МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

Ю.В. Яременко, Л.І. Лутченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Кіровоград 2006

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Я 72

ISBN 966-583-013-9

Аналітична геометрія: Навчальний посібник / Укл. Ю.В. Яременко, Л.І. Лутченко. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім.В.Винниченка, 2006. – 122 с.

У даному посібнику розглядаються основні поняття аналітичної геометрії з таких тем: елементи векторної алгебри, метод координат, пряма лінія на площині, пряма та площина у просторі. Матеріал з вказаних тем викладено в обсязі, передбаченому навчальними програмами для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Корисно те, що з кожної теми наведено розв'язання типових прикладів, та підібрано вправи для самостійної роботи, що беззаперечно допоможе кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Навчальний посібник буде корисним для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вузів, а також для студентів, учнів та вчителів математики інших навчальних закладів, де вивчаються основи аналітичної геометрії. Особливо посібник буде корисним для студентів заочної форми навчання.

Рецензенти: *Кириченко В.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри геометрії Київського національного університету ім. Тараса Шевченка; Тарасенкова Н.А., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри геометрії та МНМ Черкаського національного університету ім. Б.Хмельницького; Петренюк А.Я. доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики та фізики Кіровоградського національного технічного університету.*

Гриф надано Міністерством освіти і науки України 12.12.2005р. (протокол № 14/18.2-2836)

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Я 72

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Аналітична геометрія вивчає властивості геометричних фігур за допомогою методів алгебри з застосуванням методу координат.

Справа в тому, що між геометричними фігурами і числами можна різними способами установити тісний зв'язок таким чином, щоб кожній геометричній фігурі чи деякій її властивості, відповідала певна система чисел, або співвідношення між числами, або рівняння. Можна знайти багато способів для встановлення такого зв'язку, але тільки деякі із них представляють інтерес для математики і її використанні в інших науках.

Один з таких способів застосував вперше французький математик і філософ Рене Декарт (1596-1650), якого можна вважати основоположником аналітичної геометрії. У своїй праці „Геометрія", опублікованій у 1637р., як частині його філософського твору „Міркування про метод", Декарт вперше застосував ідею координат (метод координат), яка і на сьогоднішній день залишається в основі аналітичної геометрії. Суть методу координат полягає в тому, що розміщення точки відносно системи координат визначається однозначно за допомогою відповідних чисел – координат цієї точки. Метод координат дав можливість описати положення не лише точок, а й прямих, площин, кривих та поверхонь методами алгебри.

Декарту належить і ідея геометричної інтерпретації рівнянь, суть якої в тому, що алгебраїчному рівнянню з двома невідомими зіставлена деяка лінія на площині і навпаки.

Незалежно від Декарта метод координат розробив і використовував математик П'єр Ферма (1601-1650р.), праці якого були опубліковані лише у 1679р.

Розвиток цих ідей і привів до створення аналітичної геометрії, яка встановила зв'язок між алгеброю і геометрією.

Векторне числення, яке спрощує виклад аналітичної геометрії, появилося значно пізніше. Саме поняття вектора в математиці з’явилося в середині XIX ст., і лише на початку XX ст. векторне числення фактично стало апаратом для геометрії та фізики.

Термін „аналітична геометрія” ввів французький математик Лакруа в четвертому виданні своєї книги „Курс математики” (1807), а першу книгу під назвою „Аналітична геометрія” опублікував у 1808р. Гарньє.

Аналітична геометрія мала великий вплив на розвиток багатьох розділів математики та фізики.

У першій частині посібника викладено основний матеріал аналітичної геометрії з таких тем: векторна алгебра, метод координат, пряма лінія на площині, пряма та площина у просторі. Виклад матеріалу базується на векторній алгебрі, якій присвячено перший розділ даного посібника. Матеріал з вказаних тем викладено в обсязі, передбаченому навчальними програмами для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. З кожної тими наведено зразки розв’язування типових прикладів (54), та підібрано близько 250 задач для самостійної роботи, розв’язання яких беззаперечно допоможе кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

В основу навчального посібника покладено курс лекцій з аналітичної геометрії, які протягом багатьох років читалися першим автором на фізико–математичному факультеті Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Розділ 1

Елементи векторної алгебри

§ 1. Поняття вектора

Більшість величин, які вивчаються в математиці і фізиці, визначаються числовим значенням: довжина, площа, об'єм, маса, робота, температура та ін. Такі величини називаються **скалярними**. Але зустрічаються величини, які не можна повністю охарактеризувати лише їх числовим значенням. Це, наприклад, сила, швидкість, прискорення тощо. Крім їх числового значення потрібно знати ще й їх напрямок. Такі величини, які визначаються як числовим значенням, так і напрямком, називаються **векторними** або просто **векторами.** (Позначають $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$). Графічно вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ – це направлений відрізок, де A – початок вектора, а B – його кінець.

Модулем вектора називається довжина відрізка, який зображує цей вектор. (Позначають $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$.)

Вектор називається **одиничним**, якщо його модуль дорівнює одиниці.

Вектор у якого початок і кінець співпадає називається **нульовим** вектором. (Позначають $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$.)

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. (Позначають $\vec{a}\ ||\ \vec{b}$.)

Нуль-вектор вважається колінеарним до будь-якого вектора.

Серед колінеарних векторів можуть бути співнаправлені (позначають $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) або протилежно направлені (позначають $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Напрямок нуль-вектора невизначений, а модуль рівний нулю.

$-\vec{a}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$– вектор **протилежний** до вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони співнаправлені, а їх модулі рівні.

Отже, якщо вектор $\vec{a}$ відкладений від двох різних точок, то отримані вектори рівні і їх можна вважати одним вектором $\vec{a}$. Такі вектори називаються **вільними**. Зазначимо, що у механіці співнаправлені вектори, які мають рівні модулі, але відкладені від різних точок, можуть по-різному діяти на об'єкт. Тому там розглядають вектори, які називаються **зв'язаними.** Зв'язані вектори рівні, якщо їх початки і кінці співпадають, тобто вони зображуються одним направленим відрізком. В геометрії ми будемо розглядати тільки вільні вектори.

§ 2. Додавання і віднімання векторів. Властивості додавання

Із фізики відомо, що дія двох сил на матеріальну точку рівносильна дії однієї сили, яка визначається за правилом паралелограма. Згідно цього введемо поняття суми двох векторів:

Сумою двох векторів $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ називається вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.1).

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Так як $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$.

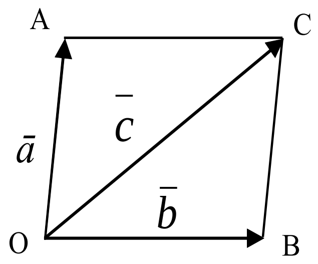


Рис.1

Правило додавання векторів, яке визначається цією формулою, називається **правилом трикутника**.

Властивості додавання:

1. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (асоціативний закон додавання).

Доведення: (рис.2).

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$,

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

2. Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (сума не залежить від порядку доданків); (комутативний закон додавання).

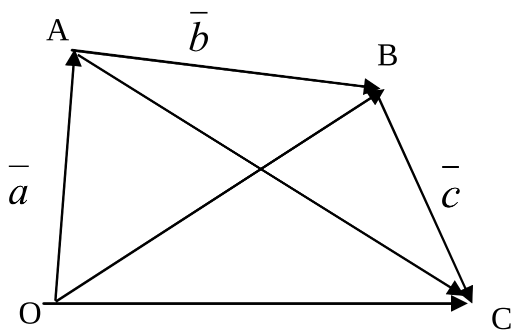


Рис.2

Доведення: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ (див. рис.1),

$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.

3. Існує $\vec{0}$ вектор , такий, що для будь-якого $\vec{a}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Доведення: Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, тоді за правилом трикутника $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, так як $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

4. Існує вектор $\vec{a}\,'$, такий, що для будь-якого вектора $\vec{a}$: $\vec{a}+\vec{a}\,'=\vec{0}$.

Доведення: Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; тоді $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, отже, $\vec{a}\,'=\overrightarrow{BA}$ (це вектор протилежний до $\vec{a}$).

Різницею двох векторів $\vec{a}-\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{p}$, що $\vec{p}+\vec{b}=\vec{a}$.

Різниця будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ завжди існує і визначається однозначно, так як $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Вектор $-\vec{b}$ існує і визначається однозначно, сума двох векторів $\vec{a}$ і $(-\vec{b})$ існує і визначається однозначно.

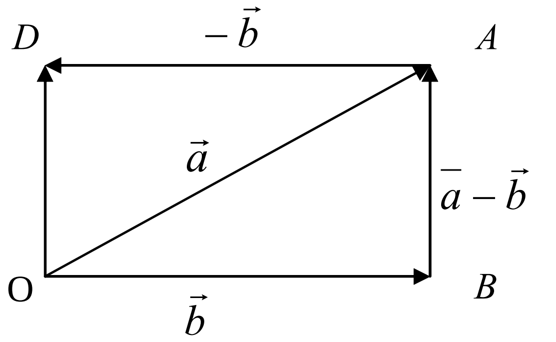


Рис.3

Отже, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$ потрібно до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$ (рис.3).

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA}$.

Маємо: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (рис.3).

Приклад 1.

Показати, що для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. При яких умовах в даному співвідношенні має місце знак рівності?

Розв'язання: Якщо принаймні один з даних векторів нульовий, то очевидно, що $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ Рівність має місце і у випадку, коли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. В інших випадках $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| < |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$, так як маємо не що інше, як нерівність трикутника ($\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$–сторони трикутника). Відмітимо, що у випадку, коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

§ 3. Добуток вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається такий вектор $\vec{p}$, для якого виконуються умови:

1. $|\vec{p}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$– довжина вектора $\vec{p}$;
2. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$– коли $\lambda > 0$;
3. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$– коли $\lambda < 0$;

Властивості:

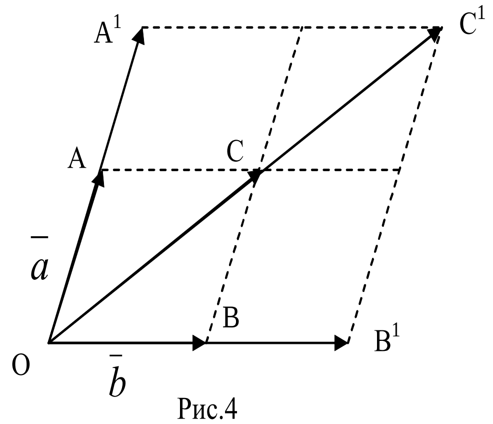


Рис.4

Для будь-яких дійсних чисел α і β та векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ мають місце рівності:

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$;

2. $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$;

3. $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;

4. $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$.

Доведення:

1. Властивість випливає з означення добутку вектора на число.

2. $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\alpha\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}^1$ (рис.4).

$\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\alpha\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^1+\overrightarrow{OB}^1=\overrightarrow{OC}^1$ (рис.4).

Отже, ми отримали гомотетію з центром в точці O та коефіцієнтом α. При гомотетії паралелограм $ACBO$ перейшов у паралелограм $A^1C^1B^1O$, діагональ OC перейшла в OC^1.

3. Справедливість третьої властивості випливає з того, що вектори $\alpha\vec{a}$ і $\beta\vec{a}$ колінеарні. Їх додавання фактично зводиться до додавання чисел $\alpha\cdot|\vec{a}|$ і $\beta\cdot|\vec{a}|$ та побудови вектора отриманої довжини, який колінеарний вектору $\vec{a}$.

4. Очевидно, що вектори $\alpha(\beta\vec{a})$ і $(\alpha\beta)\vec{a}$ співнаправлені, так як в обох випадках добуток чисел α і β має однаковий знак. Покажемо, що і модулі їх рівні. Дійсно, за означенням добутку вектора на число отримаємо:

$|\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})| = |\alpha|\cdot|(\beta\cdot\vec{a})| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$.

$|(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}| = |(\alpha\cdot\beta)|\cdot|\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$.

§ 4. Поняття векторного простору

Множина елементів довільної природи, на якій визначені дві бінарні операції – додавання та множення на дійсне число і при цьому виконуються властивості 1 – 4 додавання (див. § 2) та властивості 1 – 4 добутку елемента на дійсне число (див. § 3**)**, називається **векторним простором**. (Операція бінарна, якщо в результаті її виконання кожним двом елементам розглядуваної множини ставиться у відповідність елемент цієї ж множини).

Підмножина векторного простору, яка сама є векторним простором, називається **підпростором** даного векторного простору.

Наприклад: усі вектори, які лежать на одній прямій (всі колінеарні вектори), утворюють векторний простір V_1, усі вектори площини утворюють векторний простір V_2, усі вектори простору утворюють векторний простір V_3, нуль-вектор утворює векторний простір, множина всіх многочленів від однієї змінної утворює векторний простір та ін.

Очевидно, що $\vec{0}$ є підпростором в V_1, V_2 та V_3; V_1– підпростір в V_2 та V_3; V_2 – підпростір в V_3..

У геометрії ми розглядатимемо векторні простори, де елементами є вектори – направлені відрізки прямої.

§ 5.Умова колінеарності двох векторів у векторній формі

Теорема 1.

Якщо $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні вектори і* $\vec{a} \neq \vec{0}$*, то існує єдине число* α *таке , що* $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ **(1)**

Доведення.

Якщо $\vec{b} = \vec{0}$ то доведення очевидне, число $\alpha = 0$ існує і умова теореми виконується: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$.

Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ або $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Враховуючи означення добутку вектора на число, легко підібрати таке число α: якщо вектори співнаправлені то $\alpha = |\vec{b}| / |\vec{a}|$, а якщо протилежно направлені, то $\alpha = -|\vec{b}| / |\vec{a}|$.

Покажемо, що α – єдине. Припустимо, що існує ще одне число

β таке, що $\vec{b}=\beta\cdot\vec{a}$. Але тоді $\alpha\cdot\vec{a}=\beta\cdot\vec{a}$, або $\alpha\cdot\vec{a}-\beta\cdot\vec{a}=(\alpha-\beta)\vec{a}=\vec{0}$. Так як за умовою теореми $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $(\alpha-\beta)=0$ і $\alpha=\beta$.

Зрозуміло, що можна говорити про відношення колінеарних векторів $\vec{b}\ /\ \vec{a}=\alpha$ (ділити довільні вектори не можна).

Приклад 2.

Чи колінеарні вектори $\vec{a}=\vec{p}+3\sqrt{2}\vec{g}$ і $\vec{b}=\sqrt{2}\vec{p}+6\vec{g}$?

Розв'язання: $\vec{b}=\sqrt{2}(\vec{p}+3\sqrt{2}\,\vec{g})=\sqrt{2}\,\vec{a}$. Отже, за теоремою 1 $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

§ 6. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Базис векторного простору

Розглянемо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_n$.

Множину векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ називають **системою векторів**.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ називається вектор $\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$, де $\alpha_i\in R$, $i=1,\ldots,n$ (R – множина дійсних чисел.)

Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ називається **лінійно залежною**, якщо лінійна комбінація $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ і існує хоча б один коефіцієнт $\alpha_i\neq 0$ ($i=1,\ldots,n$).

Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … , $\vec{a}_n$ називається **лінійно незалежною**, якщо лінійна комбінація $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ тільки тоді, коли всі коефіцієнти $\alpha_i=0$ ($i=1,\ldots,n$).

Теорема 2.

Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,..., $\vec{a}_n$ лінійно залежна тоді і тільки тоді , коли принаймні один із них є лінійною комбінацією інших векторів системи.

Доведення.

Так як система векторів лінійно залежна, то

$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ і існує число $\alpha_i\neq 0$. Нехай для конкретності $\alpha_1\neq 0$, тоді: $\alpha_1\vec{a}_1=-\alpha_2\vec{a}_2-\ldots-\alpha_n\vec{a}_n$, або

$\vec{a}_1 = -(\alpha_2 / \alpha_1)\vec{a}_2 - \ldots - (\alpha_n / \alpha_1)\vec{a}_n$ Отже, вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів системи.

Навпаки, нехай: $\vec{a}_k = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \alpha_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, де $k \le n$. Тоді $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k + \alpha_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ і $\alpha_k = -1$–відмінне від нуля, отже, система векторів лінійно залежна.

Наслідок 1.

Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок 2.

На прямій існує тільки один лінійно незалежний вектор.

Теорема 3.

Якщо частина даної системи векторів лінійно залежна , то і вся система лінійно залежна.

Доведення:

Нехай задана система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. За умовою теореми частина її векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ – лінійно залежна ($s \le n$). Отже, $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}$ і існують $\alpha_i \ne 0$ ($i = 1, \ldots, s$). Розглянемо лінійну комбінацію:

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s + \alpha_{s+1}\vec{a}_{s+1} + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$.

Покладемо $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} = \ldots = \alpha_n = 0$, тоді $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ і існують $\alpha_i \ne 0$ ($i = 1, \ldots, s$). Що й потрібно було довести.

Приклад 3.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні вектори. Довести, що вектори $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{z} = 3\vec{a} - 7\vec{b}$ лінійно залежні. Знайти коефіцієнти лінійної залежності.

Розв'язання: Вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ лінійно залежні, якщо $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}$, і серед коефіцієнтів α, β, γ є відмінні від нуля. Перевіримо (підставимо в останню рівність розклади векторів $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$):

$$\alpha(2\vec{a}-3\vec{b})+\beta(\vec{a}+\vec{b})+\gamma(3\vec{a}-7\vec{b})=\vec{0}.$$

$$(2\alpha+\beta+3\gamma)\vec{a}+(-3\alpha+\beta-7\gamma)\vec{b}=\vec{0}.$$

Так як $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні, отже, остання рівність можлива лише у випадку, коли коефіцієнти біля них рівні нулю: $\begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma=0 \\ -3\alpha+\beta-7\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma=0 \\ 5\alpha+10\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2\gamma \\ \beta=\gamma \end{cases}$.

Тому існує відмінна від нуля трійка дійсних чисел $(-2\gamma,\gamma,\gamma)$. така, що $-2\gamma\vec{x}+\gamma\vec{y}+\gamma\vec{z}=\vec{0}$.

Знайдемо конкретні коефіцієнти. Покладемо, наприклад $\gamma=-1$, тоді $\alpha=2, \beta=-1$. Маємо: $2\vec{x}-\vec{y}-\vec{z}=\vec{0}$.

Базисом векторного простору називається така система векторів, яка

1. задана в певному порядку;
2. лінійно незалежна;
3. будь-який вектор простору являється лінійною комбінацією цієї системи векторів.

Число елементів базису називається **розмірністю** даного векторного простору.

Базис системи колінеарних векторів складається тільки з одного вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$, отже, він одновимірний.

§ 7. Компланарні вектори. Розклад вектора за двома неколінеарними векторами

Три вектора називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині, або паралельні до однієї площини.

Очевидно, що будь-які два вектора завжди компланарні, три вектора, два з яких колінеарні – компланарні.

Теорема 4.

Якщо система компланарних векторів містить неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, то будь-який вектор $\vec{a}$ цієї системи являється лінійною комбінацією цих векторів:

$\vec{a} = \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2$, *де α і β – єдині.* **(2)**

Доведення:

Нехай $\vec{a} \| \vec{e}_1$, тоді за теоремою 1 існує єдине число α таке, що: $\vec{a} = \alpha\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2$.

Якщо $\vec{a} \| \vec{e}_2$, то за теоремою 1 існує єдине число β таке, що: $\vec{a} = 0\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2$.

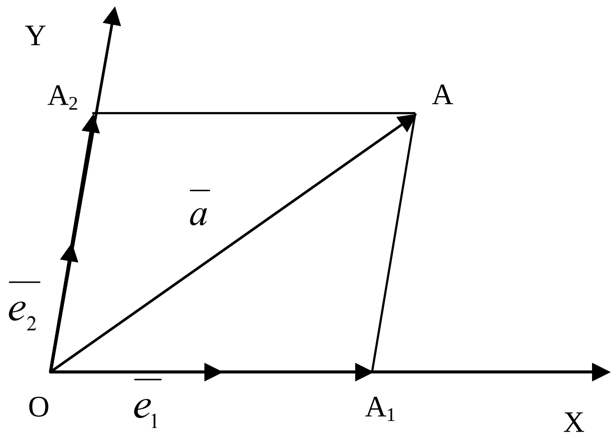


Рис.5

Нехай $\vec{a}$ не колінеарний ні з жодним із векторів $\vec{e}_1$ чи $\vec{e}_2$. Тоді $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ (рис.5).

За теоремою 1 існує таке єдине число α таке, що $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{e}_1$, аналогічно існує єдине число β таке, що $\overrightarrow{OA_2} = \beta\,\vec{e}_2$, отже $\vec{a} = \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2$. Теорему доведено.

Наслідок 3.

Система компланарних векторів, яка складається більше ніж з двох векторів – лінійно залежна.

Наслідок 4.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок 5.

Система всіх компланарних векторів утворює двовимірний векторний простір.

§ 8. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами

Теорема 5.

Якщо вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *некомпланарні, то для будь-якого вектора* $\vec{p}$ *існують єдині числа* α, β, γ *такі, що*

$$\vec{p} = \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2 + \gamma\,\vec{e}_3 \qquad \textbf{(3)}$$

Доведення:

Відкладемо від деякої точки O простору вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_3$ і $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (рис. 6). Так як вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не компланарні, то точки O, A, B, C не належать одній площині.

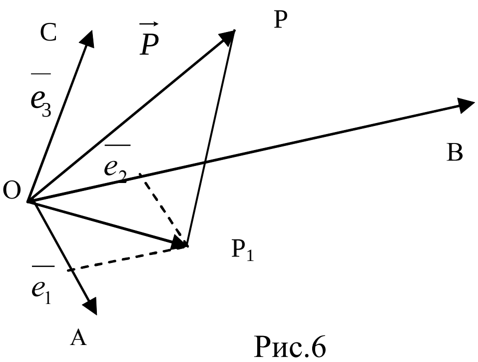


Рис.6

Якщо точка P належить прямій OC, то вектори $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_3$ і $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ колінеарні, отже за теоремою 1 існує таке єдине число γ, що $\vec{p} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + \gamma\cdot\vec{e}_3$ Нехай точка P не належить прямій OC. Проведемо через точку P пряму $PP_1 \parallel OC$, де P_1 точка перетину цієї прямої з площиною *(OAB)*. Так як вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\overrightarrow{OP_1}$ компланарні, то за теоремою 4 існують такі єдині числа α і β ,що $\overrightarrow{OP_1} = \alpha\cdot\vec{e}_1 + \beta\cdot\vec{e}_2$. Крім того вектори $\overrightarrow{P_1P}$ і $\vec{e}_3$- колінеарні, тому згідно теореми 1 існує таке єдине число γ , що вектор $\overrightarrow{P_1P} = \gamma\cdot\vec{e}_3$. Але за правилом трикутника $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$, тому

$\vec{p} = \alpha\cdot\vec{e}_1 + \beta\cdot\vec{e}_2 + \gamma\cdot\vec{e}_3$, де числа α, β і γ – єдині.

§ 9. Координати вектора

Нехай вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ утворюють базис площини. Тоді згідно теореми 4 будь-який вектор $\vec{a}$ площини утворюється як лінійна комбінація базисних векторів:

$\vec{a}=\alpha\,\vec{e}_1+\beta\,\vec{e}_2$, де α і β – єдині (2).

Числа α і β називаються **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (Позначають: $\vec{a}=(\alpha, \beta)$.)

Очевидно, що нуль-вектор має нульові координати. Базисні вектори мають координати: $\vec{e}_1=(1, 0)$, $\vec{e}_2=(0, 1)$.

Аналогічно, згідно теореми 5, для будь-якого вектора $\vec{p}$ у просторі існують єдині числа α, β і γ, такі, що

$\vec{p}=\alpha\,\vec{e}_1+\beta\,\vec{e}_2+\gamma\,\vec{e}_3$ (3).

Числа α, β і γ називаються **координатами вектора** $\vec{p}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. (Позначають: $\vec{p}=(\alpha, \beta, \gamma)$).

Базисні вектори у просторі мають координати: $\vec{e}_1=(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2=(0, 1, 0)$, $\vec{e}_3=(0, 0, 1)$.

Рівні вектори мають однакові відповідні координати.

Вирази (2) та (3) називаються **розкладом вектора по базису**.

Теорема 6.

Кожна координата лінійної комбінації декількох векторів, заданих своїми координатами, являє собою ту ж лінійну комбінацію відповідних координат цих векторів.

Доведення: Нехай вектор $\vec{p}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$:

$\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ мають координати: $\vec{a}_1=(\beta_1, \gamma_1, \lambda_1)$, $\vec{a}_2=(\beta_2, \gamma_2, \lambda_2)$, ... , $\vec{a}_n=(\beta_n, \gamma_n, \lambda_n)$. Запишемо їх розклади по базису $\vec{a}_1=\beta_1\vec{e}_1+\gamma_1\vec{e}_2+\lambda_1\vec{e}_3$, $\vec{a}_2=\beta_2\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\lambda_2\vec{e}_3$, ... , $\vec{a}_n=\beta_n\vec{e}_1+\gamma_n\vec{e}_2+\lambda_n\vec{e}_3$ і підставимо в розклад вектора $\vec{p}$: $\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=$

$=\alpha_1(\beta_1\vec{e}_1+\gamma_1\vec{e}_2+\lambda_1\vec{e}_3)+\alpha_2(\beta_2\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\lambda_2\vec{e}_3)+\ldots+\alpha_n(\beta_n\vec{e}_1+\gamma_n\vec{e}_2+$ $+\lambda_n\vec{e}_3)$. Згрупувавши коефіцієнти біля базисних векторів отримаємо: $\vec{p}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n)\,\vec{e}_1+$

$+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\ldots+\alpha_n\gamma_n)\,\vec{e}_2+(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_n\lambda_n)\,\vec{e}_3$.

Отже, вектор

$\vec{p}$ =($\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n$, $\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\ldots+\alpha_n\gamma_n$, $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_n\lambda_n$), що й потрібно було довести.

Наслідок 6.

Координати суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних координат цих векторів.

Наслідок 7.

Координати різниці двох векторів дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів.

Наслідок 8.

При множені вектора на число, необхідно помножити кожну координату вектора на це число.

Приклад 4.

Дано вектори $\vec{a}=(3,4,-2), \vec{b}=(1,3,4), \vec{c}=(0,-5,3).$ Знайти координати вектора $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}.$

Розв'язання: Згідно теореми 6

$\vec{p}=(3\cdot 3-1+0,\ 3\cdot 4-3+2(-5),\ 3(-2)-4+2\cdot 3)$ =(8, –1, – 4).

Теорема 7 (Умова колінеарності двох векторів у координатній формі).

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тоді і тільки тоді коли їх координати пропорційні.

Доведення:

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ мають координати:

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$. За умовою теореми $\vec{a}\parallel\vec{b}$. За теоремою 1 існує єдине число α таке, що $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$. Тоді, згідно теореми 6:

$b_1=\alpha\, a_1$, $b_2=\alpha\, a_2$, $b_3=\alpha\, a_3$. Отже,

$$\alpha = \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}.$$

Навпаки, нехай $\alpha = \dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}$, тоді $b_1=\alpha a_1$, $b_2=\alpha a_2$, $b_3=\alpha a_3$. Розглянемо розклад вектора $\vec{b}$ по базису: $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\,\vec{e}_2+b_3\,\vec{e}_3=$

$=\alpha\, a_1\vec{e}_1 + \alpha\, a_2\, \vec{e}_2 + \alpha\, a_3\, \vec{e}_3 = \alpha\, (a_1\, \vec{e}_1 + a_2\, \vec{e}_2 + a_3\, \vec{e}_3) = \alpha\, \vec{a}$, тобто за теоремою 1 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Приклад 5.

При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a} = (5, -6)$ і $\vec{b} = (3+\alpha, -2+2\alpha)$ колінеарні?

Розв'язання: За теоремою 7: $\dfrac{3+\alpha}{5} = \dfrac{-2+2\alpha}{-6}$, або $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Приклад 6.

Дано вектори $\vec{a} = (3, -4)$ і $\vec{b} = (2, -7)$. Довести, що вони утворюють базис площини і знайти коефіцієнти розкладу вектора $\vec{p} = (2, -19)$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання: Базис площини утворюють будь-які два неколінеарні вектори. Так як $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-4}{-7}$, то за теоремою 7 $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, а значить утворюють базис площини. Тоді, згідно теореми 4, розклад вектора $\vec{p}$ по базису має вигляд: $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Перейдемо до координат: $\begin{cases} 2 = 3x + 2y \\ -19 = -4x - 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$. Отже, $\vec{p} = 4\vec{a} - 5\vec{b}.$

§ 10. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку

Відкладемо ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис.7). Кут AOB називається кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначається $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \alpha$. Кут між векторами вибирається меншим або рівним π.

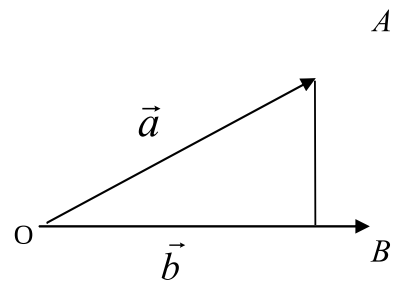


Рис.7

Для розв'язування метричних задач

використовується ортонормований базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$ і всі кути між цими векторами рівні 90^0

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначають $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$).

Відмітимо, що добуток $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$ являє собою алгебраїчне значення ортогональної проекції вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ (рис.7) (позначають $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha$). Тому мають місце рівності:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

З'ясуємо фізичний зміст скалярного добутку.

Якщо матеріальна точка під дією сили $\overline{F}$ перемістилася з точки M в точку N вздовж вектора $\overrightarrow{MN}$, то робота A, виконана цією силою, дорівнює $A = |\overrightarrow{MN}|\cdot np_{\overline{MN}}\overline{F}$. Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора, який зображує переміщення на вектор сили.

Скалярний добуток нуль-вектора і довільного вектора покладається рівним нулю.

З означення скалярного добутку отримаємо формулу для знаходження косинуса кута між векторами:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad \textbf{(4)}$$

Приклад 7.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\sqrt{3}$.

Розв'язання: Знайдемо кут φ, який утворюють вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. За формулою (4) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3\cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $\varphi = 30^0$.

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Очевидно, що знак скалярного добутку такий як і знак косинуса: $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, якщо кут ($\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$) тупий, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, якщо кут ($\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$) гострий і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо кут ($\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$) $= 90^0$, тобто вектори взаємно перпендикулярні.

Теорема 8.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, *заданих в ортонормованому базисі простору, виражається формулою:* $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ **(5)**

Доведення:

Запишемо розклади даних векторів по базису:

$\vec{a}= a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$ і $\vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\vec{k}$.

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}) \cdot (b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}) =$

$= a_1 b_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_2 b_1 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) +$

$+ a_2 b_3 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_3 b_1 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k} \cdot \vec{k})$. А так як скалярні добутки $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, а $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, то отримаємо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$.

Наслідок 9.

Вектори $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ *задані в ортонормованому базисі простору, взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли* $a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3 = 0$.

Розглянемо скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на себе: $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Це число називається **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^{\,2}$. Звідси отримаємо формулу для обчислення модуля вектора за його координатами:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Приклад 8.

Знайти координати одиничного вектора (орта) співнаправленого з вектором $\vec{a}=(3, -4)$.

Розв'язання: Якщо будь-який вектор поділити на його довжину, то, очевидно, отримаємо одиничний вектор $\vec{e}$

$\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$ Отже, $\vec{e} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right).$

Приклад 9.

Дано вектори $\overrightarrow{AB} = (4,-3,5)$, $\overrightarrow{BC} = (-4,3,5)$, $\overrightarrow{CD} = (-4,3,-5)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – квадрат.

Розв'язання: 1). $\overline{AB} = \overline{DC},$ отже $ABCD$ - паралелограм.

2). $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4(-4) + (-3) \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 0 \Rightarrow AB \perp BC,$ отже $ABCD$ – прямокутник.

3). $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, тому $ABCD$ – квадрат.

Наслідок 10.

Косинус кута α між ненульовими векторами $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ *і* $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, *заданими в ортонормованому базисі, визначається формулою:* $\cos\alpha = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(комутативність).*
2. $(\alpha\, \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку).
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивність).

Доведення.

1. Властивість випливає з означення скалярного добутку.

2. Нехай в ортонормованому базисі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тоді за наслідком 8 вектор $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \alpha\, a_3)$ і за теоремою 8

$(\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha\, a_1 b_1 + \alpha\, a_2 b_2 + \alpha\, a_3 b_3 = \alpha\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. Нехай в ортонормованому базисі вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. За наслідком 6 вектор $\vec{a}+\vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ і

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = (a_1 + b_1)\,c_1 + (a_2 + b_2)\,c_2 + (a_3 + b_3)\,c_3 =$

$= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$.

Приклад 10.

Вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Довести, що $\vec{p}$ перпендикулярний до будь-якої лінійної комбінації цих векторів.

Розв'язання: Оскільки $\vec{p}\perp\vec{a}$ і $\vec{p}\perp\vec{b}$, то $\vec{p}\cdot\vec{a} = 0$ і $\vec{p}\cdot\vec{b} = 0$. Нехай $\vec{g} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Тоді за властивостями 2 і 3

$\vec{p}\cdot\vec{g} = \vec{p}\cdot(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{p}\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{p}\cdot\vec{b} = 0$. Отже, $\vec{p}\perp\vec{g}$.

Приклад 11.

Довести, що в будь-якому трикутнику має місце співвідношення: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, де a, b, c – довжини сторін трикутника (теорема косинусів).

Розв'язання: Розглянемо трикутник ABC (рис.8). Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$. Тоді $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$. $|\vec{c}|^2 = \vec{c}\,\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})^2 =$

$= \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2} =$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.

Доведено.

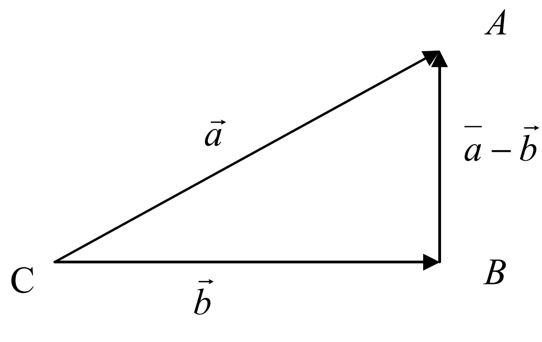


Рис.8

З'ясуємо геометричну суть координат вектора в ортонормованому базисі.

Нехай вектор $\vec{a}$ – ненульовий вектор заданий в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Запишемо його розклад по базису: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Помноживши обидві частини рівності скалярно на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і враховуючи, що

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, а $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, маємо $a_1=\vec{a}\cdot\vec{i}$, $a_2=\vec{a}\cdot\vec{j}$, $a_3=\vec{a}\cdot\vec{k}$. Позначивши $\varphi_1=(\vec{a}\hat{\ }\vec{i})$, $\varphi_2=(\vec{a}\hat{\ }\vec{j})$, $\varphi_3=(\vec{a}\hat{\ }\vec{k})$, отримаємо $a_1=|\vec{a}|cos\varphi_1$; $a_2=|\vec{a}|cos\varphi_2$; $a_3=|\vec{a}|cos\varphi_3$.

Отже, координати вектора в ортонормованому базисі – це його проекції на координатні вісі.

Числа $cos\,\varphi_1$, $cos\,\varphi_2$, $cos\,\varphi_3$ називають **направляючими косинусами** вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Так як $|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(cos^2\varphi_1+cos^2\varphi_2+cos^2\varphi_3)$ і $|\vec{a}|\neq 0$, то $cos^2\varphi_1+cos^2\varphi_2+cos^2\varphi_3=1$.

Отже, сума квадратів направляючих косинусів довільного ненульового вектора дорівнює одиниці.

Відмітимо, що координати одиничного вектора в ортонормованому базисі рівні його направляючим косинусам.

ЗАДАЧІ

1. Для довільного трикутника ABC точки M, N і P відповідно середини сторін AC, AB і BC. Серед зазначених нижче пар векторів знайти пари рівних та пари колінеарних, але не рівних векторів: а) $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{MP}$ б) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ і $\overrightarrow{BC}$
д) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MC}$ е) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CM}$ ж) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{NP}$

2. Нехай $ABCD$ - паралелограм, O – точка перетину його діагоналей, а E і F – відповідно середини паралельних сторін BC і AD. Побудувати на малюнку наступні вектори: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ б) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$. с) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FO}$.

3. Нехай $ABCDEF$ – правильний шестикутник, O – його центр. Поклавши $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ виразити $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overline{ED}$, $\overline{EC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – дані вектори, то при яких умовах вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ колінеарні?

5. Зобразивши вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ за допомогою діагоналей паралелограма, знайти умову, при якій $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$.

6. Дано трикутник ABC , E і F – середини сторін AB і BC. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overline{AE}$ і $\vec{b} = \overline{AF}$.

7. В трикутнику ABC вектори $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ і $\overline{CM}$ направлені по медіанам. Виразити їх через $\vec{a} = \overline{AB}$ і $\vec{b} = \overline{AC}$.

8. Нехай $ABCD$ – паралелограм, E і F- середини протилежних сторін BC і AD, а O - точка перетину діагоналей. Взявши вектори $\overline{AB} = \vec{e}_1$, $\overline{AD} = \vec{e}_2$ за базисні, визначити координати векторів:

а) $\overrightarrow{AC}$ б) $\overline{OD}$; в) $\overline{FC}$; г) $\overline{BC}$; д) $\overline{EO}$; е) $\overline{BD}$; ж) $\overline{EA}$.

9. В ромбі $ABCD$ вектори $\overline{AC} = \vec{e}_1$ і $\overline{BD} = \vec{e}_2$ взяті за базисні. Знайти координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, і $\overline{DA}$ в цьому базисі.

10. Взявши на площині неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ за базисні, побудувати вектори: $\vec{a}_1 = (0, 2)$ $\vec{a}_2 = (2, -1)$; $\vec{a}_3 = (-3, 4)$; $\vec{a}_4 = (\sqrt{2}, 3)$;

11. На площині дано два вектори $\vec{u} = (2, 1)$ і $\vec{v} = (2, 0)$. Знайти коефіцієнти розкладу вектора $\vec{a} = (8, 3)$ за векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$

12. Дано три вектора $\vec{u} = (3, -2)$; $\vec{v} = (-2, 1)$; $\vec{w} = (7, -4)$. Визначити коефіцієнти розкладу кожного з цих трьох векторів, приймаючи за базис два інших.

13. Дано вектори $\vec{u} = (3, -1)$; $\vec{v} = (1, -2)$; $\vec{w} = (-1, 7)$. Визначити коефіцієнти розкладу вектора $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ за векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

14. Дано вектори $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (1, -3)$, $\vec{c} = (-1, 3)$. При якому значені коефіцієнта α вектори $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$ колінеарні?

15. Дано вектори $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (2, 3)$, $\vec{c} = (-3, 2)$.

Визначити координати векторів $2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$, $\frac{3\vec{a}-5\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{c}-2\vec{b}}{3}$.

16. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 6, $|\vec{a}|=2\sqrt{13}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

17. Визначити координати одиничних векторів (ортів), співнаправлених з векторами: а) $\vec{u}=(4,-3)$ б) $\vec{v}=(-5,1)$

18. Чому рівні проекції векторів $\vec{u}=(-2,3)$ і $\vec{v}=(5,4)$. на базисні вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$?

19. Серед векторів

$\vec{a}_1=(0,2,7)$ $\vec{a}_2=(2,6,-1)$; $\vec{a}_3=(-3,4,0)$; $\vec{a}_4=(0,3,0)$;

$\vec{a}_5=(0,0,7)$ $\vec{a}_6=(2,0,-7)$; $\vec{a}_7=(-4,0,0)$; $\vec{a}_8=(0,3,5)$;

$\vec{a}_9=(5,3,0)$ $\vec{a}_{10}=(3,0,-1)$; вкажіть вектори:

а) колінеарні вектору $\vec{e}_1$, б) колінеарні вектору $\vec{e}_2$, в) колінеарні вектору $\vec{e}_3$, г) компланарні з векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, д) компланарні з векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_3$, е) компланарні з векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$.

20. Дано вектори $\vec{a}=(3,4,5)$, $\vec{b}=(0,1,-3)$, $\vec{c}=(-3,2,1)$. Визначити координати векторів:

1) $\vec{p}_1=\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{c}$; 2) $\vec{p}_2=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$; 3) $\vec{p}_3=5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}$; 4) $\vec{p}_4=\frac{3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

21. Знайти лінійну залежність між векторами:

а). $\vec{a}_1=(1,0,4)$ $\vec{a}_2=(1,2,-1)$; $\vec{a}_3=(-3,3,1)$; $\vec{a}_4=(3,2,0)$;

б). $\vec{a}_1=(0,4,5)$ $\vec{a}_2=(2,-1,3)$; $\vec{a}_3=(7,-8,4)$; $\vec{a}_4=(1,3,5)$;

22. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити координати векторів $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{DB_1}$, $\overline{DB}$ в базисі $\overline{AA_1}=\vec{e}_1$, $\overline{AD}=\vec{e}_2$, $\overline{AB}=\vec{e}_3$ і, користуючись ними, знайти лінійну залежність, яка існує між цими векторами.

23. Перевірити, чи будуть компланарними вектори:

а) $\vec{a}_1=(-3,1,2)$ $\vec{a}_2=(8,-2,1)$; $\vec{a}_3=(0,3,4)$

б) $\vec{a}_1=(1,0,7)$ $\vec{a}_2=(-1,2,4)$; $\vec{a}_3=(3,2,1)$.

24. На площині дано вектори

$\vec{a}=(-4,3)$, $\vec{b}=(6,-2)$, $\vec{c}=(-3,5)$. Обчислити:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\sqrt{\vec{a}^2}$; в) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$; г) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$.

25. В просторі дано вектори

$\vec{a}_1=(0,0,3)$ $\vec{a}_2=(6,-1,2)$; $\vec{a}_3=(1,7,4)$; $\vec{a}_4=(2,0,5)$;

Обчислити попарно їх скалярний добуток і за цим добутком вияснити, утворюють вони гострий, прямий чи тупий кут.

26. В просторі дано чотирикутник *ABCD* і відомі координати векторів $\overline{AB}=(1,6,-2)$, $\overline{BC}=(5,3,-1)$ і $\overline{CD}=(1,-7,1)$. Довести, що діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні.

27. Дано трикутник *ABC* і відомі координати векторів $\overline{AB}=(-1,-1,-\sqrt{2})$ і $\overline{BC}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6})$. Знайти кути трикутника.

28. Знайти косинуси кутів, утворених вектором $\vec{a}=(3,-5,\sqrt{2})$ з базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

29. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ і $(\vec{a}\wedge\vec{b})=\pi/6$.

30. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ і $(\vec{a}\wedge\vec{b})=\pi/6$.

31. В просторі дано чотирикутник *ABCD* і відомі координати векторів $\overline{AB}=(1,2,-2)$, $\overline{BC}=(-2,-1,-2)$ і $\overline{CD}=(-1,-2,2)$. Доведіть, що даний чотирикутник – квадрат.

32. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – одиничні вектори і $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

33. Визначити одиничний вектор, колінеарний бісектрисі кута *A* трикутника *ABC,* якщо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ мають координати: $\overline{AB}=(2,2,1)$, $\overline{AC}=(3,4,0)$

34. Доведіть, що медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

35. Доведіть, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

36. Довести векторним способом ознаку перпендикулярності прямої і площини.

37. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма рівна сумі квадратів його сторін.

38. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

39. Доведіть, що для будь-якого трикутника *ABC* має місце рівність $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, де *M* – точка перетину медіан, а *O* – довільна точка простору.

40. Нехай *AM, BH* і *CK* – медіани трикутника *ABC*. Доведіть, що $\overline{AM} + \overline{BH} + \overline{CK} = \overline{0}$.

41. Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону у відношенні прилеглих сторін.

42. Доведіть, що відрізки, які з’єднують послідовно середини сторін довільного чотирикутника, утворюють паралелограм.

Розділ 2

Метод координат. Векторний та мішаний добутки векторів

§ 11. Афінна система координат. Координати точок. Знаходження координат вектора

Нехай вектори $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ утворюють базис простору. Виберемо довільну точку O простору і відкладемо ці вектори.

Четвірка, яка складається з точки O і базисних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, називається **афінною системою координат.** (Позначають $(O,\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.)

Точка O – називається **початком** афінної системи координат, вектори $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ називаються **координатними векторами**.

Направлені прямі, які містять координатні вектори називаються **координатними осями**. Вісь OX містить $\vec{e}_1$ і називається **віссю абсцис**, вісь OY містить $\vec{e}_2$ – називається **віссю ординат**, а вісь OZ містить $\vec{e}_3$ і називається **віссю аплікат**.

Площини, які утворюють координатні вісі називаються **координатними площинами**: XOY, XOZ, YOZ .

Іноді систему координат позначають (O,X,Y,Z).

Нехай M – довільна точка простору.

Вектор, який сполучає початок системи координат з точкою M, називається її **радіус-вектором** ($\overline{OM}$ – радіус-вектор точки M).

Нехай вектор $\overline{OM}$ в системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ має координати $\overline{OM} = (x, y, z)$.

Координатами точки M в системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ називаються координати її радіус-вектора.

Отже, точка M має координати (x, y, z).

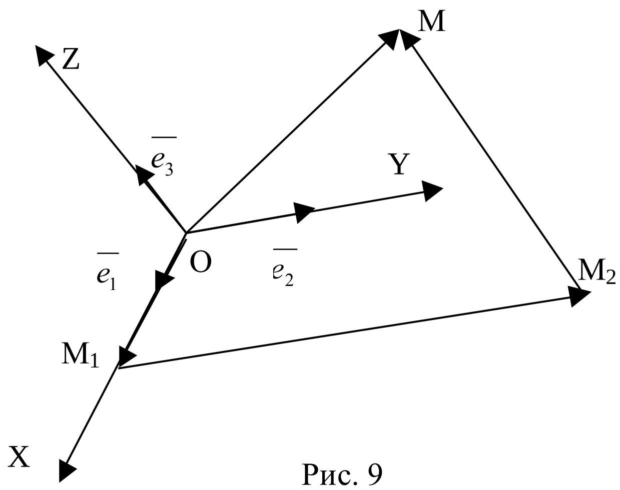


Рис. 9

Побудуємо точку $M(x, y, z)$ в афінній системі координат.

Для цього побудуємо її радіус-вектор, кінець якого і дасть нам точку M.

$\overline{OM} = (x,\ y,\ z)$, за теоремою 5: $\overline{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M}$ (рис.9).

Аналогічно, на площині трійка яка складається з точки O і базисних векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ називається **афінною системою координат** на площині (Позначають $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, або (O, X, Y)).

Побудова точки в афінній системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ фактично виконана на рисунку 9. Там побудована точка $M_2(x, y)$.

Нехай нам відомі координати точок M_1 і M_2 в афінній системі координат: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Як знайти координати вектора $\overline{M_1M_2}$? Неважко бачити, що вектор $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, де вектори $\overline{OM_1}$ і $\overline{OM_2}$ – радіус-вектори точок M_1 і M_2, а значить мають такі ж координати як і точки. Отже, вектор $\overline{M_1M_2}$ є різницею векторів $\overline{OM_2}$ і $\overline{OM_1}$ і за наслідком 7 має координати

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \qquad \textbf{(7).}$$

Таким чином, для того, щоб знайти координати вектора, якщо відомі координати його кінців, потрібно від координат кінця відняти відповідні координати початку.

§ 12. Ділення відрізка у даному відношенні

Нехай точки M_1 і M_2 в афінній системі координат у просторі мають координати: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Будемо говорити, що **точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ**, якщо $\overline{M_1M} = \lambda\, \overline{MM_2}$ (λ дійсне число, відмінне від –1).

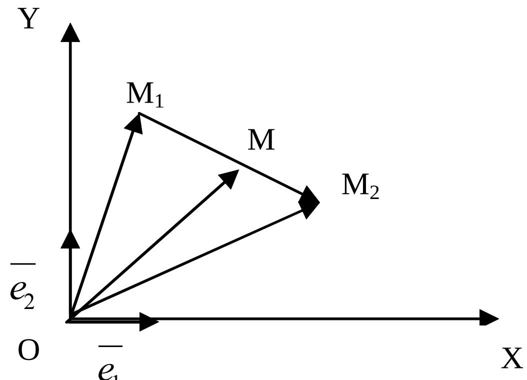


Рис.10

Нам потрібно знайти координати точки $M(X, Y, Z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у даному відношенні λ (рис.10). Розглянемо вектори $\overline{M_1M} = \overline{OM} - \overline{OM_1}$ і $\overline{MM_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM}$.

Підставимо останні дві рівності в попередню:

$\overline{OM} - \overline{OM_1} = \lambda\,(\overline{OM_2} - \overline{OM})$, або $\overline{OM} + \lambda\overline{OM} = \overline{OM_1} + \lambda\overline{OM_2}$.

Маємо: $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OM_1} + \lambda\overline{OM_2}}{1+\lambda}$. Перейдемо до координат.

За теоремою 6 :

$$X = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ Y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ Z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad \textbf{(8)}$$

Отже, ми отримали формули ділення відрізка у даному відношенні λ у просторі.

Якщо точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ лежать у площині XOY, то координати точки $M(X, Y)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у даному відношенні λ, знаходяться за формулами $X = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $Y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Очевидно, що при $\lambda=1$ ми отримаємо формули для знаходження середини відрізка:

$$X=\frac{x_1+x_2}{2};\ Y=\frac{y_1+y_2}{2};\ Z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad \textbf{(9)}$$

Приклад 12.

Знайти відношення, в якому площина *XOY* ділить відрізок *AB*, якщо *A(3,-6,-1)*, а *B(9,7,5)*.

Розв'язання: Точка, яка належить площині *XOY* має координату $z=0$. За формулами ділення відрізка в даному відношенні $\lambda : 0=\frac{-1+\lambda\cdot 5}{1+\lambda}$, звідки $\lambda=\frac{1}{5}$.

§ 13. Прямокутна система координат. Відстань між точками

Для розв'язування метричних задач використовується прямокутна система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (ортонормований базис), де $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ і всі кути між цими векторами рівні 90^0. Як відмічалося раніше, тут координати точки *M(x, y, z)* мають простий геометричний зміст – це ортогональні проекції точки *M* на вісі координат. Нехай ми маємо дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в прямокутній системі координат (рис. 11). Тоді $\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$, і за наслідком 7 $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Відстань між точками M_1 і M_2 буде рівна довжині вектора $\overline{M_1M_2}$:

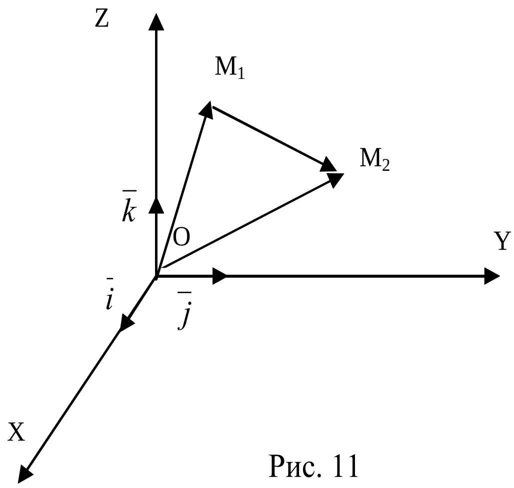


Рис. 11

$$|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad \textbf{(10)}$$

Аналогічно на площині в прямокутній системі координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ відстань між точками M_1 і M_2 знаходиться за формулою:

$$|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Приклад 13.

Знайти довжину бісектриси *AD* трикутника *ABC*, якщо *A(4,1), B(7,5), C(–4,7).*

Розв'язання: Знайдемо координати точки *D*. Так як бісектриса *AD* ділить сторону *BC* у відношенні прилеглих сторін *AC* і *AB*, то

$$\lambda = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}. \quad |AC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = 10, \quad |AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5$$

$$\lambda = \frac{10}{5} = 2, \qquad x = \frac{-4+2\cdot 7}{3} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{7+2\cdot 5}{3} = \frac{17}{3}.$$

$$|AD| = \sqrt{(4-\frac{10}{3})^2 + (1-\frac{17}{3})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

§ 14. Визначники 2-го та 3-го порядку

Визначником другого порядку називається число, яке дорівнює: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$

Визначником третього порядку називається число, яке дорівнює: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$

Теорема 9

Вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *компланарні тоді і тільки тоді , коли визначник, складений з їх координат, дорівнює нулю:* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

§. 15. Орієнтація площини. Формули перетворення афінних систем координат на площині

Задати орієнтацію прямої чи кривої означає вказати напрямок їх обходу. Якщо на площині задана система координат, то орієнтацію площини задають коротшим напрямком обходу кола з центром у початку координат від додатнього напряму вісі *OX* до додатнього напряму вісі *OY*. Якщо такий обхід здійснюється проти руху часової стрілки, то система координат називається **правою**, а площина – **додатньо орієнтованою (**в цьому випадку вісі *OX* і *OY* розташовані, як великий і вказівний пальці правої руки).

Якщо обхід здійснюється за часовою стрілкою, то система координат називається **лівою**, а площина – **від'ємно орієнтованою** (вісі *OX* і *OY* розташовані, як великий і вказівний пальці лівої руки).

Розглянемо на площині дві афінні системи координат (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) та (Ó, $\vec{e}_1{}'$ $\vec{e}_2{}'$) (рис.12). Першу систему назвемо старою, а другу – новою. Нехай *M* – точка площини, яка в старій системі має координати *(x, y)*, а в новій *(x*´ *y*´*)*. Задача перетворення координат заключається в наступному: знаючи координати нового початку координат і нових координатних векторів в старій системі O′$(x_0,\ y_0)$, $\vec{e}_1{}' = (c_{11}, c_{21})$, $\vec{e}_2{}' = (c_{12}, c_{22})$, виразити координати *x, y* точки *M* в старій системі через її координати *x*´*, y*´ в новій системі.

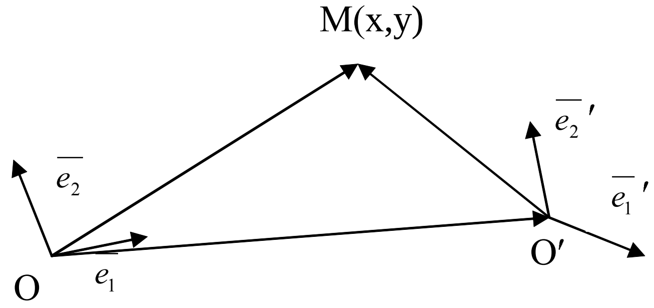


Рис.12

За правилом трикутника $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Запишемо розклади цих векторів по базисам: $\overline{OM} = x\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$, $\overline{OO'} = x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2$,

$\overline{O'M} = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}'$. В свою чергу вектори $\vec{e}_1{}'$ і $\vec{e}_2{}'$ розкладаються по старому базису: $\vec{e}_1{}' = c_{11}\,\vec{e}_1 + c_{21}\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = c_{12}\,\vec{e}_1 + c_{22}\,\vec{e}_2$. Тоді $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2 + x'\,\vec{e}_1{}' + y'\,\vec{e}_2{}'$, або $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2 +$ $+x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\,\vec{e}_2) + y'(c_{12}\,\vec{e}_1 + c_{22}\,\vec{e}_2) = (x_0 + (c_{11}\,x' + c_{12}\,y'))\,\vec{e}_1 + (y_0 +$ $+(c_{21}\,x' + c_{22}\,y'))\,\vec{e}_2$.

Отримали формули перетворення афінних систем координат:

$$x = c_{11}\,x' + c_{12}\,y' + x_0\,, \qquad \textbf{(11)}$$
$$y = c_{21}\,x' + c_{22}\,y' + y_0\,.$$

З коефіцієнтів біля змінних x' та y' можна скласти таблицю (матрицю другого порядку): $\begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \\ c_{21} c_{22} \end{pmatrix}$, яка називається **матрицею переходу** від базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до базиса $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$. Визначник матриці переходу $|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Зупинимось на часткових випадках перетворення афінних систем координат.

1. Переміщення початку.

В цьому випадку стара і нова системи координат мають одні і ті ж координатні вектори, але різні початки. Так як $\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_2{}'$, то матриця переходу від базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ до базиса $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, і формули перетворення приймають вигляд:

$$x = x' + x_0 \qquad \textbf{(12)}$$
$$y = y' + y_0$$

2. Заміна координатних векторів:

Системи координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ і $(O, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ мають спільний початок і відрізняються координатними векторами. В такому випадку формули *(11)* приймають вигляд:

$$x = c_{11}\,x' + c_{21}\,y' \qquad \textbf{(13)}$$
$$y = c_{12}\,x' + c_{22}\,y'$$

§ 16. Формули перетворення прямокутних систем координат

Оскільки прямокутна система координат є частковим випадком афінної, то при перетворенні прямокутних систем координат мають місце ті ж формули, що й для афінних систем координат. Але для прямокутних систем координат нові базисні вектори, так як і старі рівні за довжиною і мають довжину *1*. Крім того, координати вектора в прямокутній системі координат – це проекції цього вектора на координатні вісі.

Нехай $(O, \vec{i}, \vec{j})$ має праву орієнтацію і системи координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ та $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ орієнтовані однаково. Позначимо α – кут, який утворює вектор $\vec{i}\,'$ з віссю *OX*, тоді він має координати: $\vec{i}\,' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Аналогічно $\vec{j}\,' = (\cos(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,'), \sin(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,'))$. Але $\cos(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,') = \cos((\vec{i}\,\hat{}\,\vec{i}\,') + (\vec{i}\,'\hat{}\,\vec{j}\,')) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$. В свою чергу $\sin(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,') = \sin((\vec{i}\,\hat{}\,\vec{i}\,') + (\vec{i}\,'\hat{}\,\vec{j}\,')) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$. Отже, вектор $\vec{j}\,' = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Тому формули перетворення координат мають вигляд:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \qquad \textbf{(14)}$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0$$

Відмітимо, що визначник складений з координат таких базисних векторів $|C| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$.

Нехай тепер $(O, \vec{i}, \vec{j})$ має праву орієнтацію, а системи координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ та $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ протилежно орієнтовані. В цьому випадку вектори $\vec{i}\,'$ і $\vec{j}\,'$ мають координати $\vec{i}\,' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{j}\,' = (\cos(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,'), \sin(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,'))$, але $(\vec{i}\,'\hat{}\,\vec{j}\,') = -\frac{\pi}{2}$. Тому $\cos(\bar{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,') =$

$\cos((\vec{i}\,\hat{}\,\vec{i}\,')+(\vec{i}\,'\,\hat{}\,\vec{j}\,')) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$, а $\sin(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{j}\,') =$

$\sin((\vec{i}\,\hat{}\,\vec{i}\,')+(\vec{i}\,'\hat{}\,\vec{j}\,')) = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$.

Формули перетворення приймають вигляд:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0 \qquad \textbf{(15)}$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0$$

Тут $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1$.

Формули (14) і (15) можна об′єднати:

$$x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0 \qquad \textbf{(16)}$$
$$y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0,$$

де $\varepsilon = 1$, якщо системи координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ та $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ однаково орієнтовані і $\varepsilon = -1$, якщо системи координат протилежно орієнтовані.

Розглянемо випадок, коли обидві системи координат мають спільний початок *O*. Тоді точки *O* і *O′* співпадають, отже $x_0 = y_0 = 0$ і формули (16) приймають вигляд:

$$x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha \qquad \textbf{(17)}$$
$$y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha$$

§ 17. Орієнтація простору. Формули перетворення координат у просторі

Якщо в просторі задано систему координат , то він вважається орієнтованим. Правою називають систему координат, в якій з кінця базисного вектора $\vec{e}_3$ обертання від вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{e}_2$ здійснюється проти руху годинникової стрілки (тобто вісі *OX, OY, OZ* розміщені як великий, вказівний та середній пальці правої руки) (див. рис.13), а лівою–за часовою стрілкою (вісі *OX, OY, OZ* розміщені як великий, вказівний та середній пальці лівої руки).

Розглянемо у просторі дві афінні системи координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – стару систему та $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ – нову (рис.13). Нехай M – довільна точка простору, яка має координати (x, y, z) в старій системі координат і (x', y', z') в новій системі. Аналогічно до площини, задача перетворення координат заключається в тому, щоб знаючи $O'(x_0, y_0, z_0)$;

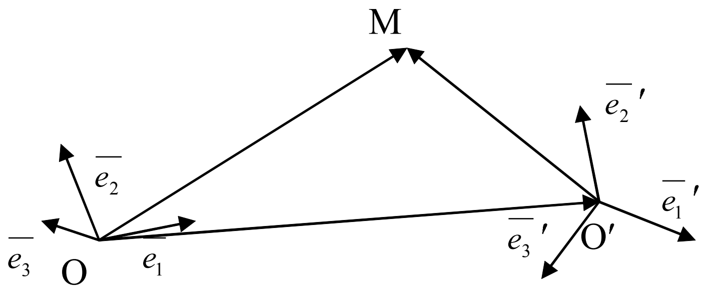


Рис.13

$\vec{e}_1{}'=(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{e}_2{}'=(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{e}_3{}'=(c_{13}, c_{23}, c_{33})$ в старому базисі виразити координати x, y, z через x', y', z'.

Запишемо розклади нових базисних векторів в старій системі: $\vec{e}_1{}'=c_{11}\vec{e}_1+c_{21}\vec{e}_2+c_{31}\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}'=c_{12}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2+c_{32}\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=c_{13}\vec{e}_1+c_{23}\vec{e}_2+c_{33}\vec{e}_3$.

За правилом трикутника

$\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M}$. $\overline{OM}=x\,\vec{e}_1+y\,\vec{e}_2+z\,\vec{e}_3$, $\overline{OO'}=x_0\,\vec{e}_1+y_0\,\vec{e}_2+z_0\,\vec{e}_3$,

$\overline{O'M}=x'\,\vec{e}_1{}'+y'\,\vec{e}_2{}'+z'\,\vec{e}_3{}'$.

Тоді $x\,\vec{e}_1+y\,\vec{e}_2+z\,\vec{e}_3=x_0\,\vec{e}_1+y_0\,\vec{e}_2+z_0\,\vec{e}_3+x'\,\vec{e}_1{}'+y'\,\vec{e}_2{}'+z'\,\vec{e}_3{}'$.

Підставивши в останню рівність розклади нових базисних векторів по старому базису і згрупувавши коефіцієнти біля базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, отримаємо формули перетворення афінних систем координат у просторі:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z'+x_0 \\ y &= c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z'+y_0 \\ z &= c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'+z_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

Матриця переходу від однієї системи координат до іншої має вигляд $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Згідно теореми 9 визначник цієї матриці

|C| ніколи не дорівнює нулю, оскільки він складений з координат базисних векторів. Відмітимо також, що |C| > 0, якщо системи координат мають однакову орієнтацію, і |C| < 0, якщо системи координат мають протилежну орієнтацію.

Якщо нову систему координат отримано із старої за допомогою паралельного перенесення на деякий вектор, то формули перетворення координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \qquad \textbf{(19)}$$

Якщо початок системи координат не змінюється, а змінюються лише базисні вектори, то формули перетворення приймають вигляд:

$$\begin{cases} x = c_{11} x' + c_{12} y' + c_{13} z' \\ y = c_{21} x' + c_{22} y' + c_{23} z' \\ z = c_{31} x' + c_{32} y' + c_{33} z' \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

Приклад 14.

Дано тетраедр *ABCD*. Записати формули перетворення координат точок, при переході від системи координат

$0=A,\ \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC},\ \vec{e}_3 = \overrightarrow{AD},$ до системи координат

$0' = B,\ \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BC},\ \vec{e}_3{}' = \overrightarrow{BD}.$

Розв'язання: Знайдемо координати нових базисних векторів і нового початку в старій системі: $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{e}_1$, отже $\vec{e}_1{}' = (-1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$, тому $\vec{e}_2{}' = (-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{e}_3{}' = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$, звідки $\vec{e}_3{}' = (-1,\ 0,\ 1)$, $B\,(1,\ 0,\ 0)$. Підставимо отримані координати в формули *(18):*

$$\begin{cases} x = -x' - y' - z' + 1 \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}.$$

При перетворенні прямокутних систем координат *(O,* $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$ *,* $\vec{k}$ *)* і *(O′,* $\vec{i}\,'$*,* $\vec{j}\,'$*,* $\vec{k}\,'$*)* у просторі мають місце ті ж формули, що й для афінних систем координат, але на числа C_{ij} можна накласти більш жорсткі умови. Так як $|\vec{i}\,'| = |\vec{j}\,'| = |\vec{k}\,'| = 1$, то

$c_{11} = \cos(\vec{i}\,', \vec{i}\,)$, $\quad c_{21} = \cos(\vec{i}\,', \vec{j}\,)$, $\quad c_{31} = \cos(\vec{i}\,', \vec{k}\,)$, і $\vec{i}\,' = (c_{11}, c_{21}, c_{31}) = (\cos(\vec{i}\,', \vec{i}\,), \cos(\vec{i}\,', \vec{j}\,), \cos(\vec{i}\,', \vec{k}\,))$. Аналогічно для інших базисних векторів. Отже, координатами нових базисних векторів є їх направляючі косинуси. Причому, оскільки $|\vec{i}\,'| = 1$, то

$$|\vec{i}\,'| = \sqrt{\cos^2(\vec{i}\,', \vec{i}\,) + \cos^2(\vec{i}\,', \vec{j}\,) + \cos^2(\vec{i}\,', \vec{k}\,)} = 1.$$

Отже, $\cos^2(\vec{i}\,', \vec{i}\,) + \cos^2(\vec{i}\,', \vec{j}\,) + \cos^2(\vec{i}\,', \vec{k}\,) = 1$ і т.д., а скалярний добуток $\vec{i}\,' \cdot \vec{j}\,' = \vec{i}\,' \cdot \vec{k}\,' = \vec{j}\,' \cdot \vec{k}\,' = 0$.

Тобто, сума квадратів кожного рядка і кожного стовпчика матриці переходу від однієї прямокутної системи координат до іншої рівна одиниці, а сума добутків відповідних елементів довільних двох рядків (стовпців) рівна нулеві.

Визначник $|C| = \pm 1$, причому $|C| = +1$, якщо системи координат однаково орієнтовані і $|C| = -1$, якщо системи координат протилежно орієнтовані.

§ 18. Полярна система координат. Перехід від полярної до прямокутної системи координат і навпаки

Крім афінної системи координат і її часткового випадку – прямокутної системи координат, часто розглядають і застосовують полярну систему координат на площині. Її використовують тому, що в науці і техніці зустрічаються криві, які простіше описати і побудувати саме в такій системі координат.

Полярна система координат вводиться на орієнтованій площині і складається з точки O – початку координат, яка називається **полюсом,** та одиничного вектора $\vec{i}$ (Позначають $(O, \vec{i})$) (рис.14). Пряма, яка містить вектор $\vec{i}$, називається **полярною віссю** (Позначають OP).

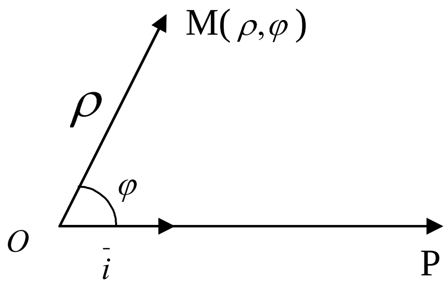


Рис.14

Будь-яка точка M в полярній системі координат визначається довжиною свого радіус-вектора та кутом між ним і полярною віссю (Позначають $M (\rho, \varphi)$).

Відстань $\rho = |\overline{OM}|$ називається **полярним радіусом** точки M $(0 \le \rho < \infty)$. Кут φ - називається полярним кутом точки M $(-\pi < \varphi \le \pi)$.

Іноді розглядають узагальнену систему координат, де φ-довільний і ρ може бути від'ємним.

Розглянемо на орієнтованій площині дві системи координат: прямокутну $(O, \vec{i}, \vec{j})$ і полярну $(O, \vec{i})$, які мають спільний початок (рис.15).

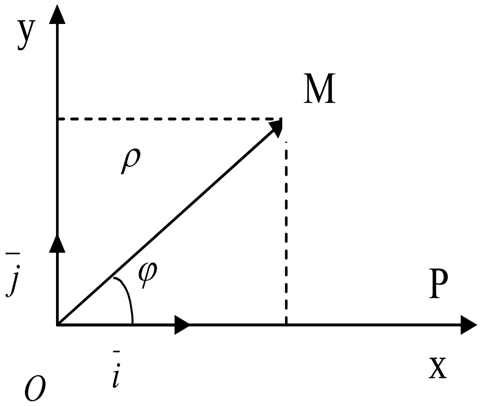


Рис.15

Нехай в полярній системі координат точка M має координати $M(\rho,\varphi)$, а в прямокутній $M(x,y)$. Задача: знаючи полярні координати точки M знайти її координати в прямокутній системі координат. Очевидно, що

$x=\rho \cos\varphi$; $y=\rho \sin\varphi$ (рис.15).

І навпаки, формули переходу від прямокутних координат до полярних мають вигляд: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ та $\varphi=arctg\ \dfrac{y}{x}$.

§ 19. Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{p}$, для якого виконуються умови:

1. $|\vec{p}|$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. ($|\vec{p}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$).

2. $\vec{p}$ перпендикулярний як з $\vec{a}$ так і з $\vec{b}$.

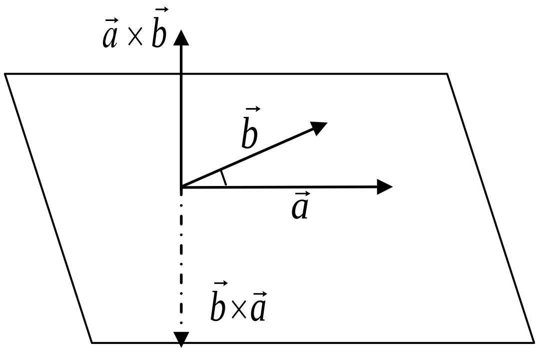


Рис. 16

3. Якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні, то вектор $\vec{p}$ має такий напрямок, що впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ має праву орієнтацію (рис. 16).

Векторний добуток позначають $\vec{p}=[\vec{a},\vec{b}]$ або $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$.

З означення слідує: якщо вектори колінеарні, то їх векторний добуток рівний нулю.

Теорема 10.

Для того, щоб вектори були колінеарними необхідно і досить, щоб їх векторний добуток дорівнював нулю.

Властивості:

1. $[\vec{a},\vec{b}]= - [\vec{b},\vec{a}]$ (антикомутативність).

2. $\alpha[\vec{a},\vec{b}]=[\alpha\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\alpha\vec{b}]$ (винесення скалярного множника).

3. $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$, $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (дистрибутивність).

Доведемо перші дві властивості.

1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{a}]=0$ і властивість доведена. Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні. Тоді вектори $[\vec{a},\vec{b}]$ і $[\vec{b},\vec{a}]$ мають однакові модулі, але протилежно направлені,

оскільки трійки векторів $\vec{a},\vec{b},[\vec{a},\vec{b}]$ і $\vec{a},\vec{b}\,[\vec{b},\vec{a}]$ мають протилежну орієнтацію. Це означає, що $[\vec{a},\vec{b}]= -[\vec{b},\vec{a}]$.

2. Доведемо першу рівність. Якщо $\alpha=0$, то рівність очевидна. Нехай $\alpha > 0$. Тоді $|[\alpha\vec{a},\vec{b}]| = |\alpha\ \bar{a}||\vec{b}|\sin(\alpha\ \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \alpha |\bar{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = =|\alpha[\vec{a},\vec{b}]|$. Оскільки $\alpha > 0$, то очевидно, що вектори $\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ і $[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ співнаправлені. Якщо $\alpha < 0$, то як і раніше можна показати, що $|[\alpha\vec{a},\vec{b}]|=|\alpha[\vec{a},\vec{b}]|$. А напрямок вектора $[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ протилежний до напрямку $[\vec{a},\vec{b}]$, але такий же як вектора $\alpha[\vec{a},\vec{b}]$. Отже, $\alpha[\vec{a},\vec{b}]=[\alpha\vec{a},\vec{b}]$. Аналогічно доводиться друга рівність.

Теорема 11.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ в системі координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ мають відповідно координати $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то їх векторний добуток знаходиться за формулою:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \qquad \textbf{(21)}$$

Доведення. Запишемо розклади даних векторів по базису: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Тоді, користуючись властивостями, отримаємо:

$[\vec{a},\vec{b}]=[a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\ b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}]=$

$= a_1b_2[\vec{i},\vec{j}]+a_1b_3[\vec{i},\vec{k}]+a_2b_1[\vec{j},\vec{i}]+a_2b_3[\vec{j},\vec{k}]+a_3b_1[\vec{k},\vec{i}]+a_3b_2[\vec{k},\vec{j}]$.

Так як $[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}$, $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$, $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$, то отримаємо $[\vec{a},\vec{b}]=(a_2b_3 - -a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$.

Задача. Знайти площу трикутника, якщо відомі координати його вершин $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$.

Розв'язання: Розглянемо вектори $\overline{AB}$ = $(x_2\text{-}x_1,\ \ y_2\text{-}y_1,\ \ z_2\text{-}z_1)$, $\overline{AC}$ = $(x_3\text{-}x_1,\ y_3\text{-}y_1,\ z_3\text{-}z_1)$. Так як за означенням векторного добутку двох векторів його модуль рівний площі паралелограма, побудованого на цих векторах, то площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}|\,[\,\overline{AB},\overline{AC}\,]\,|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right).$$

Приклад 15.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{g}$; $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{g}$; $|\vec{p}|=2$; $|\vec{g}|=5$; і $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{g})=-\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання: $S_{пар}=\|[\vec{a},\vec{b}]\|$ За властивостями 2-3 і теоремою 10 $[\vec{a},\vec{b}]=[6\vec{p}-\vec{g},2\vec{p}-\vec{g}]=12[\vec{p},\vec{p}]-6[\vec{p},\vec{g}]-2[\vec{g},\vec{p}]+6[\vec{g},\vec{g}]=$ $-4[\vec{p},\vec{g}]$.

Отже, $S_{пар}=|-4[\vec{p},\vec{g}]|=4|\vec{p}|\,|\vec{g}|\sin(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{g})=4\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}.$

Приклад 16.

При яких значеннях *x* і *y* вектор $\vec{c}=(x,y,-26)$ колінеарний до вектора $\vec{p}=[\vec{a},\vec{b}]$ якщо $,\vec{a}=(3,2,-4)$, $\vec{b}=(1,5,0)$.

Розв'язання: За формулою 21

$$\vec{p}=[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right)=(20,-4,13).$$

$\vec{c}\parallel\vec{p}$ отже, за теоремою 7: $\frac{x}{20}=\frac{y}{-4}=\frac{-26}{13}\Rightarrow x=-40,\ y=8.$

§ 20. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (позначається $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$) називається скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$: $\vec{a}\,[\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}$.

Теорема 12 (Геометричний зміст мішаного добутку).

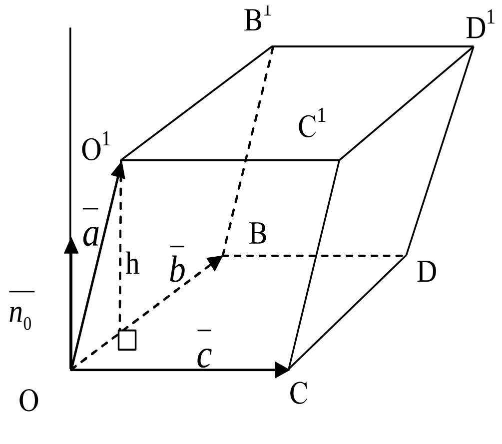


Рис. 17

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні, то модуль мішаного добутку $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.17).

Доведення:

Розглянемо векторний добуток $[\vec{b}, \vec{c}]$. Позначимо $\vec{n}_0$ одиничний вектор, співнаправлений з $[\vec{b}, \vec{c}]$, а φ – кут між ним і вектором $\vec{a}$. Враховуючи, що $[\vec{b}, \vec{c}]=|[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot \vec{n}_0 = S_{OBDC}\, \vec{n}_0$, отримаємо:

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot S_{OBDC}\, \vec{n}_0 = S_{OBDC}\, \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = S_{OBDC} |\vec{n}_0||\vec{a}| \cos\varphi =$ $= S_{OBDC}$ (+/- h) = +/- V (оскільки вектори $\vec{n}_0$ і $\vec{a}$ можуть утворювати як гострий кут (рис.17) так і тупий (вектор $\vec{n}_0$ направлений вниз), то cosφ може бути як додатній, так і від'ємний). Отже $V=|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Теорему доведено.

Теорема 13.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ мають координати $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ то мішаний добуток цих векторів дорівнює визначнику 3-го порядку, складеному з їх координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(22)}$$

Доведення: Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Згідно формули (21): $\cdot[\vec{b}, \vec{c}] = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right)$. Тоді

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\ [\vec{b},\vec{c}] = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток векторів рівний визначнику третього порядку, а значить має такі ж властивості, як і визначники.

Властивості:

1. Якщо три вектори компланарні то мішаний добуток дорівнює нулю.

2. Мішаний добуток додатній, якщо впорядкована трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ має додатну орієнтацію і навпаки.

3. При перестановці місцями двох векторів у мішаному добутку, знак визначника змінюється на протилежний, а його абсолютна величина не змінюється: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$.

4. Число можна виносити за знак мішаного добутку:

$\alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\alpha\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c})$.

5. Якщо один з векторів являється сумою інших, то:

$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

Задача: Знайти об’єм тетраедра *ABCD*, якщо відомі координати його вершин: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})\right| = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 17.

Об’єм тетраедра V=5. Відомі три його вершини *A(2,1,-1)*, *B(3,0,1)* і *C(2,-1,3)*. Знайти координати четвертої вершини *D*, якщо відомо, що вона знаходиться на вісі *OY*.

Розв'язання: Так як D належить вісі OY, то $D(0,y,0)$.
$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|$, $\overline{AB}=(1,-1,2)$, $\overline{AC}=(0,-2,4)$, $\overline{AD}=(-2,y-1,1)$.

Отже, $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & y-1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|8-2-8-4(y-1)\right|=\frac{1}{6}\left|-4y+2\right|=5\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}-4y+2=30\\ -4y+2=-30\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-7\\ y=8\end{array}\right.$. Відповідь: $D_1(0, -7, 0)$, $D_2(0, 8, 0)$.

ЗАДАЧІ

1. В прямокутній системі координат побудувати точки: $A(2,\ 1)$; $B\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$; $C(0,\ -4)$; $D(\sqrt{2},\ -2)$.

2. В афінній системі координат побудувати точки: $A(-1,\ 0)$, $B(-2,\ 1)$, $D(-3,\ 2)$.

3. В афінній системі координат дано вектор $\vec{a}=(3, 4)$ і точка $M(-2,\ 5)$. Визначити координати кінця вектора $\vec{a}$, якщо він відкладений від точки M.

4. В прямокутній системі координат побудувати точки: $P(0,\ 2,\ -3)$, $Q(2,\ 1,\ 4)$, $S(-2,\ 3,\ 5)$, $T(0,\ 3,\ -3)$.

5. Зобразити тетраедр $ABCD$ і побудувати точки: $K(-1,\ 1,\ 0)$, $L(-2,\ -1,\ -1)$, $M(0,\ 2,\ 0)$, $N(-2,\ 0,\ 0)$, розглядаючи точку A як початок системи координат, а вектори $\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}$ як вектори базиса.

6. Куб стоїть на площині XOY. Центр його основи співпадає з початком координат, а бічні ребра лежать в координатних площинах. Знайти координати всіх вершин куба, якщо ребро куба має довжину a.

7. Дано координати вершин трикутника *ABC:* $A(2,\ 5)$, $B(0,\ 1)$, $C(3,\ -1)$. Визначити координати вершин трикутника $A^{'}B^{'}C^{'}$, симетричного до трикутника *ABC:*

а) відносно вісі *OX;* б) відносно вісі *OY;* в) відносно початку координат.

8. Вершини чотирикутника знаходяться в точках $A($[illegible]$,\ 1)$, $B(2,\ 3)$, $C(6,\ 0)$, $D(7,\ -5)$. Показати, що *ABCD* – трапеція.

9. Дано дві вершини рівностороннього трикутника *A*(–3, 2) і *B*(1, 4). Знайти третю вершину *C.*

10. Дано дві суміжні вершини паралелограма *A*(–4, 4), *B*(2, 8) і точка перетину його діагоналей *M*(2, 2). Визначити дві інші вершини *C* і *D*.

11. Визначити координати точок, які ділять відрізок *A*(2, 3), *B*(–1, 2) у відношенні $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = \frac{1}{2},\ \lambda_4 = 3.$

12. Вершини однорідної трикутної пластинки знаходяться в точках *A*(–1, 2), *B*(3, 3) і *C*(1, –1). Визначити координати центра ваги пластинки.

13. Визначити довжину медіани *AM* трикутника *ABC*, якщо *A*(5, –4), *B*(–1, 2), *C*(5, 1).

14. Доведіть, що точки $A(-3,\ 0,\ 2)$, $B(-2,\ 1,\ 3)$, $C(5,\ 0,\ 2)$, $D(4,\ -1,\ 1)$ є вершинами паралелограма.

15. Дано три вершини паралелограма *A*(2, 5, 4), *B*(0, 1, 0) і *C*(4, 1, 3). Знайти координати четвертої вершини *D*.

16. Дано точку *M*(2, –1, 1). Визначити координати точок, симетричних з точкою *M*: а) відносно початку координат;
б) відносно координатних площин *XOY, XOZ, YOZ*, в) відносно координатних осей *OX*, *OY*, *OZ*.

17. Дано три точки $A(3,\ 2,\ 1)$, $B(5,\ 3,\ –2)$, $C(1,\ 1,\ 4)$. Перевірити чи лежать вони на одній прямій.

18. Вияснити, які з даних чотирьох точок лежать в одній площині: а) $A(1, 7, 8)$, $B(3, 5, 6)$, $C(–1, 4, 4)$, $D(0, 7, 6)$;

б) $A(1, 1, 0)$, $B(–1, 2, –1)$, $C(0, –1, 0)$, $D(–3, –3, 2)$.

19. Знайти координати точки *C,* яка симетрична з точкою $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$ відносно точки $A(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

20. Дано точки $A(-2,\ 0,\ 2)$ і $B(4,\ 6,\ 11)$. Знайти координати точки *C,* яка ділить направлений відрізок *AB* у відношенні λ, якщо

$$1)\lambda = 2;\quad 2)\lambda = -\frac{1}{2};\quad 3)\lambda = -2.$$

21. На прямій що проходить через точки $A(1, 0, 4)$ і $B(3, -1, 2)$, знайти точку *C* таку, щоб *AC = 3AB* і точка *B* лежала між точками *A* і *C*.

22. Відомі координати вектора $\overline{AB} = (2;\ \ 2;\ \ 6)$ і координати середини $C(–4, 0, 5)$ відрізка *AB*. Знайти координати точок *A* і *B*.

23. Відомі координати двох точок $A(1; 2; 3)$ і $B(4; 0; 5)$. Знайти точку перетину прямої *AB* з площиною *XOY*.

24. Знайти відношення, в якому кожна з координатних площин ділить відрізок *AB,* якщо $A(2, -1, 7)$, а $B(4, 5, -2)$.

25. Записати формули перетворення афінних систем координат на площині, якщо дані координати нового початку і нових координатних векторів в старій системі:

а) $\vec{e}_1{}' =(4, 3)$, $\vec{e}_2{}'=(0, 5)$, $0'(3, -1)$; б) $\vec{e}_1{}'=(1, 0)$, $\vec{e}_2{}'=(0, 1)$, $0'(2, 5)$;

в) $\vec{e}_1{}'=(4, -1)$, $\vec{e}_2{}'=(1, 1)$, $0'(0, 0)$.

26. Написати формули перетворення систем координат при паралельному переносі початку координат в точку $O'(5,\ \sqrt{2})$.

27. Визначити координати нових координатних векторів і нового початку в старій системі, якщо формули перетворення мають вигляд: а) $\begin{cases} x = x' - 3y' \\ y - x' + y' + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = x' - y' + 1 \\ y = y' \end{cases}$.

28. Написати формули перетворення прямокутних систем координат в кожному із випадків: а) $\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{10}\vec{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\vec{j}$, $O'(-3, \sqrt{2})$; і системи $(O, \vec{i}, \vec{j})$і $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ мають однакову орієнтацію;

б) $(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{i}') = \frac{\pi}{6}$, $O'(0, -2)$; і системи $(O, \vec{i}, \vec{j})$ і $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ мають різні орієнтації.

29. Дано формули перетворення координат при переході від прямокутної системи $(O, \vec{i}, \vec{j})$ до системи $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$. Вияснити, в яких із вказаних нижче випадках нова система $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ являється прямокутною: а) $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = -y' + 1 \\ y = x' \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y' - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x' + y' - 2 \end{cases}$.

30. В системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задано лінії рівняннями:

а) $x - 2y + 1 = 0$; б) $y - 3 = 0$. Знайти рівняння цих ліній в системі $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, якщо $O'(1, 0)$, $\vec{e}_1' = (1, -3)$, $\vec{e}_2' = (4, 4)$.

31. В системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задано множину точок рівнянням $4x^2 - y^2 - 4xy + 6y - 8 = 0$. Знайти рівняння цієї ж множини точок в системі координат $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, якщо $O'(2, 3)$, $\vec{e}_1' = (2, 0)$, $\vec{e}_2' = (2, 1)$.

32. Показати, що належним підбором нового початку координат можна домогтися того, щоб при паралельному перенесенні системи координат, в рівнянні кривої $x^2+y^2-4x+2y-1=0$ зникли члени першої степені.

33. Написати формули перетворення афінної системи координат у просторі, якщо дані координати нового початку і нових координатних векторів в старій системі:

а) $\vec{e}_1{}'$=(1, 0, 0), $\vec{e}_2{}'$=(2, 4, 0), $\vec{e}_3{}'$=(3, 6, –2), O'(0, 0, 0);

б) $\vec{e}_1{}'$=(–1, 1, 0), $\vec{e}_2{}'$=(2, –1, 0), $\vec{e}_3{}'$=(0, 0, 5), O'(5, 0, –2).

34. Нехай $ABCD\ A'B'C'D'$ – деякий куб, O – точка перетину його діагоналей. Нехай $\vec{e}_1=\overline{AB},\ \vec{e}_2=\overline{AD},\ \vec{e}_3=\overline{AA'},\ \vec{e}_1'=\overline{OA},\ \vec{e}_2'=\overline{OB},$ $\vec{e}_3'=\overline{OC}$. Написати формули перетворення координат точок, якщо $(O,\ \vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – стара система, а $(O,\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$ – нова система координат.

35. Визначити координати нових базисних векторів і нового початку в старій системі, якщо формули перетворення координат мають вигляд:

$$x=x'-y'+z'+1,$$
$$y=-x'-y'+2z'+2,$$
$$z=z'-3.$$

36. Записати формули перетворення координат при переході від прямокутної системи $Oxyz$ до системи $Ox'y'z'$, якщо початок нової системи співпадає з початком старої системи, вісь Oz' співпадає з віссю Oz, а промені Ox' і Oy' являються відповідно бісектрисами кутів xOz і yOz і нові координатні вектори являються одиничними.

37. Перевірити, що точка O'(1, 0, 1) і вектори $\vec{e}_1{}'$=(4, 3, –2), $\vec{e}_2{}'$=(0, 1, 5), $\vec{e}_3{}'$=(–1, 0, 1) визначають в просторі афінну систему координат. Знайти координати точок

$P(0;\ 3;\ 26)$, $Q(6;\ 5;\ -22)$, $S(2;\ 3;\ -2)$ в новій системі координат.

38. Нехай $\vec{e}_1{}'=(1,\ 0,\ 2)$, $\vec{e}_2{}'=(1,\ 0,\ –2)$, $\vec{e}_3{}'=(1,\ 1,\ 1)$ – координати нових базисних векторів в $(O,\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Знайти координати векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ відносно базиса $\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \vec{e}_3{}'$.

39. В полярній системі координат побудувати точки $M_1\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1,\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$, $M_3\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

40. Дано рівносторонній трикутник *ABC*, з стороною *5*. Прийнявши вершину *A* за полюс полярної системи координат, а направлену пряму *AB* за полярну вісь, визначити полярні координати вершин і центра *P* трикутника. Розглянути два можливих випадки розташування трикутника відносно полярної вісі.

41. Дано квадрат *ABCD*, сторона якого рівна *3*. Прийнявши вершину *A* за полюс полярної системи координат, а направлену пряму *AB* за полярну вісь, визначити координати його вершини і точки *P* перетинання діагоналей. Розглянути два можливих випадки розташування трикутника відносно полярної вісі.

42. Нехай на додатньо орієнтованій площині задано полярну систему координат $(O, \bar{i})$ і прямокутну систему координат $(O, \bar{i}, \bar{j})$. Визначити координати точок

$A\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(5,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3,\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$ в прямокутній системі координат.

43. Нехай на додатно орієнтованій площині задано прямокутну система координат $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ і полярну систему $(O, \vec{i})$. Визначити полярні координати точок: $M_1(0,\ 6)$, $M_2(-1,\ 1)$, $M_3(\sqrt{3},\ 1)$.

44. В полярній системі координат вивести формулу для обчислення площі трикутника OA_1A_2, вершина *O* якого співпадає з полюсом, а дві інші мають координати: $A_1(\rho_1, \varphi_1)$, $A_2(\rho_2, \varphi_2)$. Користуючись цією формулою, обчислити площу трикутника, одна з вершин якого міститься в полюсі, а дві інші мають полярні координати: $A_1\left(4, \dfrac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1, \dfrac{5\pi}{18}\right)$.

45. В полярній системі координат вивести формулу для обчислення відстані між двома точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ і $M_2(\rho_2, \varphi_2)$. Користуючись цією формулою знайти відстань між точками: $A\left(5, \dfrac{\pi}{6}\right)$ і $B\left(3, -\dfrac{\pi}{6}\right)$.

46. Дано полярні координати вершин трикутника $A\left(10, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16, \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(6, \dfrac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що трикутник ABC рівносторонній.

47. Визначити множину точок, координати яких в полярній системі координат задовольняють рівняння: а) $\rho = 3$; б) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; в) $\rho\cos\varphi = 5$; г) $\rho\sin\varphi = 3$.

48. Перетворити вираз: а) $[(\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})]$.
б) $[(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}), (\vec{a} - 2\vec{b})]$.

49. Визначити координати і модуль вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$, якщо $\vec{a} = (5, 4, -2)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$.

50. Визначити координати вектора $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, якщо $\vec{a} = (-3, -1, 4)$, $\vec{b} = (-4, 6, 0)$, $\vec{c} = (2, -5, 5)$

51. Знайти $[\vec{a}, \vec{b}]$ якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$ і $\vec{a}\,\vec{b} = -15$.

52. Дано вектори $\vec{a} = (1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 0, z)$. При якому значені z вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ колінеарний вісі OY?

53. Дано вектори $\vec{a} = (0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -1, 0)$. При якому значенні z вектор $\vec{c} = (3, 4, z)$ ортогональний вектору $[\vec{a}, \vec{b}]$?

54. Знайти площу трикутника *ABC,* якщо відомі координати його вершин $A($[illegible]$;\ 6;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ 0)$, $C(4;\ -1;\ -6)$.

55. Доведіть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які задовольняють умову $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$ компланарні.

56. Обчислити мішаний добуток векторів:

а). $\alpha = (\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}))$, б).$\beta = (\vec{b}, (\vec{c} + \vec{a}), (\vec{b} + 2\vec{c}))$, якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$.

57. Знайти мішаний добуток і визначити орієнтацію трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в кожному з випадків:

а) $\vec{a} = (-1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 6, 3)$, $\vec{c} = (1, -3, 5)$,

б) $\vec{a} = (-2, 1, 5)$, $\vec{b} = (3, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, 4, 2)$.

58. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ і $\vec{b}\,[\vec{a}, \vec{c}]$, якщо $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$.

59. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, – довільні вектори, а α, β, γ – довільні дійсні числа. Доведіть, що вектори $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$ компланарні.

60. Обчислити об’єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках: $A(2,\ -1,\ -1)$, $B(5,\ -1,\ 2)$, $C(3,\ 0,\ -3)$, $D(6,\ 0,\ -1)$.

61. Знайти довжину висоти *AH* тетраедра *ABCD*, вершини якого знаходяться в точках

$A(2,\ -4,\ 5)$, $B(-1,\ -3,\ 4)$, $C(5,\ 5,\ -1)$, $D(1,\ -2,\ 2)$.

62. Дано паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$ побудований на векторах $\overline{AB} = (4, 3, 0)$, $\overline{AD} = (2, 1, 2)$ і $\overline{AA'} = (-3, -2, 5)$.

Знайти: а) об’єм паралелепіпеда; б) площі граней; в) довжину висоти, проведеної з вершини A' на грань *ABCD;* г) косинус кута

φ_1 між ребром AB і діагоналлю $B^{'}D$; д) косинус кута φ_2 між гранями $ABCD$ і $ADD^{'}A^{'}$.

63. В трикутній призмі $ABCA^{'}B^{'}C^{'}$ вектори $\overline{AB}=(0,1,-1)$ і $\overline{AC}=(2,-1,4)$ визначають основу, а вектор $\overline{AA^{'}}=(-3,2,2)$ направлений по бічному ребру. Знайти: а) об'єм призми; б) площі граней; в) висоту; г) кут φ між ребрами $B^{'}C^{'}$ і $AA^{'}$.

64. Дано паралелепіпед $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$. Знайти, яку частину об'єма даного паралелепіпеда складає об'єм тетраедра $AB^{'}D^{'}C$.

Розділ 3

Пряма лінія на площині

§ 21. Пряма лінія в афінній системі координат

Будь-який вектор, відмінний від нуль-вектора, називається **направляючим вектором** прямої, якщо він паралельний до даної прямої. Сукупність всіх направляючих векторів конкретної прямої *a* утворює одновимірний векторний простір.

Пряму лінію на площині в афінній системі координат можна задати точкою і направляючим вектором, або двома точками.

Розглянемо різні рівняння прямої в афінній системі координат $(O,\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Рівняння прямої за точкою і направляючим вектором:

Нехай в афінній системі координат $(O,\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задано точку $M_0(x_0,y_0)$, та направляючий вектор $\vec{p}=(\alpha,\beta)$ прямої *a* (рис.18). Потрібно знайти рівняння прямої *a*. Виберемо на прямій довільну точку $M(x,y)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0)$; $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, отже, їх координати пропорційні:

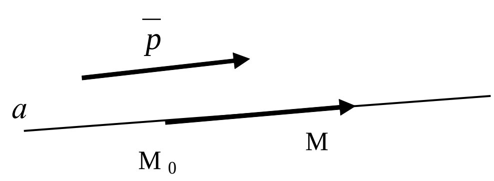


Рис. 18

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}. \qquad \textbf{(23)}$$

Отримане рівняння називається **канонічним рівнянням прямої**. Його можна записати

$$\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0 \qquad \textbf{(23′)}$$

2. Параметричні рівняння прямої:

Як і в попередньому випадку пряму задано точкою $M_0(x_0,y_0)$, та направляючим вектором $\vec{p}=(\alpha,\beta)$. Для довільної точки M прямої $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{p}$, за теоремою 1 $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{p}$. Перейдемо до координат: $x-x_0=t\cdot\alpha$, $y-y_0=t\cdot\beta$; отримаємо **параметричні рівняння прямої**:

$$\begin{cases} x=t\,\alpha+x_0, \\ y=t\,\beta+y_0. \end{cases} \qquad \textbf{(24)}$$

Приклад 18.

Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $A(4,-3)$ і $B(-2,5)$.

Розв'язання: За направляючий вектор прямої можна взяти $\overrightarrow{AB}=(-6,8)$, а краще $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=(3,-4)$. За точку, яка належить прямій візьмемо, наприклад, точку A. Отримаємо: $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=-4t-3. \end{cases}$

3. Рівняння прямої за двома точками.

Дано дві точки прямої $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$ (рис.19). Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ буде направляючим для прямої M_1M_2. Аналогічно попередньому розглянемо довільну точку $M(x,y)$ цієї прямої. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,\ y-y_1)$. Так як вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ колінеарні, то за теоремою 7 їх координати пропорційні і отримаємо **рівняння прямої за двома точками:**

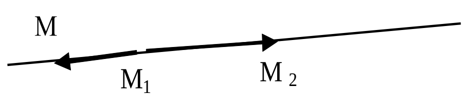


Рис. 19

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \textbf{(25)}$$

4. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Нехай пряма a не проходить через початок системи координат. Тоді вона перетинає вісі координат у точках A та B, які відповідно мають координати $A(a,0)$, $B(0,b)$ (рис.20). Скориставшись рівнянням (25) отримаємо: $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$, або $b(x-a) = -ay$, $bx - ba = -ay$, $bx+ay = ab$. Так як a і b не рівні нулю, то розділивши обидві частини рівності на ab, отримаємо **рівняння прямої „у відрізках”:**

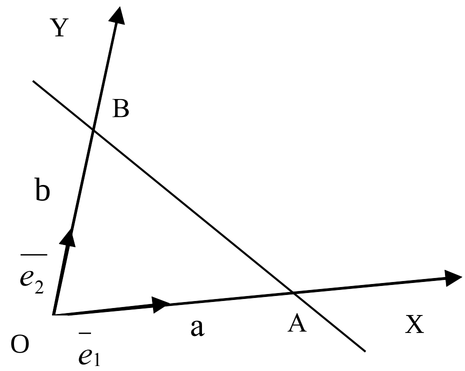


Рис. 20

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \textbf{(26)}$$

де a і b направлені відрізки на осях системи координат (можуть бути і від′ємними).

Приклад 19.

Записати рівняння прямої $3x-2y+6=0$ „у відрізках”.

Розв’язання: $3x-2y=-6 \Leftrightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$

5. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай в афінній системі координат задана пряма a, яка перетинає вісь ординат і проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, та має направляючий вектор $\vec{p}=(\alpha,\beta)$ (рис.21).

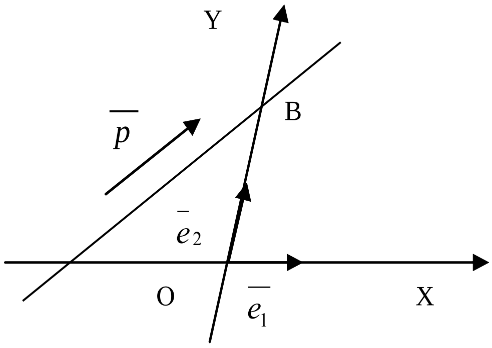


Рис.21

Число $\frac{\beta}{\alpha}=k$ називається **кутовим коефіцієнтом** прямої *a*.

Покажемо, що кутовий коефіцієнт не залежить від вибору направляючого вектора. Нехай пряма *a* має ще один направляючий вектор $\vec{p}_1=(\alpha_1,\beta_1)$. Тоді $\vec{p}\parallel\vec{p}_1$ і за теоремою 1 $\vec{p}_1=t\,\vec{p}$, або в координатах $(\alpha_1,\beta_1)=t(\alpha,\beta)$, і $k=\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{t\,\beta}{t\,\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$, тобто кутовий коефіцієнт не залежить від направляючого вектора. Поділивши обидві частини рівності (23′) на α отримаємо:

$$y-y_0=k\,(x-x_0) \qquad \textbf{(27)}$$

Якщо за точку *M* взяти точку перетину прямої з віссю ординат – $B(0,b)$, то **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** приймає вигляд:

$$y=kx+b. \qquad \textbf{(27′)}$$

Якщо пряма задана в прямокутній системі координат, то кутовий коефіцієнт k має простий геометричний зміст: $\beta=|\vec{p}|\sin\varphi$, $\alpha=|\vec{p}|\cos\varphi$, тому $k=\mathrm{tg}\varphi$, де φ – кут нахилу прямої до вісі *OX*. Отже, $k=\mathrm{tg}\varphi$ дає можливість знаходити кут нахилу прямої до вісі *OX*.

6. Загальне рівняння прямої

Всі отримані нами рівняння прямої є рівняннями першої степені від двох змінних, тобто їх можна записати **загальним рівнянням**:

$$Ax+By+C=0. \qquad \textbf{(28)}$$

Постає питання: чи всяке рівняння вигляду (28) визначає пряму лінію на площині?

Теорема 14.

Рівняння $Ax+By+C=0$,(де A і B не рівні нулю одночасно) в афінній системі координат на площині визначає пряму лінію. Причому вектор $\vec{p}=(-B,A)$ є направляючим вектором цієї прямої.

Доведення:

Очевидно, що існує точка $M(x_0, y_0)$, координати якої задовольняють рівняння (28). Отже, $Ax_0+By_0+C=0$. Звідси
$C = -Ax_0 - By_0$. Підставивши значення C в рівність (28), отримаємо: $Ax+By-Ax_0-By_0=0$, або $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Отримали рівняння прямої вигляду (23′), де координати направляючого вектора
$\alpha = -B$, а $\beta = A$. Отже, рівняння (28) визначає пряму, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має направляючий вектор
$\vec{p}=(-B,A)$.

Приклад 20.

Записати загальне рівняння прямої: $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = 3t+2. \end{cases}$

Розв'язання: 1-й спосіб: Виключимо параметр t з рівнянь. Для цього домножимо перше рівняння на 3, друге на (-2) і, склавши їх почленно, отримаємо $3x-2y=-3-4,$ або $3x-2y+7=0.$

2-й спосіб: Дана пряма проходить через точку $M(-1,2)$ і має направляючий вектор $\vec{p}=(2,3)$. Скористаємось канонічним рівнянням прямої: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$, або $3x-2y+7=0.$

§ 22. Розміщення прямої відносно системи координат.

Нехай в афінній системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ пряма задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (28).

1. Якщо $C=0$, то рівняння (28) задовольняє точка $O(0,0)$, тобто пряма проходить через початок координат.

2. Якщо $A=0$ то направляючий вектор прямої $\vec{p}=(-B,0)$ колінеарний координатному вектору $\vec{e}_1$, отже пряма паралельна до осі OX.

3. Якщо $B=0$ то направляючий вектор прямої $\vec{p}=(0,A)$ колінеарний координатному вектору $\vec{e}_2$, отже пряма паралельна до осі OY.

4. Якщо $A=0$ і $C=0$, то пряма паралельна до осі OX і проходить через початок координат, отже це сама вісь OX!

5. Якщо $B=0$ і $C=0$, то пряма співпадає з віссю OY.

Для того щоб побудувати пряму, досить знати два елемента: Направляючий вектор та деяку точку прямої (тоді будуємо точку і направляючий вектор і через точку проводимо пряму паралельну до вектора), або дві точки, які лежать на прямій (будуємо ці точки).

§ 23. Геометричний зміст знака *Ax+By+C*

Розглянемо многочлен $Ax+By+C$, де A і B не рівні нулю водночас. Якщо $Ax+By+C=0$, то ми маємо рівняння прямої a, яка розбиває площину на дві півплощини (рис.22). Розглянемо вектор $\vec{p}_1=(A,B)$, він не паралельний до прямої a, так як не колінеарний до її направляючого вектора $\vec{p}=(-B,A)$, так як в противному випадку їх координати пропорційні: $-\dfrac{B}{A}=\dfrac{A}{B}$, або $B^2+A^2=0$. Розв'язком цього рівняння є $A=B=0$, що суперечить умові.

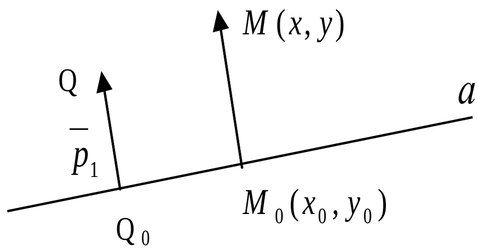


Рис.22

Відкладемо вектор $\vec{p}_1$ від деякої точки Q_0 прямої a. Позначимо кінець вектора через Q. Виберемо деяку точку $M(x,y)$, яка не належить прямій a і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}_1$, де точка $M_0(x_0,y_0)$ належить прямій a (рис.22). Тоді, за теоремою 1 $\overrightarrow{M_0M} = t\cdot \vec{p}_1$ (1) . Якщо $t>0$, то вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $t\,\vec{p}_1$ колінеарні і точки M та Q лежать в одній півплощині. І навпаки, якщо $t<0$, то точки M та Q лежать в різних півплощинах. Вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$, Перейдемо в рівності (1) до координат:

$x–x_0= t·A,\ \ y–y_0=t·B,$ або $x= t·A+x_0,\ y=t·B+y_0$

Підставивши отримані вирази у многочлен $Ax+By+C$, отримаємо:

$Ax+By+C=A(tA+x_0)+B(tB+y_0)+C=A^2t+Ax_0+B^2t+By_0+C=$ $=(A^2+B^2)t+A\,x_0+B\,y_0+C$. Так як точка $M_0(x_0,y_0)$ належить прямій, то її координати задовольняють рівняння прямої, тому $Ax_0+By_0+C=0$, і $A^2+B^2>0$, отже знак многочлена $Ax+By+C$ цілком залежить від t.

Якщо $t>0$ то точки M і Q лежать в одній півплощині.

Отже, нерівність $Ax+By+C>0$ визначає відкриту півплощину, обмежену прямою a. Ясно, що нерівність $Ax+By+C<0$ визначає іншу півплощину, обмежену цією ж прямою a.

З попереднього випливає, що точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ лежать по одну сторону від прямої, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$, якщо $(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0$, якщо ж $(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)<0$, то точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ лежать по різні сторони від прямої.

Приклад 21.

Дано кут *ACB,* де *A*(4, 6), *B*(0, -5), *C*(-2, 2). Які з точок M_1(3, 0); M_2(-6, 5); M_3(4, 3) належать внутрішній частині кута?

Розв'язання: Запишемо рівняння прямих *AC* і *BC* (використаємо рівняння прямої за двома точками).

AC: $\dfrac{x-4}{-2-4}=\dfrac{y-6}{2-6}$, або $2x-3y+10=0$

BC: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+5}{2+5}$, або $7x+2y+10=0$.

Вкажемо нерівності, які визначають внутрішню частину кута *ACB.* Розглянемо тричлен $2x-3y+10.$ Точка *B* відносно прямої *AC* лежить в тій півплощині що й внутрішня частина кута. Отже, підставивши її координати в тричлен і визначимо необхідну нерівність: $2\cdot 0-3\cdot(-5)+10>0$. Маємо: $2x-3y+10>0.$ Аналогічно, точка *A* для тричлена $7x+2y+10.$

$7\cdot 4+2\cdot 6+10>0$ і $7x+2y+10>0.$ Таким чином, внутрішню частину кута ACB визначає система: $\begin{cases} 2x-3y+10>0, \\ 7x+2y+10>0. \end{cases}$

Перевіримо, які з даних точок належать внутрішній частині кута (їх координати повинні задовольняти систему нерівностей). $\begin{cases} 2\cdot 3-3\cdot 0+10>0, \\ 7\cdot 3+2\cdot 0+10>0. \end{cases}$ Отже, точка M_1 належить внутрішній частині кута. $2\cdot(-6)-3\cdot 5+10<0,$ тому точка M_2 не належить внутрішній частині кута. Аналогічно M_3 належить внутрішній частині кута.

§ 24. Взаємне розташування двох прямих

1. Нехай задано дві прямі:

d_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ (*) та d_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ (**).

Теорема 15.

Для того щоб рівняння (*) і (**) визначали одну і ту ж саму пряму, необхідно і досить, щоб коефіцієнти A_1, B_1, C_1 і A_2, B_2, C_2 в цих рівняннях були пропорційні.

Доведення:

Нехай рівняння (*) і (**) визначають одну і ту ж пряму.

Згідно теореми 14 вектори $\vec{p}_1=(-B_1,A_1)$ і $\vec{p}_2=(-B_2,A_2)$ – направляючі вектори цих прямих, а значить $\vec{p}_1 \| \vec{p}_2$, і за теоремою 7, їх координати пропорційні: $-B_2=\lambda(-B_1)$, $A_2=\lambda(A_1)$. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій, тоді $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ і $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$. Враховуючи, що $A_2=\lambda(A_1)$, $B_2=\lambda(B_1)$, отримаємо: $C_2=(-A_2x_0-B_2y_0)=-\lambda(A_1x_0+B_1y_0)=-\lambda C_1$. Отже, всі коефіцієнти пропорційні: $B_2=\lambda B_1$, $A_2=\lambda A_1$, $C_2=\lambda C_1$.

І навпаки, нехай в рівняннях (*) і (**) коефіцієнти пропорційні: $B_2=\lambda B_1$, $A_2=\lambda A_1$, $C_2=\lambda C_1$, причому $\lambda\neq 0$, тоді $A_2x+B_2y+C_2=$ $=\lambda A_1x+\lambda B_1y+\lambda C_1=0$.

Отже, останнє рівняння та рівняння (*) задають одну й ту ж пряму, бо якщо координати довільної точки задовольняють рівняння (*), то вони задовольняють і рівняння $\lambda A_1x+\lambda B_1y+\lambda C_1=0$. Теорему доведено.

З'ясуємо як розташовані на площині дві прямі

d_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ та d_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Розглянемо їх направляючі вектори: $\vec{p}_1=(-B_1,A_1)$ і $\vec{p}_2=(-B_2,A_2)$. Якщо вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ не колінеарні, то, очевидно, що прямі d_1 і d_2 перетинаються. За теоремою 7 координати не колінеарних векторів не пропорційні: $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{A_1}{A_2}$, або $A_1B_2-B_1A_2\neq 0$. А це не що інше, як визначник: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ – умова неколінеарності векторів.

Якщо вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ колінеарні, то $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$ і прямі паралельні або співпадають. Отже:

1. Прямі d_1 і d_2 перетинаються тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при x та y в рівняннях (*), (**) непропорційні.
2. Прямі d_1 і d_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при x та y в рівняннях (*), (**) пропорційні, а вільні члени не пропорційні до них.
3. Прямі d_1 і d_2 співпадають тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при x та y і вільні члени в рівняннях (*), (**) пропорційні.

Приклад 22.

Як розташовані прямі: а) $2x-3y+5=0$ і $4x-6y-3=0$ б) $x+4y-5=0$ і $2x-6y+10=0$?

Розв'язання: а) $\frac{2}{4}=\frac{(-3)}{(-6)}\neq\frac{5}{-3}$, отже, прямі паралельні

б) $\frac{1}{2}\neq\frac{4}{(-6)}$ прямі перетинаються.

§25. Пучки прямих

1. Множина всіх прямих площини, паралельних до даної прямої, включаючи і її називається **пучком паралельних прямих**. Так як для паралельних прямих можна взяти один і той же направляючий вектор $\vec{p}=(-B,A)$, то пучок паралельних прямих задається рівнянням: $Ax+By+t=0$, де A і B деякі сталі, а t змінюється на множині дійсних чисел. Змінюючи параметр t, ми отримаємо множину паралельних прямих.
2. Множина прямих, що проходять через одну точку називається **пучком прямих, що перетинаються,** або просто **пучком прямих.** Його можна задати центром пучка, тобто точкою, через яку проходять всі прямі. Тоді рівняння пучка можна задати рівнянням (23´): $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$, де x_0, y_0 фіксовані, і являються координатами точки, а α та β змінюються і належать до множини дійсних чисел.

Пучок прямих, що перетинаються, можна задати і двома прямими, що перетинаються.

Розглянемо дві прямі d_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ та d_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Для того, щоб прямі перетиналися, потрібно щоб їх направляючі вектори $\vec{p}_1=(-B_1, A_1)$ та $\vec{p}_2=(-B_2, A_2)$ були неколінеарні. Тобто $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$. *У* цьому випадку рівняння пучка прямих матиме вигляд

$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$, де α і β дійсні змінні, які не рівні нулеві одночасно. Взявши конкретні α і β, одержимо рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих d_1 і d_2. Змінюючи параметри α і β, отримаємо множину прямих, які проходять через точку перетину двох даних прямих.

Приклад 23.

В пучку $\alpha(3x+5y-4)+\beta(2x-3y+3)=0$ знайти пряму, яка проходить через точку *A*(-2, 3).

Розв'язання: Так як точка *A* повинна належати шуканій прямій пучка, то її координати задовольнятимуть рівняння пучка: $\alpha(3\cdot(-2)+5\cdot3-4)+\beta(2\cdot(-2)-3\cdot3+3)=0,$ або $5\alpha=10\beta$ і $\alpha=2\beta.$ Покладемо, наприклад, $\beta=1,$ тоді $\alpha=2,$ отримаємо: $2(3x+5y-4)+(2x-3y+3)=0,$ або $8x+7y-5=0.$

Відповідь: $8x+7y-5=0.$

§ 26. Пряма в прямокутній системі координат

Всі рівняння прямої (23) – (28), які ми отримали в афінній системі координат, мають місце і в прямокутній системі.

Виведемо ще два рівняння прямої, які пов'язані з поняттями перпендикулярності, і тому мають місце тільки в прямокутній системі координат.

Вектор $\vec{n}\neq\vec{0}$ називається **нормальним вектором прямої**, якщо він перпендикулярний до будь-якого її направляючого вектора.

7. <u>Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором.</u>

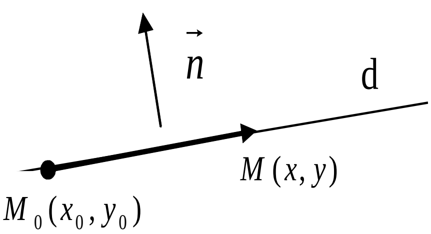


Рис.23

Нехай пряма d в прямокутній системі координат задана точкою $M_0(x_0,y_0)$, і нормальним вектором $\vec{n}=(A,B)$. Виберемо довільну точку $M(x,y)$ на прямій d (рис.23).

Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0)$

перпендикулярний до вектора $\vec{n}$, отже, їх скалярний добуток $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}=0$. Перейшовши до координат, отримаємо рівняння прямої:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad \textbf{(29)}$$

Приклад 24.

Знайти координати точки, симетричної з точкою *A(-3,-5)* відносно прямої $x+3y-2=0.$

Розв'язання: Знайдемо спочатку проекцію точки *A* на дану пряму. Для цього запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку *A*, перпендикулярно до прямої $x+3y-2=0.$ Скористаємось рівнянням прямої за точкою *A* і нормальним вектором (за нормальний вектор візьмемо направляючий вектор даної прямої $\vec{p}$ = *(-B, A)*). Отже, $\vec{n}=(-3,1).$ $-3(x+3)+(y+5)=0$ або $3x-y+4=0.$

Проекцією точки *A* на пряму $x+3y-2=0$ буде точка її перетину з прямою $3x-y+4=0.$ Щоб знайти точку перетину, розв'яжемо систему $\begin{cases} x+3y-2=0 \\ 3x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2=0 \\ -10y+10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$

Отримали точку *O(-1,1)*.

Для знаходження симетричної точки A' скористаємося формулами ділення відрізка навпіл: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

$-1=\dfrac{-3+x_2}{2}; 1=\dfrac{-5+y_2}{2};$ тому $x_2=1, y_2=7.$

Відповідь: $\boldsymbol{A'(1,7).}$

Відмітимо, що для прямої, заданої загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, нормальний вектор $\vec{n} = (A, B)$, так як він перпендикулярний до її направляючого вектора $\vec{p} = (-B, A)$ ($\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$).

8. <u>Нормальне рівняння прямої:</u>

Нехай пряма лінія задана в прямокутній системі координат одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ і відстанню ρ від початку координат до прямої. Тоді $\rho = |OH|$ (рис.24). Знайдемо координати точки H. Так як координати точки, це координати її радіус-вектора, то

$$\overrightarrow{OH} = \rho\vec{n}_0 = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Отже, $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

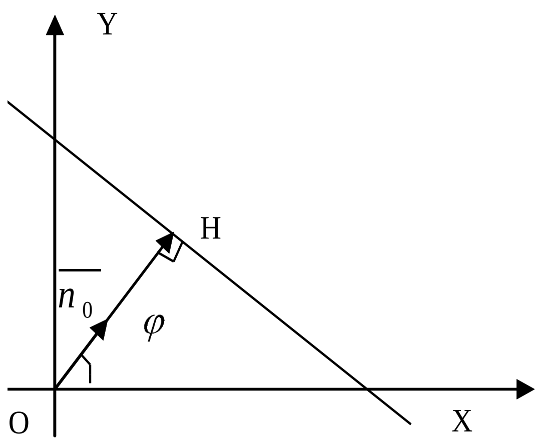


Рис.24

Скориставшись рівнянням (29) отримаємо:

$$\cos\varphi(x-\rho\cos\varphi)+\sin\varphi(y-\rho\sin\varphi)=0,$$

або

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho=0 \qquad \textbf{(30)}$$

Очевидно, що для того, щоб із загального рівняння отримати нормальне рівняння, потрібно розділити його почленно на довжину нормального вектора (таким чином ми отримаємо одиничний нормальний вектор $\vec{n}_0$), причому взяти цей дільник із знаком „+”, якщо вільний член $C > 0$ і знаком „–”, якщо $C < 0$.

Приклад 25.

Привести до нормального вигляду рівняння прямої

$3x-3\sqrt{3}y+12=0.$

Розв’язання: $\vec{n}=(3,-3\sqrt{3})$; $|\vec{n}|=\sqrt{9+27}=6.$ Так як $C>0$, то $\varepsilon=-1$. Розділивши почленно задане рівняння на (-6), отримаємо нормальне рівняння: $-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-2=0.$. Тут $\rho=2$, $\cos\varphi=-\frac{1}{2}, \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тому $\varphi=120^\circ$, і нормальне рівняння можна записати у вигляді: $x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+y\sin\frac{2\pi}{3}-2=0.$

§ 27. Відстань від точки до прямої

Нехай в прямокутній системі координат задано пряму загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ і точку $M_0(x_0, y_0)$. Необхідно знайти відстань d від точки до прямої.

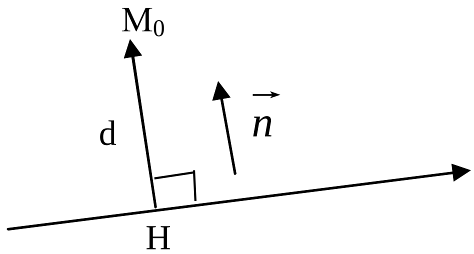


Рис. 25

Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму (рис.25). Тоді вектор $\overrightarrow{HM}_0$ колінеарний з нормальним вектором $\vec{n}=(A,B)$ Розглянемо скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{HM}_0$: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}_0=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{HM}_0|\cos\varphi$. Так як кут φ між векторами $\vec{n}$ і $\overrightarrow{HM}_0$ може бути як 0° так і 180°, то $\cos\varphi=\pm 1$. Отже, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}_0=|\pm|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{HM}_0|$. Звідси $|\overrightarrow{HM}_0|=\frac{\left|\overrightarrow{HM}_0\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$. Перейдемо до координат. Нехай точка H має координати: $H(x_1,y_1)$, тоді

$\overrightarrow{HM}_0=(x_0-x_1, y_0-y_1)$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}_0=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-$ $-(Ax_1+By_1)$. Оскільки точка H належить прямій, то її координати задовольняють рівняння прямої, отже, $Ax_1+By_1=-C$. Маємо: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}_0=Ax_0+By_0+C$. остаточно отримаємо:

$$d = \left|\overline{HM_0}\right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \textbf{(31)}$$

Якщо ж пряма задана нормальним рівнянням, то очевидно, що відстань d знаходиться за формулою: $d=|x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - \rho|$.

Приклад 26.

Написати рівняння кола, яке має центр в точці *O(6,-3)* і дотикається до прямої $3x - 4y - 15 = 0$.

Розв'язання: Рівняння кола з центром в точці $M(a,b)$ має вигляд: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Так як координати центра відомі, залишається знайти радіус. Очевидно, що радіус кола рівний відстані від центра кола до дотичної, отже, за формулою (31): $R = d = \dfrac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot (-3) - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3.$

Відповідь: $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 9.$

Приклад 27.

На прямій $x - 2y + 14 = 0$ знайти точки, рівновіддалені від прямих $7x - y + 11 = 0$ і $x + y - 5 = 0$.

Розв'язання: Знайдемо спочатку множину всіх точок $M(x,y)$, рівновіддалених від даних прямих. (Це будуть бісектриси вертикальних кутів, утворених цими прямими).

За умовою задачі відстань від точки *M* до прямих рівна, отже,

$\dfrac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|7x - y + 11|}{5\sqrt{2}}$, або $5|x + y - 5| = |7x - y + 11| \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x - 3y + 18 = 0, \\ 6x + 2y - 7 = 0. \end{array}\right.$ Розв'язок задачі отримаємо, знайшовши перетин знайдених прямих з прямою $x - 2y + 14 = 0$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3y+18=0,\\ x-2y+14=0.\end{cases}\\ \begin{cases}6x+2y-7=0,\\ x-2y+14=0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-6,\\ y=4.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=\dfrac{13}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, існують дві точки, які задовольняють умову задачі. Відповідь: $A(-6,4)$, $B(-1,\frac{13}{2})$.

§ 28. Кут між прямими

Кутом між прямими назвемо мінімальний кут між направляючими векторами цих прямих.

Нехай маємо дві прямі $d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ та $d_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Тоді $\vec{p}_1=(-B_1, A_1)$ та $\vec{p}_2=(-B_2, A_2)$ – їх направляючі вектори і за наслідком 10 знаходимо косинус кута між прямими:

$$\cos\alpha=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad \textbf{(32)}$$

(так як $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, то для визначення мінімального кута чисельник необхідно брати по модулю).

Приклад 28.

Знайти кут між прямими $3x+y-6=0$ і $2x-y+5=0$.

Розв'язання: Розглянемо направляючі вектори даних прямих: $\vec{p}_1=(-1, 3)$ і $\vec{p}_2=(1, 2)$. Тоді $\cos\varphi=\frac{(-1)\cdot 1+3\cdot 2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Отже, $\varphi=45^0$.

ЗАДАЧІ

1. Пряма має рівняння: 2x – y + 5 = 0. З’ясувати, які із точок A(5, 15); B(1, 1); C(-2, 1) належать цій прямій.

2. Дано прямі: а) 2x – 3y + 6 = 0; б) 2x – y = 0; с) 6x + 5 = 0. Для кожної прямої знайти координати точок перетину з координатними осями. Накресливши на площині афінну систему координат, побудувати ці прямі за допомогою циркуля і лінійки.

3. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(-1,\ 3),\ B(0,\ 4),\ C(-2,\ -2).$ Написати рівняння медіани цього трикутника, проведеної з вершини A.

4. Написати рівняння середніх ліній трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2,\ 6),\ B(-4,\ 0),\ C(4,\ 2).$

5. Знайти довжини направлених відрізків, що відтинає на осях координат пряма 5x + 3y – 6 = 0. Скласти рівняння цієї прямої “у відрізках”.

6. Написати параметричні рівняння прямої:

а) яка проходить через дві точки $M_1(0,\ -2),\ M_2(3,\ -4);$

б) яка проходить через початок координат, паралельно до вектора $\vec{p}$ =(1, 1).

в) яка проходить через точку $M_0($[illegible]$,\ -3)$ паралельно вісі OX.

7. Пряма задана параметричними рівняннями:

x = – 1 + 4t,

y = 2 – t.

а) знайти направляючий вектор даної прямої;

б) визначити координати точок, які мають параметри $t_1 = 3,\quad t_2 = 0,\quad t_3 = -2,\quad t_4 = -1;$

в) визначити параметри точок перетину даної прямої з осями координат;

г) серед точок $M_1(-3,\ 1),\ M_2(3,\ 1),\ M_3(15,\ -2),\ M_4(0,\ \frac{7}{4}),$ $M_5(2,\ 2)$ знайти точки, які належати даній прямій.

8. Написати параметричні рівняння прямої $3x - y + 5 = 0.$.

9. Написати загальне рівняння прямих:

а) $x = -2 + 3t,\quad y = 4 - t;$ б) $x = t,\quad y = 2.$

10. Взявши на площині афінну систему координат, побудувати прямі: а) $x = 1 - 2t,\quad y = 5 - 4t;$ б) $x = 3,\quad y = t.$

11. Дано вершини трикутника $A($[illegible]$,\ -2),\ B(0,\ 3),\ C($[illegible]$,\ 1).$ Написати рівняння прямих, які проходять через кожну з них паралельно протилежній стороні.

12. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма x – y – 1 = 0, x – 2y = 0 і точка перетину його діагоналей $F(3,\ -1).$ Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.

13. Дано середини сторін трикутника M(2, -1), N(-3, -3) і P(-1, 0). Скласти рівняння його сторін.

14. Дослідити, як розташовані відносно системи координат прямі: а) 2x – 3y = 0; б) 3x – y + 1 = 0; в) 5x – 1 = 0; г) 6x = 0.

15. Дослідити взаємне розташування наступних пар прямих і в випадку перетину визначити координати спільної точки:

а) x + y – 3 = 0 і 2x – 2y – 6 = 0. б) x = 0 і x + 3 = 0;

в) x + y + 1 = 0 і x + 3 = 0;

16. Чи можна підібрати коефіцієнти λ і μ так, щоб прямі 3x – y + 1 = 0 і $\lambda x + \mu y - 3 = 0$ співпадали?

17. Якій умові повинні задовольняти коефіцієнти λ і μ, для того щоб три прямі $\lambda x + \mu y + 1 = 0,\quad 2x - 3y + 5 = 0$ і $x - 1 = 0$ мали спільну точку?

18. В пучку $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ знайти пряму, яка проходить через точку M(4, 1).

19. В пучку $2x - y + 1 + \lambda(3x - 2y + 5) = 0$ знайти пряму, паралельну до прямої $5x - 3y + 1 = 0$.

20. В пучку $\lambda(3x - 4y + 1) + x - y = 0$ знайти пряму, яка проходить через початок координат.

21. В пучку $\lambda(x - 2y + 1) + \mu(x - 3y) = 0$ знайти пряму, паралельну до вісі *OX*.

22. Через точку перетину прямих 3x – y = 0 і x + 4y – 2 = 0 проведена пряма, перпендикулярна до прямої x + y = 0. Написати рівняння цієї прямої.

23. Дано рівняння сторони *AB* трикутника 2x – 3y + 6 = 0 і рівняння двох його висот (AH): $2x + y - 2 = 0$ і (BK): $x + 3y - 12 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін.

24. Дано точки $M_1(-1,\ 2)$, $M_2(3,\ 1)$, $M_3([illegible],\ 0)$, $M_4(7,\ 2)$, $M_5(-3,\ 6)$, $M_6([illegible],\ 1)$ і прямі: а) 2x – y + 5 = 0; б) 4x + y – 8 = 0; в) 3x – 2y + 1 = 0; г) 2x – 5 = 0. Для кожної з даних прямих серед вказаних точок вибрати ті точки, які лежать по ту сторону від цих прямих, що і початок координат.

25. Дано вершини трикутника A(-6, 3), B(8, 10), C(2, -6) і прямі: а) 2x – 3y + 6 = 0; б) x + y = 0; в) 3x – y – 3 = 0. Визначити, які сторони трикутника перетинаються кожною з даних прямих. Зробити малюнок і на малюнку перевірити отримані результати.

26. Дано $\angle ABC,$ де A(4, 6), C(-2, 2), B(0, -5). З'ясувати, які із вказаних нижче точок лежать всередині даного кута: $M_1(2,\ 0)$, $M_2(-2,\ 5)$, $M_3(6,\ 4)$, $M_4(7,\ 0)$, $M_5(-6,\ 5)$.

27. Пряма 3x – y – 2 = 0 розбиває площину на дві півплощини.

а) Скласти нерівність, яка характеризує всі точки півплощини, в якій знаходиться початок координат;

б) скласти нерівність, яка характеризує всі точки півплощини, в якій лежить точка A(1, -3).

28. Трикутник ABC заданий рівняннями своїх сторін:
(AB): $3x + 8y - 9 = 0$, (AC): $3x - y - 9 = 0$, (BC): $3x - 10y + 45 = 0$. Скласти систему нерівностей, яка визначає внутрішню область трикутника.

29. Задавши на площині прямокутну систему координат, зобразити область, яка визначається системою нерівностей:

а) $\begin{cases} x - y + 5 > 0, \\ x - 5y + 33 > 0, \\ x - 7 < 0, \\ x - 2y - 1 < 0, \\ x + y - 1 > 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 6 > 0, \\ 3x - y + 14 > 0, \\ x - y + 8 > 0, \\ y + 2 > 0, \\ x - 4y - 10 < 0. \end{cases}$

30. Записати аналітичну характеристику внутрішньої області чотирикутника, який заданий координатами своїх вершин: $A_1(-3,\ \ 1)$, $A_2(5,\ \ -5)$, $A_3(4,\ \ 5)$, $A_4(-3,\ \ 3)$.

31. Написати рівняння прямої:

а) яка проходить через точку $A(2,\ 5)$ і має кутовий коефіцієнт $k=3$;

б) яка проходить через початок координат і утворює з віссю OX кут $+120^{\circ}$;

в) яка відтинає від вісі OY відрізок $b=2$ і має кутовий коефіцієнт $k = -3$.

32. Знайти кут нахилу прямої до вісі OX:

а) $x + y - 7 = 0$; б) $x - y + 2 = 0$; в) $x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0$.

33. З’ясувати, чи перпендикулярні прямі:
а) $x - y = 0$ і $x = 3$; б) $2x + 2y - 1 = 0$ і $x - y = 0$.

34. Точка H(-2, 5) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму l. Написати рівняння прямої l.

35. На прямій $x + 2y - 1 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок A(-2, 5) і B(0, 1).

36. На координатних осях OX і OY знайти точки, рівновіддалені від точок A(7,1) і B(-3, 3).

37. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника, вершини якого мають координати: A(7, 7), B(0, 8), C(-2, 4).

38. Дано дві вершини трикутника A(-1, 5), B(3, 2) і точка H(5, -3) – перетин його висот. Скласти рівняння його сторін.

39. Знайти проекцію точки M(5, -2) на пряму *l*, яка має рівняння 2x – 3y – 3 = 0.

40. Знайти рівняння кола, яке проходить через точки A(3, 0) і B(-1, 2), а центр якого лежить на прямій x –.y + 2 = 0.

41. Визначити координати точки, яка симетрична з початком координат відносно прямої x – 4y + 17 = 0.

42. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-4,\ -5),\ B(4,\ 1),\ C\left(-\frac{1}{2},\ 7\right)$. Написати рівняння:

а) бісектриси внутрішнього кута A; б) медіани, яка проходить через вершину A; в) висоти, опущеної з вершини C.

43. Знайти координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін: x + y + 12 = 0 і x + 3y – 8 = 0 і рівняння діагоналі 2x + y + 4 = 0.

44. Привести до нормального вигляду рівняння прямих:
а) 4x + 3y + 6 = 0; б) x – y – 3 = 0; в) 2x + 5 = 0; г) y + 1 = 0.

45. Знайти довжини висот трикутника, сторони якого мають рівняння y – 2 = 0, 2x – y – 12 = 0, 4x – 11y + 30 = 0.

46. Знайти рівняння кола, яке дотикається до прямої 3x – 4y + 7 = 0 і концентричне з колом $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$.

47. Знайти відстань між паралельними прямими: 3x – y + 6 = 0 і 6x – 2y – 1 = 0.

48. Знайти рівняння дотичних до кола з центром в точці A(1, -2) радіуса 5, паралельних до прямої 3x + 4y + 1 = 0.

49. На вісі абсцис знайти точку, відстань від якої до прямої 8x + 15y + 10 = 0 рівна 1.

50. На прямій x + 2y – 12 = 0 знайти точки, рівновіддалені від прямих x + y – 5 = 0 і 7x – y + 11 = 0.

51. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x + 2y + 5 = 0$ і $4x - 2y - 3 = 0$.

52. Скласти рівняння бісектриси того кута між прямими $x + 2y - 5 = 0$ і $3x - 6y + 2 = 0$, в якому лежить початок координат.

53. Скласти рівняння кола, що дотикається двох даних прямих $3x + 4y - 10 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$ і має радіус, рівний 5.

54. Трикутник ABC заданий рівняннями своїх сторін: $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$ і $3x + 4y - 5 = 0$. Скласти рівняння бісектрис даного трикутника і знайти координати точки їх перетину.

55. Дано рівняння сторін трикутника $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$ і $4x + 3y - 11 = 0$. Знайти рівняння вписаного і описаного кола.

56. Дано рівняння $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$ – двох сторін трикутника і рівняння $5x + 6y - 15 = 0$ однієї з його медіан. Скласти рівняння третьої сторони.

57. Знайти кут між прямими:

а) $3x + y - 6 = 0, \quad 2x - y + 5 = 0;$

б) $x - 2y + 1 = 0, \quad 6x + 3y - 2 = 0.$

58. Дано рівняння основи рівнобедренного трикутника $3x - y + 5 = 0$ і його бічної сторони $x + 2y - 1 = 0$. Скласти рівняння іншої бічної сторони, якщо вона проходить через точку M(1, -3).

Розділ 4

Площина у просторі

§ 29. Рівняння площини в афінній системі координат

Вектор, який лежить на площині або паралельний до неї, називається **направляючим** вектором площини.

Площину в афінній системі координат (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) можна задати двома направляючими векторами (неколінеарними) і точкою, або трьома точками, які не лежать на одній прямій.

1. Рівняння площини, заданої двома направляючими векторами і точкою.

Нехай площина π задана неколінеарними направляючими векторами $\vec{p}=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ і $\vec{q}=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, та точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Виберемо на площині ще одну довільну точку $M(x,y,z)$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$. Оскільки точка M належить площині то вектори $\vec{p}, \vec{q}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ компланарні, отже за теоремою 9:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \textbf{(33)}$$

Приклад 29.

Дано вершини тетраедра $A(4,0,2)$, $B(0,5,1)$, $C(4,-1,3)$, $D(3,-1,5)$.

Записати: а) рівняння площини, яка проходить через ребро *AB* і паралельна ребру *CD*; б) рівняння площини, яка проходить через вершину *A* паралельно грані *BCD*.

Розв'язання: а). Використаємо рівняння площини за двома направляючими векторами і точкою. Направляючими будуть $\overrightarrow{AB}=(-4;5;-1)$ і $\overrightarrow{CD}=(-1;0;2)$, а за точку візьмемо, наприклад, точку *A (4;0;2)*. Тоді рівняння площини, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z-2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник: $10(x-4) + y + 5(z-2) + 8y = 0$, або
$10x + 9y + 5z - 50 = 0$.

Отже, рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD* має вигляд: $10x + 9y + 5z - 50 = 0$.

б). Так як шукана площина проходить через т. *A* і паралельна грані *BCD*, то за направляючі вектори можна взяти, наприклад, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{BC}=(4;-6;2)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;2)$.

Таким чином, знайдемо рівняння площини за двома направляючими векторами та точкою *C(4,-1,3)*: $\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-3 \\ 4 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Розкриємо визначник: $-12(x-4) - 2(y+1) -$
$- 6(z-3) - 8(y+1) = 0$, або $6x + 5y + 3z + 30 = 0$.

2. <u>Рівняння площини, заданої трьома точками.</u>

Нехай площина задана трьома точками, які не лежать на одній прямій $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Тоді можна скористатися рівнянням (33), поклавши $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{q}=\overrightarrow{M_1M_3}$, а $M_0=M_1$. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(34)}$$

3. Рівняння площини у відрізках (на осях):

Нехай площина відтинає на осях координат відрізки a, b і c відповідно. Тоді вона проходить через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ і $C(0,0,c)$. Використавши рівняння (34), маємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$ або після елементарних перетворень:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad \textbf{(35)}$$

Відмітимо, що a, b і c направлені відрізки, тому вони можуть бути і від’ємні.

Приклад 30.

Написати “у відрізках” рівняння площини: $6x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Розв’язання: Зведемо дане рівняння до вигляду (35):

$6x - 3y + 2z = -6$. Поділимо обидві частини цього рівняння на

(-6): $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1$. Отже, рівняння “у відрізках” має вигляд:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1.$$

4. Параметричні рівняння площини:

Нехай площина π задана направляючими векторами $\vec{p} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\vec{q} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ і точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Виберемо на площині ще одну довільну точку $M(x,y,z)$. Розглянемо вектор: $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. За теоремою 4 $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Перейшовши до координат, отримаємо:

$x-x_0=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2$ або $x=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2+x_0,$

$y-y_0=\lambda\beta_1+\mu\beta_2,$ $y=\lambda\beta_1+\mu\beta_2+y_0,$ **(36)**

$z-z_0=\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2,$ $z=\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2+z_0,$

де λ, μ параметри $(\lambda,\mu \in R)$.

5. Загальне рівняння площини:

Всі отримані нами рівняння площини – це рівняння першого степеня з трьома змінними, а тому їх можна записати загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. **(37)**

Теорема 16.

Множина точок простору, координати яких в афінній системі координат задовольняють рівняння (37), де A, B і C не рівні нулю одночасно, являє собою площину, причому $\vec{p}$ =(-B,A,0) і $\vec{q}$ =(-C,0,A) – направляючі вектори цієї площини.

Доведення:

Розглянемо рівняння (37), де A, B і $C\neq 0$ одночасно. Його можна записати у вигляді: $\begin{vmatrix} x+\dfrac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$. Отже, рівняння (37) рівносильне рівнянню площини вигляду (33), заданої двома направляючими векторами $\vec{p}=(-B,A,0)$, $\vec{q}=(-C,0,A)$ і точкою

$M(-\dfrac{D}{A};0;0)$.

Приклад 31.

Складати загальне рівняння площини, заданої параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = 4 + t_1 - 2t_2, \\ y = -1 + 5t_1 + 5t_2, \\ z = 5 - 3t_1 - t_2. \end{cases}$

Розв'язання: Для розв'язання задачі треба виключити параметри t_1 і t_2. Це можна зробити, наприклад, наступним чином: з першого рівняння знайдемо $t_1 = x - 4 + 2t_2$ і підставимо його в друге і третє рівняння. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} y = -1 + 5(x - 4 + 2t_2) + 5t_2 \\ z = 5 - 3(x - 4 + 2t_2) - t_2 \end{cases}.$$

Тепер, розв'язуючи цю систему, виключимо параметр t_2:

$$\begin{cases} y = -1 + 5x - 20 + 15t_2 \\ z = 5 - 3x + 12 - 7t_2 \end{cases}.$$

Домножимо перше рівняння на 7, а друге на 15 і складемо їх:

$7y+15z = 68-10x+40 \quad \Rightarrow \quad 10x+7y+15z-108 = 0.$

Відповідь: $10x+7y+15z-108 = 0$.

Задачу можна розв'язати й іншим способом. Так як з параметричних рівнянь легко знайти координати двох направляючих векторів площини (це коефіцієнти біля параметрів) і точки (її координати (4, –1, 5)), то рівняння шуканої площини отримаємо, скориставшись рівнянням (33).

Приклад 32.

Скласти параметричні рівняння площини $6x - 3y + z - 5 = 0$.

Розв'язання: Будь-які дві з трьох змінних x, y, z можна прийняти за параметри. Нехай, наприклад, $x = t_1$, $y = t_2$, і з рівняння площини знайдемо $z = -6t_1+3t_2+5$.

Відповідь: $$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \\ z = -6t_1 + 3t_2 + 5 \end{cases}.$$

§ 30. Площина в прямокутній системі координат

Так як прямокутна система координат *(O,* $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$ *,*$\vec{k}$ *)* є частковим випадком афінної, то в ній можна використовувати всі отримані раніше рівняння (33)–(37) площини.

Нормальним вектором площини називається будь-який вектор, перпендикулярний до цієї площини.

У прямокутній системі координат можна отримати ще два рівняння площини: за точкою і нормальним вектором, та нормальне рівняння.

6**.** Рівняння площини за точкою і нормальним вектором.

Нехай в прямокутній системі координат (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) площину задано точкою $H_0(x_0,y_0,z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n}=(A,B,C)$. Візьмемо на площині довільну точку $H(x,y,z)$.

Тоді $\overrightarrow{H_0H}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$. Так як вектор $\overrightarrow{H_0H}$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, отже, за теоремою 8:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad \textbf{(38)}$$

Приклад 33.

Знайти множину точок, рівновіддалених від точок *A(2,-1,3)* і *B(4,5,-3).*

Розв'язання: Множина точок рівновіддалених від *A* і *B* буде площиною, яка проходить через середину відрізка *AB*, перпендекулярно до нього. За формулами ділення відрізка навпіл, знайдемо точку *O* – середину відрізка [*AB*]:

$$x=\frac{2+4}{2}=3,\ y=\frac{-1+5}{2}=2,\ z=\frac{3-3}{2}=0.$$

Отже, точка *O(3;2;0).* За нормальний вектор можна взяти, наприклад, $\overrightarrow{OB}=\vec{n}=(1;3;-3)$. Скористаємося рівнянням (38):

$(x-3)+3(y-2)-3z=0$, або $x+3y-3z-9=0.$

7. Нормальне рівняння площини.

Нехай площина задана в прямокутній системі координат одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ і відстанню ρ від початку координат до площини. Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного із початку координат на площину. Знайдемо координати точки H. Так як координатами точки назвали координати її радіус-вектора, то знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OH} = \rho \cdot \vec{n}_0 = (\rho \cdot \cos\alpha_1, \rho \cdot \cos\alpha_2, \rho \cdot \cos\alpha_3)$. Отже, координати точки $H\ (\rho\cos\alpha_1, \rho\cos\alpha_2, \rho\cos\alpha_3)$. Використавши рівняння (38), отримаємо нормальне рівняння:

$\cos\alpha_1(x-\rho\cos\alpha_1)+\cos\alpha_2(y-\rho\cos\alpha_2)+\cos\alpha_3(z-\rho\cos\alpha_3)=0$ або

$$x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3-\rho=0 \qquad \textbf{(39).}$$

§ 31. Відстань від точки до площини

Нехай дана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а площина задана загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. Нормальний вектор площини $\vec{n}=(A,B,C)$. Розглянемо такий вектор $\overrightarrow{HM}_0 \parallel \vec{n}$, що його початок – точка $H(x,y,z)$ належить площині. Тоді відстань d від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини буде дорівнювати довжині вектора $|\overrightarrow{HM}_0|$. $\overrightarrow{HM}_0=(x-x_0,\ \ y-y_0,\ \ z-z_0)$. Знайдемо скалярний добуток: $\overrightarrow{HM}_0 \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{HM}_0| \cdot |\vec{n}|\ \cos\varphi$. Так як кут φ між векторами $\overrightarrow{HM}_0$ і $\vec{n}$ може бути 0°, або 180°, то $\cos\varphi=\pm 1$. Отже, $\overrightarrow{HM}_0 \cdot \vec{n} = \pm|\overrightarrow{HM}_0||\vec{n}|$. Звідки

$$d = |\overrightarrow{HM}_0| = \frac{\left|\overrightarrow{HM}_0 \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Оскільки точка H належить площині, то її координати задовольняють рівняння (37), тому $-Ax-By-Cz=D$ і

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \textbf{(40)}.$$

Приклад 34.

На вісі *OY* знайти точку, рівновіддалену від двох площин $x + 2y - 2z - 1 = 0$ і $3x + 5 = 0$.

Розв'язання: Точка на вісі *OY* має координати $M(0;y;0)$. За умовою задачі, відстань від неї до двох даних площин рівна, отже, $\frac{|2y_0 - 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|5|}{\sqrt{9}}$. Звідки $|2y_0 - 1| = 5$, отже, $y_0 = 3$ або $y_0 = -2$.

Відповідь: $M_1\ (0;3;0),\ M_2\ (0;-2;0)$.

Приклад 35.

Скласти рівняння множини точок, що знаходяться на відстані 3 від площини $6x - 3y + 2z - 14 = 0$.

Розв'язання: Нехай шуканій множині належить т. $M(x,y,z)$. За умовою задачі відстань від точки M до площини $6x-3y+2z-14=0$ рівна 3. Використаємо формулу (40):

$$3 = \frac{|6x - 3y + 2z - 14|}{\sqrt{36 + 9 + 4}};$$

$$|6x - 3y + 2z - 14| = 21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x - 3y + 2z + 7 = 0, \\ 6x - 3y + 2z - 35 = 0. \end{array}\right.$$

Отже, шукана множина точок, це пара площин, паралельних до даної.

§ 32. Кут між площинами

Нехай дано дві площини $\alpha:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $\beta:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Кут між площинами, це двогранний кут між ними. Він вимірюється відповідним лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами даних площин.

Кутом між площинами називається мінімальний кут між їх нормальними векторами.

За наслідком 10, враховуючи, що кут φ між площинами мінімальний, отримаємо:

$$cos\,\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad \textbf{(41)}$$

§ 33. Пучок і в’язка площин

Пучком паралельних площин називається сукупність усіх площин простору паралельних даній площині. Нехай дана площина має рівняння $Ax+By+Cz+D=0$. Очевидно, що тоді рівняння **пучка паралельних площин** має вигляд:

$Ax+By+Cz+t=0,$

де A, B, C деякі фіксовані числа, а t – довільне дійсне число, яке змінюється.

Пучком площин, що перетинаються, називається сукупність усіх площин простору, які проходять через одну пряму. Такий пучок можна задати двома площинами, що перетинаються:

α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (їх нормальні вектори неколінеарні). У цьому випадку **рівняння пучка** площин, що перетинаються, має вигляд:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

де α, β – змінні (довільні дійсні числа).

В’язкою називається сукупність усіх площин простору, які проходять через дану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, яка називається **центром** в’язки. В’язку можна задати центром (точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$). Тоді **рівняння в’язки** матиме вигляд:

$A(x\text{-}x_0)+B(y\text{-}y_0)+C(z\text{-}z_0)=0,$

де $A, B,$ і C змінні (довільні дійсні числа).

В’язку можна задати і трьома площинами, які перетинаються в одній точці.

Нехай дано три площини α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ та α_3: $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$, які мають лише одну спільну точку. У цьому випадку їх нормальні вектори: $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ і $\vec{n}_3$ не компланарні і **рівняння в'язки** матиме вигляд:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,$$

де α, β, γ – довільні дійсні числа, які змінюються.

Приклад 36.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A\ (3;-5;1)$, паралельно до площини, що визначається рівнянням $x - 2y + 4z = 0$.

Розв'язання: Запишемо рівняння пучка площин паралельних до даної: $x - 2y + 4z + D = 0$. Так як шукана площини проходить через точку A, то підставимо координати точки A в це рівняння і знайдемо вільний член D: $3 + (-2)(-5) + 4 + D = 0$ отже, $D = -17$.

Відповідь: $x - 2y + 4z - 17 = 0$.

Приклад 37.

Скласти рівняння пучка площин, які проходять через вісь OX.

Розв'язання: Так як вісь OX належить координатним площинам, то можна використати площини (XOY) і (XOZ). Рівняння площини XOZ: $y=0$, а XOY: $z=0$. Отримаємо: $\alpha y+\beta z=0$.

Приклад 38.

Написати рівняння площини, яка проходить через початок координат і через лінію перетину двох площин, заданих рівняннями $x + y - 5 = 0$ і $x - 2z + 1 = 0$.

Розв'язання: Шукана площина належить пучку площин, які проходять через лінію перетину даних площин. Рівняння цього пучка площин має вигляд: $\alpha(x+y-5)+\beta(x-2z+1)=0$, причому коефіцієнти α і β визначені з точністю до пропорційності. Так як початок координат повинен належати шуканій площині, то координати точки O задовольнятимуть останнє рівняння. Отримаємо: $-5\alpha+\beta = 0$.

Покладемо, наприклад, $\alpha=1$, тоді $\beta=5$ і рівняння $6x + y - 10z = 0$ є рівнянням шуканої площини.

§ 34. Розміщення площини відносно системи координат

Розглянемо площину α, задану в афінній системі координат загальним рівнянням : $Ax+By+Cz+D=0$. В залежності від рівності нулеві коефіцієнтів A, B, C, D площина α може бути розміщена відносно системи координат наступним чином :

1. $D=0$: $\alpha : Ax+By+Cz = 0$, α проходить через початок координат (так яа точка $O(0,0,0)$ задовольняє рівняння площини).

2. $A=0$: $\alpha : By+Cz+D = 0$, $\alpha \parallel OX$ (так як базисний вектор $\vec{e}_1=(1,0,0)$ і нормальний вектор $\vec{n}=(0,B,C)$ перпендикулярні).

3. $B=0$: $\alpha : Ax+Cz+D=0$, $\alpha \parallel OY$

4. $C=0$: $\alpha : Ax+By+D=0$, $\alpha \parallel OZ$

5. $D=A=0$: $\alpha : By+Cz=0$, α проходить через вісь OX

6. $D=B=0$: $\alpha : Ax+Cz=0$, α проходить через вісь OY

7. $D=C=0$: $\alpha : Ax+By=0$, α проходить через вісь OZ

8. $A=B=0$: $\alpha : Cz+D=0$, $\alpha \parallel XOY$

9. $A=C=0$: $\alpha : By+D=0$, $\alpha \parallel XOZ$

10. $B=C=0$: $\alpha : Ax+D=0$, $\alpha \parallel YOZ$

11. $A=B=D=0$: $\alpha : Cz=0$, або $z=0$, α – площина XOY

12. $A=C=D=0$: $\alpha : By=0$, або $y=0$, α – площина XOZ

13. $B=C=D=0$: $\alpha : Ax=0$, або $x=0$, α – площина YOZ.

Приклад 39.

Вказати особливості розташування наступних площин по відношенню до системи координат:

а) $x–y+z=0$; б) $x+2y+3 = 0$; в) $x–3=0$; г) $2y–z=0$.

Розв'язання: а) Так як вільний член даного рівняння дорівнює нулю, то дана площина проходить через початок координат.

б) Так як $C = 0$, то площини паралельна до вісі OZ.

в) Так як коефіцієнти $B=C=0$, то площина паралельна площині YOZ.

г) Так як коефіцієнт $A=0$ і вільний член $D=0$, то площина проходить через вісь OX.

Приклад 40.

Побудувати зображення площини $x–y+z=0$.

Так як дана площина проходить через початок системи координат, то її зручно зобразити поєднанням двох її слідів, тобто 2-х ліній перетину цієї площини з будь-якими двома координатними площинами, наприклад, з площинами *XOY* і *YOZ*.

Для побудови сліду в координатній площині потрібно побудувати дві точки. У нашій задачі одна точка *O(0,0,0)*, яка належить усім координатним площинам, уже побудована. Знайдемо ще одну точку даної площини, яка лежить в *XOY*. Для точок, що лежать в площині *XOY* z=0, і поклавши в рівнянні

$x - y + z = 0$, наприклад, $x=1$, отримаємо $y=1$. Отже, будуємо в площині *XOY* точку *A(1;1;0).* Пряма *OA* є слідом даної площини на площині *XOY* (рис.26).

Для того щоб побудувати слід даної площини на площині *YOZ*, рівняння якої: $x=0$, покладемо $y=1$, тоді $z=1$, і площина проходить через точку *B(0;1;1).* Пряма *OB* є слідом даної площини на площині *YOZ* (дивись рис.26).

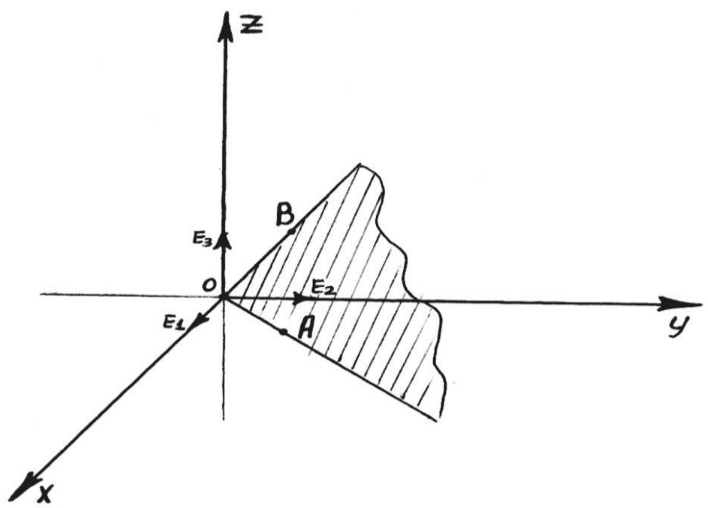


Рис.26

§ 35. Геометричний зміст знака *Ax+By+Cz+D*

Нехай в афінній системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задано площину α: $Ax+By+Cz+D=0$. Вона розділяє множину точок простору на два півпростори. Знайдемо умови, які визначають ці півпростори. Зафіксуємо на площині α точку N_0 і відкладемо від неї нормальний вектор площини $\vec{n}=(A,B,C)$ (рис.27). Кінець вектора позначимо N. Отже, $\overrightarrow{N_0N}=\vec{n}$.

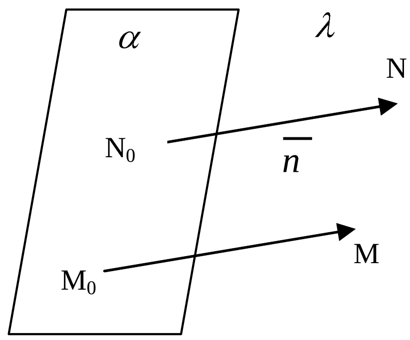


Рис.27

Нехай $M(x,y,z)$ довільна точка простору, яка не належить площині α. Проведемо через M пряму d паралельну до вектора $\vec{n}$, і отримаємо точку $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ – точку перетину прямої d з α. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{n}$, то за теоремою 1 $\overrightarrow{M_0M}=\beta\,\vec{n}$, або в координатах: $x-x_0=\beta A,\ y-y_0=\beta B,\ z-z_0=\beta C$. Звідки $x=\beta A+x_0,\ \ y=\beta B+y_0,\ \ z=\beta C+z_0$. Підставивши отримані змінні в многочлен $Ax+By+Cz+D$, отримаємо:

$$Ax+By+Cz+D=A(\beta A+x_0)+B(\beta B+y_0)+C(\beta C+z_0)+D=\beta(A^2+B^2+C^2)$$

(Так як точка $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ належить площині α, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.) . Нехай λ півпростір з границею α, який містить точку N. Тоді, із рівності $\overrightarrow{M_0M}=\beta\overrightarrow{N_0N}$ випливає, що точка M належить півпростору λ тоді і тільки тоді, коли $\beta>0$, а оскільки $A^2+B^2+C^2>0$, то точка M належить півпростору λ тоді і тільки тоді, коли $Ax+By+Cz+D>0$. Отже, нерівність $Ax+By+Cz+D>0$ визначає півпростір, обмежений площиною α. Так як площина розділяє простір на два півпростори, то очевидно, що другий півпростір λ' визначається нерівністю: $Ax+By+Cz+D<0$.

§ 36. Взаємне розташування двох площин.

Нехай дано дві площини $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і

$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Можливі три випадки їх взаємного розташування:

1. $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ – площини співпадають;

2. $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ – площини паралельні;

3. Якщо ж коефіцієнти біля змінних у даних рівняннях не пропорційні, то площини перетинаються.

Приклад 41.

З'ясувати взаємне розташування наступних площин:

а) $3x-2y+7z=0$ і $-6x+4y-14z-2=0$;

б) $-x+10y-2z+6=0$ і $3x-30y+6z-18=0$.

Розв'язання: а) Перевіримо пропорційність коефіцієнтів: $\dfrac{3}{-6}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{7}{-14}\neq\dfrac{0}{-2}$. Площини паралельні.

б) $\dfrac{-1}{3}=\dfrac{10}{-30}=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{6}{-18}$. Площини співпадають.

§ 37. Взаємне розташування трьох площин.

Нехай три площини задані рівняннями:

$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ та

$\alpha_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$.

Можна виділити 8 випадків їх взаємного розташування:

1. Всі площини співпадають:

Тоді у всіх трьох рівняннях коефіцієнти біля змінних і вільні члени пропорційні.

2. Дві площини співпадають, третя їм паралельна:

У двох рівняннях коефіцієнти біля змінних і вільні члени пропорційні, а в третього коефіцієнти біля змінних пропорційні до перших двох, а вільні члени не пропорційні до них.

3. Три площини паралельні:

у всіх трьох рівняннях коефіцієнти біля змінних пропорційні, а вільні члени не пропорційні до них.

4. Дві співпадають, а третя їх перетинає:

У двох рівняннях коефіцієнти біля змінних і вільні члени пропорційні, а в третього коефіцієнти біля змінних не пропорційні до перших двох.

5. Дві паралельні, а третя їх перетинає:

у якоїсь пари рівнянь коефіцієнти біля змінних пропорційні, а вільні члени не пропорційні до них, а в третього рівняння коефіцієнти біля змінних не пропорційні до перших двох.

Як бачимо, у перших 5-ти випадках досить просто уважно подивитися на рівняння, і зробити висновки про взаємне розташування трьох площин.

Якщо ж перші 5 випадків не підходять, то залишаються такі три випадки:

6. Всі площини перетинаються по одній прямій.

7. Площини перетинаються по трьом паралельним прямим.

8. Площини мають одну спільну точку.

Для того, щоб дати відповідь про розташування площин в останніх трьох випадках, досить розв’язати систему, складену з рівнянь трьох площин. Тоді, якщо система:

а) має безліч розв’язків, то маємо випадок 6 – площини перетинаються по одній прямій (розв’язками будуть всі точки їх спільної прямої),

б) не має розв’язків, то випадок 7 (у площин не існує жодної спільної точки),

в) один розв’язок, то це випадок 8 (цей розв’язок і є координатами їх спільної точки).

Приклад 42.

Виявити взаємне розташування трьох площин:

$$4x - y + 5z - 1 = 0,$$
$$2x + y + 3z - 4 = 0,$$
$$-8x + 2y - 10z + 5 = 0$$

Перша і третя площини паралельні, так як $\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} = \frac{5}{-10} \neq \frac{-1}{5}.$

Друга площина їх перетинає, бо $\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{1}.$ Отже, дві площини паралельні, а третя їх перетинає.

ЗАДАЧІ

1. Які з точок A(4;0;0), B(1;1;1), C(1;2;3), D(6;1;0) належать площині x – 2y + 3z – 4 = 0.

2. Дано вершини тетраедра A(5,3,-2), B(4,1,1), C(-3,-4,6), D(2,-1,0). Написати рівняння площини, яка проходить через вершину D і паралельна грані ABC.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь OX паралельно до вектора $\eth = (\eth_1, \eth_2, \eth_3)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки: A(1;-3;5), B(2;1;-3), C(-4;0;1).

5. Вказати особливості розташування площин по відношенню до системи координат:

a) x – z + 1 = 0 ,b) x + 2y + 3z = 0 , c) x + 2y = 0, d) x – 3 = 0.

6. Написати у “відрізках” рівняння площини:

a) 2x – y + 3z + 2 = 0, b) яка проходить через точки M_1(1,1,1), M_2(3,1,5), M_3(123).

7. В афінній системі координат зобразити площини, які задані наступними рівняннями: а) x – 2y + 3z – 6 = 0, б) 3y – 2z + 6 = 0, c) 3x + 4z = 0, д) 2y – 5 = 0.

8. При якому значенні z точки O(0,0,0), A(1,-5,3), B(2,4,4), C(1,-1,z) лежать в одній площині?

9. Дано дві точки A(2,3,0) і B(1,-1,-1). Підібрати яку-небудь третю точку C так щоб площина ABC , була паралельна вісі OZ.

10. Скласти параметричні рівняння площини:
$x - 9y - 5z + 2 = 0$

11. Скласти загальне рівняння площини, заданої параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = -1 + 2t_1 - 3t_2, \\ y = 2 + 4t_1 + 5t_2, \\ z = -6t_1 + 10t_2. \end{cases}$

12. Вияснити взаємне розташування наступних пар площин:

a) $x - 3y + z + 1 = 0$, $2x + y - 4z + 2 = 0$

b) $3x + y - z + 2 = 0$, $6x + 2y - 2z + 3 = 0$

c) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

13. Знайти множину точок, рівновіддалених від точок A(-5,1,2) і B(3,5,-6).

14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки: A(1,-1,3), B(1,2,4) і перпендикулярна до площини $2x - 3y + z + 1 = 0$.

15. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A(1,1,-2) і перпендикулярна до площин $x - y + z - 1 = 0$ і $2x + 3z = 0$.

16. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $X^2+Y^2+Z^2=49$ в точці M(2,-3,6).

17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A(3,-5,1) паралельно до площини $x - 2y + 4z = 0$.

18. Дано рівняння площин трьох граней паралелепіпеда: $2x + 4y + 4z - 12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$ та $z + 5 = 0$ і одна його вершина A(6,-5,1). Скласти рівняння площин інших трьох граней.

19. Скласти рівняння пучка площин, віссю якого є лінія перетину площин $x - y - z - 1 = 0$ і $2x + 3y + 4z - 5 = 0$. Написати рівняння декількох площин, що належать цьому пучку.

20. Скласти рівняння пучка площин, що проходять через вісь OZ.

21. При яких умовах площина $Ax + By + Cz + D = 0$ належить пучку $x + 2y + z + \alpha(y - z + 1) = 0$?

22. Довести що площина $11x - 2y + 5z - 2 = 0$, проходить через лінію перетину площин $x - 2y + 3z = 0$ і $5x + z - 1 = 0$.

23. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(3,1,-2) і лінію перетину площини $3x - 5y - 5z + 1 = 0$ з координатною площиною YOZ.

24. З′ясувати, яка з координатних площин належить пучку
$4x - y + 2z - 6 + \alpha(6x + 5y + z - 9) = 0$.

25. Записати рівняння площин, які проходять через вісь OX і ділять навпіл двогранні кути, утворені координатними площинами XOY і XOZ.

26. Записати рівняння трьох площин :
1) які мають єдину спільну точку; 2) які проходять через одну пряму; 3) які попарно паралельні; 4) із яких дві паралельні, а третя їх перетинає.

27. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь OY і через точку перетину площин $x - y = 0$, $x + y - 2z - 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$.

28. Три площини $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$ і $2x + y - 5 = 0$ утворюють в′язку. Знайти ту площину в’язки, яка проходить через початок координат і через точку A(1,3,2).

29. Вияснити розташування площини $x - 3y - z + 9 = 0$ відносно сфери, яка має рівняння:

a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$

b) $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9.$.

30. Через діагоналі двох суміжних граней куба проведена площина. Знайти відстань від вершини куба до цієї площини, якщо довжина ребра куба 1.

31. Знайти відстань між паралельними площинами:
$x - 3y + 2z + 1 = 0$ і $2x - 6y + 4z + 3 = 0$.

32. Знайти відстань між площинами: $x - 2y + 2z - 6 = 0$ і $x - 2y + 2z + 18 = 0$.

33. Довести, що множина точок, рівновіддалених від двох паралельних площин є площиною.

34. На вісі OZ знайти точку, рівновіддалену від точки M(1,1,4) і від площини $2x - 2y + z - 12 = 0$.

35. На вісі OY знайти точку, рівновіддалену від двох площин $x + 2y - 2z - 1 = 0$ і $3x + 5 = 0$.

36. Знайти рівняння площини, що проходить через вісь OX на відстані 1 від точки P(1,2,3).

37. Скласти рівняння площини, яка проходять через вісь OY і рівновіддалена від точок P(2,7,3) і Q(-1,1,0).

38. Скласти рівняння множини точок віддалених від площини $3x - 4y - z - 9 = 0$ на відстань 5.

39. Написати рівняння сфери, центр якої належить вісі OX і яка дотикається двох площин: $2x - 4y - 3z + 21 = 0$ і $5x - 2z = 0$.

40. Скласти рівняння множини точок, які знаходяться на однаковій відстані від площин $3x - y + 7z - 4 = 0$ і $5x + 3y - 5z = 0$.

41. Скласти рівняння площини, яка ділить навпіл той двогранний кут між площинами $2x - y + 2z - 3 = 0$ і $3x + 2y - 6z - 1 = 0$, якому належить точка A(1,2,-3).

42. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь OX і утворює з площиною $x - 2y + 3z - 4 = 0$ кут $45°$.

43. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат , перпендикулярно до площини $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ і утворює з площиною $x - 4y - 8z + 12 = 0$ кут $45°$.

44. Виявснити взаємне розташування наступних трьох площин :

а) $3x + 2y + z = 5$, $2x + y + 3z = 11$, $2x + 3y + z = 1$

б) $x + y - z - 1 = 0$, $x - y + 2z + 4 = 0$, $x + 3y - 4z + 3 = 0$

в) $x - 2y + 4z - 6 = 0$, $x + 3y - 2z - 1 = 0$, $4x - 3y + 10z - 19 = 0$

г) $4x - y + 5z - 1 = 0$

$2x + y + z - 4 = 0$

$-8x + 2y - 10z + 7 = 0.$

45. Дано точки A(2,5,12), B(1,0,0), C(-1,5,4), Д(11,-5,12), E(0,0,5) і площина $2x - y + z + 1 = 0$. Вказати ті точки, які лежать з тієї ж сторони від площини що й початок координат.

46. Дано вершини трикутника A(2,5,-1), B(1,-5,-15), C(-2,1,3). З'ясувати які координатні площини перетинають сторони трикутника.

47. Дано точки A(5,-1,0), B(0,1,0), C(2,1,-2). Скласти лінійну нерівність, яка характеризує той півпростір, визначений площиною ABC, якому належить: а) початок координат б) точка E(1,1,1).

48. Дано паралельні площини $x - y + z + 1 = 0$ і $2x - 2y + 2z - 5 = 0$. Скласти систему лінійних нерівностей, які визначають множину точок розташованих між площинами.

49. В прямокутній системі координат задано дві площини, які перетинаються $x - 5y + 4z = 0$, $2x - y + z + 5 = 0$ і точки A(0,0,1), B(0,0,-10), C(1,0,-2), D(2,1,0), E(1,1,1). Вияснити, які з точок лежать всередині тупих двогранних кутів, утворених даними площинами.

Розділ 5

Пряма лінія у просторі

§ 38. Пряма лінія у просторі

Так як і на площині пряму лінію у просторі можна задати двома точками або точкою і направляючим вектором. Крім того, її можна задати як перетин двох площин.

1. Канонічні рівняння прямої (за точкою і направляючим вектором)

Нехай в афінній системі координат пряма проходить через точку $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ і має направляючий вектор $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Виберемо на прямій довільну точку $M\ (x,y,z)$ і розглянемо вектор

$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\ \ ,y-y_0\ \ ,z-z_0)$. Очевидно, що $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{p}$, тому за теоремою 7 їх координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}. \qquad \textbf{(42)}$$

Якщо одна із координат направляючого вектора, наприклад, $\alpha=0$, то (42) можна записати: $\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}\\ x-x_0=0\end{cases}.$

Аналогічно, якщо $\beta=0$ або $\gamma=0$.

Якщо $\alpha=\beta=0$, то отримаємо $\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$. Аналогічно для $\beta=\gamma=0$ та $\alpha=\gamma=0$.

Відмітимо, що в останньому випадку ми отримали пряму лінію, задану як перетин двох площин, які паралельні до координатних площин.

2. Рівняння прямої за двома точками

Нехай пряма проходить через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Тоді вектор $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}$ – є направляючим вектором прямої. Скориставшись рівнянням (42) отримаємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad \textbf{(43)}$$

3. Параметричні рівняння прямої

Нехай пряма задана точкою $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ і направляючим вектором $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Виберемо ще одну довільну точку прямої $M\,(x,y,z)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. $\overrightarrow{M_0M} \,||\, \vec{p}$, тому за теоремою 1 $\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{p}$. Перейшовши до координат, отримаємо:

$x-x_0=\alpha\, t$; $y-y_0=\beta\, t$; $z-z_0=\gamma\, t$, або:

$$\begin{cases} x=\alpha t+x_0, \\ y=\beta t+y_0, \\ z=\gamma t+z_0. \end{cases} \qquad \textbf{(44)}$$

Приклад 43.

Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,3,-4)$ паралельно до вісі OY.

Розв'язання:

За направляючий вектор прямої візьмемо вектор $\vec{e}_2=(0,1,0)$. Тоді рівняння шуканої прямої матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = t + 3, \\ z = -4. \end{cases}$$

4. Рівняння прямої, заданої як перетин двох площин.

Розглянемо дві площини, задані рівняннями α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, причому їх нормальні вектори неколінеарні (умова перетину), отже, коефіцієнти біля змінних в рівняннях площин не пропорційні. Перетин таких площин визначатиме пряму, яку можна задати системою:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad \textbf{(45)}$$

причому $\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ є направляючим вектором прямої.

Приклад 44.

Записати пряму $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = -5t + 1, \\ z = t - 2. \end{cases}$ як перетин двох площин.

Розв'язання: Спочатку запишемо канонічні рівняння даної прямої: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+2}{1}$. Тепер легко отримати рівняння трьох площин, які проходять через дану пряму. Нам досить записати дві, перетин яких і визначає пряму: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-5}, \\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{z+2}{1}, \end{cases}$

або $\begin{cases} 5x + 2y - 17 = 0, \\ x - 2z - 7 = 0. \end{cases}$

Приклад 45.

Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через початок координат, паралельно до прямої $\begin{cases} 2x-3y+z-7=0, \\ 4x+5y-6=0. \end{cases}$

Розв'язання: Знайдемо направляючий вектор даної прямої:
$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right)=(-5, \quad 4, \quad 22).$ Шукана пряма визначається рівняннями: $\begin{cases} x=-5t, \\ y=4t, \\ z=22t. \end{cases}$

Приклад 46.

Знайти проекцію прямої $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=2-t \end{cases}$ на площину XOY.

Розв'язання: Проекцією прямої на площину буде пряма, отримана в перетині проектуючої площини з площиною (XOY), яка має рівняння: $z=0.$ Отже, для розв'язання задачі потрібно знайти рівняння проектуючої площини (вона проходить через дану пряму, перпендикулярно до площини (XOY)). Скористаємося рівнянням площини за точкою і двома направляючими векторами. За точку можна взяти, явно задану точку прямої $A(2, \ -1, \ 2)$ а за направляючі вектори – направляючий вектор прямої і нормальний вектор площини: $\vec{p}_1=(4, \ 1, \ -1);$ $\vec{p}_2=\vec{n}_{XOY}=(0, \ 0, \ 1),$ тоді проектуюча площина має рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x-4y-6=0,$$

а шукана пряма: $\begin{cases} x-4y-6=0, \\ z=0. \end{cases}$

§ 39. Взаємне розташування двох прямих у просторі

Нехай задано прямі l_1 і l_2, які визначаються відповідно: l_1 точкою M_1 і направляючим вектором $\vec{p}_1$, а l_2 точкою M_2 і направляючим вектором $\vec{p}_2$.

Прямі у просторі можуть бути розташовані таким чином:

1. <u>Співпадають</u>: Тоді $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ (Колінеарність векторів перевіряємо за теоремою 7, яка стверджує, що у колінеарних векторів координати пропорційні).

2. <u>Паралельні:</u> $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, але не колінеарні з $\overrightarrow{M_1M_2}$

3. <u>Перетинаються</u>: $\vec{p}_1$ не колінеарний з $\vec{p}_2$, і вектори $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарні. Тоді змішаний добуток векторів

($\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$)=0).

4. <u>Мимобіжні:</u> Вектори $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ некомпланарні (змішаний добуток ($\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$) не дорівнює нулю).

Приклад 47.

Дослідити взаємне розташування двох прямих

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 4t-1, \\ y = t+5, \\ z = 3t-4. \end{cases}$$

Розв'язання: Направляючі вектори прямих $\vec{p}_1 = \{3, 4, -2\}$ і $\vec{p}_2 = \{4, 1, 3\}$ не колінеарні, так як $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{1}$. Отже, прямі перетинаються або мимобіжні. Першій прямій належить точка

$M_1(1,-4,2)$, а другій $M_2(-1,5,-4)$, $\overrightarrow{M_2M_1}=(2,-9,6)$. Змішаний добуток $(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\overrightarrow{M_2M_1})=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -9 & 6 \end{vmatrix}\neq 0,$ тому прямі мимобіжні.

§ 40. Взаємне розташування прямої і площини

Нехай маємо площину α: $Ax+By+Cz+D=0$ і пряму l, яка визначається точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і направляючим вектором $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Можна виділити три випадки взаємного розташування прямої і площини:

1. Пряма належить площині.

Розглянемо нормальний вектор площини $\vec{n}=(A,B,C)$ і направляючий вектор $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Очевидно, що $\vec{p}\perp\vec{n}$, отже, їх скалярний добуток $\vec{p}\cdot\vec{n}=0$. Крім того, довільна точка прямої повинна належати площині, тому координати точки M_0 повинні задовольняти рівняння площини: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

2. Пряма паралельна до площини.

$\vec{p}\cdot\vec{n}=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$.

3. Пряма перетинає площину.

$\vec{p}\cdot\vec{n}\neq 0$.

Для того, щоб знайти точку перетину прямої і площини, необхідно скласти параметричні рівняння прямої і розв'язати систему:

$$\begin{cases} x=t\alpha+x_0 \\ y=t\beta+y_0 \\ z=t\gamma+z_0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

. Отримаємо параметр точки перетину.

Підставивши його в рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину.

Приклад 48.

З’ясувати взаємне розташування прямої: $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = -t + 2, \\ z = -t + 4. \end{cases}$ і площини $4x + 3y + 2z + 18 = 0$.

Розв’язання: Направляючий вектор прямої $\vec{p} = (3, -1, -1)$, а нормальний вектор площини $\vec{n} = (4, 3, 2)$.

$\vec{p} \cdot \vec{n} = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \neq 0,$ отже, пряма перетинає площину.

Для знаходження точки перетину розв'яжемо систему чотирьох заданих рівнянь. Фактично підставимо в рівняння площини замість x, y і z їх вирази через параметр t:

$4(-1 + 3t) + 3(2 - t) + 2(4 - t) + 18 = 0,$ звідки $7t = -28,$ $t = -4.$ Підставивши це значення параметра в рівняння прямої, отримаємо координати точки перетину: $x = -13,$ $y = 6,$ $z = 8.$

Приклад 49.

Знайти точку, симетричну точці $A(2,\ 7,\ 1)$ відносно площини $x - 4y + z + 7 = 0.$

Розв’язання: Знайдемо спочатку ортогональну проекцію точки A на дану площину. Для цього запишемо параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до площини. Тоді за направляючий вектор прямої можна взяти нормальний вектор площини $\vec{n} = (1,\ -4,\ 1)$. Отримаємо рівняння:

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = -4t + 7. \\ z = t + 1. \end{cases}$$

Проекцією точки A на площину буде точка перетину отриманої прямої і даної площини. Знайдемо її параметр, підставивши параметричні рівняння в рівняння площини:

$t+2-4(-4t+7)+t+1+7=0,$ звідси $t=1$. Отже, проекція точки A на дану площину має координати $x=3,\quad y=3,\quad z=2.$ (Отримаємо підставивши $t=1$ в рівняння прямої). Для знаходження симетричної точки скористаємося формулами ділення відрізка навпіл: $3=\frac{2+x_2}{2},\ 3=\frac{7+y_2}{2},\quad 2=\frac{1+z_2}{2}.$. Звідси $x_2=4, y_2=-1, z_2=3.$

Відповідь: $A'(4,-1,3)$.

Приклад 50. Знайти ортогональну проекцію точки $M(4,3,10)$ на пряму $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+4t, \\ z=3+5t. \end{cases}$

Розв'язання: Ортогональною проекцією точки M на пряму буде точка P, яку отримаємо в перетині даної прямої з площиною, що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої. Рівняння такої площини знайдемо за точкою і нормальним вектором (направляючий вектор прямої буде нормальним для площини): $2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0$ або $2x+4y+5z-70=0$.

Знайдемо параметр точки перетину:
$2(1+2t)+4(2+4t)+5(3+5t)-70=0$, отже, $t=1$. Тоді $x=3, y=6, z=8$.

Відповідь: $P(3, 6, 8)$.

§ 41. Метричні задачі на пряму і площину

Метричні задачі розглядаються в прямокутній системі координат.

1. Знаходження кута між двома прямими у просторі.

Кутом між прямими називається мінімальний кут між їх направляючими векторами.

Нехай прямі мають направляючі вектори $\vec{p}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, і $\vec{p}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тоді із означення скалярного добутку знаходимо косинус кута між ними:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}} \qquad \textbf{(46).}$$

Сам кут знайдемо як арккосинус отриманого числа (враховуючи, що кут гострий).

Звідси одразу випливає умова перпендикулярності двох прямих: $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$.

Приклад 51.

Знайти кут між прямими: $\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання: Знайдемо направляючі вектори даних прямих:

$$\vec{p}_1 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, \quad 0, \quad -1)$$

$$\vec{p}_2 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, \quad -1, \quad 0)$$

$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$, отже, $\varphi = 90^0$.

2. <u>Кут між прямою і площиною</u>

Кутом між прямою і площиною називається гострий кут між прямою і її проекцією на площину.

Позначимо цей кут – φ (рис.28). Нехай пряма *a* має направляючий вектор $\vec{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$, а площина задана рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді кут α між нормальним вектором площини $\vec{n} = (A, B, C)$ і направляючим вектором прямої дорівнює $90^0 - \varphi$; або $90^0 + \varphi$, якщо

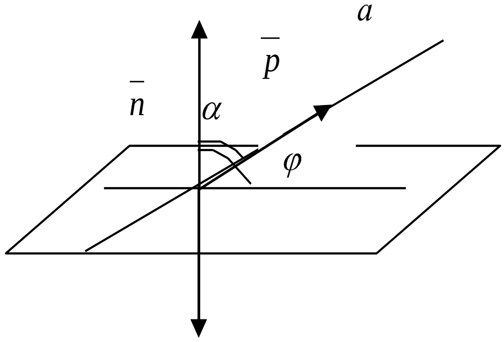


Рис. 28

нормальний вектор направлений вниз (рис.28).

Косинус кута між векторами знаходимо із скалярного добутку: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}$. Враховуючи, що $\cos(90^0-\varphi)=\sin\varphi$, $\cos(90^0+\varphi)=-\sin\varphi$, маємо $\sin\varphi = |\cos\alpha|$. Отже, ми отримали формулу для знаходження синуса кута між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}} \qquad \textbf{(47)}$$

Приклад 52.

Знайти кут між прямою: $\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = t-5 \\ z = -2t+4 \end{cases}$ і площиною $6x-3y+2z+7=0$.

Розв’язання:

$$\sin\varphi = \frac{|2\cdot 6 + 1\cdot(-3) + (-2)\cdot 2|}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}\cdot\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{5}{3\cdot 7} = \frac{5}{21}.$$

Отже, $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{5}{21}\right)$.

3. <u>Відстань від точки до прямої у просторі:</u>

Нехай пряма *a* задана точкою $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і направляючим вектором $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Потрібно знайти відстань *d* від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до даної прямої *a* (рис.29).

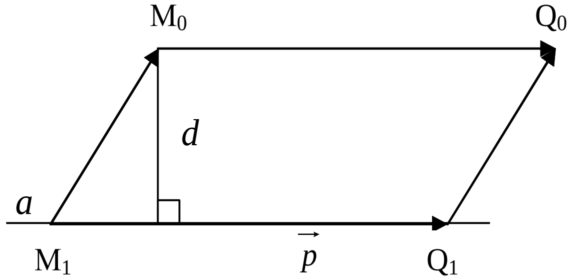


Рис. 29

Відкладемо вектор $\vec{p}$ від точки M_1. Отримаємо вектор $\overrightarrow{M_1Q_1}=\vec{p}$.

Розглянемо паралелограм $M_1M_0Q_0Q_1$. Ясно, що відстань *d* від точки M_0 до даної прямої

a дорівнює висоті паралелограма $M_1M_0Q_0Q_1$, яку обчислимо, розділивши площу паралелограма на довжину сторони M_1Q_1, тобто на модуль вектора $\vec{p}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку векторів, які утворюють цей паралелограм:

$S=d\,|\,\vec{p}\,|=|[\,\vec{p}\,,\overrightarrow{M_1M_0}\,]|$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$.

Тоді $d=\dfrac{\left|[\vec{p},\overrightarrow{M_1M_0}]\right|}{|\vec{p}|}$.

Перейшовши до координат, отримаємо:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \qquad \textbf{(48)}$$

Відмітимо, що відстань d можна знайти і як відстань між двома точками: точкою M_0 і її ортогональною проекцією на дану пряму (див. приклад 50).

Приклад 53.

Знайти відстань між паралельними прямими $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$ і $\begin{cases} x=5-6t, \\ y=-6-2t, \\ z=3+8t. \end{cases}$

Розв'язання: Відстань між паралельними прямими можна знайти, як відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої. Наприклад, прямій, заданій параметричними рівняннями, належить точка $A(5,\ -6,\ 3)$. Знайдемо відстань від неї до першої прямої; яка проходить через точку $B(4,\ 3,\ -2)$ і має направляючим вектор $\vec{p}=(3,\ 1,\ -4)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BA}=(1,\ -9,\ 5)$ і скористаємось формулою (48):

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\vec{p}\right]\right|}{|\vec{p}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-9 & 5\\ 1 & -4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}5 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -9\\ 3 & 1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{31^2+19^2+28^2}}{\sqrt{26}}=9.$$

Відповідь: $d=9$.

4. Відстань між мимобіжними прямими.

Розглянемо мимобіжні прямі a_1, яка проходить через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, і має направляючий вектор $\vec{p}_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, та a_2, яка проходить через точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$ і має направляючий вектор $\vec{p}_2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ (рис.30). Відкладемо вектор $\vec{p}_2$ від точки M_1, тоді вектор $\overrightarrow{M_1Q_1}=\vec{p}_2$. Розглянемо паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, і $\overrightarrow{M_1M_2}$. Згідно теореми 12, об'єм цього паралелепіпеда рівний модулю змішаного добутку векторів $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, та $\overrightarrow{M_1M_2}$: $V=|(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\overrightarrow{M_1M_2})|$. З іншого боку, об'єм паралелепіпеда можна знайти як добуток площі основи на висоту. (площу основи знаходимо як модуль векторного добутку векторів, які утворюють паралелограм $M_1Q_1P_1N_1$, тобто векторів $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$):

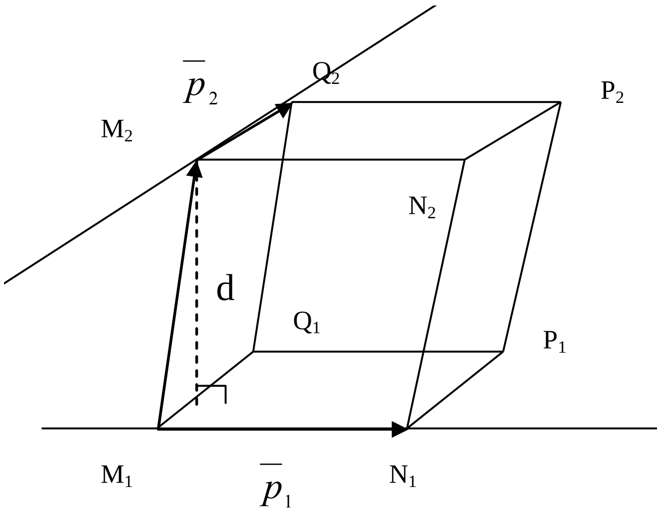


Рис.30

Отже, $V=S\cdot d=|[\vec{p}_1,\vec{p}_2]|\cdot d=|(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\overrightarrow{M_1M_2})|$.

Звідки $d=\dfrac{\left|(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\overrightarrow{M_1M_2})\right|}{\left|[\vec{p}_1,\vec{p}_2]\right|}$ **(49)**

Приклад 54.

Знайти відстань між мимобіжними прямими: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ і $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$.

Розв'язання: Перша пряма проходить через точку $M_1(2,\ -1,\ 1)$ і має направляючий вектор $\vec{p}_1=(4,\ 1,\ -1)$. Друга проходить через точку $M_2(-4,\ 2,\ -2)$ паралельно до вектора $\vec{p}_2=(2,\ -2,\ -3)$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(-6,\ 3,\ -3)$ і векторний добуток $[\vec{p}_1,\vec{p}_2]=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\right)=(-5,\ \ 10,\ \ -10)$.

Змішаний добуток раціонально обчислити, як скалярний добуток вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на векторний добуток векторів $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$:

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2)=(-6)(-5)+3\cdot 10+(-3)\cdot(-10)=90$$

$$|[\vec{p}_1,\vec{p}_2]|=\sqrt{(-5)^2+10^2+(-10)^2}=15. \quad \text{Отже,} \quad d=\frac{|90|}{15}=6.$$

Відмітимо, що відстань між мимобіжними прямими можна знайти й іншим способом, наприклад, як відстань від будь-якої точки однієї прямої до площини, яка проходить через другу пряму, паралельно до першої. Рівняння такої площини отримаємо за двома направляючими векторами і точкою (направляючими векторами площини будуть направляючі вектори даних прямих).

ЗАДАЧІ

1. Скласти параметричні і канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку A(-1,3,-4), паралельно до вектора $\vec{p}$ =(1,3,-2). Представити цю пряму як перетин двох площин.

2. Скласти параметричні рівняння вісі OY. Записати рівняння цієї прямої як перетин двох площин .

3. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку A(0,1,0) паралельно до вісі OZ. Записати цю пряму як перетин двох площин.

4. Скласти параметричні і канонічні рівняння прямої:

а) яка проходить через дві точки A(1,-3, 0,5) і B(3,4, 2,5)

б) яка відтинає на осях OX і OY одиничні відрізки.

5. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно до прямої

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

6. Скласти параметричні рівняння:

а) прямої, яка задана як перетин двох площин x – 3y + z = 0 і y = 0.

б) прямої, що проходить через точку A(1,-3,4) паралельно до прямої

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

7. Написати канонічні рівняння лінії перетину площини XOY з площиною 2x – 3y + 5z – 11 = 0.

8. Пряму задано як перетин площин 2x + y – 2z – 1 = 0 і 3x – 2y + 3z – 2 = 0. Записати її як перетин двох площин, одна із яких паралельна вісі OX, а друга вісі OY.

9. Побудувати зображення прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ в афінній системі координат.

10. Довести що пряма $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0 \\ x + 5y - z + 10 = 0 \end{cases}$ перетинає вісь OY.

11. З’ясувати, як розташовані прямі відносно системи координат:

а) $\begin{cases} 2y - z + 1 = 0 \\ 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$.

12. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$ з координатними площинами.

13. Показати, що пряма і площина перетинаються, знайти точку їх перетину

а) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-3}{5}$, $x + 4y - z + 6 = 0$;

б) $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$, $x - z + 3 = 0$.

14. З’ясувати взаємне розташування наступних прямих і площин:

а) $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 1 - 6t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $3x + 2y - z + 5 = 0$;

б) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$, $2x - 5y + 3z - 1 = 0$.

15. При якому значенні *t* пряма $x - 1 = \dfrac{y+3}{-8} = \dfrac{z-2}{t}$ паралельна до площини $3x - 4y + 7z - 2 = 0$?

16. Задані рівняння руху точки M (x,y,z): $x = 5 - 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = 5 - t$. Визначити відстань *d*, яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 7$.

17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A (1, -2, 3) і пряму: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-5}{6} = z$.

18. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку М (1, 3, 7) і пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{-1}$.

19. Скласти рівняння площини, яка містить дві прямі, що перетинаються: $\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$.

20. Дослідити взаємне розташування двох прямих (в тих випадках, коли прямі перетинаються, знайти координати точки їх перетину):

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ і $\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z+3}{4}$,

б) $\begin{cases} x=-2+t \\ y=4+3t \\ z=-6+5t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=2t \\ y=2+t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

21. Дослідити взаємне розташування прямих, заданих системами рівнянь: $\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$.

22. Навести приклади рівнянь двох прямих, які:

а) паралельні ; б) перетинаються ; в) мимобіжні.

23. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Р(1, 0, 5) і перетинає кожну з прямих: $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ і x – 1 = y – 2 = z.

24. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку А(0, 0, 1) і перетинає кожну з прямих: $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

25. Знайти кут між прямими:

а) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$,

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+16}{-6}$ і $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -10 \\ z = 5 + t \end{cases}$.

26. Знайти косинус кута між діагоналями куба.

27. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ та площиною $4x + y - 8z + 16 = 0$.

28. Знайти кут між прямою $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+12}{3} = \dfrac{z-4}{6}$ та площиною $6x + 15y - 10z = 0$.

29. Довести, що відстань від довільної точки M(x, y, z) до вісі OX рівна $\sqrt{y^2 + z^2}$.

30. Знайти довжину висоти AP трикутника ABC, якщо A(2, -3, 4), B(0, 0, 0), C(2, 2, 2).

31. Знайти ортогональну проекцію точки A (1, -2, 3) на пряму $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 = 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

32. Знайти відстань від точки A (7, 9, 7) до прямої $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

33. Знайти відстань між паралельними прямими:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}.$$

34. Знайти відстань між мимобіжними прямими:

$$\begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}.$$

35. Знайти проекцію точки А (1, 2, -3) на площину $x - 4y + z + 7 = 0$.

36. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $x - 2y - z + 11 = 0$.

37. Скласти рівняння площин, проектуючих ортогонально на координатні площини пряму:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

38. Скласти рівняння проекції прямої на площину:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$, $3x - y + z - 4 = 0$,

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, $3x - y + z - 1 = 0$.

39. Дано дві прямі $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ і $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{0}$.

а) довести, що вони мимобіжні;

б) знайти відстань між цими прямими;

в) написати рівняння площин, які проходять через кожну з них, паралельно до іншої;

г) знайти відстань між отриманими площинами.

Впевнитися в тому, що відстані в б) і в) рівні.

Як краще запам'ятати теорію.

При вивченні нового матеріалу, в багатьох студентів виникають труднощі в процесі усвідомлення і запам'ятовування нової інформації.

Труднощі виникають, як правило, тоді, коли необхідно усвідомити й належним чином співвіднести, зв'язавши в уяві, нові відомості з тими, які вже зберігаються в довготривалій пам'яті, адже час перекодування інформації із короткочасної пам'яті в довготривалу в кожної людини суто індивідуальний.

Геометричні поняття і факти частина студентів заучує механічно, що призводить до швидкого їх забування, так як механічне заучування не сприяє переходу інформації в довготривалу пам'ять та не розвиває логічне мислення студентів. Одним із способів подолання цих труднощів є систематизація теорії, а саме зображення геометричних понять та їх взаємозв'язків у вигляді опорних сигналів, опорних конспектів, таблиць та схем.

Складання опорного конспекту вимагає кропіткої роботи над прочитаною теорією. До такої роботи студентів необхідно спеціально залучати. Можна, наприклад, викладачеві на першому практичному занятті скласти опорний план за матеріалом лекції разом із студентами.

Під час складання опорних конспектів слід орієнтувати студентів на загальновідомі дидактичні принципи:

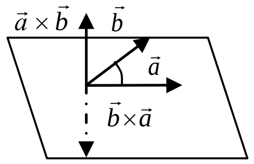
- ***лаконічність*** (при сприйнятті й запам'ятовуванні обсяг короткочасної оперативної пам'яті обмежений, тому загальна кількість знаків не повинна перевищувати 180-200, конспект повинен містити мінімум слів, букв, знаків, малюнків тощо);
- ***виділення головного*** (використовують різні геометричні фігури, кольори, розміщення слів по вертикалі та навскоси, стрілками показують зв'язки між інформацією, підкреслюють або виділяють шрифтом головне та ін.);

- ***уніфікація*** (виражається у вигляді абревіатур, умовних знаків, малюнків);
- ***оригінальність*** (опорні конспекти повинні бути різноманітними за формою, структурою, графічним виконанням);
- ***компактність***, містити максимум інформації на невеликій площі (поміщатися на одній сторінці зошита, одну сторінку зручно читати, така інформація й краще запам'ятовується);
- ***доступність*** (символіка повинна бути зрозумілою для всіх студентів);
- опорний конспект повинен ***виражати закінчену думку***.

Оскільки рівень асоціативних зв'язків у кожної людини різний, то використання опорних конспектів у процесі навчання повинно бути диференційованим. Практика показує, що теоретичний матеріал краще запам'ятовується тоді, коли студент **самостійно** складає опорний конспект, адже в цьому випадку він сам відшукує **свої** *асоціативні зв'язки*, активізує **свою** *розумову діяльність*, що в свою чергу розвиває його здібності, сприяє швидкому переходу інформації в довготривалу пам'ять.

Оскільки довготривала пам'ять спирається на логічну структуру матеріалу, то проблема запам'ятовування складного матеріалу розв'язується за рахунок його включення (навіть штучного) в логічні зв'язки з іншими добре відомими уявленнями, поняттями й фактами. У цьому випадку діє така закономірність: чим більше нових асоціацій при першому знайомстві з новим поняттям виникає в студента, і чим більше часу ми зможемо приділити логічному осмисленню цих асоціацій, тим краще запам'ятовується саме поняття. Тому варто використовувати опорні схеми, які б пов'язали вивчені поняття між собою:

Наприклад, різні добутки векторів зручно представити у вигляді опорної таблиці:

Назва і позначення	**Означення**	**Координатна форма**	**Результат**
Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}$	$(\vec{a},\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, або $(\vec{a},\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert np_{\vec{a}}\vec{b}$	Якщо, $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то $(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	число
Векторний добуток векторів $\vec{a}\; i\; \vec{b}$: $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}$	1. $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$. 2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ мають праву орієнтацію 3. $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 	$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$, або $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-$ $-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$	вектор
Змішаний добуток векторів $\vec{a},\ \vec{b}\ i\ \vec{c}$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$	число

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
2. Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. Ч.1. – М.: Просвещение, 1986.
3. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. Ч. 1. М.: Просвещение, 1974.
4. Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973.
5. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 1. – М, Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 2. – М, Л.: Гостехиздат, 1949.
7. Егоров И.П. Геометрия. – М.: Просвещение, 1979.
8. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981.
10. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968.
11. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1984.
12. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.
13. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. Ч.1 – М.: Просвещение, 1973.
14. Аргунов Б.И. и др. Задачник-практикум по геометрии. Ч.2. – М.: Просвещение, 1979.
15. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Сборник задач по геометрии. – М.: Просвещение, 1980.
16. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
17. Кириченко В.В., Петкевич Н.Ю., Петравчук А.П. Аналітична геометрія. – К.: Київський університет, 2003.
18. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Яременко Юрій Вікторович,

Лутченко Людмила Іванівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина 1

Підписано до друку 07.04.2004. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Папір офсет.
Друк різограф. Ум.др.арк. 7,75. Тираж 200. Зам. № _____.

РЕДАКЦІЙНО–ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ

Кіровоградського державного педагогічного

університету імені Володимира Винниченка

25006, Кіровоград, вул.Шевченка, 1.
Тел.: (0522) 24 59 84.
Fax.: (0522) 24 85 44.
E−Mail.: mails@kspu.kr.ua