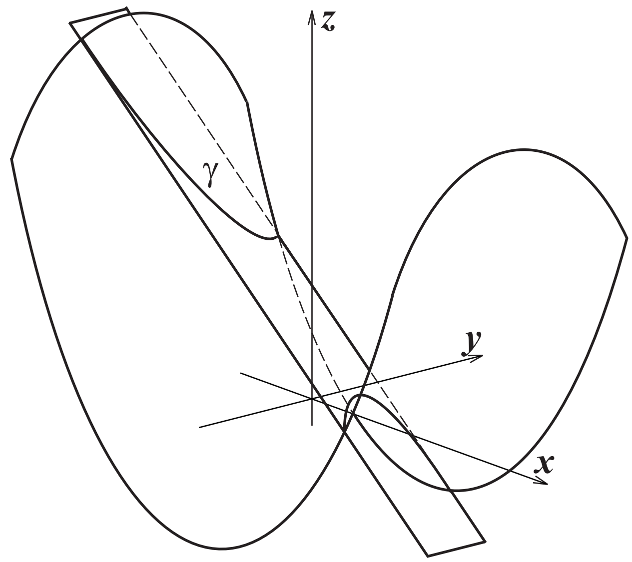
Розкривши дужки і виділивши повні квадрати відносно x, y, отримаємо

$$(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 2.$$

Це рівняння циліндричної поверхні з напрямною, яка паралельна осі Oz і твірною γ. Перерізом цього циліндра і заданої площини буде гіпербола

$$\begin{cases} (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 2, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Приклад 9.6. По якій лінії перетинаються гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2z$ і площина $2x + 3y - 6 = 0$.



<u>Розв'язання</u>. Переріз гіперболічного параболоїда і площини (позначимо його γ) задається системою рівнянь:

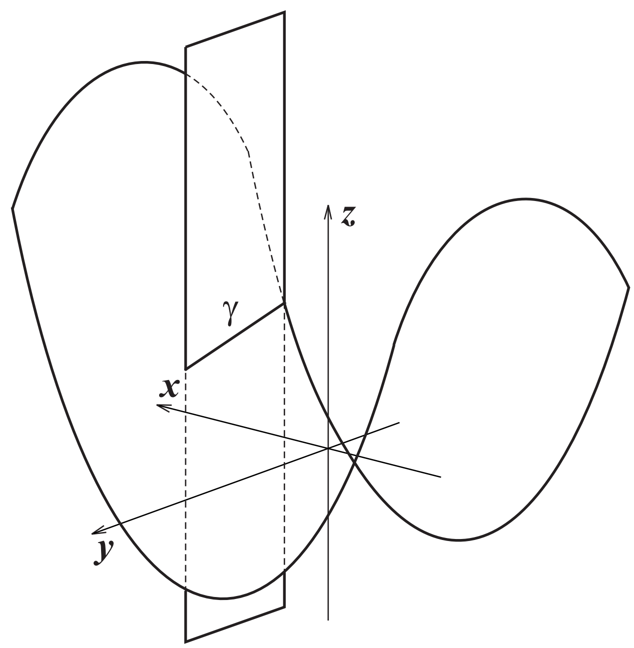
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2z, \\ 2x + 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Виразимо x з другого рівняння $x = \dfrac{6 - 3y}{2}$ і підставимо в перше:

$$\frac{(2-y)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 2z.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, отримаємо рівняння площини $y + 2z - 1 = 0$. Таким чином, шуканим перерізом буде перетин двох площин, тобто пряма — твірна заданого гіперболічного параболоїда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0, \\ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$



Задачі для самостійної роботи

Сфера

9.1. Скласти рівняння сфери, якщо

а) центр сфери збігається з початком координат, а її радіус дорівнює 9;

б) центр сфери знаходиться в точці $C(5, -3, 7)$, а її радіус дорівнює 2;

в) сфера проходить через початок координат, а її центр знаходиться в точці $C(4, -4, -2)$;

г) сфера проходить через точку $M(2, -1, -3)$, а її центр знаходиться в точці $C(3, -2, 1)$;

д) точки $M_1(2, -3, 5)$ і $M_2(4, 1, -3)$ є кінцями одного з діаметрів сфери;

е) центр сфери збігається з початком координат, а площина $16x-15y-12z+75=0$ є дотичною до сфери;

є) центр сфери знаходиться в точці $C(3,-5,-2)$, а площина $2x-y-3z+11=0$ є дотичною до сфери;

ж) сфера проходить через точки $M_1(3,1,-3)$, $M_2(-2,4,1)$ і $M_3(-5,0,0)$ а її центр лежить на площині $2x+y-z+3=0$;

з) сфера проходить через чотири точки $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(-5,10,-1)$, $M_3(4,1,11)$ і $M_4(-8,-2,2)$;

и) сфера описана навколо тетраедра, одна з вершин якого збігається з початком координат, а три інші знаходяться в точках $M_1(2,0,0)$, $M_2(0,5,0)$ і $M_3(0,0,3)$;

і) центр сфери знаходиться в точці $C(2,3,-1)$, а також відомо, що сфера відсікає на прямій

$$\begin{cases} 5x-4y+3z+20=0, \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$$

хорду, довжина якої дорівнює 16;

ї) сфера проходить через початок координат і коло

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ 2x-3y+5z-5=0; \end{cases}$$

к) сфера проходить через точку $M(2,-1,1)$ і коло

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z=5, \\ 5x+2y-z-3=0; \end{cases}$$

л) сфера проходить через два кола

$$\begin{cases} x^2+z^2=25, \\ y-2=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x^2+z^2=16, \\ y-3=0. \end{cases}$$

9.2. За якої необхідної і достатньої умови рівняння

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

задає сферу? вироджену сферу? уявну сферу? У першому випадку виразити радіус и координати центра сфери через коефіцієнти рівняння.

9.3. Які з наступних рівнянь визначають сферу? вироджену сферу? уявну сферу? У першому і другому випадку знайти координати центра C і радіус R сфери:

а) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 25$;

б) $(x+1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 8z + 10 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 26 = 0$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6y + 37 = 0$;

е) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 11 = 0$;

є) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 10z + 10 = 0$.

9.4. Скласти рівняння сфери радіуса R, яка дотикається

а) трьох координатних площин;

б) трьох координатних осей.

9.5. Знайти координати центра C і радіус R кола:

а) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36, \\ 3x+y-z-9=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, \\ 2x+2y+z+1=0. \end{cases}$

9.6. Задано рівняння сфери $S : x^2+y^2+z^2=R^2$ і рівняння площини $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$. За якої необхідної і достатньої умови

а) площина α перетинає сферу S? В цьому випадку знайти центр і радіус кола, по якому перетинаються сфера S і площина α;

б) площина α дотикається сфери S? В цьому випадку знайти координати точки дотику;

в) площина α і сфера S не мають жодної спільної точки?

9.7. Площина $Ax+By+Cz+D=0$ перетинає сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$, але не проходить через її центр. За якої необхідної і достатньої умови точка (x_0, y_0, z_0) лежить всередині кульового сегмента, обмеженого сферою і площиною, який не містить центр сфери?

Різні типи поверхонь другого порядку

9.8. Визначити тип поверхні при всіх можливих значеннях параметра λ :

а) $x^2+y^2+z^2=\lambda$;

б) $\lambda x^2+y^2+z^2=1$;

в) $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$;

г) $x^2+y^2-z^2=\lambda$;

д) $x^2-y^2-z^2=\lambda$;

е) $x^2+\lambda\left(y^2+z^2\right)=1$;

є) $x^2+\lambda\left(y^2+z^2\right)=\lambda$;

ж) $x^2 + y^2 = \lambda z$;

з) $\lambda x^2 + y^2 = z$;

и) $\lambda \left(x^2 + y^2\right) = z$;

і) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$;

ї) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$;

к) $x^2 + y^2 = \lambda$;

л) $x^2 + y^2 = \lambda$.

9.9. а) Пояснити, що представляє собою алгебраїчна поверхня першого порядку;

б) навести приклад алгебраїчної поверхні третього порядку і зобразити її в прямокутній декартовій системі координат;

в) чи може алгебраїчна поверхня другого порядку представляти собою пряму? площину? пусту множину? Навести приклади;

г) назвати типи і виписати канонічні рівняння поверхонь обертання, які є алгебраїчними поверхнями другого порядку, зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

д) навести приклад поверхонь обертання, які є алгебраїчними поверхнями третього, четвертого порядку і зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

е) назвати типи і виписати канонічні рівняння циліндричних поверхонь, які є алгебраїчними поверхнями другого порядку, зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

є) навести приклад циліндричних поверхонь, які є алгебраїчними поверхнями третього, четвертого порядку і зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

ж) назвати типи і виписати канонічні рівняння конічних поверхонь, які є алгебраїчними поверхнями другого порядку, зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

з) навести приклад конічних поверхонь, які є алгебраїчними поверхнями третього, четвертого порядку і зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат;

и) навести приклади циліндричних, конічних поверхонь, які не є поверхнями обертання;

і) навести приклад поверхні обертання, циліндричної і конічної поверхні, які не є алгебраїчними поверхнями;

ї) чи можна розглядати площину як частинний випадок конічної поверхні? циліндричної поверхні? поверхні обертання?

Поверхні обертання

9.10. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням кривої γ навколо осі Ox і зобразити отриману поверхню в прямокутній декартовій системі координат. Крива γ в площині Oxz задається рівнянням:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$ б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$ в) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

9.11. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням кривої γ навколо

(1) осі Oz, (2) осі Oy;

зобразити отриману поверхню в прямокутній декартовій системі координат. Крива γ в площині Oyz задається рівнянням:

а) $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$ б) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$ в) $-\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

9.12. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням кривої γ навколо

(1) осі Ox, (2) осі Oy;

зобразити отриману поверхню в прямокутній декартовій системі координат. Крива γ в площині Oxy задається рівнянням:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

9.13. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням кривої

а) $\begin{cases} z^2=2py, \\ x=0 \end{cases}$ навколо осі Oy; б) $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Ox.

9.14. Довести, що проекція еліпса, отриманого при перетині площиною параболоїда обертання, на площину, яка перпендикулярна осі параболоїда, є коло.

9.15. Знайти умову необхідну і достатню для того, щоб площина $z=ax+by+c$ перетинала еліптичний параболоїд обертання $x^2+y^2=2pz$ $(p>0)$ по дійсному еліпсу.

9.16. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої

а) $\begin{cases} z-2=0, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Ox;

б) $\begin{cases} x-2y=0, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Ox;

в) $\begin{cases} x-2y=0, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Oy.

9.17. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої а) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ навколо осі Oz;

б) $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz;

в) $\begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = 2t \end{cases}$ навколо прямої $\begin{cases} x = y, \\ y = z. \end{cases}$

9.18. Скласти параметричне рівняння поверхні, яка утворена обертанням навколо осі Oz кривої

а) $z = f(x),\ x > 0.$

б) $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t). \end{cases}$

9.19. а) Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням кола $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ навколо осі Oy;

б) скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням гіперболи $xy = 1$ навколо її асимптот.

Циліндричні, конічні поверхні

9.20. Скласти рівняння прямого кругового циліндра радіуса r, віссю якого є пряма

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

9.21. Скласти рівняння прямого кругового циліндра, який а) проходить через точку $M(2,0,1)$, якщо його віссю є пряма

$$\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + 2t; \end{cases}$$

б) проходить через точку $M(2,-1,1)$, якщо його віссю є пряма

$$\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = -2t - 2, \\ z = t + 2; \end{cases}$$

в) має радіус $\sqrt{2}$, якщо його віссю є пряма

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

9.22. Довести, що рівняння циліндричної поверхні з напрямною

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

і твірною, паралельною вектору $\vec{u}\left\{a,b,c\right\}$, визначається рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(u) + av, \\ y = \psi(u) + bv, \\ z = \chi(u) + cv. \end{cases}$$

9.23. Скласти рівняння циліндричної поверхні з напрямною γ, якщо

а) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1, \end{cases}$ а твірні паралельні вектору $\vec{u}(2,-3,4)$;

б) $\gamma\ :\ \begin{cases} 9x^2+4y^2-18x-16y=11, \\ z=0, \end{cases}$ а твірні паралельні вектору $\vec{u}(1,0,1)$;

в) $\gamma : \begin{cases} 2z-y^2+4y=6, \\ x=0, \end{cases}$ а твірні паралельні осі Ox;

г) $\gamma : \begin{cases} x^2-y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$ а твірні паралельні бісектрисі кута між векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$;

д) $\gamma : \begin{cases} x^2-y^2=z, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ а твірні перпендикулярні площині напрямної;

е) $\gamma : \begin{cases} x=-1+2\cos t, \\ y=-1+2\sin t, \\ z=3-2\cos t-2\sin t \end{cases}$ а твірні паралельні вектору $\vec{u}(1,1,1)$.

9.24. Скласти рівняння циліндричної поверхні, описаної навколо сфери $x^2+y^2+z^2=r^2$, якщо напрямний вектор твірних дорівнює $\{a,b,c\}$.

9.25. Скласти рівняння циліндричної поверхні

а) описаної навколо сфери $x^2+y^2+z^2=1$, якщо його твірні перпендикулярні площині $x+y-2z-5=0$;

б) описаної навколо сфери $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=3$, якщо його твірні паралельні прямій $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=-t+7, \\ z=-2t+5; \end{cases}$

в) описаного навколо двох сфер $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$ і $x^2+y^2+z^2=25$.

9.26. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в початку координат, якщо її напрямна визначається рівняннями:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c; \end{cases}$ є) $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = c; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = b; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = b; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = b; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$ з) $\begin{cases} z^2 = 2py, \\ x = a. \end{cases}$

9.27. Скласти рівняння круглого конуса з вершиною в початку координат, якщо

а) вісь Oz є віссю симетрії конуса, а точка $M(3, -4, 7)$ лежить на його поверхні;

б) вісь Oy є віссю симетрії конуса, а його твірні нахилені до осі Oy під кутом $\pi/3$;

в) його вісь паралельна вектору $\vec{u} = \{1, 1, 1\}$, а твірні утворюють з віссю кут $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

г) його твірні дотикаються сфери $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$;

д) його напрямна задана рівнянням $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0; \end{cases}$

9.28. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці S, якщо

а) $S(0, 0, c)$, а напрямна визначається рівнянням $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

б) $S\,(3,-1,-2)$, а напрямна визначається рівнянням

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ \quad x-y+z=0; \end{cases}$$

в) $S\,(5,0,0)$, а твірні дотикаються сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

г) $S\,(1,1,1)$, а твірні дотикаються сфери $x^2+y^2+z^2=2$;

д) $S\,(3,0,-1)$, а твірні дотикаються еліпсоїда $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=1$.

9.29. Довести, що рівняння конічної поверхні з напрямною

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t) \end{cases}$$

і вершиною в початку координат визначається рівнянням

$$\begin{cases} x=v\varphi(u), \\ y=v\psi(u), \\ z=v\chi(u). \end{cases}$$

Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди

9.30. Визначити, які поверхні задані рівняннями, зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат:

а) $36x^2-16y^2+9z^2=144$;

б) $x^2+4y^2+4z^2=16$;

в) $x^2+4y^2+8z=0$;

г) $36x^2-9y^2-4z^2=36$;

д) $9x^2+72y-4z^2=0$;

е) $(x+1)^2+4y^2+32z-32=0$;

є) $3x^2-9(y-1)^2+4z^2+36=0$;

ж) $4x^2 - y^2 + 8z + 8 = 0$;

з) $9(x-1)^2+36y^2+4(z-2)^2 = 36$;

и) $3(x+3)^2+9(y+1)^2-4z^2-36 = 0$.

9.31. Визначити, які поверхні задані рівняннями, зобразити їх в прямокутній декартовій системі координат:

а) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6x + 4y + 32z - 49 = 0$;

б) $x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 6z + 1 = 0$;

в) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 8x + 36y - 72z + 40 = 0$;

г) $2x^2 + y^2 - z^2 + 16x - 2y + 4z + 17 = 0$;

д) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 8z + 47 = 0$;

е) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$;

є) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;

ж) $2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0$;

з) $4x^2 + 16y^2 - z^2 - 8x + 32y + 6z + 27 = 0$;

и) $2x^2 + 3y^2 + 6x - 18y - 2z + 47 = 0$.

9.32. Скласти рівняння еліпсоїда, осі якого збігаються з осями координат, за умови, що еліпсоїд проходить через

а) еліпси $\begin{cases} \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

б) еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{1} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ та точку $M(2, 0, 1)$;

в) еліпс $\begin{cases} \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ та коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0; \end{cases}$

г) три точки $M_1(2, 2, 4)$, $M_2(2, -4, -2)$ і $M_3(0, 6, 0)$.

9.33. Скласти канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, який проходить через

а) точку $M(\sqrt{5}, 3, 2)$ і гіперболу $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$

б) коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 0 \end{cases}$ та гіперболу $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{10} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

9.34. Скласти канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда, який проходить через

а) точки $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(2, \sqrt{11}, 3)$ та $M_3(6, 2, \sqrt{15})$;

б) гіперболи $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = -1, \\ z = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

9.35. Скласти канонічне рівняння еліптичного параболоїда, вершина якого знаходиться в початку координат і який проходить через точки

а) $M_1(1, -2, 1)$ і $M_2(-3, -3, 2)$, за умови, що його вісь збігається з віссю Oy;

б) $M_1(1, 2, 1)$ і $M_2(2, 4, 0)$ за умови, що його вісь збігається з віссю Ox.

9.36. Дослідити перерізи площинами, паралельними осям координат (площинами вигляду $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$), наступних поверхонь другого порядку:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$;

д) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

9.37. а) Перерізи поверхні $x^2+2y^2-3z^2=1$ площинами $x=0$, $x=1$ і $x=2$ спроектовано на площину Oyz, зобразити проекції;

б) перерізи поверхні $x^2+2y^2-3z^2=0$ площинами $x=-1$, $x=0$ і $x=1$ спроектовано на площину Oyz, зобразити проекції;

в) перерізи поверхні $2x^2-y^2=2z$ площинами $x=-1$, $x=0$ і $x=1$ спроектовано на площину Oyz, зобразити проекції;

г) перерізи поверхні $2x^2-y^2=2z$ площинами $y=-1$, $y=0$ і $y=1$ спроектовано на площину Oxz, зобразити проекції;

д) перерізи поверхні $2x^2-y^2=2z$ площинами $z=-1$, $z=0$ і $z=1$ спроектовано на площину Oxy, зобразити проекції.

9.38. а) Перерізи поверхонь $x^2+2y^2-3z^2=1$, $x^2+2y^2-3z^2=0$, $x^2+2y^2-3z^2=-1$ площиною $x=0$ спроектовано на площину Oyz, зобразити проекції;

б) перерізи тих самих поверхонь площиною $z=0$ спроектовано на площину Oxy, зобразити проекції.

9.39. Визначити, яка крива є перетином площини α і поверхні другого порядку Г. Якщо перетином є еліпс або гіпербола, визначити півосі і координати вершин, якщо парабола - параметр і координати вершини параболи.

а) $\alpha: x-2=0$, $\quad \Gamma: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$;

б) $\alpha : z + 1 = 0, \quad \Gamma : \dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1;$

в) $\alpha : y + 6 = 0, \quad \Gamma : \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 6z.$

9.40. Довести, що лінія перетину поверхні другого порядку з площиною є алгебраїчна лінія не вище другого порядку. Навести приклади, коли це лінія першого порядку.

9.41. Визначити, при яких значеннях параметра λ площина $x + \lambda z = 1$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

а) по еліпсу; б) по гіперболі.

9.42. Визначити, при яких значеннях параметра λ площина $x + \lambda y = 2$ перетинає еліптичний параболоїд $3x^2 + 2z^2 = 6y$

а) по еліпсу; б) по параболі.

9.43. Визначити, які лінії задані рівняннями:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1, \\ 9x - 6y + 2z - 28 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{3} = 1, \\ 2x - 3y + 4z - 11 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = y, \\ 3x - 3y + 4z + 2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1, \\ 9x - 6y + 2z - 28 = 0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ 4x - 5y - 10z - 20 = 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = z, \\ x + 2y - 3 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x = 2z; \end{cases}$ і) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 2z, \\ z - 4 = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2, \\ 2x + 3y - 6 = 0; \end{cases}$ ї) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

9.44. а) Назвати типи поверхонь другого порядку, які мають прямолінійні твірні;

б) чи може число прямолінійних твірних, які проходять через одну точку поверхні другого порядку дорівнювати 0? 1? 2? 3?...Чи може воно бути нескінченним? Навести приклади.

9.45. Скласти рівняння прямолінійних твірних поверхні другого порядку Г, які проходять через точку M, якщо

а) $\Gamma : 4x^2 - z^2 = y,\ M\,(1, 3, -1)$;

б) $\Gamma : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1,\ M\,(6, 2, 8)$;

в) $\Gamma : 4x^2 - y^2 = 16z,\ M\,(2, 0, 1)$.

9.46. Скласти рівняння прямолінійних твірних поверхні другого порядку Г, паралельних площині α, якщо

а) $\Gamma : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1,\ \alpha : 6x + 4y + 3z - 17 = 0$;

б) $\Gamma : x^2 - 4y^2 = 16z,\ \alpha : 3x + 2y + 4z = 0$.

9.47. Довести, що площина α перетинає поверхню другого порядку по прямолінійним твірним. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних, якщо

а) $\Gamma : x^2 - 4y^2 = 2z$, $\alpha : 2x - 12y - z + 16 = 0$;

б) $\Gamma : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$, $\alpha : 4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

9.48. Скласти рівняння площини, яка

а) перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - y^2 = 2z$ по парі прямих і проходить через точки $M_1\,(1, 1, 1)$ і $M_2\,(2, 0, 2)$;

б) перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$ по парі прямих і проходить через точку $M\,(6, -3, 2)$;

в) перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - y^2 = 2z$ по парі прямих і паралельна площині $x + y + z - 1 = 0$.

9.49. Визначити кут між прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда $9x^2 - 4y^2 = 36z$, які проходять через точку $M\,(-2, 0, 1)$.

9.50. Визначити кут між прямолінійними твірними однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, які перетинаються в точці, що належить площині $z = \lambda$, якщо

а) $\lambda = 0$; б) $\lambda = 1$; в) для довільного λ.

9.51. Знайти множину точок поверхні Γ, в яких перетинаються її взаємно перпендикулярні прямолінійні твірні, якщо

а) $\Gamma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$; б) $\Gamma : x^2 - y^2 = 2z$; в) $\Gamma : x^2 - 4y^2 = 2z$.

9.52. Довести, що прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

проектуються на координатні площини в дотичні до відповідних головних перерізів.

9.53. Дослідити, як розташовані (в координатних площинах) по відношенню до головних перерізів проекції прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

9.54. Довести, що

а) проекції прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ на площину Oxy дотикаються кола $x^2 + y^2 = 1$;

б) проекції прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $x^2 - y^2 = 2z$ на площину Oxz дотикаються параболи $x^2 = 2z$.

9.55. Довести, що однопорожнинний гіперболоїд обертання може бути описаний прямою, яка обертається навколо осі, що не лежить з нею в одній площині.

9.56. Знайти геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох мимобіжних прямих є величина стала і дорівнює λ.

9.57. Знайти геометричне місце фокусів гіпербол, отриманих при перетині гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

площинами, паралельними площині Oxy.

9.58. По якій лінії перетинаються однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b,$$

і сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$?

9.59. По якій лінії перетинаються однопорожнинний гіперболоїд обертання $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ і гіперболічний параболоїд $x^2 - y^2 = 2az$?

9.60. По якій лінії перетинаються еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$, $a > b > 0$, і сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 z$?

9.61. По якій лінії перетинаються два еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ і $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, де $a > b$?

9.62. Написати рівняння поверхні, яка складається з прямих, по яких перетинаються взаємно перпендикулярні площини, які проходять через дві задані прямі.

Відповіді.

1.1. а) 26; б) -38; в) 7; г) 1; д) 0; е) $-8+2i$; є) 2α; ж) 0; з) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

1.2. а) 1; б) 4; в) 0; г) -10; д) -2α; е) 4α.

1.3. а) adf; б) $-2abd$; в) $-2a^2$.

1.4. а) 144; б) 72; в) 10; г) $-4\alpha^3$; д) 1; е) $\sin(\beta-\alpha)$; є) $4\sin\alpha\sin^2(\alpha/2)$; ж) αmn; з) $(x-y)(y-z)(x-z)$; и) $\alpha(x-z)(y-z)(y-x)$; і) 0; ї) 0.

1.6. а) $\lambda_{1,2}=-1, \lambda_3=3$; б) $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$; в) $x_1=2, x_2=3$; г) $x_1=0, x_2=-2$.

1.8. $1, -1, 0$.

1.9. 4.

1.10. 2.

1.11. Знак визначника зміниться на протилежний.

1.12. Зміниться на комплексно спряжене число.

1.13. а) не зміниться; б) не зміниться.

1.14. а) $f(\lambda)=\lambda^2-A\lambda+B$, де $A=a_1+b_2$, $B=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$; б) $f(\lambda)=-\left(\lambda^3-A\lambda^2+B\lambda-C\right)$, де $A=a_1+b_2+c_3$, $B=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

1.15. а) 21; б) -5; в) 0; г) 8; д) 0; е) 20.

1.17. 0.

1.18. а) 1; б) -4; в) -12.

1.19. а) $x=2, y=-3$; б) $x=-20/7, y=-11/7$; в) $x=-17/9, y=8/3$; г) система має безліч розв'язків: $x=t, y=\dfrac{5t-7}{2}$, $t\in\mathbb{R}$; д) система несумісна; е) система має безліч розв'язків: $x=-3t, y=t$, $t\in\mathbb{R}$.

1.20. а) $x=1$, $y=-2$, $z=4$; б) $x=-3$, $y=-1$, $z=5$; в) $x=2$, $y=1$, $z=-1$; г) $x=-1$, $y=6$, $z=2$; д) система має безліч розв'язків: $x=\dfrac{3-t}{2}$, $y=t$, $z=\dfrac{3t-1}{2}$ $t\in\mathbb{R}$; е) система несумісна; є) система несумісна; ж) система має безліч розв'язків: $x=-\dfrac{13}{12}-2t$, $y=t$, $z=-\dfrac{5}{12}$ $t\in\mathbb{R}$.

1.21. а) якщо $a\neq-2$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=-2$, $y=-1$; якщо $a=-2$, тоді система має безліч розв'язків: $x=\dfrac{1+5t}{2}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$; б) якщо $a\neq-7$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=\dfrac{14b-13}{a+7}$, $y=\dfrac{1+2a-2ab}{a+7}$; якщо $a=-7$, $b=\dfrac{13}{14}$, тоді система має безліч розв'язків: $x=t-\dfrac{1}{7}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=-7$, $b\neq\dfrac{13}{14}$, тоді система несумісна; в) якщо $a\neq\pm4$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=\dfrac{3a-16b+8}{a^2-16}$, $y=\dfrac{2ab-a+6}{a^2-16}$; якщо $a=4$, $b=-\dfrac{1}{4}$, тоді система має безліч розв'язків: $x=2t+\dfrac{3}{4}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=-4$, $b=\dfrac{5}{4}$, тоді система має безліч розв'язків: $x=-2t-\dfrac{3}{4}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=4$, $b\neq-\dfrac{1}{4}$ або $a=-4, b\neq\dfrac{5}{4}$ тоді система несумісна; г) якщо $a\neq0$ і $b\neq-5$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=\dfrac{5-2ab-5b}{a\,(5+b)}$, $y=-\dfrac{2a+6}{5+b}$; якщо $a=0$, $b=1$, тоді система має безліч розв'язків: $x=t$, $y=-1$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=-3$, $b=-5$, тоді система має безліч розв'язків: $x=\dfrac{5t-1}{3}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=0$, $b\neq1$ або $a\neq-3$, $b=-5$, тоді система несумісна;д) якщо $a\neq-11$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=\dfrac{138-2a+4ab+12b}{44+4a}$, $y=\dfrac{b-5}{11+a}$, $z=\dfrac{3a-4ab-10b-137}{44+4a}$; якщо $a=-11$, $b=5$, тоді система має безліч розв'язків: $x=\dfrac{9}{2}-8t$, $y=t$, $z=\dfrac{34t-17}{4}$, $t\in\mathbb{R}$; якщо $a=-11$, $b\neq5$, тоді система несумісна; е) якщо $a\neq-1$, тоді система має єдиний розв'язок: $x=\dfrac{-3b-10}{1+a}$,

$y = \dfrac{12a + 4ab - 5b - 6}{5 + 5a}$, $z = \dfrac{4a + 3ab + 15b + 28}{10 + 10a}$; якщо $a = -1$, $b = -2$, тоді система має безліч розв'язків: $x = -\dfrac{5t+1}{2}$, $y = \dfrac{1-3t}{2}$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$; якщо $a = -1$, $b \neq -2$, тоді система несумісна; є) якщо $a \neq 1$ і $a \neq -2$, тоді система має єдиний розв'язок: $x = y = z = \dfrac{1}{a+2}$; якщо $a = 1$, тоді система має безліч розв'язків: $x = 1 - t_1 - t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; якщо $a = -2$, тоді система несумісна; ж) якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, тоді система має єдиний розв'язок: $x = 2 - a^2$, $y = 2a - 1$, $z = a^3 + 2a^2 - a - 1$; якщо $a = 0$, тоді система має безліч розв'язків: $x = -t_1 - t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; якщо $a = -3$, тоді система має безліч розв'язків: $x = y = z = t$, $t \in \mathbb{R}$; з) якщо $a \neq b$ і $b \neq c$ і $a \neq c$ тоді система має єдиний розв'язок: $x = \dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$, $y = \dfrac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}$, $z = \dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$; якщо $a = d \neq b = c$, тоді система має безліч розв'язків: $x = 1$, $y = -t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$; якщо $a = c \neq b = d$, тоді система має безліч розв'язків: $x = -t$, $y = 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$; якщо $a = b \neq c = d$, тоді система має безліч розв'язків: $x = -t$, $y = t$, $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$; якщо $a = b = c = d$, тоді система має безліч розв'язків: $x = 1 - t_1 - t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; якщо $a = b = c \neq d$ або серед параметрів a, b, c два різні, а d не дорівнює жодному з них, тоді система несумісна.

1.22. наприклад, а) $x = y = z = 0$; б) $x = y = 0, z = 1$.

2.1. а) $\{4, 3, 4\}$; б) $\{9, 3, 1\}$; в) $\{0, 0, 2\}$; г) $\{15, 7, -1\}$.

2.2. $\{\sqrt{2}, 1, 1\}$; $\{\sqrt{2}, -1, 1\}$.

2.3. $\{1, 1, 1\}, \{-1, -1, -1\}$.

2.5. а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні; б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні, $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$; в) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні, але $\vec{c}$ не може бути представлений як лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.6. $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$.

2.7. $\vec{l} = \{1, 1, 1\}; \vec{m} = \{0, 2, 0\}; \vec{n} = \{0, 1, 1\}$.

2.8. β/α.

2.9. $\vec{r_3} = (n\vec{r_1} + m\vec{r_2})/(m+n)$; $\vec{r_4} = (n\vec{r_1} - m\vec{r_2})/(n-m)$;

2.10. а) $\{-3, 16\}$; б) $\{9, -20\}$.

2.11. $D(x_1 - x_2 + x_3, y_1 - y_2 + y_3)$.

2.12. $\vec{r}_C = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_1$; $\vec{r}_{B_1} = \vec{r}_2 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1$; $\vec{r}_{D_1} = \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1$; $\vec{r}_{C_1} = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - 2\vec{r}_1$

2.14. Точка перетину медіан трикутника, ззовні площини трикутника таких точок немає.

2.15. $\overrightarrow{BD} = \{-1, 1\}$, $\overrightarrow{CO} = \{-1/2, -1/2\}$, $\overrightarrow{KD} = \{-1, 1/2\}$,

2.17. $\overrightarrow{BC} = \{1, 1\}$, $\overrightarrow{CD} = \{0, 1\}$, $\overrightarrow{DE} = \{-1, 0\}$, $\overrightarrow{EF} = \{-1, -1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{1, 2\}$, $\overrightarrow{CF} = \{-2, 0\}$, $\overrightarrow{CE} = \{-1, 1\}$,

2.18. а) $\overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{0, -1, 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1, 0, 1\}$; б) $\overrightarrow{KL} = \{-1/2, 1/2, 0\}$, $\overrightarrow{PQ} = \{-1/2, 1/2, 0\}$, $\overrightarrow{NC} = \{1/2, 1/2, -1\}$, $\overrightarrow{MP} = \{1/2, 0, 0\}$, $\overrightarrow{KQ} = \{-1/2, 1/2, 1/2\}$; в) $\overrightarrow{OS} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$, $\overrightarrow{KS} = \{-1/6, 1/3, 1/3\}$.

2.19. $C(1, 1, 0)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $K(1/2, 0, 1)$, $L(1, 1, 1/2)$, $M(1/2, 1/2, 1)$, $N(1/2, 0, 1/2)$, $O(1/2, 1/2, 1/2)$.

3.1. а) 9; б) 8; в) $\{7, -5, -5\}$; г) $\{-13, 7, -1\}$; д) -1; е) -56; є) $\pi/2$; ж) $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{7}}$; з) $\sqrt{19}$; и) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; і) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; ї) $\dfrac{2}{7}$.

3.2. а) -4; б) 5; в) $\{-19, 9, 5\}$; г) $\{-13, 12, -7\}$; д) 38; е) -36; є) $\pi - \arccos \dfrac{3}{\sqrt{110}}$; ж) $\arccos \dfrac{13}{7\sqrt{51}}$; з) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; и) $-\dfrac{6}{\sqrt{29}}$; і) $\dfrac{12}{\sqrt{17}}$; ї) $-\dfrac{39}{7}$.

3.4. $-3/2$.

3.5. $\alpha^{-1} \left\{ |\vec{c}|^2 - \left(\vec{b}, \vec{c}\right), \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{b}, \vec{c}\right) \right\}$, де $\alpha = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$.

3.6. $\{2/3, -11/15, -2/15\}$.

3.7. $\alpha\vec{a}$, де $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) / \left(\vec{a}, \vec{a}\right)$.

3.8. а) $\{2, -2, 4\}$ і $\{0, 0, 0\}$; б) $\{2/3, -2/3, 4/3\}$ і $\{1/3, 5/3, 2/3\}$; в) $\{0, 0, 0\}$ і $\{4, 0, -2\}$

3.9. $\vec{x} = \alpha\vec{a}, \vec{y} = \vec{b} - \alpha\vec{a}$, де $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) / \left(\vec{a}, \vec{a}\right)$.

3.10. $\vec{b} = \vec{a} - \alpha\vec{n}$, де $\alpha = (\vec{a}, \vec{n}) / (\vec{n}, \vec{n})$.

3.11. $\vec{x} = \left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right)/\delta$, де $\alpha = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & \left(\vec{a},\vec{b}\right) \\ \left(\vec{b},\vec{c}\right) & \left(\vec{b},\vec{b}\right) \end{vmatrix}$, $\beta = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \left(\vec{a},\vec{b}\right) & \left(\vec{b},\vec{c}\right) \end{vmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & \left(\vec{a},\vec{b}\right) \\ \left(\vec{a},\vec{b}\right) & \left(\vec{b},\vec{b}\right) \end{vmatrix}$.

3.12. $\dfrac{3}{2}\vec{a}$.

3.13. $\vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \left(\vec{a},\vec{b}\right) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \vec{b} & \left(\vec{b},\vec{b}\right) & \left(\vec{b},\vec{c}\right) \\ \vec{c} & \left(\vec{c},\vec{b}\right) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & \left(\vec{a},\vec{b}\right) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \left(\vec{b},\vec{c}\right) & \left(\vec{b},\vec{b}\right) & \left(\vec{b},\vec{c}\right) \\ (\vec{c},\vec{c}) & \left(\vec{c},\vec{b}\right) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}^{-1}$.

3.14. $|AB| = 6, |AC| = 4\sqrt{3}, |BC| = 2\sqrt{3}, \angle A = \dfrac{\pi}{6}, \angle B = \dfrac{\pi}{2}, \angle C = \dfrac{\pi}{3}$.

3.15. Довжини сторін 3 і 5, гострий кут $\arccos(4/5)$.

3.16. $|AC_1|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma + 2\left|\vec{b}\right||\vec{c}|\cos\alpha + 2|\vec{c}||\vec{a}|\cos\beta$.

3.17. а) $[\vec{e}_1,\vec{e}_2] = \vec{e}_3$, $[\vec{e}_2,\vec{e}_3] = \vec{e}_1$, $[\vec{e}_3,\vec{e}_1] = \vec{e}_2$; б)$[\vec{e}_1,\vec{e}_2] = -\vec{e}_3$, $[\vec{e}_2,\vec{e}_3] = -\vec{e}_1$, $[\vec{e}_3,\vec{e}_1] = -\vec{e}_2$; в) $[\vec{e}_1,\vec{e}_2] = \dfrac{|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|}{|\vec{e}_3|}\vec{e}_3$, $[\vec{e}_2,\vec{e}_3] = \dfrac{|\vec{e}_2|\cdot|\vec{e}_3|}{|\vec{e}_1|}\vec{e}_1$, $[\vec{e}_3,\vec{e}_1] = \dfrac{|\vec{e}_3|\cdot|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}\vec{e}_2$.

3.18. а) $\{5,9,-16\}$; б)$\{-6,1,2\}$; в) $\{-16,14,-13\}$; г)$\{22,15,-3\}$; д) $\{20,11,-3\}$; е)$\{6,21,19\}$.

3.19. а) $\sqrt{3}/2$ кв.од.; б) $\sqrt{30}$ кв.од.; в) $\sqrt{11}$ кв.од.; г) $\sqrt{35}/2$ кв.од.

3.20. а) $25\sqrt{2}$; б) 30; в) $36\sqrt{3}$.

3.21. $BH = \dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}{\left|\vec{b}\right|}$.

3.22. а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) $13/\sqrt{10}$.

3.23. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

3.24. Або $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{0}$ або $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є правим ортонормованим базисом.

3.26. а) $\{3, 2, 0\}$; б)$\{-3, 3, 6\}$; в) $\{25, 10, -15\}$; г)$\{6, -3, 6\}$; д) $\left\{-4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\right\}$.

3.27. $\{\pm 1, \pm 2, \mp 2\}$.

3.29. Або $\vec{b} \perp \vec{a}$ і $\vec{b} \perp \vec{c}$ або $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні.

3.32. а) 0; б) -23; в) 2; г) 6.

3.33. а) так; б) так; в) так; г) ні.

3.34. а) права; б) ліва; в) ліва; г) права.

3.35. а) компланарні, коли $\lambda = 1$; права трійка, коли $\lambda > 1$; ліва трійка, коли $\lambda < 1$; б) компланарні, коли $\lambda = -1$; права трійка, коли $\lambda > -1$; ліва трійка, коли $\lambda < -1$; в) компланарні, коли $\lambda = -5$; права трійка, коли $\lambda < -5$; ліва трійка, коли $\lambda > -5$; г) компланарні, коли $\lambda = 1$; права трійка, коли $\lambda < 1$; ліва трійка, коли $\lambda > 1$.

3.36. а) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)/2$; б) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)/6$.

3.37. а) 18 куб.од.; б) 2 куб.од.; в) 19 куб.од.; г) 5 куб.од.

3.38. а) 1 куб.од.; б) 6 куб.од.; в) 8/3 куб.од.; г) 35/6 куб.од.

3.39. а) так; б) так; в) ні; г) так.

3.40. $DH = \dfrac{\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}$.

3.41. а) $4/3$; б) $\sqrt{2}$; в) $4/\sqrt{3}$; г) $\sqrt{6}$.

3.42. так.

3.43. $\lambda = 3$ або $\lambda = -4$.

4.1. а) $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$; б) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \nparallel \vec{u}_1$ (або $\vec{u}_2$); в) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

4.2. а) $\arccos \dfrac{|(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1|\ |\vec{u}_2|}$; б) $\arccos \dfrac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2|}$.

4.3. $\vec{r}_0 + \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{n})}{(\vec{u}, \vec{n})}\vec{u}$.

4.4. а) $\vec{r}_0 + \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$; б) $\vec{r}_0 + 2\dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$.

4.5. а) $\dfrac{|(\vec{r}_0, \vec{n}) - D|}{|\vec{n}|}$; б) $\dfrac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{u})|}{|\vec{u}|}$.

4.6. а) $\left(\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{r}_0,\vec{a},\vec{b}\right)$; б) $[\vec{r},\vec{u}]=[\vec{r}_0,\vec{u}]$; в) $\vec{r}=\dfrac{[\vec{u},\vec{a}]}{|\vec{u}|^2}+\vec{u}t$; г) $[\vec{r},[\vec{n}_1,\vec{n}_2]]=D_2\vec{n}_1-D_1\vec{n}_2$; д) $\vec{r}=\dfrac{[\vec{u},D_2\vec{n}_1-D_1\vec{n}_2]}{|\vec{u}|^2}+\vec{u}t$, де $\vec{u}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$.

4.7. а) $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]\neq\vec{0}$; б) $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\vec{0}$ і $D_2\vec{n}_1\neq D_1\vec{n}_2$; в) $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\vec{0}$ і $D_2\vec{n}_1=D_1\vec{n}_2$.

4.8. а) $\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{b}\right)=0$ і $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}$; б) $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}$ і $\left[\vec{u}_1,\vec{b}\right]\neq 0$; в) $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}$ і $\left[\vec{u}_1,\vec{b}\right]=0$; г) $\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{b}\right)\neq 0$, де $\vec{b}=[\vec{u}_2,\vec{a}_2]\,|\vec{u}_1|^2-[\vec{u}_1,\vec{a}_1]\,|\vec{u}_2|^2$.

4.9. а) $(\vec{u},\vec{n})\neq 0$; б) $(\vec{u},\vec{n})=0$ і $(\vec{r}_0,\vec{n})\neq D$; в) $(\vec{u},\vec{n})=0$ і $(\vec{r}_0,\vec{n})=D$.

4.10. а) $\vec{r}_0+\dfrac{D-(\vec{r}_0,\vec{n})}{(\vec{u},\vec{n})}\vec{u}$; б) $\dfrac{[\vec{u},\vec{a}]}{|\vec{u}|^2}+\dfrac{D\,|\vec{u}|^2-(\vec{u},\vec{a},\vec{n})}{|\vec{u}|^2\,(\vec{u},\vec{n})}\vec{u}$.

4.11. а) $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{n}t$; б) $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{u})=0$.

4.12. $\left(\vec{r},\vec{r}_1\,|\vec{u}|^2-[\vec{u},\vec{a}]\,,\vec{u}\right)=([\vec{u},\vec{a}]\,,\vec{r}_1,\vec{u})$.

4.13. а) $\vec{r}_0+\dfrac{D-(\vec{r}_0,\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$; б) $\vec{r}_0+2\dfrac{D-(\vec{r}_0,\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$.

4.14. а) $\vec{r}_1+\dfrac{(\vec{r}_0-\vec{r}_1,\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$; б) $2\vec{r}_1-\vec{r}_0+2\dfrac{(\vec{r}_0-\vec{r}_1,\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$.

4.15.

а) $\begin{cases}(\vec{r},\vec{n})=D,\\(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{u},\vec{n})=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u}_1)=0,\\(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_2-\vec{r}_0,\vec{u}_2)=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{u})=0,\\(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{u})=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{u}_1,[\vec{u}_1,\vec{u}_2])=0,\\(\vec{r}-\vec{r}_2,\vec{u}_2,[\vec{u}_1,\vec{u}_2])=0.\end{cases}$

4.16. а) $\dfrac{|(\vec{r}_0,\vec{n})-D|}{|\vec{n}|}$; б) $\dfrac{\left|\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\vec{a},\vec{b}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}$; в) $\dfrac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$; г) $\dfrac{|[\vec{r}_0-\vec{r}_1,\vec{u}]|}{|\vec{u}|}$; д) $\dfrac{|D_2\vec{n}_1-D_1\vec{n}_2-[\vec{r}_1,[\vec{n}_1,\vec{n}_2]]|}{|[\vec{n}_1,\vec{n}_2]|}$; е) $\dfrac{|[\vec{r}_1-\vec{r}_2,\vec{u}]|}{|\vec{u}|}$; є)

$\dfrac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|}{|\vec{u}|}$; ж) $\dfrac{|(\vec{u}_1, \vec{a}_2) + (\vec{u}_2, \vec{a}_1)|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$.

4.17. $\vec{r}_0 + \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{n}) \pm \rho\,|\vec{n}|}{(\vec{u}, \vec{n})}\vec{u}$.

5.1. а) $(1) : 2x - 3y - 13 = 0$, $(2) : 3x + 2y = 0$; б) $(1) : 5x - y - 7 = 0$, $(2) : x + 5y + 9 = 0$; в) $(1) : -3x + y + 13 = 0$, $(2) : x + 3y - 1 = 0$.

5.2. а) $Q\,(-2, -1)$, $R\,(2, -6)$; б) $Q\,(3, 1)$, $R\,(11, -11)$; в) $Q\,(-12, 5)$, $R\,(-16, -2)$; г) $Q\,(9, -7)$, $R\,(10, -5)$;

5.3. $5x + 7y - 11 = 0$.

5.4. $x - 3y - 7 = 0; 2x + 5y - 3 = 0$.

5.5. $3x - 5y + 9 = 0; x - y + 3 = 0; x - 3y + 11 = 0$.

5.6. $x - y - 7 = 0; x - 2y = 0$.

5.7. $5x - 12y + 36 = 0(BC); 9x + 12y + 20 = 0(CD)$.

5.8. $2x + 3y - 13 = 0$.

5.9. $4x + y - 3 = 0$.

5.10. $3x - 4y + 12 = 0$.

5.11. $(3, 4)$.

5.12. $(2, 4)$.

5.13. $x - y + 2 = 0$.

5.14. $(35/9, 8/9)$.

5.15. $3x - 2y + 11 = 0; 2x + y - 9 = 0; x + 4y - 1 = 0$.

5.16. а) $\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$; б) $\delta = 0$ і один з визначників $\delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ або $\delta_2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ не дорівнюють 0; в) $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$.

5.17. а) перетинаються в точці $(5/7, -3/7)$; б) збігаються; в) паралельні; г) перетинаються в точці $(5, -1)$; д) паралельні; е) збігаються.

5.18. а) чотири визначника $\delta_1 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ і $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ не дорівнюють 0; б) $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників δ_1, δ_2 або δ_3 не дорівнює 0.

5.19. а) прямі утворюють трикутник; б) прямі мають одну спільну точку $(-32/11, 4/11)$; в) перша і третя прямі паралельні, третя їх перетинає; г) прямі попарно паралельні.

5.20. $x - 5y + 3 = 0; 5x + y - 11 = 0.$

5.21. Сторони квадрата: $4x+3y+1 = 0$; $3x-4y+32 = 0$; $4x+3y-24 = 0$; $3x - 4y + 7 = 0$. Інша діагональ: $x + 7y - 31 = 0$.

5.22. $5x - 12y + 62 = 0; x - 2 = 0.$

5.23. $x+3 = 0(AC)$; $2x-11y+28 = 0(BC)$ або $3x-4y+17 = 0(AC)$; $2x + y + 4 = 0(BC)$.

5.24. $29x - 2y + 33 = 0.$

5.25. $3x + y + 16 = 0.$

5.26. $(2, -4)$.

5.27. $4x - 3y + 10 = 0; 7x + y - 20 = 0; 3x + 4y - 5 = 0.$

5.28. $4x + 7y - 1 = 0; y - 3 = 0; 4x + 3y - 5 = 0.$

5.29. а) $x - 3y + 2z - 8 = 0$; б) $x - 1 = 0$; в) $y + 1 = 0$; г) $z - 2 = 0$; д) $x = 1 - u + v, y = -1 + u + 2v, z = 2 + 7u + 3v.$

5.30. $x - 3z + 4 = 0$; $2x - 4y + 5z + 9 = 0$; $6x + y + z + 2 = 0$.

5.31. а) $2x + 2y - z - 12 = 0$; б) $x - y - 3z + 4 = 0$; в) $2x + 3y - 5z - 5 = 0$; г) $2x + 5y + 3z - 9 = 0$; д) $3x - 7y - 6z + 2 = 0$; е) $4x + 3y + z - 10 = 0$.

5.32. а) $z - 3 = 0$; б) $y - 2 = 0$; в) $x - 1 = 0$; г) $3y - 2z = 0$; д) $3x - z = 0$; е) $2x - y = 0$.

5.33. а) $z - 3 = 0$; б) $y + 2 = 0$; в) $x + 5 = 0$; г) $2y + z = 0$; д) $3x + z = 0$; е) $4x + 3y = 0$; є) $y + 4z + 10 = 0$; ж) $x - z - 1 = 0$; з) $5x + y - 13 = 0$.

5.34. а) $2y-z+1 = 0$; б) $6x+y-10z+25 = 0$; в) $4x-12y+3z-12 = 0$; г) $x - 2 = 0$; д) три точки лежать на одній прямій і не визначають однозначно площину; е) $3x + 3y + z - 8 = 0$.

5.35. $4x+y-3z+5 = 0$; $10x+y-3z+11 = 0$; $20x+5y+3z-29 = 0$; $x - 2y - 3z + 8 = 0$.

5.36. а) $7x-y-5z = 0$; б) $x+2z-4 = 0$; в) $5x-10y-3z-3 = 0$; г) $4x - y - 2z - 9 = 0$; д) $5y + 13z - 60 = 0$; е) $3x + 5y - 4z + 25 = 0$.

6.1. а) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$; б) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{21}$; в) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{15}$; г) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-1}{1}$; д) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$; е) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-1}{0}$.

6.2. а) $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=3-t, \\ z=-1+2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2-t, \\ z=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=-1+6t, \\ y=1, \\ z=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=2-5t, \\ y=-1+t, \\ z=-2-2t. \end{cases}$

6.3. а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$; б) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{0}$; в) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$; г) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{1}$; д) $\dfrac{x-1}{11}=\dfrac{y+1}{-10}=\dfrac{z-2}{3}$.

6.4. а) $4x-3y+z+4=0$; б) $3x+4y+21z-36=0$; в) $z-1=0$; г) $y-3=0$; д) $x-1=0$.

6.5. а) $y-z+1=0$; б) $3x+y-6z+11=0$; в) $4x-2y-9z-5=0$; г) $4x-3y-8z+1=0$; д) $-5x+4y-z+1=0$; е) $-2x+y+4z-5=0$; є) $-x+8y-10z+9=0$; ж) $x+4y-z+4=0$; з) $-5x+2y+6z+1=0$.

6.6. а) $\begin{cases} x=0, \\ y=3t, \\ z=1-t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=0, \\ y=-3+4t, \\ z=t. \end{cases}$

6.7. а) $\begin{cases} x=-5-4t, \\ y=-3+5t, \\ z=-3+2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=-\dfrac{10}{3}-13t, \\ y=\dfrac{14}{3}+11t, \\ z=3t. \end{cases}$

6.8. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$.

6.9. а) $\begin{cases} 5x-6y+7z=0, \\ x-3y+2z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ 25x+12y-20z=0. \end{cases}$

6.10. $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}.$

6.11. $\dfrac{x+3}{8}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{-4}.$

6.12. а) $\begin{cases} 13x-12y+11z+36=0, \\ x-2y+z+4=0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x-y-z+1=0, \\ 8x+14y+19z+13=0. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 2x-3y+5z+21=0, \\ x-y-z-17=0. \end{cases}$

6.14. а) $A_1\,(0,-1,1)\,,\ A_2\,(-3,-1,1)\,;$ б) $A_1\,(3,0,1)\,,\ A_2\,(3,1,1)\,;$ в) $A_1\,(3,-1,0)\,,\ A_2\,(3,-1,-1)\,;$
г) $A_1\,(2,-3,-1)\,,\ A_2\,(1,-5,-3)\,;$ д) $A_1\,(1,-4,-5)\,,\ A_2\,(-1,-7,-11)\,;$
е) $A_1\,(-1,1,-5)\,,\ A_2\,(-5,3,-11)\,.$

6.15. а) $A_1\,(2,-3,-2)\,,$ $A_2\,(1,-2,2)\,;$ б) $A_1\,(-1,-2,4)\,,$ $A_2\,(1,-6,3)\,;$ в) $A_1\,(2,-3,-5)\,,\ A_2\,(1,-2,-8)\,.$

6.16. а) $\begin{cases} x+5y-z-25=0, \\ 17x-7y-18z+35=0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x+5y-z-25=0, \\ 7x-y+2z+8=0; \end{cases}$ в) єдина точка $(0,5,0)\,.$

6.17. $\dfrac{x+5}{-11}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-4}{8}.$

6.18. а) $A_1\,(3,-2,4)\,,\ A_2\,(4,-3,5)\,;$ б) $A_1\,(3,-1,4)\,,\ A_2\,(2,-3,2)\,.$

6.19. а) (1) : 3, (2) : $A_1\,(4,-3,1)\,,\ A_2\,(6,-5,2)\,,$ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1};$ б) (1) : $\dfrac{5}{3}\sqrt{2},$ (2) : $A_1\,(31/9,-4/9,-16/9)\,,\ A_2\,(44/9,-1/9,-32/9)\,,$ $\dfrac{x-2}{13}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z}{-16};$ в) (1) : $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$ (2) : $A_1\,(3/7,-15/7,-2/7)\,,$

$A_2\left(-8/7,-23/7,-4/7\right), \dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z}{2}$.

6.20. а) $\dfrac{\sqrt{26}}{7}$; б) $\sqrt{62}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{59}}$.

6.21. а) $\begin{cases} 5x+4y-z-24=0, \\ 4x-y+2z-43=0, \end{cases}$ $\sqrt{14}$;

б) $\begin{cases} 2x-5y+8z-9=0, \\ x-z+8=0, \end{cases}$ $3\sqrt{6}$;

в) $\begin{cases} 3x-2y-z-6=0, \\ 5x+34y-11z-38=0, \end{cases}$ $2\sqrt{21}$.

6.22. а) $\begin{cases} y-3=0, \\ z-2=0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-1=0, \\ z-2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y+1=0, \\ z-2=0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-2y+5=0, \\ z-2=0. \end{cases}$

6.23. а) $2x+y+z-1=0$ або $14x+13y-11z-1=0$; б) $x-z+4=0$ або $x+20y+7z-12=0$.

7.1. а) $\delta=-6, d=6$, в одній; б) $\delta=d=6$, в різних; в) $\delta=-3, d=3$, в одній; г) $\delta=d=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, в різних; д) $\delta=d=\dfrac{1}{\sqrt{34}}$, в різних; е) $\delta=-\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}}, d=\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$, в одній.

7.2. а) $1/2$ кв. од.; б) $2/13$ кв. од.

7.3. а) 6 кв. од.; б) $3/17$ кв. од.

7.4. а) $(7,6)$, $(-3,-2/3)$; б) $(3,5)$, $(-37,45)$.

7.5. а) перетинає; б) перетинає за точку A; в) перетинає за точку A; г) перетинає; д) перетинає; е) перетинає за точку B; є) точка B належить γ.

7.6. точка лежить в Δ, якщо $(Ax_0+By_0+C_1)(Ax_0+By_0+C_2)<0$; точка лежить в Δ_1, якщо $(C_1-C_2)(Ax_0+By_0+C_1)<0$; точка лежить в Δ_2, якщо $(C_2-C_1)(Ax_0+By_0+C_2)<0$.

7.7. а) $A\in\Delta_2$; б) $A\in\Delta$; в) $A\in\Delta_1$.

7.8. а) є опуклим; б) не є опуклим.

7.9. $\dfrac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

7.10. а) $\dfrac{11}{2\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{10}{\sqrt{26}}$; в) $\dfrac{9}{\sqrt{10}}$; г) $\dfrac{7}{2\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{4}{5}$; е) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

7.11. а) 5/2 кв. од.; б) 8/45 кв. од.

7.12. Дві паралельні прямі $Ax + By \pm d\sqrt{A^2 + B^2} = 0$.

7.13. Дві прямі, паралельні γ : а) $\left[\begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0, \\ x + 2y - 17 = 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3x - 9y + 25 = 0, \\ 3x - 9y - 35 = 0. \end{array}\right.$

7.14. Якщо $k \neq 1$, чотири паралельні прямі $Ax+By+\widetilde{C}_i = 0, i = \overline{1,4}$, де $\widetilde{C}_{1,2} = \dfrac{C_1 \pm kC_2}{1 \pm k}$, $\widetilde{C}_{3,4} = \dfrac{kC_1 \pm C_2}{1 \pm k}$; якщо $k = 1$, пряма $Ax + By + \dfrac{C_1 + C_2}{2} = 0$.

7.15. Пряма, паралельна γ_1, γ_2 : а) $15x - 3y + 8 = 0$; б) $16x - 28y + 11 = 0$.

7.16. Чотири прямі, паралельні γ_1, γ_2 :

а) $\left[\begin{array}{l} 6x - 2y + 1 = 0, \\ 12x - 4y - 5 = 0, \\ 18x - 6y + 5 = 0, \\ 36x - 12y + 11 = 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0, \\ 3x - 6y - 8 = 0, \\ 4x - 8y + 1 = 0, \\ 12x - 24y - 11 = 0. \end{array}\right.$

7.17. $(C_2 - C_1)(C_2 - C_3) < 0$. За цієї умови γ_2 ділить відстань між γ_1 і γ_3 у відношенні $\dfrac{C_2 - C_1}{C_3 - C_2}$.

7.18. а) γ_1 лежить між γ_2 і γ_3 і ділить відстань між ними у відношенні 5/8; б) γ_3 лежить між γ_1 і γ_2 і ділить відстань між ними у відношенні 33/62.

7.19. в одному, якщо $k_1 > 0$ і $k_2 > 0$, в протилежних, якщо $k_1 < 0$ і $k_2 < 0$, в суміжних, якщо $k_1k_2 < 0$, де $k_i = (A_ix_1 + B_iy_1 + C_i)(A_ix_2 + B_iy_2 + C_i)$, $i = 1, 2$.

7.20. а) в суміжних; б) в одному; в) в протилежних; г) в суміжних.

7.21. $\cos\varphi = k\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, де $k = -\operatorname{sign}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)$.

7.22. а) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; б) $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; в) $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{17}{5\sqrt{13}}$.

7.23. Кожне з чисел $\delta_i(A_ix_0+B_iy_0+C_i), i=\overline{1,3}$ має той самий знак, що і Δ (позначення $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\Delta$ див. у відповіді до задачі 5.18).

7.24. а) всередині трикутника; б) ззовні трикутника; в) ззовні трикутника; г) всередині трикутника.

7.25. $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

7.26. а) $4x-4y+3=0,\ 2x+2y-7=0$; б) $14x-8y-3=0,\ 64x+112y-23=0$; в) $3\left(\sqrt{5}\pm4\right)x-3\left(2\sqrt{5}\pm3\right)y-7\sqrt{5}\pm6=0$; г) $\left(4\sqrt{10}\pm6\sqrt{13}\right)x-\left(6\sqrt{10}\pm2\sqrt{13}\right)y+12\sqrt{10}\mp9\sqrt{13}=0$.

7.27. $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=k\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,
де $k=-\operatorname{sign}(A_1A_2+B_1B_2)$.

7.28. а) $16x+48y+7=0$; б) $\left(2\sqrt{5}+3\right)x+\left(\sqrt{5}+4\right)y-2\sqrt{5}-5=0$.

7.29. а) $4x+4y+7=0$; б) $2\left(\sqrt{13}+2\right)x+4\left(\sqrt{13}-8\right)y-\sqrt{13}+8=0$.

7.30. $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=k\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,
де $k=\operatorname{sign}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)$.

7.31. а) $16x-7y+8=0$; б) $10x+10y-9=0$; в) $9x-9y-10=0$; г) $2\left(\sqrt{2}-2\right)x-2\left(3\sqrt{2}-4\right)y-3\sqrt{2}+1=0$.

7.32. а) $\delta=-1, d=1$, в одній; б) $\delta=-\dfrac{1}{2}$, $d=\dfrac{1}{2}$, в одній; в) $\delta=d=\dfrac{5}{3}$, в різних; г) $\delta=d=9$, початок координат належить α; д) $\delta=-4, d=4$, в одній; е) $\delta=d=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, в різних; є) $\delta=-\sqrt{10}, d=\sqrt{10}$, в одній; ж) $\delta=d=\dfrac{1}{\sqrt{35}}$, в різних.

7.33. а) $3\sqrt{3}$ куб. од.; б) $50\sqrt{50}$ куб. од.

7.34. а) 18 куб. од.; б) 24/5 куб. од.

7.35. а) перетинає за точку B; б) перетинає; в) перетинає за точку A; г) перетинає; д) перетинає за точку A; е) перетинає; є) перетинає за точку B.

7.36. точка лежить в Δ, якщо $(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1) \times \times (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2) < 0$; точка лежить в Δ_1, якщо $(D_1 - D_2)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1) < 0$; точка лежить в Δ_2, якщо $(D_2 - D_1)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2) < 0$.

7.37. а) $A \in \Delta_1$; б) $A \in \Delta$; в) $A \in \Delta_2$.

7.38. $\dfrac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

7.39. а) $\dfrac{4}{3}$; б) $\dfrac{9}{2\sqrt{20}}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

7.40. а) 1 куб. од.; б) $\dfrac{27}{80\sqrt{10}}$ куб. од.

7.41. Дві паралельні площини $Ax+By+Cz+D\pm d\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$.

7.42. Дві площини, паралельні α : а) $3x - 6y + 2z + 7 = 0$, $3x - 6y + 2z + 11 = 0$; б) $-x + 2y + z + 4 = 0$, $-x + 2y + z + 16 = 0$.

7.43. Якщо $k \neq 1$, чотири паралельні площини $Ax+By+Cz+\widetilde{D}_i = 0, i = \overrightarrow{1,4}$, де $\widetilde{D}_{1,2} = \dfrac{D_1 \pm kD_2}{1 \pm k}$, $\widetilde{D}_{3,4} = \dfrac{kD_1 \pm D_2}{1 \pm k}$; якщо $k = 1$, площина $Ax + By + Cz + \dfrac{D_1 + D_2}{2} = 0$.

7.44. Площина, паралельна α_1, α_2 : а) $5x - 20z + 1 = 0$; б) $9x + 3y + 24z - 7 = 0$.

7.45. Чотири площини, паралельні α_1, α_2 : а) $2x - 6y - 18z + 2 = 0$, $2x - 6y - 18z + 6 = 0$, $2x - 6y - 18z + 7 = 0$, $2x - 6y - 18z - 11 = 0$; б) $8x - y + 4z - 2 = 0$, $8x - y + 4z - 5 = 0$, $8x - y + 4z - 7 = 0$, $8x - y + 4z + 10 = 0$.

7.46. $(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) < 0$. За цієї умови α_2 ділить відстань між α_1 і α_3 у відношенні $\dfrac{D_2 - D_1}{D_3 - D_2}$.

7.47. а) α_1 лежить між α_2 і α_3 і ділить відстань між ними у відношенні 5/7; б) α_2 лежить між α_1 і α_2 і ділить відстань між ними у відношенні 27/25.

7.48. в одному, якщо $k_1 > 0$ і $k_2 > 0$, в протилежних, якщо $k_1 < 0$ і $k_2 < 0$, в суміжних, якщо $k_1 k_2 < 0$, де $k_i = (A_i x_1 + B_i y_1 + C_i z_1 + D_i)(A_i x_2 + B_i y_2 + C_i z_2 + D_i)$, $i = 1, 2$.

7.49. а) в протилежних; б) в суміжних; в) в одному; г) в суміжних.

7.50. $\cos\varphi = k\dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, де $k = -\operatorname{sign}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)$.

7.51. а) $\varphi = \arccos\dfrac{2}{3}$; б) $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{4}{\sqrt{21}}$; в) $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{35}}$.

7.52. Числа $\delta_i(A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz + D_i)$, $i = \overline{1,4}$ мають той самий знак, що і Δ, де $\delta_1 = -\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$, $\delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$.

7.53. а) всередині тетраедра; б) ззовні тетраедра; в) всередині тетраедра.

7.54. $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\dfrac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

7.55. а) $3x - y + 3z + 7 = 0$, $2x + 3y - z + 3 = 0$; б) $9x - 7y - 4z - 2 = 0$, $5x + 3y + 6z + 6 = 0$; в) $\left(\sqrt{5} \pm 9\right)x + \sqrt{5}y - \left(4\sqrt{5} \mp 3\right)z + 5\sqrt{5} \mp 6 = 0$; г) $\left(5\sqrt{7} \pm 6\sqrt{5}\right)x - 3\left(\sqrt{7} \mp \sqrt{5}\right)y - \left(4\sqrt{7} \pm 5\sqrt{5}\right)z + \sqrt{7} \pm 3\sqrt{5} = 0$.

7.56. $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = k\dfrac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, де $k = -\operatorname{sign}(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)$.

7.57. а) $6x-14y+12z-1=0$; б) $3\left(2+\sqrt{11}\right)x-\left(9+\sqrt{11}\right)y-z\left(2+\sqrt{11}\right)+1-2\sqrt{11}=0$.

7.58. а) $5x+4y+z+1=0$; б) $\left(5\sqrt{11}+2\sqrt{10}\right)x-3\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)y+2\left(3\sqrt{11}-4\sqrt{10}\right)z-2\left(\sqrt{11}+2\sqrt{10}\right)=0$.

7.59. $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=k\dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, де $k=\operatorname{sign}\left(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1\right)\left(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+\ +D_2\right)$.

7.60. а) $9x-5y-4z+4=0$; б) $6x-12y-1=0$; в) $20x-3y-19z+1=0$; г) $\sqrt{5}x+\left(\sqrt{3}+1\right)y+\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)z+10\sqrt{3}-9\sqrt{5}=0$.

8.1. а) $x^2+y^2=9$; б) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; в) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$; г) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; д) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; е) $x^2+y^2=16$; є) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; ж) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; з) $(x-1)^2+y^2=1$; и) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; і) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

8.2. Рівняння визначає коло, якщо $B^2+C^2>AD$. Радіус дорівнює $\dfrac{\sqrt{B^2+C^2-AD}}{|A|}$, координати центра $(-B/A,-C/A)$. Рівняння визначає вироджене коло, якщо $B^2+C^2=AD$. Рівняння визначає уявне коло, якщо $B^2+C^2<AD$.

8.3. а) коло, $C\,(5,-2)$, $R=5$; б) коло, $C\,(-2,0)$, $R=8$; в) вироджене коло $C\,(5,-2)$, $R=0$; г) коло, $C\,(0,5)$, $R=\sqrt{5}$; д) коло, $C\,(1,-2)$, $R=5$; е) уявне коло; є) вироджене коло $C\,(-2,1)$, $R=0$; ж) коло, $C\,(-1/2,0)$, $R=1/2$; з) уявне коло; и) коло, $C\,(0,-1/2)$, $R=1/2$; і) коло, $C\,(3,-1/4)$, $R=11/4$; ї) коло, $C\,(1/7,1/2)$, $R=9/14$.

8.4. Чотири кола: $x^2+y^2\pm 2Rx\pm 2Ry=0$.

8.5. $x^2+y^2-(x_1+x_2)\,x-(y_1+y_2)\,y+x_1x_2+y_1y_2=0$.

8.6. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

8.7. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ C & -A & -B & 0 \end{vmatrix}.$

8.8. а) $|Aa+Bb+C| < R\sqrt{A^2+B^2}$; б) $|Aa+Bb+C| > R\sqrt{A^2+B^2}$; в) $|Aa+Bb+C| = R\sqrt{A^2+B^2}$.

8.9. а) велика піввісь 5, мала піввісь 3, фокуси $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$, ексцентриситет $\varepsilon = 4/5$, рівняння директрис $x = \pm 25/4$; б) велика піввісь 5, мала піввісь 3, фокуси $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$, ексцентриситет $\varepsilon = 4/5$, рівняння директрис $y = \pm 25/4$; в) велика піввісь 4, мала піввісь $\sqrt{5}$, фокуси $F_1\left(\sqrt{11},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{11},0\right)$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$, рівняння директрис $x = \pm\dfrac{16}{\sqrt{11}}$; г) велика піввісь 4, мала піввісь $\sqrt{5}$, фокуси $F_1\left(0,\sqrt{11}\right)$, $F_2\left(0,-\sqrt{11}\right)$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$, рівняння директрис $y = \pm\dfrac{16}{\sqrt{11}}$.

8.10. а) $F_1M = 19/3$, $F_2M = 11/3$; б) $F_1M = 13/5$, $F_2M = 37/5$; в) $F_1M = 19/3$, $F_2M = 11/3$; г) $F_1M = 19/3$, $F_2M = 11/3$.

8.11. а) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; д) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; е) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$; є) $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$; ж) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$; з) $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$ або $\dfrac{x^2}{117/4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; и) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$.

8.12. а) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{49}=1$; б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; в) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{169}=1$; д) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{169}=1$; е) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$; є) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; ж) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{36}=1$; з) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$ або $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{20}=1$; и) $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

8.13. а) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16/3}=1$; в) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$; г)

$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$; д) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$; е) $\dfrac{x^2}{256}+\dfrac{y^2}{192}=1$; є) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

8.14. а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$; в) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$; г) $\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{21}=1$; д) $\dfrac{x^2}{9/32}+\dfrac{y^2}{1/4}=1$; е) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$; є) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

8.15. а) $4/5$; б) $1/2$; в) $1/2$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; е) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; є) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; ж) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

8.16. а) 4 точки $\left(\pm\sqrt{\dfrac{8}{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) 2 точки $(0,\pm1)$; в) таких точок немає.

8.17. а) $\dfrac{(x-2)^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$; б) $2x^2-2xy+2y^2-3=0$; в) $68x^2+48xy+82y^2-625=0$; г) $11x^2+2xy+11y^2-48x-48y-24=0$; д) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$; е) $\dfrac{(x+14/5)^2}{576/25}+\dfrac{(y-2)^2}{64/5}=1$, $\dfrac{(x+22)^2}{576}+\dfrac{(y-2)^2}{320}=1$, є) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$, $\dfrac{(x-12)^2}{162}+\dfrac{(y-7)^2}{81}=1$, $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{18}=1$, $\dfrac{(x+3)^2}{81}+\dfrac{(y+8)^2}{162}=1$.

8.18. а) $5x^2+9y^2+4x-18y-55=0$; б) $4x^2+3y^2+32x-14y+59=0$; в) $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$; г) $4x^2+5y^2+14x+40y+81=0$; д) $17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0$; е) $x^2+2y^2-6x+24y+31=0$.

8.19. а) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y+8)^2}{169}=1$; в) $\dfrac{(x+2)^2}{100}+\dfrac{(y-1)^2}{36}=1$; г) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$; д) $3x^2-2xy+3y^2-8=0$; е) $8x^2+4xy+5y^2-36=0$; є) $3x^2-2xy+3y^2-10x-2y+3=0$; ж) $15x^2+6xy+7y^2-12x+36y-36=0$.

8.20. а) $\dfrac{(x+5)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$; б) $\dfrac{(x+2)^2}{144}+\dfrac{(y-10)^2}{225}=1$; в) $7x^2+2xy+7y^2-48=0$; г) $7x^2-4xy+7y^2-6x-6y=0$.

8.21. $x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, частину площі $\dfrac{4ab}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}$.

8.22. а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$, де $a>|c|$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{d^2y^2}{a^2\left(d^2-a^2\right)}=1$, де $0<a<|d|$.

8.23. а) $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; б) $\max|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$.

8.24. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3a^2}=1$.

8.25. Коло.

8.26. а) дійсна піввісь 3, уявна піввісь 4, фокуси $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$, рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{4}{3}x$, ексцентриситет $\varepsilon=5/3$, рівняння директрис $x=\pm 9/5$; б) дійсна піввісь 4, уявна піввісь 3, фокуси $F_1(0,5)$, $F_2(0,-5)$, рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{4}{3}x$, ексцентриситет $\varepsilon=5/4$, рівняння директрис $x=\pm 16/5$; в) дійсна піввісь 4, уявна піввісь $\sqrt{5}$, фокуси $F_1(\sqrt{21},0)$, $F_2(-\sqrt{21},0)$, рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{4}x$, ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$, рівняння директрис $x=\pm\dfrac{16}{\sqrt{21}}$; г) дійсна піввісь $\sqrt{5}$, уявна піввісь 4, фокуси $F_1(0,\sqrt{21})$, $F_2(-\sqrt{21},0)$, рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{4}x$, ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$, рівняння директрис $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{21}}$.

8.27. а) $F_1M=13$, $F_2M=7$; б) $F_1M=11$, $F_2M=19$; в) $F_1M=2\sqrt{21}-4$, $F_2M=2\sqrt{21}+4$; г) $F_1M=\sqrt{105}+4$, $F_2M=\sqrt{105}-4$.

8.28. Фокуси $F_1(a\sqrt{2},0)$, $F_2(-a\sqrt{2},0)$, рівняння асимптот $y=\pm x$, ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$, рівняння директрис $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

8.29. а) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$; б) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$; г) $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{16}=1$; д) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{36}=1$; е) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$; є) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; ж) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$;

з) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; и) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

8.30. а) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{81}=1$; б) $-\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{64}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$; г) $-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; д) $-\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{576}=1$; е) $-\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{81}=1$; є) $-\dfrac{x^2}{256}+\dfrac{y^2}{144}=1$; ж) $-\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ або $-\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{45}=1$; з) $-\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=1$; и) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

8.31. а) $\dfrac{x^2}{1/4}-\dfrac{y^2}{3}=1$; б) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{4}=1$; в) $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1$; г) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$; д) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$; е) $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{8}=1$; є) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{2}=1$; ж) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ або $\dfrac{x^2}{61/9}-\dfrac{y^2}{305/16}=1$.

8.32. а) $\dfrac{x^2}{9/64}-\dfrac{y^2}{1/4}=1$; б) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$; в) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$; г) $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{40}=1$; д) $\dfrac{x^2}{4/5}-\dfrac{y^2}{6/5}=1$.

8.33. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{1+k^2}$ або $\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$; в) 2; г) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ або $\sqrt{\dfrac{41}{5}}$; д) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ або $\dfrac{6}{5}$.

8.34. а) 4 точки $\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$; б) 4 точки $\left(\pm\sqrt{\dfrac{17}{5}},\pm4\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$.

8.35. а) $\dfrac{(x-3)^2}{144}-\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$; б) $4xy-3=0$; в) $-\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$; г) $24xy+7y^2-144=0$; д) $2xy+2x-2y+7=0$; е) $\dfrac{(x-4)^2}{1/2}-\dfrac{(y+2)^2}{1/2}=1$; є) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{5}=1$ або $\dfrac{(x+14)^2}{100}-\dfrac{(y-3)^2}{125}=1$; ж) $\dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

8.36. а) $\dfrac{(x+5)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$; б) $-\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y+12)^2}{144}=1$; в) $7x^2-6xy-y^2+26x-18y-17=0$; г) $x^2-4y^2-6x-24y-47=0$; д) $91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$.

8.37. а) $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; б) $-\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{(y+7)^2}{25}=1$; в) $\dfrac{(x-5)^2}{36}-\dfrac{(y+3)^2}{64}=1$; г) $-\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+5)^2}{9}=1$; д) $2xy-1=0$; е) $3x^2+4xy+4=0$; є) $2xy-2x+1=0$; ж) $8x^2-6xy+2x+6y-1=0$.

8.38. а) $\dfrac{(x-4)^2}{36}-\dfrac{(y-1)^2}{64}=1$; б) $-\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$; в) $x^2-4xy+y^2-6=0$; г) $x^2+20xy+16x^2-2x-20y+1=0$.

8.39. $\varepsilon'=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

8.40. $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{2a^2}=1$.

8.41. а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$, де $0<a<|c|$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{d^2y^2}{a^2\left(a^2-d^2\right)}=1$, де $a>|d|$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{k^2a^2}=\pm 1$, де $a>|d|$.

8.42. а) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; б) $\dfrac{ab}{2}$.

8.43. Коло з центром в початку координат, радіуса a.

8.45. а) a; б) b.

8.47. Рівнобічна гіпербола $x^2-y^2=a^2-b^2$, якщо $a\neq b$; пара прямих $y=\pm x$, якщо $a=b$.

8.48. Коло і рівнобічна гіпербола, описані навколо прямокутника, якщо сторони прямокутника не рівні між собою.

Вказівка: взяти за осі координат прямі, які з'єднують середини протилежних сторін прямокутника.

8.50. Кола з центрами в фокусах гіперболи.

Вказівка: взяти за осі координат прямі, які з'єднують середини протилежних сторін прямокутника.

8.51. Відкритий відрізок дотичної в вершині гілки гіперболи, яка розглядається, який міститься між її асимптотами.

Вказівка: взяти за осі координат прямі, які з'єднують середини протилежних сторін прямокутника.

8.52. а) параметр параболи $p = 4$, фокус $F(2,0)$, рівняння директриси $x = -2$; б) параметр параболи $p = 4$, фокус $F(-2,0)$, рівняння директриси $x = 2$; в) параметр параболи $p = 4$, фокус $F(0,2)$, рівняння директриси $y = -2$; г) параметр параболи $p = 4$, фокус $F(0,-2)$, рівняння директриси $y = 2$; д) параметр параболи $p = 3$, фокус $F(3/2,0)$, рівняння директриси $x = -3/2$; е) параметр параболи $p = 3$, фокус $F(-3/2,0)$, рівняння директриси $x = 3/2$; є) параметр параболи $p = 3$, фокус $F(0,3/2)$, рівняння директриси $y = -3/2$; ж) параметр параболи $p = 3$, фокус $F(0,-3/2)$, рівняння директриси $y = 3/2$.

8.53. а) 10; б) 10; в) 20; г) 20; д) 11/2; е) 7/2; є) 9/2; ж) 15/2.

8.54. а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = -9x$; в) $x^2 = 5y$; г) $x^2 = -2y$; д) $y^2 = -20x$; е) $y^2 = 12x$; є) $x^2 = 4y$; ж) $x^2 = -16y$; з) $y^2 = 20x$; и) $y^2 = -12x$; і) $x^2 = -4y$; ї) $x^2 = 16y$.

8.55. а) $y^2 = 24x$; б) $y^2 = 9x$.

8.56. а) $\left(15/2, 5\sqrt{3}\right)$ і $\left(15/2, -5\sqrt{3}\right)$; б) $(2/5, 2)$ і $(2/5, -2)$; в) $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$; г) $\left(8, 4\sqrt{5}\right)$, $\left(8, -4\sqrt{5}\right)$, $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)$ і $\left(\dfrac{10}{3}, -\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)$.

8.57. а) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$; б) $(y-b)^2 = -2p(x-a)$; в) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$; г) $(x-a)^2 = -2p(y-b)$.

8.58. а) $4x = y^2 - 4y + 28$; б) $8y = x^2 - 8x + 24$; в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$; г) $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$; д) $x^2 = 4y$; е) 4 параболи: $\pm 6y = x\,(x \pm 6)$.

8.59. а) $(x+2)^2 = 8y$; б) $(y-2)^2 = -2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$; в) $x^2 - 2xy + y^2 + 4y - 2 = 0$; г) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 10x - 10y = 0$.

8.60. а) $y^2 = p^2 + 2px, p \neq 0$; б) $y^2 = -p^2 + 2px, p \neq 0$.

8.63. $4p\sqrt{3}$.

8.64. На відрізку $\left[0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

8.65. Парабола.

8.66. Дві параболи зі спільним фокусом в центрі даного кола і директрисами, паралельними даній прямій. У випадку зовнішнього дотику кола параметр параболи дорівнює $a+r$, у випадку внутрішнього дотику параметр дорівнює $a-r$, де r — це радіус кола, a — відстань від центра кола до до заданої прямої.

8.68. а) $xx_0 + yy_0 = R^2$; б) $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b) = R^2$; в) $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$; г) $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$; д) $-\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$; е) $yy_0 = p\,(x+x_0)\,$; є) $yy_0 = -p\,(x+x_0)\,$; ж) $xx_0 = p\,(y+y_0)\,$; з) $xx_0 = -p\,(y+y_0)\,.$

8.69. а) $x-2y+5=0$; б) $3x-4y+43=0$; в) $x+y-4=0$; г) $x-3y-12=0$; д) $x+y-1=0$; е) $10x+9y+48=0$; є) $4x-3y+2=0$; ж) $x+2y-1=0$; з) $2x+2y+3=0$; и) $5x+2y-2=0$; і) $x-y-3=0$; ї) $2x-y+4=0$.

8.70. а) $\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = R$; б) $\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = R$; в) $a^2A^2+b^2B^2 = C^2$; г) $a^2A^2-b^2B^2=C^2$, $C \neq 0$; д) $-a^2A^2+b^2B^2=C^2$, $C\neq 0$; е) $pB^2 = 2AC$; є) $pB^2=-2AC$; ж) $pA^2=2BC$; з) $pA^2=-2BC$.

8.71. а) $(6,-3)\,$; б) $(5,3)\,$; в) $(1,-2)\,$.

8.73. $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+r^2=0$.

8.74. $2a_1a_2+2b_1b_2=c_1+c_2$.

8.75. $x_0x+y_0y=r^2$.

Вказівка: Нехай $T_i(x_i, y_i)$, $i=1,2$. Рівняння дотичних в точках T_i : $x_ix+y_iy=r^2$, $i=1,2$. Цим рівнянням задовольняють координати точки M_0, тобто $x_ix_0+y_iy_0=r^2$, $i=1,2$, звідки випливає, що точки дотику лежать на прямій $xx_0+yy_0=r^2$

8.76. $\dfrac{\pi}{2}$.

8.77. *Вказівка:* Прийняти за осі координат асимптоти гіперболи.

8.78. $s=ab$.

8.79. $x+y+\dfrac{p}{2}=0$.

8.80. $y^2 = -\dfrac{p}{4}x.$

8.81. Половина фокальної хорди кривої.

Вказівка: Прийняти за початок координат вершину кривої, а за вісь абсцис — її фокальну вісь, представити рівняння кривої у вигляді $y^2 = 2px + qx^2$.

8.82. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$

8.83. Коло і гіпербола, які дотикаються бічних сторін трикутника в кінцях його основи.

8.86. а) коло, яке побудовано на великій осі еліпса, як на діаметрі; б) коло, яке побудовано на великій осі гіперболи, як на діаметрі; в) дотична до параболи і її вершині.

8.87. а) (1) : $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$, (2) : $\rho = \dfrac{9}{5 + 4\cos\varphi}$; б) (1) : $\rho = \dfrac{25}{13 - 12\cos\varphi}$, (2) : $\rho = \dfrac{25}{13 + 12\cos\varphi}$; в) (1) : $\rho = \dfrac{27}{5 - 4\cos\varphi}$, (2) : $\rho = \dfrac{27}{5 + 4\cos\varphi}$; г) (1) : $\rho = \dfrac{36}{5 - 4\cos\varphi}$, (2) : $\rho = \dfrac{36}{5 + 4\cos\varphi}$.

8.88. а) (1) : права гілка: $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$, ліва гілка: $\rho = -\dfrac{9}{4 + 5\cos\varphi}$, (2) : ліва гілка: $\rho = \dfrac{9}{4 + 5\cos\varphi}$, права гілка: $\rho = \dfrac{9}{5\cos\varphi - 4}$; б) (1) : права гілка: $\rho = \dfrac{25}{12 - 13\cos\varphi}$, ліва гілка: $\rho = -\dfrac{25}{12 + 13\cos\varphi}$, (2) : ліва гілка: $\rho = \dfrac{25}{12 + 13\cos\varphi}$, права гілка: $\rho = \dfrac{25}{13\cos\varphi - 12}$; в) (1) : права гілка: $\rho = \dfrac{32}{3 - 5\cos\varphi}$, ліва гілка: $\rho = -\dfrac{32}{3 + 5\cos\varphi}$, (2) : ліва гілка: $\rho = \dfrac{32}{3 + 5\cos\varphi}$, права гілка: $\rho = \dfrac{32}{5\cos\varphi - 3}$; г) (1) : права гілка: $\rho = \dfrac{49}{24 - 25\cos\varphi}$, ліва гілка: $\rho = -\dfrac{49}{24 + 25\cos\varphi}$, (2) : ліва гілка: $\rho = \dfrac{49}{24 + 25\cos\varphi}$, права гілка: $\rho = \dfrac{49}{25\cos\varphi - 24}$.

8.89. а) $\rho = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{5}{2 - 2\cos\varphi}$;

г) $\rho = \dfrac{5}{1-\cos\varphi}$.

8.90. а) права гілка гіперболи, $a = 3$, $b = 4$; б) парабола, $p = 1$; в) еліпс, $a = 5$, $b = 4$; г) ліва гілка гіперболи, $a = 12$, $b = 9$; д) еліпс, $a = 10$, $b = 6$; е) права гілка гіперболи, $a = 16$, $b = 12$; є) парабола, $p = 4$; ж) еліпс, $a = 26$, $b = 10$; з) парабола, $p = 3/2$; и) ліва гілка гіперболи, $a = 15$, $b = 17$.

8.91. Парабола, отримана з заданої параболи з допомогою паралельного переносу на вектор з початком в вершині параболи і кінцем в її фокусі.

8.93. Якщо $AC \neq 0$, тоді за допомогою паралельного переносу на вектор $\{-C/A, -D/B\}$ задане рівняння зводиться до $A\widetilde{x}^2 + B\widetilde{y}^2 = \widetilde{E}$ (1), де $\widetilde{x} = x + \dfrac{C}{A}$, $\widetilde{y} = y + \dfrac{D}{B}$, $\widetilde{E} = \dfrac{C^2}{A} + \dfrac{D^2}{B} - E$. Якщо $AB > 0$ і $A\widetilde{E} > 0$, тоді (1) є рівнянням еліпса, якщо $AB > 0$ і $A\widetilde{E} < 0$, тоді (1) є рівнянням уявного еліпса, якщо $AB > 0$ і $\widetilde{E} = 0$, тоді (1) є рівнянням виродженого еліпса. Якщо $AB < 0$ і $\widetilde{E} \neq 0$, тоді (1) є рівнянням гіперболи, якщо $AB < 0$ і $\widetilde{E} = 0$, тоді (1) є рівнянням пари перетинних прямих. Якщо $A = 0$ $(B \neq 0)$ і $C \neq 0$, тоді за допомогою паралельного переносу на вектор $\left\{\dfrac{D^2 - BE}{2BC}, -\dfrac{D}{B}\right\}$ рівняння зводиться до $\widetilde{y}^2 = 2p\widetilde{x}$ (рівняння параболи), де $\widetilde{x} = x - \dfrac{D^2 - BE}{2BC}$, $\widetilde{y} = y + \dfrac{D}{B}$, $p = -\dfrac{C}{B}$. Якщо $A = \ = 0$ $(B \neq 0)$, тоді за допомогою паралельного переносу на вектор $\left\{0, -\dfrac{D}{B}\right\}$ рівняння зводиться до $\widetilde{y}^2 = \widetilde{E}(2)$, де $\widetilde{y} = y + \dfrac{D}{B}$, $\widetilde{E} = \dfrac{D^2 - BE}{B^2}$. Якщо $\widetilde{E} > 0$, тоді (2) є рівнянням пари паралельних прямих, якщо $\widetilde{E} < 0$, тоді (2) є рівнянням пари уявних паралельних прямих, якщо $\widetilde{E} = 0$, тоді (2) є рівнянням пари паралельних прямих, які збігаються. Якщо $B = 0$ $(A \neq 0)$ і $D \neq 0$, тоді за допомогою паралельного переносу на вектор $\left\{\dfrac{C^2 - AE}{2AD}, -\dfrac{C}{A}\right\}$ рівняння зводиться до $\widetilde{x}^2 = 2p\widetilde{y}$ (рівняння параболи), де $\widetilde{x} = x + \dfrac{C}{A}$, $\widetilde{y} = y - \dfrac{C^2 - AE}{2AD}$, $p = -\dfrac{D}{A}$. Якщо $B = D = 0$ $(A \neq 0)$, тоді за допомогою паралельного переносу на вектор $\left\{-\dfrac{C}{A}, 0\right\}$ рівняння зводиться до $\widetilde{x}^2 = \widetilde{E}(3)$, де $\widetilde{x} = x + \dfrac{C}{A}$, $\widetilde{E} = \dfrac{C^2 - AE}{A^2}$. Якщо $\widetilde{E} > 0$, тоді (3) є рівнянням пари паралельних прямих, якщо $\widetilde{E} < 0$, тоді (3) є рівнянням пари уявних паралельних прямих, якщо $\widetilde{E} = 0$, тоді (3) є рівнянням пари паралельних прямих, які збігаються. **8.94.** а) коло $\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = \dfrac{49}{80}$, де $x = \widetilde{x} - \dfrac{3}{7}$, $y = \widetilde{y} + \dfrac{1}{7}$; б) гіпербола $\dfrac{\widetilde{x}^2}{16} - \dfrac{\widetilde{y}^2}{9} = 1$, де $x = \widetilde{x} + \dfrac{1}{3}$, $y = \widetilde{y} + \dfrac{1}{4}$; в) еліпс $\widetilde{x}^2 + \dfrac{\widetilde{y}^2}{4/9} = 1$, де $x = \widetilde{x} - \dfrac{1}{3}$, $y = \widetilde{y} + \dfrac{1}{2}$; г) парабола $\widetilde{y}^2 = \dfrac{8}{3}\widetilde{x}$, де $x = \widetilde{x} + \dfrac{1}{2}$, $y = \widetilde{y} - 1$; д) пара паралельних прямих $\widetilde{y}^2 = \left(\dfrac{25}{18}\right)^2$, де $x = \widetilde{x}$, $y = \widetilde{y} + \dfrac{7}{18}$; е) вироджений еліпс $\widetilde{x}^2 + \dfrac{\widetilde{y}^2}{2} = 0$, де $x = \widetilde{x} - 1$, $y = \widetilde{y} + 3$; є) уявний еліпс $\widetilde{x}^2 + \dfrac{\widetilde{y}^2}{2} = -1$, де $x = \widetilde{x} - 1$, $y = \widetilde{y} + 3$; ж) пара уявних паралельних прямих $\widetilde{x}^2 = -\dfrac{19}{4}$, де $x = \widetilde{x} + \dfrac{5}{2}$, $y = \widetilde{y}$; з) пара паралельних прямих, які збігаються, $\widetilde{x}^2 = 0$, де $x = \widetilde{x} + \dfrac{3}{5}$, $y = \widetilde{y}$; и) пара перетинних прямих $\dfrac{\widetilde{x}^2}{1/5} - \dfrac{\widetilde{y}^2}{1/4} = 0$, де $x = \widetilde{x} + 1$, $y = \widetilde{y} - \dfrac{1}{3}$.

8.95. За допомогою повороту системи координат на кут α, де $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{A - C}{2B}$, задане рівняння зводиться до $\widetilde{A}\widetilde{x}^2 + \widetilde{C}\widetilde{y}^2 = \widetilde{D}$, де $x = \widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha$, $y = \widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha$, $\widetilde{A} = \dfrac{A + C}{2} + \dfrac{A - C}{2}\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha$, $\widetilde{C} = A + C - \widetilde{A}$, $\widetilde{D} = -D$. Якщо $\widetilde{A}\widetilde{C} > 0$ і $\widetilde{A}\widetilde{D} > 0$, тоді (1) є рівнянням еліпса, якщо $\widetilde{A}\widetilde{C} > 0$ і $\widetilde{A}\widetilde{D} < 0$, тоді (1) є рівнянням уявного еліпса, якщо $\widetilde{A}\widetilde{C} > 0$ і $\widetilde{D} = 0$, тоді (1) є рівнянням виродженого еліпса. Якщо $\widetilde{A}\widetilde{C} < 0$ і $\widetilde{D} \neq 0$, тоді (1) є рівнянням гіперболи, якщо $\widetilde{A}\widetilde{C} < 0$ і $\widetilde{D} = 0$, тоді (1) є рівнянням пари перетинних прямих. Якщо $\widetilde{A} = 0$ і

$\widetilde{C}\widetilde{D} > 0$ або $\widetilde{C} = 0$ і $\widetilde{A}\widetilde{D} > 0$, тоді (1) є рівнянням пари паралельних прямих, якщо $\widetilde{A} = 0$ і $\widetilde{C}\widetilde{D} < 0$ або $\widetilde{C} = 0$ і $\widetilde{A}\widetilde{D} < 0$, тоді (1) є рівнянням пари уявних паралельних прямих, якщо $\widetilde{A} = \widetilde{D} = 0$ або $\widetilde{C} = \widetilde{D} = 0$, тоді (1) є рівнянням пари паралельних прямих, які збігаються.

8.96. а) еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{11}+\dfrac{\widetilde{y}^2}{121} = 1$, де $x = \dfrac{\widetilde{x} - 3\widetilde{y}}{\sqrt{10}}$, $y = \dfrac{3\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{10}}$; б) гіпербола $-\dfrac{\widetilde{x}^2}{8/9} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{8/9} = 1$, де $x = \dfrac{\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; в) гіпербола $-\dfrac{\widetilde{x}^2}{1/9} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{1/3} = 1$, де $x = \dfrac{\widetilde{x} - \sqrt{3}\widetilde{y}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}\widetilde{x} + \widetilde{y}}{2}$; г) еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{1/9} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{3/2} = 1$, де $x = \dfrac{4\widetilde{x} - 3\widetilde{y}}{5}$, $y = \dfrac{3\widetilde{x} + 4\widetilde{y}}{5}$; д) парабола $\widetilde{y}^2 = \sqrt{2}\,\widetilde{x}$, де $x = \dfrac{\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; е) пара паралельних прямих $\widetilde{y}^2 = 1$, де $x = \dfrac{\widetilde{x} - 3\widetilde{y}}{\sqrt{10}}$, $y = \dfrac{3\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{10}}$; є) пара паралельних прямих, які збігаються, $\widetilde{y}^2 = 0$, де $x = \dfrac{2\widetilde{x} - 9\widetilde{y}}{\sqrt{85}}$, $y = \dfrac{9\widetilde{x} + 2\widetilde{y}}{\sqrt{85}}$; ж) пара перетинних прямих $\widetilde{x}^2 - 8\widetilde{y}^2 = 0$, де $x = \dfrac{\sqrt{5}\widetilde{x} - 2\widetilde{y}}{3}$, $y = \dfrac{2\widetilde{x} + \sqrt{5}\widetilde{y}}{3}$.

8.98. а) еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{1/3} = 1$, де $x = -3 + \dfrac{2\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{5}}$, $y = -1 + \dfrac{\widetilde{x} + 2\widetilde{y}}{\sqrt{5}}$; б) гіпербола $-\widetilde{x}^2 + \dfrac{\widetilde{y}^2}{1/4} = 1$, де $x = -1 + \dfrac{2\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{5}}$, $y = 1 + \dfrac{\widetilde{x} + 2\widetilde{y}}{\sqrt{5}}$; в) парабола $\widetilde{y}^2 = -\dfrac{1}{5}\widetilde{x}$, де $x = \dfrac{4\widehat{x} - 3\widehat{y}}{5}$, $y = \dfrac{3\widehat{x} + 4\widehat{y}}{5}$, $\widetilde{x} = \widehat{x} - 4$, $\widetilde{y} = \widehat{y} + \dfrac{4}{5}$; г) еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{2/3} = 1$, де $x = -1 + \dfrac{\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y = -1 + \dfrac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; д) гіпербола $\dfrac{\widetilde{x}^2}{4} - \dfrac{\widetilde{y}^2}{4} = 1$, де $x = -1 + \dfrac{\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y = -2 + \dfrac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; е) парабола $\widetilde{y}^2 = 4\sqrt{2}\,\widetilde{x}$, де $x = \dfrac{\widehat{x} - \widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{\widehat{x} + \widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $\widetilde{x} = \widehat{x} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\widetilde{y} = \widehat{y} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; є) еліпс $\widetilde{x}^2 + \dfrac{\widetilde{y}^2}{14} = 1$, де

$x=3+\dfrac{2\widetilde{x}-3\widetilde{y}}{\sqrt{13}}, y=-2+\dfrac{3\widetilde{x}+2\widetilde{y}}{\sqrt{13}}$; ж) гіпербола $-\dfrac{\widetilde{x}^2}{1/25}+\dfrac{\widetilde{y}^2}{1/9}=1$, де $x=1+\dfrac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y=-1+\dfrac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; з) парабола $\widetilde{y}^2=-\dfrac{6}{\sqrt{34}}\,\widetilde{x}$, де $x=\dfrac{3\widehat{x}-5\widehat{y}}{\sqrt{34}}$, $y=\dfrac{5\widehat{x}+3\widehat{y}}{\sqrt{34}}$, $\widetilde{x}=\widehat{x}-\dfrac{1}{\sqrt{34}}$, $\widetilde{y}=\widehat{y}-\dfrac{5}{\sqrt{34}}$; и) пара перетинних прямих $\widetilde{x}^2-\dfrac{\widetilde{y}^2}{9}=0$, де $x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\widetilde{x}-\widetilde{y}}{\sqrt{10}}$, $y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\widetilde{x}+3\widetilde{y}}{\sqrt{10}}$; і) пара паралельних прямих $\widetilde{x}^2=\dfrac{9}{13}$, де $x=\dfrac{2\widehat{x}-3\widehat{y}}{\sqrt{13}}$, $y=\dfrac{3\widehat{x}+2\widehat{y}}{\sqrt{13}}$, $\widetilde{x}=\widehat{x}-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\widetilde{y}=\widehat{y}$; ї) пара паралельних прямих, які збігаються, $\widetilde{y}^2=0$, де $x=\dfrac{8\widehat{x}-15\widehat{y}}{17}$, $y=\dfrac{15\widehat{x}+8\widehat{y}}{17}$, $\widetilde{x}=\widehat{x}$, $\widetilde{y}=\widehat{y}-\dfrac{1}{17}$; к) пара паралельних прямих $\widetilde{x}^2=\dfrac{9}{8}$, де $x=\dfrac{\widehat{x}-\widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\widehat{x}+\widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $\widetilde{x}=\widehat{x}-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$, $\widetilde{y}=\widehat{y}$; л) вироджений еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{4}+\widetilde{y}^2=0$, де $x=1+\dfrac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y=2+\dfrac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; м) пара уявних паралельних прямих $\widetilde{y}^2=-3$, де $x=\dfrac{\widehat{x}-\widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\widehat{x}+\widehat{y}}{\sqrt{2}}$, $\widetilde{x}=\widehat{x}$, $\widetilde{y}=\widehat{y}-2\sqrt{2}$; н) уявний еліпс $\dfrac{\widetilde{x}^2}{4}+\dfrac{\widetilde{y}^2}{36}=-1$, де $x=1+\dfrac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$; о) пара перетинних прямих $\widetilde{x}^2-\widetilde{y}^2=0$, де $x=1+\dfrac{\widetilde{x}-4\widetilde{y}}{\sqrt{17}}$, $y=-2+\dfrac{4\widetilde{x}+\widetilde{y}}{\sqrt{17}}$.

8.100. *Вказівка:* Скористатись інваріантністю δ (див. 8.99).

9.1. а) $x^2+y^2+z^2=81$; б) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; в) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; г) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; д) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; е) $x^2+y^2+z^2=9$; є) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$; ж) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$; з) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$; и) $(x-1)^2+(y-5/2)^2+(z-3/2)^2=38/4$; і) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$; ї) $(x-5)^2+(y+15/2)^2+(z-25/2)^2=475/2$; к) $(x+13/2)^2+(y+9/2)^2+(z-9/2)^2=387/4$; л) $x^2+(y+2)^2+z^2=41$.

9.2. Рівняння визначає сферу, якщо $B^2+C^2+D^2>AE$. Радіус дорівнює $\dfrac{\sqrt{B^2+C^2+D^2-AE}}{|A|}$, координати центра $\left(-\dfrac{B}{A}, -\dfrac{C}{A}, -\dfrac{D}{A}\right)$. Рівняння визначає вироджену сферу, якщо $B^2+C^2+D^2 = AE$. Рівняння визначає уявну сферу, якщо $B^2+C^2+D^2 < AE$.

9.3. а) сфера, $C(3,-2,5)$, $R=5$; б) сфера, $C(-1,-3,0)$, $R=\sqrt{5}$; в) сфера, $C(-1,3,-4)$, $R=4$; г) вироджена сфера, $C(1,-3,4)$, $R=0$; д) сфера $C(6,3,0)$, $R=2$; д) уявна сфера; є) $C(0,-2,5)$, $R=\sqrt{19}$.

9.4. а) вісім сфер $x^2+y^2+z^2 \pm 2Rx \pm 2Ry \pm 2Rz + 2R^2 = 0$; б) вісім сфер $x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{2}Rx \pm \sqrt{2}Ry \pm \sqrt{2}Rz + \dfrac{R^2}{2} = 0$.

9.5. а) $C(-1,2,3)$, $R = 8$; б) $C(1,6,0)$, $R = 5$; в) $C(10/3,-14/3,5/3)$, $R=3$.

9.6. Позначимо $\delta^2 = A^2+B^2+C^2$. а) $\delta^2R^2 > D^2$. Центр кола $\left(-\dfrac{AD}{\delta^2}, -\dfrac{BD}{\delta^2}, -\dfrac{CD}{\delta^2}\right)$, радіус кола $\dfrac{\sqrt{\delta^2R^2-D^2}}{\delta}$; б) $\delta^2R^2 = D^2$. Координати точки дотику $\left(-\dfrac{AR^2}{D}, -\dfrac{BR^2}{D}, -\dfrac{CR^2}{D}\right)$; в) $\delta^2R^2 < D^2$.

9.7. $\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2 < R^2, \\ D\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right) < 0. \end{cases}$

9.8. а) еліпсоїд, коли $\lambda > 0$; точка, коли $\lambda = 0$; не визначає геометричного образу, коли $\lambda < 0$; б) еліпсоїд, коли $\lambda > 0$; круговий циліндр, коли $\lambda = 0$; однопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; в) еліпсоїд, коли $\lambda > 0$; пряма, коли $\lambda = 0$; двопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; г) однопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda > 0$; круговий конус, коли $\lambda = 0$; двопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; д) двопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda > 0$; круговий конус, коли $\lambda = 0$; однопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; е) еліпсоїд, коли $\lambda > 0$; пара паралельних площин, коли $\lambda = 0$; двопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; є) еліпсоїд, коли $\lambda > 0$; площина, коли $\lambda = 0$; однопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda < 0$; ж) еліптичний параболоїд, коли $\lambda \neq 0$; пряма, коли $\lambda = 0$; з) еліптичний параболоїд, коли $\lambda > 0$; параболічний ціліндр, коли $\lambda = 0$; гіперболічний параболоїд, коли $\lambda < 0$; и) еліптичний параболоїд, коли $\lambda \neq 0$; площина, коли $\lambda = 0$; і) еліптичний параболоїд, коли $\lambda > 0$; площина, коли $\lambda = 0$; гіперболічний параболоїд, коли $\lambda < 0$; ї) еліптичний параболоїд, коли $\lambda > 0$; пара паралельних площин, коли $\lambda = 0$; гіперболічний параболоїд, коли $\lambda < 0$; к) круговий циліндр, коли $\lambda > 0$; пряма, коли $\lambda = 0$; не визначає геометричного образу, коли $\lambda < 0$; л) гіперболічний циліндр, коли $\lambda \neq 0$; пара перетинних площин, коли $\lambda = 0$.

9.10. а) еліпсоїд обертання: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; б) двопорожнинний гіперболоїд обертання: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; в) однопорожнинний гіперболоїд обертання: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9.11. а) (1), а) (2) : еліпсоїд обертання, б) (1), в) (2) : однопорожнинний гіперболоїд обертання, б) (2), в) (1) : двопорожнинний гіперболоїд обертання: а) (1) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (2) : $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; б) (1) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, (2) : $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; в) (1) : $-\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (2) : $-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9.12. а) (1), а) (2) : еліпсоїд обертання, б) (2), в) (1) : однопорожнинний гіперболоїд обертання, б) (1), в) (2) : двопорожнинний гіперболоїд обертання: а) (1) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, (2) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$; б) (1) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, (2) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$; в) (1) : $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, (2) : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

9.13. еліптичні параболоїди обертання: а) $x^2 + z^2 = 2py$; б) $y^2 + z^2 = 2px$.

9.15. $p\left(a^2 + b^2\right) + 2c > 0$.

9.16. а) круговий циліндр $y^2 + z^2 - 4 = 0$; б) круговий конус $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0$; в) круговий конус $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.

9.17. а) однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 4 = 0$; б) конус $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$; в) конус $xy + xz + yz = 0$.

9.18. а) $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = f(u), \end{cases}$ $(u \geq 0,\ 0 \leq v < 2\pi)$; б) $\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v, \\ y = \psi(u)\sin v, \\ z = \chi(u), \end{cases}$ $(0 \leq v < 2\pi)$.

9.19. а) тор $\left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2 = 16\left(x^2+z^2\right)$; б) $x^2\left(y^2+z^2\right)=1$ і $y^2\left(x^2+z^2\right)=1$.

9.20. $\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2 = r^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. *Вказівка:* Скористатись формулою відстані від точки до прямої.

9.21. а) $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz-30x-48y+6z+45=0$; б) $5x^2+10y^2+13z^2+12xy-6xz+4yz+26x+20y-38z+3=0$; в) $x^2+y^2+z^2-xy-xz+3x-3z=0$.

9.23. а) $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z=131$; б) $9x^2+4y^2+9z^2-18xz-18x+18z-16y-11=0$; в) $2z-y^2+4y-6=0$; г) $x^2-y^2-z^2+2yz-25=0$; д) $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z=0$; е) $\begin{cases} x = -1+2\cos u+v, \\ y = -1+2\sin u+v, \\ z = 3-2\cos u-2\sin u+v. \end{cases}$

9.24. $\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}^2 = r^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. *Вказівка:* Скористатись результатом задачі 9.20.

9.25. а) $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$; б) $5x^2+8y^2+5z^2+4xy+8xz-4yz+6x+24y-6z-63=0$; в) $x^2+4y^2+5z^2-4xy-125=0$.

9.26. а), д) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$; б), е) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$; в), г) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$; є) $cy^2=2pxz$; ж) $bx^2=2pyz$; з) $az^2=2pxy$.

9.27. а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{49}=0$; б) $x^2-3y^2+z^2=0$; в) $xy+xz+yz=0$; г) $x^2+4y^2-4z^2+4xy+12xz-6yz=0$; д) $x^2+y^2-z^2=0$.

9.28. а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{(z-c)^2}{c^2}=0$; б) $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-$

$2yz-4x+4y-4z+4=0$; в) $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$; г) $xy+xz+yz-2x-2y-2z+3=0$; д) $4x^2-15y^2-6z^2-12xz-36x+24z+66=0$.

9.30. а) однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$; б) еліпсоїд $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$; в) еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{4}+y^2=-2z$; г) двопорожнинний гіперболоїд $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$; д) гіперболічний параболоїд $\dfrac{z^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=2y$; е) еліптичний параболоїд $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=-2(z-1)$; є) двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{(y-1)^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=-1$; ж) гіперболічний параболоїд $x^2-\dfrac{y^2}{4}=-2(z+1)$; з) еліпсоїд $\dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2+\dfrac{(z-2)^2}{9}=1$; и) однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{(x+3)^2}{12}+\dfrac{(y+1)^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$.

9.31. а) двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{2}-(z-4)^2=-1$; б) еліптичний параболоїд $\dfrac{(x+3)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{3/2}=-2(z-2)$; в) еліпсоїд $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}+(z-1)^2=1$; г) однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{(x+4)^2}{6}+\dfrac{(y-1)^2}{12}-\dfrac{(z-2)^2}{12}=1$; д) гіперболічний параболоїд $\dfrac{(x+3)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=2(z-5)$; е) еліпсоїд $\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{(y+2)^2}{6}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$; є) однопорожнинний гіперболоїд $(x+1)^2+\dfrac{(y-1)^2}{1/2}-(z-1)^2=1$; ж) гіперболічний параболоїд $\dfrac{(x+3)^2}{3}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=2(z+4)$; з) двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y+1)^2-$

$\dfrac{(z-3)^2}{16}=-1$; и) еліптичний параболоїд $\dfrac{(x+3)^2}{1/2}+\dfrac{(y-3)^2}{1/3}=2(z-1)$.

9.32. а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{2}=1$; в) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{2}=1$; г) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{36}=1$.

9.33. а) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$; б) $\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{10}=1$.

9.34. а) $x^2+\dfrac{y^2}{1/2}-\dfrac{z^2}{1/3}=-1$; б) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$.

9.35. а) $x^2-3z^2=y$; б) $\dfrac{y^2}{4}+z^2=2x$.

9.36. а) еліпс, коли $|\alpha|<a$, $|\beta|<b$ або $|\gamma|<c$; вироджений еліпс, коли $\alpha=\pm a$ (точки $(\pm a,0,0)$), $\beta=\pm b$ (точки $(0,\pm b,0)$), $\gamma=\pm c$ (точки $(0,0,\pm c)$); площина не перетинає еліпсоїд, коли $|\alpha|>a$, $|\beta|>b$ або $|\gamma|>c$; б) гіпербола, коли $\alpha\neq\pm a$ або $\beta\neq\pm b$; пара перетинних прямих, коли $\alpha=\pm a$ або $\beta=\pm b$; еліпс при всіх $\gamma\in\mathbb{R}$; в) гіпербола, при всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; еліпс, коли $|\gamma|>c$; вироджений еліпс, коли $\gamma=\pm c$ (точки $(0,0,\pm c)$); площина не перетинає двопорожнинний гіперболоїд, коли $|\gamma|<c$; г) парабола, при всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; еліпс, коли $\gamma>0$; вироджений еліпс, коли $\gamma=0$ (точка $(0,0,0)$); площина не перетинає еліптичний параболоїд, коли $\gamma<0$; д) парабола, при всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; гіпербола, коли $\gamma\neq 0$; пара перетинних прямих, коли $\gamma=0$.

9.39. а) еліпс з півосями 3, $\sqrt{3}$, вершинами в точках $(2,\pm3,0)$, $\left(2,0,\pm\sqrt{3}\right)$; б) гіпербола з півосями 4, 3, вершинами в точках $(\pm4,0,-1)$; в) парабола з параметром 15, вершиною в точці $(0,-6,-3/2)$.

9.41. а) $1<|\lambda|<\sqrt{2}$; б) $|\lambda|<1$.

9.42. а) $\lambda\neq0$ і $\lambda\geq-1/4$ (у випадку $\lambda=-1/4$ - вироджений еліпс); б) $\lambda=0$.

9.43. а) гіпербола; б) еліпс; в) гіпербола; г) еліпс; д) парабола; е) гіпербола; є) пара прямих; ж) пара прямих; з) пряма; и) пряма; і) еліпс; ї) парабола.

9.45. а) $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y+9}{12}=\frac{z+3}{2}$; б) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-8}{4}$, $\frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}$; в) $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{1}$.

9.46. а) $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$; б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

9.47. а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-8}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{16}$; б) $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$, $\frac{x}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{2}$.

9.48. а) $3x+y-2z-2=0$; б) $x-2y-3z-6=0$; в) $x+y+z=0$.

9.49. $\arccos 1/17$.

9.50. а) $\pi/2$; б) $\pi/3$; в) $\arccos\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$.

9.51. а) коло $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0; \end{cases}$ б) пара прямих $\begin{cases} y\pm x=0, \\ z=0; \end{cases}$ в) гіпербола $\begin{cases} 4x^2-16y^2=-3, \\ 8z+3=0. \end{cases}$

9.52. *Вказівка:* Написати рівняння проекцій і скористатися умовами того, що пряма є дотичною до відповідної кривої другого порядку.

9.53. Проекції прямолінійних твірних дотикаються параболічних перерізів в площинах Oxz і Oyz, а в площині Oxy вони складають в'язки прямих, паралельні тим двум прямим, на які розпадається лінія перетину поверхні і площини Oxy.

9.55. *Вказівка:* Для доведення достатньо показати, що всі прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда обертання утворюють однакові кути з віссю обертання (осі Oz), що найкоротша відстань від довільної прямолінійної твірної до осі Oz вимірюється по відповідному радіусу горлового круга ($x^2+y^2=a^2, z=0$) і дорівнює цьому радіусу. Можна і беспосередньо вивести рівняння поверхні, отриманої при обертанні прямої навколо осі, яка не лежить з нею в одній площині.

9.56. Однопорожнинний гіперболоїд, коли $\lambda \neq 1$, гіперболічний параболоїд, коли $\lambda = 1$. *Вказівка:* Взяти за початок координат середину O спільного перпендикуляра до заданих прямих, за вісь Oz — цей спільний перпендикуляр, а за осі Ox і Oy — прямі, які лежать в площині паралельній до даних прямих, і є бісектрисами кутів між проекціями даних прямих на цю площину.

9.57. Дві параболи (без вершин): $\begin{cases} x^2 = 2pz, \ z \neq 0, \\ \hfill y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y^2 = -2pz, \ z \neq 0, \\ \hfill x = 0, \end{cases}$ де $p = a^2 + b^2$.

9.58. По двом колам радіуса a.

9.59. По чотирьом прямим $\begin{cases} x = \pm\dfrac{z+a}{\sqrt{2}}, \\ y = \pm\dfrac{z-a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

9.60. По двох колах, які лежать в площинах $bz = \pm y\sqrt{a^2 - b^2}$.

9.61. По двом еліпсам.

9.62. Круглий циліндр, якщо прямі паралельні; конус другого порядку, якщо прямі перетинаються, але не перпендикулярні; однопорожнинний гіперболоїд, якщо прямі мимобіжні і не перпендикулярні; пара взаємно перпендикулярних площин, якщо прямі перпеникулярні.

Література

1 Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1968. 912 с.

2 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука., 1987. 320 с.

3 Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука., 1987. 496 с.

4 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука., 1975. 272 с.

5 Ильин В.А.,Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука., 1971. 232 с.

6 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1972. 240 с.

7 Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1976. 384 с.

8 Постников М.М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука., 1979. 336 с.

9 Придатченко Ю.В., Львов В.А. Алгебра для фізиків: вектори і координати: Навч. посібник. — Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"., 2002. 87 с.

10 Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука., 1970. 336 с.