МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

Т.В. БЛУДОВА,
В.П. ЛІСОВСЬКА,
О.В. МАГДА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчально-методичний посібник для СРС

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

1906 КНЕУ
КИЇВ 2015

УДК 514:005.31:33(078.5)
ББК 65в631
Б 70

Рецензенти

А. Г. Нікітін, д.ф.-м.н., проф.
(Інститут математики НАН України)
О. П. Зінькевич, к.ф.-м.н., доц.
(Національний університет харчових технологій)
О. І. Макаренко, к.ф.-м.н., проф.
(«Київський національний економічний університет ім Вадима Гетьмана»)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1/11-12936 від 13.08.2013 р.

Блудова Т. В., Лісовська В. П., Магда О. В.
Б 70 Аналітична геометрія та її застосування в економічних дослідженнях. Навч. посібник [для студ. екон. навч. закл.]. [Електронний ресурс]. — К.: КНЕУ, 2015. — 92 с.
ISBN 978-966-926-036-9

У посібнику для СРС розглядаються елементи векторної алгебри і аналітичної геометрії та їх застосування в економічних дослідженнях.

Навчально-методичний посібник для СРС призначений для студентів економічних спеціальностей вишів.

УДК 514:005.31:33(078.5)
ББК 65в631

ISBN 978-966-926-036-9

ЗМІСТ

Зміст 3
Вступ 4

РОЗДІЛ 1. Вектори і дії над ними 8
§1. Лінійні операції над векторами. Основні поняття та означення 8
§2. Скалярний добуток двох векторів 21
§3. Векторний добуток.. 27
§4. Мішаний (векторно-скалярний) добуток трьох векторів 32

РОЗДІЛ 2. Пряма лінія на площині.. 39

РОЗДІЛ 3. Криві другого порядку... 49
§1.Основні поняття.. 49
§2.Коло 49
§3.Еліпс.. 53
§4.Гіпербола... 58
§5.Парабола... 64

РОЗДІЛ 4. Застосування аналітичної геометрії в економіці.................................. 69
§1. Огляд основних кривих 69
§2. Виробнича функція Кобба-Дугласа.. 73
§3. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях................................. 75
§4. Застосування векторів в економічних дослідженнях 77

БЛОЧНО-МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ 86
ВІДПОВІДІ 89
ЛІТЕРАТУРА 91

ВСТУП

Геометрія зародилася в глибоку давнину. Поняття числа та геометричної фігури, які для нас здаються звичними й простими, насправді, є абстрактними поняттями, що могли з'явитися лише в результаті тривалої розумової праці. Будуючи житла та храми, прикрашаючи їх орнаментами, розмічаючи землю, вимірюючи відстані та площі, виготовляючи знаряддя праці, людина застосовувала свої знання про форму, розміри та взаємне розміщення предметів, отримані з власних спостережень, дослідів та інтуїції. До наших часів збереглася легенда про фінікійську царицю Дідону (IX ст. до н. е.), яка заснувала Карфаген. Дідона була жадібною та честолюбною, їй хотілося, щоб нове місто займало якомога більше місця на землі. Та вона, на додачу, володіла ще й хитрістю та неабиякою геометричною інтуїцією, і тільки завдяки цьому здійснився її план. Вона вмовила вождя племені, яке заселяло північ Африки, віддати їй клаптик землі, який вкриє волова шкура. Підступна фінікійська цариця й не думала класти шкуру на землю! Вона розрізала її на тонкі смужки, зв'язала їх і цією довгою мотузкою зібралася обгородити свої майбутні володіння. І тут перед нею постало питання: яку форму повинна мати межа ділянки, щоб її площа була найбільшою? Чи здогадалася Дідона, що шукана фігура — круг? Хто зна… Відомо лише, що легендарна цариця вибрала свою ділянку на березі моря, тому вся морська межа дісталась їй задарма.

Традиційно вважається, що родоначальниками геометрії є древні греки, які перейняли в єгиптян ремесло землеробства та вимірювання об'ємів тіл і перетворили його на науку. Це перетворення стало можливим завдяки абстрагуванню від усіх властивостей тіл, крім величини та взаємного розміщення. Геометрія стала наукою, коли від рецептів перейшли до встановлення загальних закономірностей. Крім того, древні греки створили перші праці з геометрії та теорії чисел, які містили строгі доведення. Причому, вони помітили зв'язок між геометрією та арифметикою. Арифметика, як відомо, ґрунтувалась на понятті цілого числа. Раціональні числа представлялись як відношення цілих. Після того як з'ясувалося, що відношення двох відрізків, загалом кажучи, не може бути виражене через відношення цілих чисел, піфагорійці вирішили будувати математику не на основі арифметики цілих чисел, а на основі геометрії.

У V ст. до н. е. було поставлено задачі, які одразу ж стали широко відомими. Це подвоєння куба, трисекція кута й квадратура круга. Усі три не вдавалося розв'язати методами класичної геометричної алгебри, їх дослідження вимагало створення нових методів. У IV ст. до н. е. давньогрецький математик Менехм, займаючись першою з названих проблем, винайшов нові криві. Адже для подвоєння куба потрібно було навчитися добувати кубічний корінь, а з допомогою лише циркуля та лінійки це зробити неможливо. Але якщо в клас допустимих кривих (пряма та коло) ввести конічні перерізи, то побудову кубічних коренів виконати нескладно. Алгебраїчно це означає, наприклад, що для розв'язання рівняння $x^3 = a$ достатньо знайти точку перетину двох кривих $y = x^2$ (парабола) і $y = \dfrac{a}{x}$ (гіпербола). Таким чином, Менехм розглянув три види конусів обертання: прямокутні, тупокутні та гострокутні. Проводячи перерізи площиною, перпендикулярною до твірної, він отримав три види кривих, які ми зараз називаємо еліпсом, гіперболою та параболою. Після такого стереометричного означення Менехм перейшов до виведення планіметричних властивостей отриманих перерізів. Для чого ж потрібне було таке стереометричне означення? Очевидно, воно служило для доведення існування та неперервності таких геометричних місць.

Саме дослідження задачі подвоєння куба привело до введення в математику нових надзвичайно важливих кривих — конічних перерізів. Можливо, увагу до цих кривих привернув і той факт, що кінець тіні стрілки сонячного годинника описує на Землі впродовж дня дугу конічного перерізу.

Таким чином, криві багатосторонньо вивчалися вже в давнину й були основними геометричними об'єктами поряд з прямою та колом. Архімед вивчав тіла, отримані обертанням конічних перерізів, і обчислював їх об'єми. Він же систематично використовував конічні перерізи для розв'язування задач, еквівалентних кубічним рівнянням. Однак широкого застосування ці криві в астрономії та механіці набули тільки в XVI—XVII ст.

Величезний внесок у розвиток теорії конічних перерізів вніс своїм твором «Конічні перерізи», який складається з восьми книг. До наших днів перші чотири дійшли грецькою мовою, наступні три — в арабському перекладі Сабіта ібн Корри, остання ж — восьма — загублена.

У своїх працях Аполлоній дав загальніше означення конічних перерізів: він брав довільний круговий конус і розглядав обидві його порожнини (це дало можливість розглянути обидві вітки гіперболи). Також він проводив перерізи площиною, яка розміщена під будь-яким кутом до твірної. Таким чином, до Аполлонія конічні перерізи розглядалися по відношенню до прямокутної системи координат, причому одна з осей збігалася з головним діаметром, а інша — проходила перпендикулярно до неї через вершину кривої. Аполлоній же відносив криві до будь-якого діаметра й дотичної, проведеної в одному з його кінців, тобто до косокутної системи координат. Після стереометричного означення Аполлоній також виводить рівняння отриманих кривих. При цьому він класифікував криві за видом їх рівнянь. Звичні для нас назви — еліпс, гіпербола, парабола — теж були вперше введені Аполлонієм. Так, слово «парабола» походить від грецького *παραβολγ* (додаток), «гіпербола» — від *υπερβολη* (надлишок) і «еліпс» — від *ελλειψις* (недостача).

Основна ідея першої книги «Конічні перерізів» полягає в тому, щоб за основу класифікації кривих прийняти ті властивості їх алгебраїчних рівнянь, які залишаються інваріантними при допустимих перетвореннях координат. У наступних трьох книгах Аполлоній розвивав теорію конічних перерізів: вивчав основні властивості спряжених діаметрів та асимптот, отримував рівняння гіперболи відносно асимптот і встановлював основні властивості фокусів еліпса й гіперболи. Тут же вперше з'явили полюси та поляри. У четвертій книзі Аполлоній розглядав питання про кількість точок перетину двох конічних перерізів. Зокрема він показав, що таких точок не може бути більше, ніж чотири, і що якщо одна із спільних точок є точкою дотику, то криві, крім неї, можуть мати ще не більше двох спільних точок. У п'ятій книзі Аполлоній визначав усі нормалі до конічного перерізу, які можна провести із заданої точки, досліджував їх властивості. У шостій книзі вивчалися подібні конічні перерізи. Нарешті, у сьомій книзі містяться відомі теореми Аполлонія, у яких він знаходив інваріанти відносно перетворень систем координат, що розглядалися в першій книзі.

У давнину методи дослідження кривих, створені Аполлонієм, не отримали розвитку, хоча до V ст. н. е. праці вченого вивчались та коментувались. На жаль, тривалий час конічні перерізи ніяк не застосовувалися. Лише з часом теорія конічних перерізів отримала широке застосування в механіці земних і небесних тіл. Кеплер установив, що планети нашої сонячної системи рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться сонце; Галілей показав, що кинутий камінь (або снаряд), летить в порожнині по параболі. Нарешті, у 80-х роках XVII ст. Ньютон створив свої «Математичні начала натуральної філософії», безпосередньо спираючись на праці Аполлонія. Таким чином, «Конічні перерізи» Аполлонія є прикладом математичної теорії, створеної задовго до того, як вона стала необхідною. Вона була винайдена ніби «про запас» і довгий час була далекою від будь-яких практичних застосувань.

У XVII ст. почалося відродження ідей Аполлонія. Ферма і Декарт незалежно один від одного переклали його методи на мову нової алгебри, заснувавши аналітичну геометрію.

Особливістю запропонованого ними методу є метод координат. Від прийомів Аполлонія він відрізняється тим, що співвідношення, які визначають геометричне місце, виражені в формі рівнянь символічної алгебри. Аполлоній, власне кажучи, теж користувався координатами. Але в нього, наприклад, ордината точки параболи — це її відстань до осі цієї параболи. Тобто координація завжди тісно пов'язана із самою кривою. Декарту (більше, ніж Ферма) належить ідея координації точок площини відносно довільно вибраних осей. Отриманий метод давав змогу виразити співвідношення, якими задається геометричне місце, з допомогою рівнянь, що пов'язують координати його точок.

Аналітична геометрія — галузь математики, у якій досліджуються геометричні об'єкти та їх властивості засобами алгебраїчного аналізу із застосуванням методу координат. Аналітична геометрія виникла в першій половині XVII ст. з назрілих проблем науки й техніки.

В астрономії була визнана геліоцентрична система світу польського астронома М. Коперніка (1473—1543), згідно з якою Земля, як і всі інші планети, обертається навколо Сонця, а видиме добове переміщення небесної сфери є лише результатом руху Землі навколо її осі. Коперник працював над обґрунтуванням геліоцентричної системи більше тридцяти років, його працю: «Про обертання небесних сфер» було опубліковано в рік його смерті.

На основі вчення Коперніка, використовуючи цінні результати астрономічних спостережень датського астронома Тіхо Браге (1546—1601), німецький астроном, математик Йоган Кеплер (1571—1630) відкрив три закони руху планет. Він довів, що всі планети сонячної системи рухаються по еліпсам, у спільному фокусі яких знаходиться Сонце. Закони Кеплера дістали пояснення у механіці І. Ньютона (1643—1727), зокрема у законі всесвітнього тяжіння.

Італійський механік, астроном і фізик Г. Галілей (1564—1642) заклав основи нової механіки, установив, що кинуте під гострим кутом до горизонту тіло рухається по параболі (без урахування опору повітря).

У 1637 році Ферма поширив через Мерсенна мемуар «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць», у якому він описував рівняння різних кривих другого порядку в прямокутних координатах. Для спрощення виду рівнянь він широко використовував перетворення координат. Ферма показав, наскільки новий підхід є простішим і зручнішим, ніж чисто геометричний. Проте мемуар Ферма широкою популярністю не користувався. Більш поширеною була, «Геометрія» Декарта, що вийшла в тому ж 1637 році, яка більш повно розвивала ті ж самі ідеї.

Декарт включив у геометрію ширший клас кривих, зокрема «механічні» (трансцендентні, на зразок спіралі). Він будував рівняння алгебраїчних кривих, здійснював їх класифікацію (пізніше перероблену Ньютоном). Декарт підкреслював, що основні характеристики кривої не залежать від вибору системи координат. У «Геометрії» Декарт також проілюстрував потужність нового методу численними прикладами й отримав чимало результатів, ще не відомих древнім.

Аналітичний метод Декарта одразу ж привернув увагу багатьох математиків (Схоотен, Валліс та ін.). Вони коментували «Геометрію», виправляли певні недоліки, застосовували новий метод в інших задачах. Наприклад, Валліс уперше розглядав конічні перерізи як плоскі криві (1655), причому вже використовував від'ємні абсциси й косокутні координати. Ньютон не лише спирався на координатний метод у своїх працях з аналізу, але й продовжив геометричні дослідження Декарта.

Природне узагальнення — визначення точки в просторі трьома координатами — було зроблене Ла-Гіром, який значно сприяв розвитку методу Декарта. Перший же систематичний виклад аналітичної геометрії як цілого дав Ейлер у другому томі свого «Введення в аналіз нескінченно малих».

Ці частково перелічені геніальні відкриття сприяли створенню та розвитку трьох математичних наук: аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення.

Математичний аналіз (диференціальне та інтегральне числення) створили одночасно й незалежно один від одного англійський фізик, механік, астрономом, математик Ісаак Ньютон (1643—1727) і німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільям Лейбніц (1646—1716).

Основоположником аналітичної геометрії вважають французького математика й філософа Рене Декарта (1596—1650), хоча її зародки були і в інших учених. Зокрема, ними володів сучасник Декарта, французький математик П'єр Ферма (1601—1665), про що свідчить лист Ферма до французького математика Жюля Роберваля (1602—1675), написаний за десять років до виходу (1637) у світ праці Декарта у філософському творі «Міркування про метод».

У наш час практичне застосування аналітичної геометрії й, зокрема, кривих і поверхонь другого порядку, є доволі широким. Те, що в аналітичній геометрії всі геометричні відношення виражені у формі рівнянь, виявилося дуже корисним для комп'ютерної графіки, оскільки процесори оперують лише з числами. Тому завдяки аналітичній геометрії ми маємо зараз можливість отримувати й перетворювати різні зображення на екранах дисплеїв.

Велике значення має аналітична геометрія в інженерній діяльності. Уже в античні часи властивості деяких кривих знаходили практичне застосування. Наприклад, гвинтові лінії, починаючи з архимедового гвинта, використовуються для переміщення тіл.

Властивість параболоїдів фокусувати паралельний пучок хвиль застосовується в антенах і дзеркалах телескопів.

Той факт, що поверхня однополого гіперболоїда складається з прямих ліній, використовував В. Г. Шухов (1853—1939) при будівництві щогл і телевізійної башти на Шаболовці (побудована в 1921 році для першої радянської радіотелеграфної станції). Те, що сідлоподібна поверхня гіперболічного параболоїда складається з прямих, дає змогу легко будувати дахи красивої форми. Інші поверхні, утворені прямими лініями, можна побачити в світильниках. Проте багато кривих і поверхонь, вивчених в аналітичній геометрії, ще чекають свого технічного застосування.

В економіці криві другого порядку застосовуються при вивченні взаємозв'азку між рівнем інфляції та рівнем безробіття (крива Філіпса), при аналізі уподобань споживача (крива байдужості), при вивченні факторів виробництва, які можуть бути використані для певного обсягу продукції (ізокванта), для вивчення закону розподілу прибутків (закон Парето), ринків збуту, для розв'язання задачі про розподіл зон економічного впливу.

У посібнику користуємося такими позначеннями-символами:

$\angle$ — кут, $\perp$ — перпендикулярність, $\parallel$ — паралельність, $\nparallel$ — не паралельність, Δ — трикутник, $k(O,r)$ — коло з центром у точці O радіуса r, $\in$ — належність, $\notin$ — не належність, $\cap$ — перетин, $\Rightarrow$ — слідування (імплікація), $\Leftrightarrow$ — рівнозначність (еквівалентність), R — множина дійсних чисел.

РОЗДІЛ І. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

§1. Лінійні операції над векторами. Основні поняття та означення

1.1. Скаляри й вектори. Скалярні величини характеризуються числом, наприклад, об'єм тіла, маса, температура. ***Скаляром*** називається будь-яке дійсне число. Векторні величини характеризуються числовою мірою і напрямом у просторі, наприклад, швидкість, прискорення, сила. ***Вектором*** називається напрямлений відрізок. Зображується вектор стрілкою (рис. 1.1). Позначається: $\overline{AB}$ A — початок, B — кінець вектора, або $\overline{a}$.

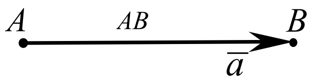


Рис. 1.1

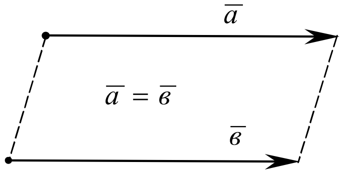


Рис. 1.2

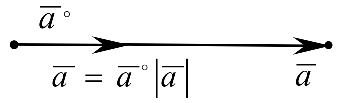


Рис. 1.3

Довжина вектора $\overline{a}$ або $\overline{AB}$ називається його модулем і позначається: $|\overline{a}| = a, |\overline{AB}| = AB.$

1.2. Рівність векторів. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються рівними, якщо вони однаково напрямлені: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, а їх модулі рівні $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (рис. 1.2), тобто при паралельному їх зсуву вони суміщаються.

За означенням рівності векторів за початок вектора приймається будь-яка точка простору. Такі вектори називаються *вільними.* Векторна алгебра означає дії над вільними векторами.

Нульовий вектор — вектор, модуль якого дорівнює нулю, позначається: $\overline{a} = \overline{0}$. Для кожного вектора $\overline{a}$: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$. Нульовим вектором є точка, напрям його невизначений.

Орт вектора. Ортом вектора $\overline{a}$ називається вектор $\overline{a}^\circ$: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}^\circ$, $|\overline{a}^\circ|=1$ (рис. 1.3). Вираз вектора через його модуль і орт: $\overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^\circ$.

1.3.Додавання векторів визначається за правилом паралелограма або многокутника (рис. 1.4).

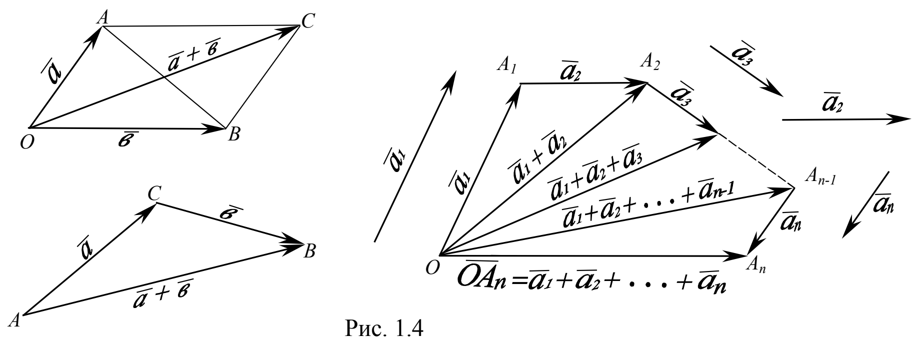


Рис. 1.4

Сума векторів замкнутого многокутника: $\overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_n} = \overline{0}$ (рис. 1.5).

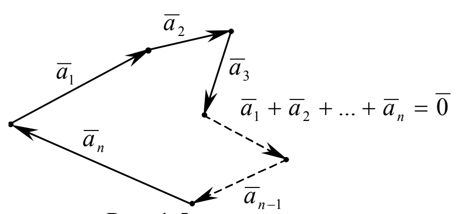


Рис. 1.5

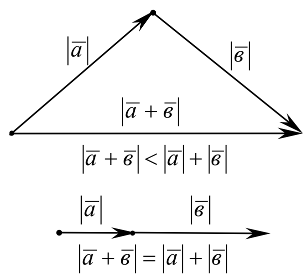


Рис. 1.6

Модуль суми векторів $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| \le \left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$ *(рис. 1.6)* зв'язаний з відношеннями між сторонами трикутника.

***1.4. Закони додавання векторів*:**

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – переставний; 2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ — сполучений.

Протилежні вектори. Два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються взаємно протилежними, якщо їх модулі рівні $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|$ і напрямлені вони протилежно: $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначається $(-\overline{a})$. З $\overline{a}=\overline{AB}\Rightarrow-\overline{a}=\overline{BA}$. Сума протилежних векторів $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$.

Віднімання векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається: $\overline{a}-\overline{b}$) — обернена операція додавання векторів: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$ (рис. 1.7).

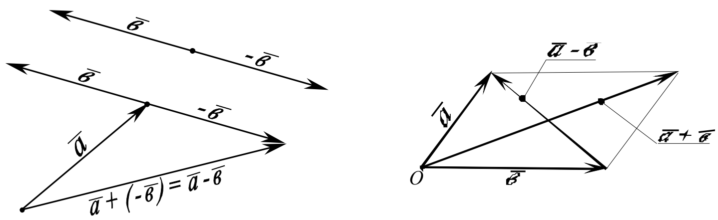


Рис. 1.7

1.5. Множення вектора на скаляр. Добуток вектора $\vec{a}$ і скаляра λ (позначається: $\lambda\vec{a}$) є вектор, який має:

1) $\left|\text{л}\overline{a}\right|=\left|\overline{a}\lambda\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|$;

2) якщо $\text{л}>0$, то $\text{л}\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$; якщо $\text{л}<0$, то $\text{л}\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}$;

3) якщо $\overline{a}=\overline{0}$, то $\text{л}\overline{a}=\overline{0}$; якщо $\text{л}=0$, то $0\overline{a}=0$.

Закони множення вектора на скаляр:

1) $\text{л}\overline{a}=\overline{a}\lambda$ – переставний;

2) $\lambda\left(\mu\overline{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\overline{a}$ – сполучний;

3) $\left.\begin{aligned}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\lambda&=\overline{a}\lambda+\overline{b}\lambda\\ \left(\lambda+\mu\right)\overline{a}&=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}\end{aligned}\right\}$ – розподільний.

1.6. Лінійна комбінація векторів. Якщо над векторами $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ виконуються операції додавання, віднімання та множення на скаляр, то вектор $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+...+\lambda_n\overline{a_n}$ називається лінійною комбінацією заданих векторів. Тому операції додавання, віднімання й множення на скаляр називаються лінійними операціями.

Лінійні залежності між векторами. Вектори $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ називаються *лінійно залежними (незалежними),* якщо їх лінійна комбінація є нуль-вектор $\text{л}_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+...+\lambda_n\overline{a_n}=\overline{0}$ не при всіх скалярах (при всіх скалярах) $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$, рівних нулю.

1.7. Колінеарні вектори. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні між собою, однаково або протилежно напрямлені.

Колінеарні вектори $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{c}\parallel l$, і тільки колінеарні належать одній прямій l зі спільним на ній початком О.

Нехай лінійна комбінація $\text{л}_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}=\overline{0},\ \lambda_2\neq0$. Звідси $\overline{a_2}=-\dfrac{\lambda_1}{\text{л}_2}\overline{a_1}$, тобто вектор $\overline{a_2}$ колінеарний вектору $\overline{a_1}$.

Отже, два лінійно залежні вектори колінеарні. Якщо вектори $\overline{a}_1$ *і* $\overline{a}_2$ незалежні, то лінійна комбінація: $\text{л}_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}=\overline{0}$, при $\lambda_1=0$ *і* $\text{л}_2=0$.

1.8. Компланарні вектори. Вектори, паралельні до однієї площини, називаються *компланарними*.

Компланарні вектори зі спільним початком належать площині (рис. 1.8).

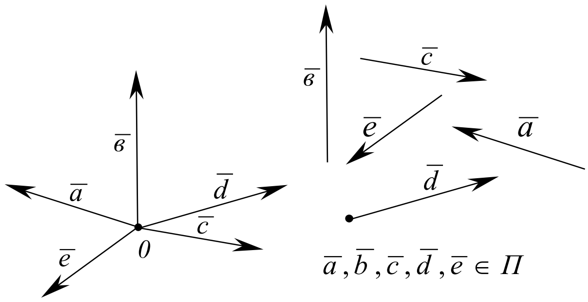


Рис. 1.8

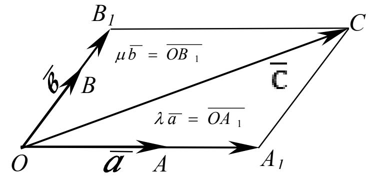


Рис. 1.9

Нехай три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — компланарні (рис. 1.9). Тоді $\overline{OA_1} = \lambda\bar{a}$, $\overline{OB_1} = \mu\bar{b}$, звідси $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, тобто три компланарні вектори лінійно залежні, і навпаки, три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Розклад вектора по трьом некомпланарним векторам. Нехай $\bar{d}$ — довільний вектор і вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — некомпланарні, усі вони зі спільним початком (рис. 1.10). Тоді вектор $\bar{d}$ єдиним способом розкладається по трьом некомпланарним векторам:

$$\bar{d} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c},$$

коефіцієнти λ, μ, ν визначаються однозначно й називаються ***координатами вектора*** $\bar{d}$. Отже, будь-які чотири вектора простору лінійно залежні.

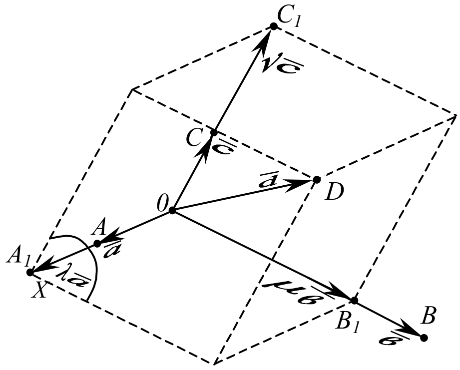


Рис. 1.10

1.9. Метод координат. Однозначний розклад будь-якого вектора по трьом не компланарним векторам дає можливість визначити вектори, а також точки простору трійками чисел (координатами). Завдяки цьому стає можливим у векторній алгебрі застосовувати такі скалярні аналітичні методи, які заміняють операції з векторами операціями над їх координатами — трійками чисел. Тому стає можливим застосування векторної алгебри в аналітичній геометрії, а також у різних областях математики.

Трійка некомпланарних ортів $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ зі спільним початком у точці О називається ***базисом векторного простору*** (позначається: $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$). Будь-який вектор $\bar{d}$ у цьому базисі розкладається

$$\bar{d} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3,$$

скаляри x_1, x_2, x_3 називаються координатами вектора $\bar{d}$ і позначаються:

$$\bar{d} = (x_1, x_2, x_3).$$

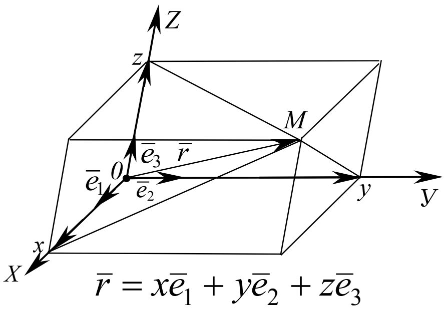


Рис. 1.11

Положення будь-якої точки М у просторі визначається в базисі ($\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$) радіус-вектором $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.11)

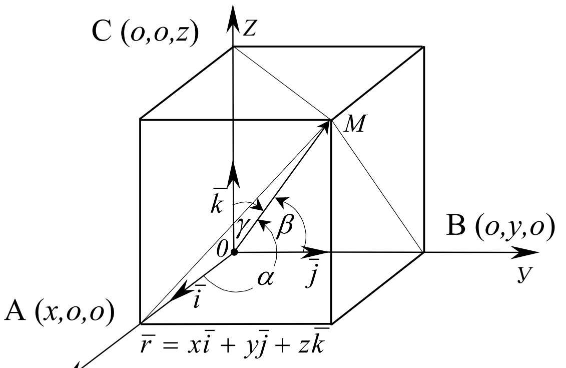
$\bar{r} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}$.

Координати радіус-вектора $\bar{r} = (x, y, z)$ називаються і координатами точки *M (x, y, z)* у цьому базисі простору.

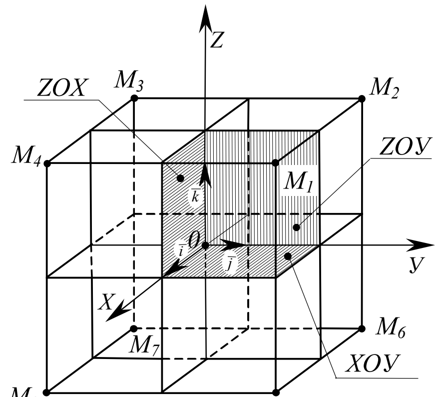
Орти $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ відповідно визначають осі *Ox, Oy, Oz* косокутної системи координат O*xyz*.

Таким чином, між точками простору в базисі ($\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$) і трійками скалярів — їх координат існує взаємно однозначна відповідність. Це перший принцип аналітичної геометрії в просторі.

Якщо некомпланарні орти базису ($\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$) взаємно ортогональні, то вони утворюють ортогональний базис $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ векторного простору: $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1, \quad \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$, який визначає прямокутну систему координат O*xyz*. Орти $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ відповідно визначають осі координат: O*x* — вісь абсцис, O*y* — вісь ординат, O*z* — вісь аплікат (рис. 1.12). У базисі $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ радіус-вектор $\bar{r} = (x, y, z)$ точки *M* (*x, y, z*) записується у вигляді: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.



а)



б)

Рис. 1.12

На площині косокутна та ортогональна системи координат визначаються відповідно базисами: $(\overline{e_1},\ \overline{e_2})$ та ($\bar{i}$, $\bar{j}$).

У базисі $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда. Тому модуль радіус-вектора $\bar{r} = (x, y, z)$ дорівнює $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. На рис. 1.12 б) показано модель прямокутної системи координат *Oxyz.*

Позначимо в прямокутних трикутниках (рис. 1.12 а)) $\Delta AOM, \Delta BOM$ і ΔCOM відповідно кути: $\bar{i},\bar{r} = \alpha$, $(\bar{j},\bar{r}) = \beta$, $(\bar{k},\bar{r}) = \gamma$. Косинуси цих кутів: $\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\bar{r}$. У цих трикутниках $(\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \frac{\pi}{2})$: $\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{r}|}$;.

$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{r}|}; \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{r}|}$ Звідси:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{|\bar{r}|^2} + \frac{y^2}{|\bar{r}|^2} + \frac{z^2}{|\bar{r}|^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\bar{r}|^2} = 1.$$

Отже, $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.1)$$

1.10. Лінійні операції над векторами в координатній формі

1. Алгебраїчне додавання (сума та різниця векторів).

Нехай $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \pm (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = (x_1 \pm x_2)\bar{i} + (y_1 \pm y_2)\bar{j} + (z_1 \pm z_2)\bar{k}$,

$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2)$.

2. Множення вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ на скаляр λ: $\lambda\bar{a} = (\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)$.

3. Визначення вектора $\bar{a}$ за його початком і кінцем.

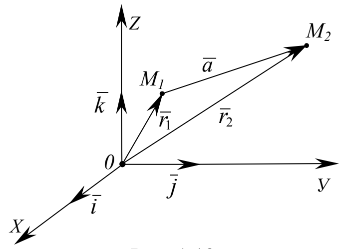


Рис. 1.13

Нехай (рис. 1.13) $\bar{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$. Тоді $\bar{a} = \bar{r_2} - \bar{r_1} = \overline{(x_2, y_2, z_2)} - \overline{(x_1, y_1, z_1)} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

4. Модуль вектора $\bar{a}$ з початком у точці (x_1, y_1, z_1) і кінцем у точці (x_2, y_2, z_2) визначається як відстань між цими точками:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

а його напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\bar{a}|}.$$

1.11. Поділ відрізка в заданому відношенні. Знайти точку M (x, y), яка лежить між точками M_1 (x_1, y_1) і M_2 (x_2, y_2) або поза ними на прямій M_1M_2 та ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ (рис. 1.14).

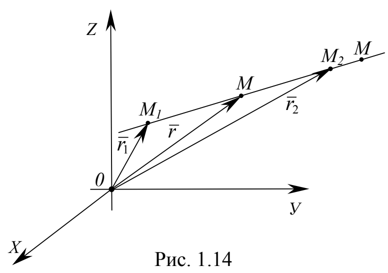


Рис. 1.14

Якщо $\overrightarrow{M_1M} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MM_2}$, то $\lambda > 0$ (точка M ділить внутрішньо відрізок M_1M_2).

Якщо $\overrightarrow{M_1M} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MM_2}$, то $\lambda < 0$ (точка M ділить зовнішньо відрізок M_1M_2).

З рівностей: $\bar{r} - \bar{r_1} = \lambda(\bar{r_2} - \bar{r})$ і $\bar{r} - \bar{r_1} = -\lambda(\bar{r} - \bar{r_2})$, знаходимо

$$\bar{r} = \frac{\bar{r_1} + \lambda \bar{r_2}}{1+\lambda},$$

або в координатах

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\ \lambda \neq -1. \tag{1.2}$$

Зокрема, якщо λ=1, то точка $M(x,y,z)$ — середина відрізка M_1M_2. Тоді

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

З відношення $M_1M : M\,M_2 = \lambda$ випливає, якщо довільна точка M переміщується від M_1 до M_2, то $\lambda \in [0,\infty)$; якщо вона переміщується в напрямі $\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{M_2M_1})$ поза точкою $M_2(M_1)$, то $\lambda \in (-\infty,-1)$ $\lambda \in (-1,0)$ (рис. 1.15). Отже, $\lambda \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup [0,+\infty)$.

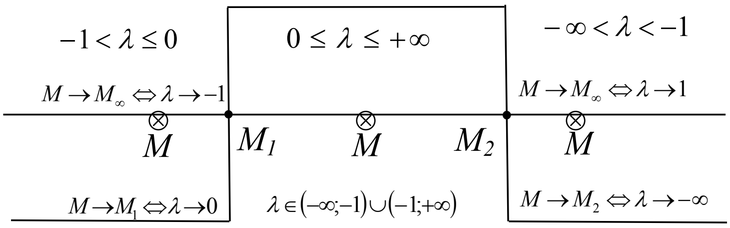


Рис. 1.15

З фізики відомо, якщо в точках $M_1(\bar{r_1})$ і $M_2(\bar{r_2})$ містяться відповідно маси m_1 і m_2, то центр цих мас є точка $M(\bar{r})$, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні, обернено пропорційно масам $\left(\lambda = \frac{m_2}{m_1}\right)$. Використовуючи ділення відрізка в заданому відношенні, дістанемо формулу центра мас $M(r)$ двох матеріальних точок:

$$\bar{r} = \frac{m_1\bar{r_1} + m_2\bar{r_2}}{m_1 + m_2}.$$

Центр мас $M(\bar{r})$ матеріальної системи мас: $m_1, m_2, ..., m_n$, які містяться відповідно в точках M_1 $(\bar{r_1})$, $M_2(\bar{r_2}), ..., M_n(\bar{r_n})$ визначається за формулою

$$\bar{r} = \frac{m_1\bar{r_1} + m_2\bar{r_2} + ... + m_n\bar{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \bar{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Рівнодійна паралельних сил тяжіння, прикладена в центрі мас $M(r)$ матеріальної системи, дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i g$, де g = 9,81 $м/сек^2$.

Геометрична побудова точок відрізку M_1M_2, які ділять його внутрішньо та зовнішньо у відношенні λ = m : n. З точки M_1 проводимо довільний промінь M_1M, на якому відкладаємо відрізки m і n, відношення яких задано $\lambda = \frac{m}{n}$ (рис. 1.16). З точки A проводимо пряму, паралельну до прямої M_2C, її точка M_3 перетину з відрізком M_1M_2 ділить його внутрішньо у відношенні: $M_1M_3 : M_3M_2 = m : n = \lambda.$ З точки A проводимо пряму, паралельну до прямої B

M_2, її точка M_4 перетину з прямою відрізка M_1M_2 ділить його зовнішньо у відношенні: $M_1M_4 : M_2M_4 = m : n = \lambda$.

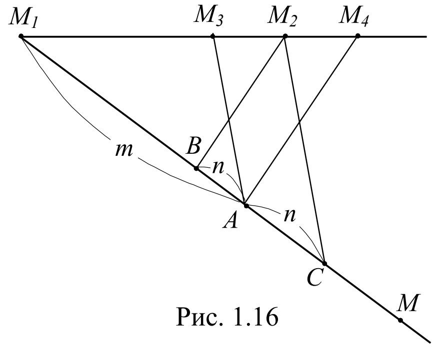


Рис. 1.16

Якщо на відрізку M_3M_4 як на діаметрі побудувати коло, то воно є г.м.т., відношення відстаней яких до заданих точок M_1 і M_2 дорівнює λ. Це коло називається *колом Аполлонія*.

Розглянемо відношення колінеарних векторів

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}} = -\frac{\overrightarrow{M_1M_4}}{\overline{M_4M_2}} \quad \text{або} \quad \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_4M_2}} = -1.$$

Позначимо на числовій осі Ox координати точок: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$. Тоді ці відношення колінеарних векторів через координати мають вигляд

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = -1.$$

Це відношення чотирьох точок називається гармонічним.

1.12. Основні теореми про скалярні проекції.

Теорема 1. Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь $\overline{s}$ (позначається: $Пр_{\bar{s}}\overline{a}$ або $\overline{a}_{\bar{s}}$) дорівнює добутку модуля вектора $\overline{a}$ на косинус кута $\varphi = (\overline{a}, \wedge \overline{s})$:

$$\overline{a}_{\bar{s}} = a\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi,$$

тут (рис. 1.17) проектуючі площини:

$\Pi_1, \Pi_2 \perp \bar{s}, AC \| \bar{s}, \angle ACB = \frac{\pi}{2}, AC \| A_1B_1, AC = A_1B_1, \angle BAC = \varphi, \overline{a}_{\bar{s}} = AC$, коли $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ і $\overline{a}_{\bar{s}} = -AC$, якщо $\pi < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Отже, $\overline{a}_s = a\cos\varphi$; $\overline{a}_{\bar{s}} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

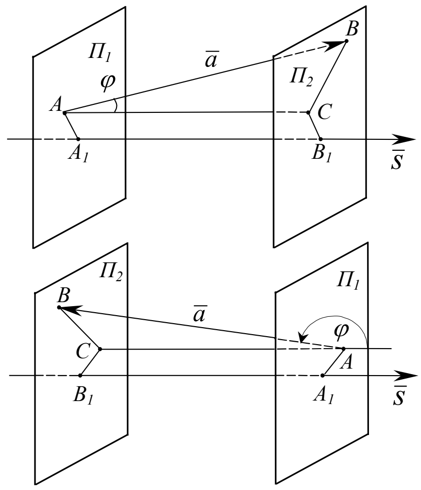


Рис. 1.17

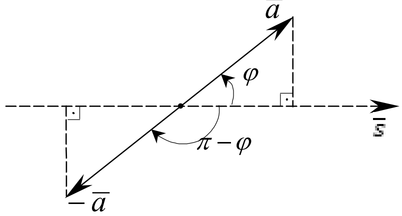


Рис. 1.18

Наслідки 1. Рівні вектори мають рівні проекції на вісь $\vec{s}$. Якщо $\bar{a} = \bar{b}$ то $\bar{a}_{\bar{s}} = \bar{b}_{\bar{s}}$.

2. Проекції двох взаємно протилежних векторів на вісь $\bar{s}$ відрізняються тільки знаками (рис. 1.18) $\left(-\bar{a}\right)_{\bar{s}} = -\bar{a}_{\bar{s}}$, тут: $\left(-\bar{a}\right)_{\bar{s}} = a\cos(\pi - \varphi) = -a\cos\varphi = -\bar{a}_{\bar{s}}$.

Теорема 2. Проекція суми векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ на вісь $\bar{s}$ дорівнює сумі проекцій доданків на вісь $\bar{s}$:

$\left(\overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_n}\right)_{\bar{s}} = \overline{a_1}_{\bar{s}} + \overline{a_2}_{\bar{s}} + ... + \overline{a_n}_{\bar{s}}$, тут (рис. 1.19): сума векторів $\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}$ визначається за правилом многокутника, а проекції $\overline{a_i}_{\bar{s}}$, $i = \overline{1, n}$, та їх сума $\sum_{i=m}^{n} \overline{a_i}_{\bar{s}}$ на осі $\bar{s}$ — за правилом: кінець $\overline{a_1}_{\bar{s}}$ є початком $\overline{a_2}_{\bar{s}}, ...$, кінець $\bar{a}_{n-1_{\bar{s}}}$ є початком $\overline{a_n}_{\bar{s}}$. Тому $\overline{A_1 A_n}_{\bar{s}} = \overline{A_1' A_{n_{\bar{s}}}'}$, тобто $\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\right)_{\bar{s}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}_{\bar{s}}$.

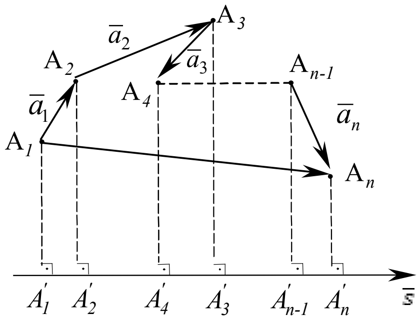


Рис.1.19

Теорема 3. Проекція добутку скаляра λ і вектора $\bar{a}$ на вісь $\bar{s}$ дорівнює добутку цього скаляра та проекції вектора $\bar{a}$ на вісь $\vec{s}$: $\left(\lambda\bar{a}\right)_{\bar{s}} = \lambda\left(\bar{a}_s\right)$, тут: $\left(\lambda a\right)_s = \left|\lambda\bar{a}\right|\cos\varphi = \lambda a\cos\varphi = \lambda\bar{a}_{\bar{s}}$, коли $\lambda > 0$. Якщо $\lambda < 0$, то $(\lambda\,\bar{a}, \wedge\,\bar{s}) = \pi - \varphi$. Тоді $\left(\lambda\bar{a}\right)_s = \left|\lambda\bar{a}\right|\cos(\pi - \varphi) = -\lambda a(-\cos\varphi) = \lambda a\cos\varphi = \lambda\bar{a}_{\bar{s}}$.

Наслідок з теорем 2 і 3. Проекція лінійної комбінації векторів дорівнює лінійній комбінації їх проекцій:

$$\left(\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n}\right)_{\bar{s}} = \lambda_1\overline{a}_{1_{\bar{s}}} + \lambda_2\overline{a}_{2\bar{s}} + ... + \lambda_n\overline{a}_{n\bar{s}}.$$

Задачі

1. Визначити сторону c ΔABC, якщо відомі дві його сторони a і b та кут φ між ними.

Розв'язання. Розглянемо сторони ΔABC як вектори. Тоді $\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$. Для визначення $c = \left|\bar{c}\right|$ достатньо обчислити квадрат вектора

$$\bar{c}^2 = \left(\bar{b} - \bar{a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{c}^2 = \bar{b}^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}^2.$$

Оскільки $\bar{c}^2 = c^2$, $\bar{a}^2 = a^2$, $\bar{b}^2 = b^2$ і $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\varphi$, то $c^2 = a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2$.

Це є теорема косинусів.

2. У ΔABC відомі сторони a, b, c і медіани p, q, l. Довести рівність:

$$p^2 + q^2 + l^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Доведення. Сторони ΔABC розглядаємо як вектори (рис. 1.20). Тоді $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ і медіани виражаються через вектори

$$\bar{p} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{c}, \quad \bar{q} = \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}, \quad \bar{l} = \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{b}.$$

Сума квадратів цих векторів

$$p^2+q^2+l^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

З рівності $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)^2=0 \quad a^2+b^2+c^2+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)=0$.

Звідси $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}=-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Тоді

$$p^2+q^2+l^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Звідки:

$$p^2+q^2+l^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

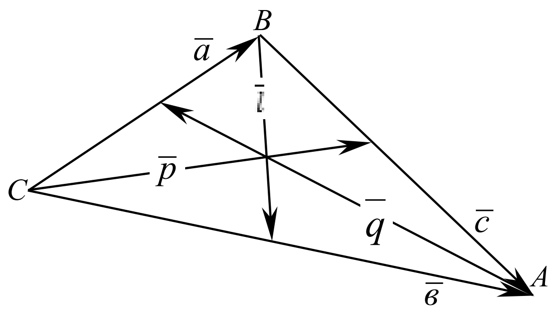


Рис. 1.20

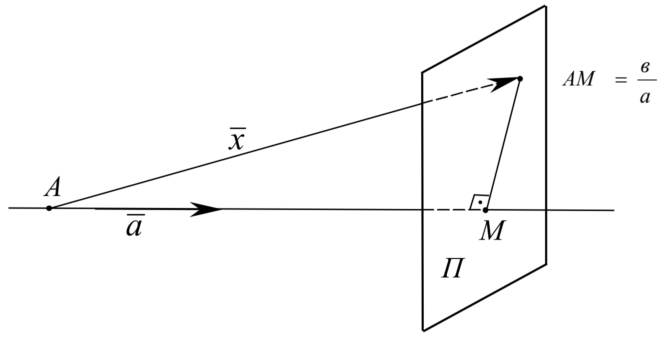


Рис. 1.21

3. Знайти г.м.т. кінця змінного вектора $\overline{x}$ з початком е точці *A*, якщо $\overline{x}\cdot\overline{a}=b$.

Розв'язання. Пряма $l-$вісь вектора $\overline{a}$. З рівності $\overline{x}\cdot\overline{a}=b\Rightarrow a\overline{x}_{\overline{a}}=b$, звідси $\overline{x}_{a}=\frac{\alpha}{a}$. Кінці змінного вектора $\overline{x}$ проектуються на вісь *l* в точку *M*, відстань якої від точки *A* дорівнює $\frac{b}{a}$ (рис. 1.21). Отже, г.м.т. кінця змінного вектора $\overline{x}$ є площина, що проходить через точку *M* і перпендикулярна до вектора $\overline{a}$.

4. Довести, що з трьох медіан будь-якого трикутника можна побудувати трикутник.

Розв'язання. У ΔABC: $\overline{AC}=\overline{b}$, $\overline{CB}=\overline{a}$, $\overline{BA}=\overline{c}$ і $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ — вектори медіан. Сума векторів: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Тоді

$$\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{a}+\overline{c},\quad \overline{BB_1}=\frac{1}{2}\overline{b}+\overline{a},\quad \overline{CC_1}=\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{b}.$$ Сума векторів — медіан

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{3}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{0}.$$

Отже, з медіан будь-якого трикутника можна побудувати трикутник.

5. Побудувати трикутник, якщо задані середини його сторін: M_1, M_2, M_3.

Розв'язання. За полюс O радіус-векторів заданих точок M_1, M_2, M_3 і точок шуканих вершин трикутника приймемо точку $M_1(0)$. Тоді радіус-вектори шуканих точок (рис. 1.22): $\overline{M_1A_1}=\overline{x_1}$, $\overline{M_1A_2}=\overline{x_2}$, $\overline{M_1A_3}=\overline{x_3}$

і радіус-вектори заданих точок: $\overline{M_1M_2}=\overline{r_2}$ $\quad \overline{M_1M_3}=\overline{r_3}$ і $\overline{M_1M_1}=\overline{r_1}=\overline{0}$.

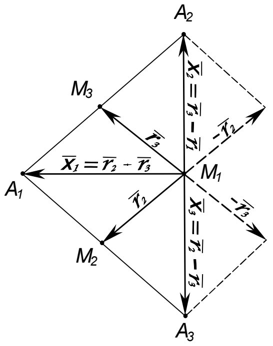


Рис. 1.22

Радіус-вектори $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}$ вершин шуканого трикутника є вектори діагоналей паралелограмів, побудованих відповідно на векторах $\overline{r_2},\overline{r_3};\ \overline{r_3},-\overline{r_2};\ \overline{r_2},-\overline{r_3}$. Отже, вершини трикутника:

$\overline{x_1}=\overline{r_2}+\overline{r_3},\quad \overline{x_2}=\overline{r_3}-\overline{r_2},\quad \overline{x_3}=\overline{r_2}-\overline{r_3}$.

6. У паралелограмі *ABCD* точки *E* і *F* середини відповідно сторін *BC* і *DC*. Довести, що прямі *AE* і *AF* ділять *BD* на три рівні частини.

Розв'язання. Нехай $\overline{AB}=\overline{a},\quad \overline{AD}=\overline{b}$. Позначимо точки перетину $H = AF\bigcap BD,\ G = AE\bigcap BD.$ Тоді

$$\overline{AH}=x\overline{AF}=x\left(\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}\right),\quad \overline{HB}=y\overline{DB}=y\left(\overline{a}-\overline{b}\right),$$

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}=\overline{a}\ =\ x\left(\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}\right)+y\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{2}x+y-1\right)\overline{a}+\left(x-y\right)\overline{b}=\overline{0}.$$

Звідси $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y-1=0,\\ x-y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \mathrm{x}=\mathrm{y}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \overline{HB}=\frac{2}{3}\overline{DB}$.

Аналогічно знаходимо, що $\overline{DG}=\frac{2}{3}\overline{DB}$. Тому *HB=DG.*

Отже, $DH=HG=GB=\frac{1}{3}DB$.

7. Знайти модуль вектора $\overline{a}=\left(8;-12;9\right)$, його проекції на координатні площини та напрямні косинуси.

Розв'язання. Модуль вектора $\overline{a}=\sqrt{8^2+12^2+81}=17$. Проекції вектора $\overline{a}$ на координатні площини:

$\overline{a}_{xy}=\sqrt{8^2+12^2}\approx 14{,}42,\ \ \overline{a}_{\mathrm{xz}}=\sqrt{8^2+9^2}\approx 20{,}04\quad \overline{a}_{\mathrm{yz}}=\sqrt{12^2+9^2}=15.$

Напрямні косинуси:

$\cos\alpha=\frac{8}{17},\quad \cos\beta=-\frac{12}{17},\quad \cos\gamma=\frac{9}{17}.$

8. Напрямні косинуси осі вектора $\alpha=60°,\ \beta=60°,\ \ \gamma=45°$. Напрям осі змінився так, що всі напрямні кути змінилися на однакову величину. Знайти цю величину.

Розв'язання. З формули $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\ \Rightarrow\cos^2(60°+\varphi)+\cos^2(60°+\varphi)+\cos^2(45°+\varphi)=1,$

Очевидно, одним розв'язком є φ=180°.

Виконаємо перетворення:

$1+\cos(120°+2\varphi)+\frac{1}{2}\leftarrow(1+\cos(90°+2\varphi))=1,\Rightarrow$

$\sin(30°+2\varphi)+\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\frac{1}{2},\Rightarrow \cos 2\varphi+(\sqrt{3}+1)\sin 2\varphi=1,\ (\sqrt{3}+1)\sin 2\varphi=2\sin 2\varphi$

$(\sqrt{3} + 1)\cos\varphi = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \text{arctg}\,(\sqrt{3}+1)$

$$1+\cos(120° + 2\varphi)+\frac{1}{2}\big(1+\cos(90° + 2\varphi)\big) = 1, \Rightarrow$$

$$\sin(30° + 2\varphi)+\frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}, \Rightarrow \cos 2\varphi + \left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2\varphi = 1, \left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2\varphi = 2\sin 2\varphi,$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\varphi = \sin\varphi \quad \Rightarrow \varphi = arctg(\sqrt{3}+1).$$

Розв'язок рівняння є $\varphi = artcg\, 2{,}7321 + n\,\pi$, $n \in z$, при $n = 0;1$ дістаємо:

$\varphi = 69°54'$ і $\varphi = 249°54'$.

9. Знайти координати центра мас $S(x,y,z)$ $\Delta ABC,$ вершини якого $A(x_1,y_1,z_1),$ $B(x_2,y_2,z_2)$ і $C(x_3,y_3,z_3).$

Розв'язання. У ΔABC :

$$\bar{r} = \overline{OS} = \overline{OC} + \overline{CS} = \bar{r}_3 + \frac{2}{3}\overline{CM} = \bar{r}_3 + \frac{2}{3}(\bar{r}_m - \bar{r}_3) = \bar{r}_3 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) - \bar{r}_3\right] = \frac{1}{3}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3).$$

У координатах

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Координати центра мас трикутника є середньо арифметичні відповідних координат вершин трикутника.

10. У паралелограмі *ABCD* вершини $A(5,-2,5),$ $B(7,2,9),$ $C(3,8,7).$ Знайти вершину $D(x,y,z)$.

Розв'язання. Вектор $\overline{BA} = (2,4,4) = \overline{CD} = (x-3, y-8, z-7)$

З рівності векторів маємо

$$\begin{cases} x-3 = 2, \\ y-8 = 4, \Rightarrow D(5,12,11). \\ z-7 = 4 \end{cases}$$

11. Точки $A_1 \in AB,$ $B_1 \in BC$ *і* $C_1 \in BC$ поділяють сторони ΔABC у відношенні $m:n.$ Довести, що центри мас ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ співпадають.

Доведення. Нехай M і M_1 центри мас відповідно ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, їх радіус-вектори $\overline{OM}$ та $\overline{OM_1}$ з початком у точці O дорівнюють

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right) \text{ і } \overline{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}\right).$$

Знайдемо $\overline{OM} - \overline{OM_1} = \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}\right).$

За умовою: $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m}{n} \Rightarrow \overline{AA_1} = \frac{m}{m+n}\overline{AB},\quad \overline{BB_1} = \frac{m}{m+n}\overline{BC},\quad \overline{\mathrm{CC}_1} = \frac{m}{m+1}\overline{CA}.$

Тоді $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\frac{m}{m+n}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right),$ де $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Звідси $\overline{MM_1} = \bar{0},$ тобто точки M і M_1 співпадають.

12. У ΔABC точки $G \in AC, D \in BC, F = BG \cap AD;$ вектори $\overline{AC} = \bar{b},$ $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AG} = \frac{1}{3}\bar{b},$ $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$

Знайти точку $F(x,y).$

Розв'язання. У ΔABC

$$\overline{DF} = x\overline{DA},\ \overline{GF} = y\overline{GB},\ \overline{BC} = \overline{b} - \overline{a},\ \overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{b} - \overline{a}\right),\ \overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{b},$$

$$\overline{DA} = \overline{DB} + \overline{BA} = -\frac{1}{2}\left(\overline{b} - \overline{a}\right) - \overline{a} = -\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b},$$

$$\overline{GB} = \overline{GA} + \overline{AB} = -\frac{1}{3}\overline{b} + \overline{a},$$

$$\overline{DF} = x\overline{DA} = -\frac{1}{2}x\overline{a} - \frac{1}{2}x\overline{b},$$

$$\overline{FB} = \overline{GB} - \overline{GF} = \overline{GB} - y\overline{GB} = (1-y)\overline{GB} = (1-y)\overline{a} - \frac{1}{3}(1-y)\overline{b}.$$

Тоді

$\overline{BD} + \overline{DF} + \overline{FB} = 0.$ Підставляємо значення цих векторів, дістанемо $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y\right)\overline{a} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\overline{b} = 0,\ \overline{a} \neq \overline{0},\ \overline{b} \neq \overline{0},\ \overline{a} \nparallel \overline{b}$, звідси

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y = 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

13. Розкласти вектор $\overline{d} = (5,2,-11)$ по векторам $\overline{a} = (3,7,4)$, $\overline{b} = (-5,2,3)$ і $\overline{c} = (4,-3,-7)$

Розв'язання. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні, оскільки

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -42 + 60 + 84 - 32 + 27 - 245 = -148 \neq 0,$$

вони утворюють базис $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$. Вектор $\overline{d}$ розкладається за цим базисом

$$\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

У координатах заданих векторів:

$$(5,2,-11) = x(3,7,4) + y(-5,2,3) + z(4,-3,-7).$$

З рівності векторів дістаємо

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 5, \\ 7x + 2y - 3z = 2, \\ 4x + 3y - 7z = -11 \end{cases} \Rightarrow (1,2,3).$$

Отже,

$$d = \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}.$$

14. Через точку Q перетину медіан ΔABC проведено пряму l, яка перетинає сторони CA та CB відповідно в точках $A_1 = l \cap CA,\ B_1 = l \cap CB,\ C_1 = \overline{CQ} \cap \overline{AB}.$ Довести, що $\frac{AA_1}{A_1C} + \frac{BB_1}{B_1C} = 1.$

Доведення. Позначимо: $\frac{AA_1}{A_1C} = x,\ \frac{BB_1}{B_1C} = y,\ \frac{A_1Q}{QB_1} = \frac{m}{n}.$

Тоді

$$\overline{CA_1} = \frac{1}{x+1}\overline{CA},\ \overline{CB_1} = \frac{1}{y+1}\overline{CB}.$$

Підставляємо значення векторів $\overline{CB_1}$ і $\overline{CA_1}$ у вектор $\overline{CQ} = \frac{m}{n+n}\overline{CB_1} + \frac{n}{m+n}\overline{CA_1}$, дістанемо

$$\overline{CQ} = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{y+1}\overline{CB} + \frac{n}{m+n}\cdot\frac{1}{x+1}\overline{CA}.$$

Вектор

$$\overline{CC_1} = \frac{3}{2}\overline{CQ} = \frac{3}{2}\left(\frac{m}{(m+n)(y+1)}\overline{CB} + \frac{n}{(m+n)(x+1)}\overline{CA}\right).$$

Вектор $\overline{CC_1}$ дорівнює $\frac{1}{2}$ вектор-діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$, тобто $\overline{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CA}\right)$. З рівності векторів

$$\frac{3}{2}\frac{m}{(m+n)(y+1)}\overline{CB} + \frac{3}{2}\frac{n}{(m+n)(x+1)}\overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{CA}$$

маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\frac{m}{(m+n)(y+1)} = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}\frac{n}{(m+n)(x+1)} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{m+n} = \frac{y+1}{3}, \\ \frac{n}{m+n} = \frac{x+1}{3}, \end{cases}$$

звідси

$$\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+1} = \frac{x+y+2}{3} \Rightarrow 1 = \frac{x+y+2}{3} \Rightarrow x+y=1,$$

тобто

$$\frac{AA_1}{A_1C} + \frac{BB_1}{B_1C} = 1.$$

Вправи

1. M — точка перетину медіан ΔABC. Довести, що $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

2. Визначити вектор, що ділить навпіл кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

3. У ΔABC вектори $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$. Побудувати вектори $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$, $\frac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$, $\frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$, $-\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$.

4. За яких умов існують такі співвідношення:

1) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$; 2) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| > \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$; 3) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| < \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$?

5. Дано $\left|\overline{a}\right| = 11$; $\left|\overline{b}\right| = 29$ і $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = 20$. Обчислити $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$.

6. За даними трьома вершинами паралелограма $A(\overline{r_1})$, $B(\overline{r_2})$, *і* $C(\overline{r_3})$ знайти четверту його вершину D, протилежну B.

7. Визначити точку перетину медіан трикутника через радіус-вектори вершин.

8. Довести, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці. Визначити радіус-вектор цієї точки через радіус-вектори вершин тетраедра.

9. У ΔOAB сторона AB поділена точкою P у відношенні $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$. Розкласти вектор $\overrightarrow{OP}$ за векторами $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$.

10. $OABCDE$ — правильний шестикутник, у якого $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OE} = \overline{b}$. Розкласти вектори $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

11. На векторах $\overline{OA}=\overline{a},\ \overline{OB}=\overline{b},\ \overline{OC}=\overline{c}$ побудовано паралелепіпед. Точка M — центр грані, яка проходить через точку C і паралельна векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Розкласти вектор $\overline{OM}$ за векторами $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$.

12. У кубі з вершинами Ак, $k=\overline{1,8}$, точка $M\in A_2A_3A_7A_6$ і $\overline{A_2M}=\frac{2}{3}\overline{A_2A_3}+\frac{3}{4}\overline{A_2A_6}$. Розкласти $\overline{A_1M}$ за векторами $\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_1A_6}$.

13. У кубі з вершинами Ак, $k=\overline{1,8}$, точка $M\in A_2A_8$ і $\overrightarrow{A_8M}=\frac{1}{4}\overline{A_2A_8}$. Точка $K=A_7M\bigcap A_1A_4A_8A_5$. Розкласти A_1K за векторами $\overline{A_1A_4}$ і $\overline{A_1A_5}$.

14. У кубі з вершинами AK, $k=\overline{1,8}$, точка M ділить навпіл ребро A_1A_5. Точка $K\in A_1A_7$ і $\overline{A_1K}=\frac{1}{6}\overline{A_1A_7}$. Точка $L=MK\bigcap A_1A_2A_3A_4$. Розкласти вектор A_1L за $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$.

15. Точки A, B, C, D — вершини паралелограма, O — його центр. Розкласти вектори $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{DA}$ за векторам $\overline{a}=\overline{AO},\ \overline{b}=\overline{BO},\ \overline{c}=\overline{CO},\ \overline{d}=\overline{DO}$.

16. Розкласти вектор $\overline{r}$ = (11, –6, 5) у базисі $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$, якщо $\overline{a}=(2,1,-3)$, $\overline{b}=(3,-2,1)$, $\overline{c}=(-1,1,-2)$.

17. Розкласти вектор $\overline{r}=(9,4)$ у базисі $\overline{a},\ \overline{b}$, якщо $\overline{a}=(1,\,2)$, $\overline{b}=(2,-3)$.

18. Задано вектори $\overline{a}=(2,-3,4)$ і $\overline{b}=(-2,1,0)$. Знайти координати векторів:

$1)\overline{a}+\overline{b},\quad 2)\overline{a}-\overline{b},\quad 3)2\overline{a}+3\overline{b},\quad 4)\frac{1}{3}\left(2\overline{a}-\overline{b}\right).$

19. Задані точки $A(-2,2)$, $C(5,1)$ вершин квадрата $ABCD$. Знайти вершини B і D.

20. Задані точки $A(3,-2,1)$, $B(5,-1,-1)$, $C(1,1,7)$. Знайти вектор бісектриси $\angle BAC$.

§ 2. Скалярний добуток двох векторів

2.1. Скалярний добуток двох векторів (означення). Закони скалярного добутку. Кут φ між двома векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ зі спільним початком O позначається:

$\left(\overline{a},\wedge\overline{b}\right)=\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad \overline{a}\ne 0,\ \overline{b}\ne 0.$

Якщо $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$, то $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b},\ \overline{a}\perp\overline{b},\ \overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$ відповідно; якщо один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ нульовий, то кут між ними невизначений.

Означення. Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначається: $\overline{a}\cdot\overline{b}$) називається число (скаляр), що дорівнює добуткові модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$\overline{a}\cdot\overline{b}=ab\cos\varphi.$

Якщо $\overline{a}\ne\overline{0},\ \overline{b}\ne\overline{0}$, то для $0\le\varphi<\frac{\pi}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ скалярний добуток: $\overline{a}\cdot\overline{b}\ge 0$; якщо $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}<0$, якщо $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$, то відповідно:

$\overline{a}\cdot\overline{b}=ab\ \Leftrightarrow\ \overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b};\ \overline{a}\cdot\overline{b}=0\ \Leftrightarrow\ \overline{a}\perp\overline{b};\ \overline{a}\overline{b}=-ab\ \Leftrightarrow\ \overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}.$

Вираз скалярного добутку через добуток модуля одного вектора на проекцію його на інший вектор (рис. 1.23):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a\overline{b}_{\overline{a}}=b\overline{a}_{\overline{b}}.\qquad(1.3)$$

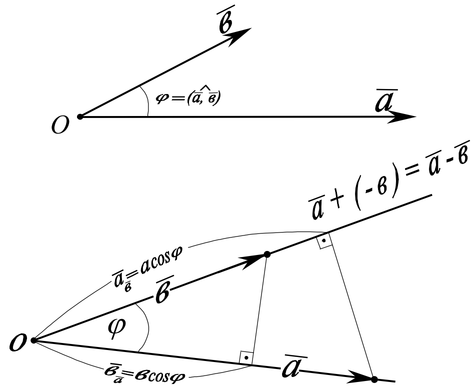


Рис. 1.23

Закони скалярного добутку:

1) $\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$ — переставний,

2) $\bar a\cdot(\bar b+\bar c)=\bar a\cdot\bar b+\bar a\cdot\bar c$ — розподільний,

3) $(\lambda\bar a)\cdot\bar b=\lambda(\bar a\cdot\bar b)$ — сполучний відносно скалярного множника.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату модуля: $\bar a^2=\bar a\cdot\bar a=a^2$. Отже, $a=\sqrt{a^2}$.

Кут між векторами $\bar a$ і $\bar b$ визначається з рівності $\cos(\bar a,\hat{}\,\bar b)=\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{ab}$.

Таблиця скалярного добутку ортів:

•	$\bar i$	$\bar j$	$\bar k$
$\bar i$	1	0	0
$\bar j$	0	1	0
$\bar k$	0	0	1

2.2. Вираз скалярного добутку через координати. Нехай $\bar a=(x_1,y_1,z_1)$ і $\bar b=(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\bar a\cdot\bar b=(x_1\bar i+y_1\bar j+z_1\bar k)\cdot(x_2\bar i+y_2\bar j+z_2\bar k).$$

За таблицею скалярного добутку ортів і закону сполучення відносно скалярних множників маємо:

$$\bar a\cdot\bar b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

Проекція вектора $\bar a=(x,y,z)$ на вісь $\overline{e^\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$:

$$\bar a\cdot\overline{e^\circ}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Формула косинуса кута $\varphi=(\bar a,\hat{}\,\bar b)$ між векторами $\bar a=(x_1,y_1,z_1)$ і $\bar b=(x_2,y_2,z_2)$

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (1.4)$$

Напрямні косинуси вектора $\bar a=(x,y,z)$ визначається за формулою

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Для напрямних косинусів справедлива рівність: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Модуль вектора $\bar a=(x,y,z)$ дорівнює $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Необхідна й достатня умова перпендикулярності векторів $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$

Задано точки $A(2, -4, 0)$ і $B(6, 8, 4)$. Обчислити проекцію вектора $\overline{AB}$ на вісь $\bar{e}$, напрямні кути якої однакові: $\alpha = \beta = \gamma$, гострі.

Розв'язання. Оскільки $\alpha = \beta = \gamma$, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{і} \quad \bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad |\bar{e}| = 1.$$

Вектор $\overline{AB} = (4,\ 12,\ 4)$. Тоді

$$\overline{AB}_{\bar{e}} = \overline{AB} \cdot \bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4 + 12 + 4) = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

2. Задано точки $A(3, 1, 0)$, $B(0, -2, 6)$, $C(3, -2, 0)$ і $D(1, -2, 4)$. Обчислити проекцію $\overline{AB}$ на вісь $\overline{CD}$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overline{AB} = (-3, -3, 6)$ і $\overline{CD} = (-2, 0, 4)$. Тоді

$$\overline{AB}_{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{CD} = \frac{6 + 24}{\sqrt{20}} = \frac{30}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

3. Знайти модуль вектора $\bar{a} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2}$, $\quad |\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = 1, \quad \left(\overline{e_1}, {}^\wedge\, \overline{e_2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Розв'язання. За формулою квадратного скаляра дістаємо:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{\left(2\overline{e_1} - \overline{e_2}\right)^2} = \sqrt{4e_1^2 - 4\overline{e_1}\overline{e_2} + e_2^2} = \sqrt{5 - 4\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \approx 1{,}682.$$

4. Обчислити кут між двома діагоналями куба.

Розв'язання. Ребра куба зі спільною вершиною збігаються з ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Діагоналі двох суміжних граней зі спільним ребром у напрямі орта $\bar{k}$ визначаються відповідно векторами $\bar{i} + \bar{k}$ і $\bar{k} + \bar{j}$, кут між ними $\varphi = \left(\bar{j} + \bar{k}, {}^\wedge\, \bar{k} + \bar{i}\right)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{i} + \bar{k}\right)\cdot\left(\bar{k} + \bar{j}\right)}{\left|\bar{i} + \bar{k}\right| \cdot \left|\bar{j} + \bar{k}\right|} = \frac{(1, 0, 1)\cdot(0, 1, 1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

5. Вершини трикутної піраміди $A(1, 0, 2)$, $B(3, -2, 1)$, $C(-1, 1, -2)$, $D(2, -2, 4)$. Знайти вектор $\overline{DO}$, який суміщається з висотою піраміди.

Розв'язання. Нехай $\overline{DO} = \bar{x} = (x,\ y,\ z)$. Тоді

$\overline{AB} = (2, -2, -1)$, $\overline{AC} = (-2, 1, -4)$, $\overline{AO} = \overline{DO} + \overline{AD} = (x + 1,\ y - 2,\ z + 2)$.

З умови $\overline{DO} \perp \overline{AB} \ \Leftrightarrow \ 2x - 2y - z = 0$; $\quad \overline{DO} \perp \overline{AC} \ \Leftrightarrow \ -2x + y - 4z = 0$.

Вектори $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{AB}$ — компланарні, це означає, що

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9x + 10y - 2z - 15 = 0.$$

Координатами вектора $\bar{x}$ є розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0, \\ 2x - y + 4z = 0, \\ 9x + 10y - 2z - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{37}(27,\ 30,\ -6).$$

6. У трикутнику ABC $\overline{BA}=(2,-3)$, $\overline{AC}=(1,2)$. Знайти вектор, який суміщається з висотою, опущеною з вершини A на основу BC.

Розв'язання. Нехай $\overline{AD}=\overline{H}=(x,y)$. Вектор $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}=(3,-1)$. Із $\overline{H}\perp\overline{BC}\Leftrightarrow(x,y)\cdot(3,-1)=3x-y=0$. Знаходимо

$$\cos B=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{BA\cdot BC}=\frac{(2,-3)\cdot(3,-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{130}}\ \Rightarrow\ \sin B=\frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Із ΔABD: $AD=BA\sin B$ або

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}\cdot\frac{7}{\sqrt{130}},\quad x^2+y^2=4{,}9.$$

Координатами вектора $\overline{H}$ є корені системи

$$\begin{cases}3x-y=0,\\ x^2+y^2=4{,}9\end{cases}\ \Rightarrow\ \overline{x}=(0,7;\ 2,1).$$

7. Матеріальна точка переміщається із $A(5,3,-7)$ в $B(4,1,4)$ під дією сил $\overline{F_1}=(3,-4,2)$, $\overline{F_2}=(2,3,-5)$, $\overline{F_3}=(-3,-2,4)$ зі спільним початком у точці А.

Знайти кут між рівнодійною $\overline{R}$ цих сил і переміщенням $\overline{AB}$.

Розв'язання. Рівнодійна $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}=(2,-3,1)$

Переміщення точки:

$\overline{AB}=\overline{S}=(-1,-2,11)$.

Косинус кута $\varphi=\left(\overline{R},\hat{\ }\overline{S}\right)$:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{R}\cdot\overline{S}}{R\cdot S}=\frac{(2,-3,1)\cdot(-1,-2,11)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-2+6+11}{14}=\frac{15}{14}.$$

8. Обчислити довжини діагоналей паралелограма $ABCD$, якщо

$$\overline{AB}=\overline{a},\quad \overline{AD}=\overline{b}\ \text{ і }\ \overline{a}=5\overline{e}_1-7\overline{e}_2,\quad \overline{b}=3\overline{e}_1-4\overline{e}_2,\quad |\overline{e}_1|=1,\ |\overline{e}_2|=2,\ \left(\overline{e}_1\hat{\ }\overline{e}_2\right)=\frac{\pi}{3}$$

Розв'язання. Діагоналі паралелограма:

$\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}=8\overline{e}_1-11\overline{e}_2$ і $\overline{BD}=\overline{a}-\overline{b}=2\overline{e}_1-3\overline{e}_2$.

Довжина діагоналей

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{\left(8\overline{e}_1-11\overline{e}_2\right)^2}=\sqrt{64\overline{e}_1^2-176\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2+121\overline{e}_2^2}=\sqrt{185-176\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}}=3$$

$$\left|\overline{BD}\right|=\sqrt{\left(2\overline{e}_1-3\overline{e}_2\right)^2}=\sqrt{4-12\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2+9}=\sqrt{13-12\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}}=1.$$

9. Обчислити скаляр $\left(2\overline{a}+3\overline{b}\right)\cdot\overline{b}+\left(\overline{a}-5\overline{b}\right)\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)+10$, якщо $|\overline{a}|=5,\ |\overline{b}|=3,\ \left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. За законами скалярного добутку знаходимо:

$$\left(2\overline{a}+3\overline{b}\right)\cdot\overline{b}+\left(\overline{a}-5\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)+10=2\overline{a}\cdot\overline{b}+3\overline{b}^2+2\overline{a}^2+\overline{a}\cdot\overline{b}-10\overline{a}\cdot\overline{b}-5\overline{b}^2+10=$$

$$=-7\overline{a}\cdot\overline{b}-2\overline{b}^2+2\overline{a}^2+10=-7\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot3^2+2\cdot5^2+10=-10{,}5.$$

10. Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ мають рівні модулі і утворюють попарно рівні кути. Знайти координати вектора $\overline{c}$, якщо $\overline{a}=(1,1,0)$, $\overline{b}=(0,1,1)$.

Розв'язання. Модулі $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=\sqrt{2}$. Вектори утворюють між собою рівні кути, тоді:

$\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{b}$ і $\overline{c}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}$; $\overline{a}\cdot\overline{b}=(1,1,0)\cdot(0,1,1)=1$

Нехай $\bar{c}=(x,y,z)$. Тоді

$\bar{c}\cdot\bar{a}=(x,y,z)\cdot(1,1,0)=x+y=1,$

$\bar{c}\cdot\bar{b}=(x,y,z)\cdot(0,1,1)=y+z=1.$

Координатами вектора $\bar{x}$ є корені системи

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \Rightarrow \bar{c}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right) \text{ і } \bar{c}=(1,0,1)$$

11. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. Знайти такий вектор *c*, який з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворює рівні кути.

Розв'язання. На ортах $\overline{a^\circ}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, $\overline{b^\circ}=\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ будуємо паралелограм-ромб, його діагональ є бісектрисою $(\bar{a},\wedge\bar{b})$. Тому вектор-діагоналі $\bar{c}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}+\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

12. Довести, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$.

Доведення. З рівності

$|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|\Rightarrow|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2=0.$

Звідси

$|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2=a^2+b^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}-a^2-b^2+2\overline{ab}=4\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$

Отже, рівність $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}.$

13. Знайти модулі векторів $\bar{p}=\bar{a}+2\bar{b}$ і $\bar{q}=2\bar{a}-\bar{b}$, їх скалярний добуток і кут між ними, якщо $|\bar{a}|=3,\ |\bar{b}|=2,\ (\bar{a},\wedge\bar{b})=120^\circ$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a\cdot b\cos120^\circ=3\cdot2\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,$$

$$|\bar{p}|^2=(\bar{p}\cdot\bar{p})=(\bar{a}+2\bar{b})^2=a^2+4b^2+4\bar{a}\cdot\bar{b}=9+16-12=13\Rightarrow|\bar{p}|=\sqrt{13};$$

$$|\bar{q}|^2=(\bar{q}\cdot\bar{q})=(2\bar{a}-\bar{b})^2=4a^2+b^2-4\bar{a}\cdot\bar{b}=36+4+12=52\Rightarrow|\bar{q}|=2\sqrt{13},$$

$$\bar{p}\cdot\bar{q}=(\bar{a}+2\bar{b})(2\bar{a}-\bar{b})=2a^2+3\bar{a}\cdot\bar{b}-2\bar{b}^2=18-9-8=1.$$

Тоді

$$\cos(\bar{p},\wedge\bar{q})=\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{|\bar{p}||\bar{q}|}=\frac{1}{\sqrt{13}\cdot2\sqrt{13}}\Rightarrow(\bar{p},\bar{q})=\arccos\frac{1}{26}.$$

14. Довести, що при довільному розміщенні точок *A*, *B*, *C*, *D* на площині або в просторі виконується рівність

$\mu=\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0.$

Доведення. Позначимо: $\overline{DA}=\bar{a},\ \overline{DB}=\bar{b},\ \overline{DC}=\bar{c}.$ Тоді

$\overline{BC}=\bar{c}-\bar{b},\ \overline{AD}=-\bar{a},\ \overline{CA}=\bar{a}-\bar{c},\ \overline{BD}=-\bar{b},\ \overline{AB}=\bar{b}-\bar{a},\ \overline{CD}=-\bar{c}.$

Отже,

$\mu=(\bar{c}-\bar{b})\cdot\bar{a}+(\bar{a}-\bar{c})\cdot(-\bar{b})+(\bar{b}-\bar{a})\cdot\bar{c}=-(\bar{a}\cdot\bar{c})+\bar{a}\cdot\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})+\bar{b}\cdot\bar{c}-(\bar{b}\cdot\bar{c})+\bar{a}\cdot\bar{c}=0.$

15. У ΔABC вектори $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$. Знайти вектор $\overline{c}$ — бісектрису кута $(\overline{a}, \wedge \overline{b})$.

Розв'язання. Бісектриса кута $(\overline{a}, \wedge \overline{b})$ перетинає сторону $\overline{AB}$ в точці D, яка поділяє відрізок AB на відрізки $\frac{AD}{DB} = \frac{a}{b} = \lambda.$ у відношенні λ:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{a}{b} = \lambda.$$

У векторному вигляді

$$\overline{r}(D) = \frac{\overline{r}(A) + \lambda \overline{r}(B)}{1+\lambda},$$

або

$$\overline{c} = \frac{\overline{a} + \lambda \overline{b}}{1+\lambda}.$$

В останню рівність підставимо значення λ, дістанемо

$$\overline{c} = \frac{b\overline{a} + a\overline{b}}{a+b}.$$

16. У правильному тетраедрі $ABCD$ точки M і E середини ребер AC і AB, N — точка перетину медіан грані BCD. Знайти кут між векторами $\overline{MN}$ і $\overline{DE}$.

Розв'язання. Позначимо $\overline{DA} = \overline{a}$, $\overline{DB} = \overline{b}$, $\overline{DC} = \overline{c}$, $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = a - y$ правильного тетраедра всі ребра рівні. Тоді скалярні добутки

$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = b \cdot \overline{c} = \frac{a^2}{2}$ ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2} -$ грані рівносторонні трикутники),

$$\overline{DE} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}), \ \overline{DM} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{c}), \ \overline{DN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{c}) = \frac{1}{3}(\overline{b} + \overline{c}).$$

Тому

$$\overline{MN} = \overline{DN} - \overline{DM} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{c}) - \frac{1}{3}(b + c) = \frac{1}{6}(3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}) \Rightarrow \left|6\overline{MN}\right|^2 = (3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c})^2 =$$

$$= 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12\overline{a} \cdot \overline{b} + 6\overline{a} \cdot \overline{c} - 4\overline{b} \cdot \overline{c} = 14a^2 - 10\overline{a} \cdot \overline{b} = 9a^2 \Rightarrow \left|\overline{MN}\right| = \frac{1}{2}a;$$

$$\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(\overline{a} + \overline{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b}} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Знаходимо

$$\overline{DE} \cdot \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \frac{1}{6}(3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}) = \frac{1}{12}(3a^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + 3\overline{a} \cdot \overline{b} - 2b^2 + \overline{b} \cdot \overline{c}) = \frac{5a^2}{24}.$$

Позначимо кут $(\overline{DE}, \wedge \overline{MN}) = \varphi$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{MN}}{DE \cdot MN} = \frac{\frac{5}{24}a^2}{\frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{5}{6\sqrt{3}},$$

звідси

$$\varphi = \arccos\frac{5}{6\sqrt{3}}.$$

Вправи

21. Знайти $\overline{a}_{\overline{b}}$, коли $\overline{a} = (3, -12, 4)$, $\overline{b} = (1, 0, -2)$.

22. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=(2,1,-1)$ і $\bar{b}=(1,-3,1)$.

23. Задані сторони трикутника $\overline{AB}=(3,-4,0)$ і $\overline{BC}=(1,5,0)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної із вершини С.

24. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=(2,3)$ і $\bar{b}=(1,-4)$.

25. Задані точки $A(2,-4,0)$ і $B(6,8,4)$. Знайти $\overline{AB}_{\bar{e}}$, якщо $\left(\bar{e},\hat{\ }\bar{i}\right)=\left(\bar{e},\hat{\ }\bar{j}\right)=\left(\bar{e},\hat{\ }\bar{k}\right)$.

26. Задані точки $A(3,1,0)$, $B(0,-2,6)$, $C(-1,-2,0)$ і $D(1,-2,4)$. Обчислити $\overline{AB}_{\overline{CD}}$

27. Вершини трикутника $A(0,0,5)$, $B(1,1,1)$, $C(-1,2,3)$. Знайти його кути.

28. Обчислити кут між діагоналями двох граней куба, які виходять з однієї вершини.

29. Знайти кут між діагоналями прямокутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

30. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ і $C(5,0,2)$ Знайти $\left(\overline{AC},\hat{\ }\overline{BD}\right)$.

31. Задано $\bar{a}=(3,6,-1)$, $\bar{b}=(1,4,-5)$ і $\bar{c}=(3,-4,12)$. Обчислити $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)_{\bar{c}}$.

32. Задано $\bar{a}=\left(\sqrt{2},-3,-5\right)$і його напрямні кути:

$\alpha=45^\circ, \gamma=60^\circ, 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Знайти $\bar{a}_{\bar{e}}$.

33. Знайти вектор $\bar{x}$, якщо $\bar{x}\perp 0z,\ \bar{x}\cdot\bar{a}=9,\ \bar{x}\cdot\bar{b}=-4$ і $\bar{a}=(3,-1,5)$, $\bar{b}=(1,2,-3)$.

34. Задано вершини чотирикутника $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$. Знайти кут між AC і BD.

35. Знайти вектор $\bar{x}$, колінеарний вектору $\bar{a}=(2,-1,2)$, якщо $\bar{x}\cdot\bar{a}=-18$.

36. Задано вектори $\bar{a}=(3,0,-4)$ і $\bar{b}=(2,1,-2)$. Знайти $\bar{a}_{\bar{b}}$.

37. Вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ послідовно між собою утворюють кути, рівні 60°. Знайти $\left|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right|$, якщо $|\bar{a}|=4$, $|\bar{\mathrm{b}}|=2$, $|\bar{c}|=6$.

38. Знайти координати вектора $\bar{x}$, якщо $|\bar{x}|=8$, $\left(\bar{x},\hat{\ }\bar{i}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, $\left(\bar{x},\hat{\ }\bar{k}\right)=\dfrac{\pi}{3}$, $0<\left(\bar{x},\hat{\ }\bar{\gamma}\right)<\dfrac{\pi}{2}$.

39. Задані $\bar{a}=(8,4,1)$ і $\bar{b}=(2,-2,1)$. Знайти вектор $\bar{x}$, компланарний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{x}\perp\bar{a}$, $|\bar{x}|=|\bar{a}|$, $\dfrac{\pi}{2}<\left(\bar{x}\wedge\bar{b}\right)<\pi$.

40. Знайти вектор, колінеарний бісектрисі кута А ΔABC, якщо $\overline{AB}=(4,0,3)$, $\overline{AC}=(1,2,2)$.

§3. Векторний добуток

3.1. <u>Означення.</u> Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (позначається: $\bar{a}\times\bar{b}$) називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, що визначається умовами (рис. 1.24, а):

1) модуль $|\bar{c}|=ab\sin\varphi,\ \varphi=\left(\bar{a},\hat{\ }\bar{b}\right)$;

2) вектор $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3) напрям вектора $\bar{c}$ такий, що упорядкована трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ є права, однакової орієнтації з базисом $\left(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\right)$ (рис. 1.24, б)

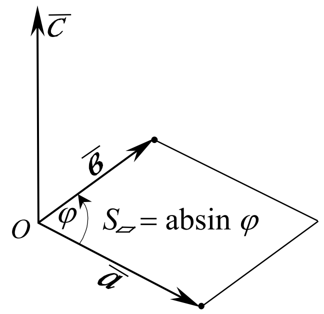


Рис. 1.24, а

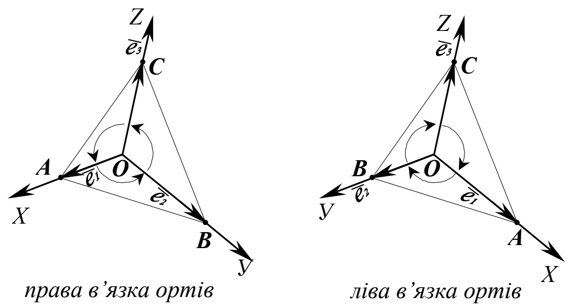


Рис. 1.24, б

3.2. Геометричні властивості векторного добутку

1) $\left|\overline{c}\right| = ab\sin\varphi = S$ — площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ зі спільним початком (рис. 12.4, а); $\left|\overline{c}\right| = ab \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.

2) Площа s трикутника, визначеного векторами a і b зі спільним початком, дорівнює:

$$s = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|. \qquad (1.5)$$

3) $\overline{c} = \left|\overline{c}\right|\overline{e}, \ \left|\overline{e}\right| = 1,$ тобто $\overline{c} = s\overline{e}$, де $s = ab\sin\varphi$.

4) $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \ \Leftrightarrow \ \overline{a} \parallel \overline{b}$ (вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — колінеарні, $\sin\varphi = 0,$ при $\varphi = 0,\ 180°$).

3.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

1) Відсутність переставного закону:

$\overline{a} \times \overline{b} = -\left(\overline{b} \times \overline{a}\right)$.

Вектори $\overline{a} \times \overline{b}$ і $\overline{b} \times \overline{a}$ — протилежні які мають однакові модулі, колінеарні, перпендикулярні до площини $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$, трійки: $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a} \times \overline{b}$ і $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{b} \times \overline{a}$ протилежної орієнтації.

2) Сполучний закон по відношенню до скалярного множника

$\left(\lambda\overline{a}\right) \times \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$,

$\overline{a} \times \left(\mu\overline{b}\right) = \mu\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$.

3) Розподільний закон відносно додавання:

$\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$,

$\left(\overline{b} + \overline{c}\right) \times \overline{a} = \overline{b} \times \overline{a} + \overline{c} \times \overline{a}$.

3.4. Таблиця векторних добутків ортів:

$\times$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

У таблиці для визначення знаків користуються такою схемою:

$$\text{"-"} \quad \overline{i} \quad \overline{j} \quad \overline{k} \quad \overline{i} \quad \overline{j} \quad \overline{k} \quad \text{"+"}$$

3.5. Вираз векторного добутку через координати векторів

Нехай $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ і $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$. Тоді $\overline{a} \times \overline{b} = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right) \times \left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right)$.

Використовуючи таблицю векторного добутку ортів і закон сполучення по відношенню скалярних множників, дістанемо вектор, що визначається за формулою визначника третього порядку

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

який обчислюємо, розкладаючи його по елементах $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ першого рядка.

Задачі

1. Знайти орт, перпендикулярний до вектора $\overline{a}=(2,2,1)$ і $\overline{b}=(4,5,3)$.

Розв'язання.

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\overline{k}=(1,\ -2,\ 2).$$

Модуль $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{1+2^2+2^2}=3$.

Орт $\overline{c^\circ}$ вектора $\overline{c}$ є

$c^0=\dfrac{\overline{c}}{\left|\overline{c}\right|}=\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$.

2. Знайти площу трикутника з вершинами $A(4, -1, 2)$, $B(-8, 0, 4)$, $C(8, 2, 3)$.

Розв'язання. Вектори $\overline{AB}=(-12,1,2)$ і $\overline{AC}=(4,3,1)$.

Площа $S=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Обчислюємо:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -12 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}-12 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}-12 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\overline{k}=(-5,\ 20,\ -40).$$

Модуль $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{5^2+20^2+40^2}=45$. Площа $S=\dfrac{1}{2}\cdot 45=22{,}5$.

3. Спростити вирази:

1) $2\overline{i}\cdot\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+3\overline{j}\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+4\overline{k}\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)$;

2) $\overline{i}\times\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)-\overline{j}\times\left(\overline{i}+\overline{k}\right)+\overline{k}\times\left(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}\right)$.

Розв'язання. За таблицями скалярного та векторного добутків ортів:

1) $2\overline{i}\cdot\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+3\overline{j}\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+4\overline{k}\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)=2\overline{i}\cdot\overline{i}+3\overline{j}\left(-\overline{j}\right)+4\overline{k}\cdot\overline{k}=2-3+4=2$,

2) $\overline{i}\times\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)-\overline{j}\times\left(\overline{i}+\overline{k}\right)+\overline{k}\times\left(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}\right)=\overline{i}\cdot\overline{i}-\overline{j}\times\left(-\overline{j}\right)+\overline{k}\times\overline{j}+\overline{k}\times\overline{k}=\overline{j}-\overline{i}=(-1,\ 1,\ 0)$.

4. Довести, що $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=2\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$.

Розв'язання. $\overline{a}+\overline{b}$ і $\overline{a}-\overline{b}$ — це вектори-діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$. За умовою площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}-\overline{b}$ і $\overline{a}+\overline{b}$, удвічі більша від площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Знаходимо

$$\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\overline{a}\times\overline{a}+\overline{a}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{a}-\overline{b}\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{a}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{b}=2\left(\overline{a}\times\overline{b}\right).$$

5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$ і $\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}$, якщо $\left|\overline{m}\right|=\left|\overline{n}\right|=1$, $\left(\widehat{\overline{m},\ \overline{n}}\right)=30°$.

Розв'язання. Площа паралелограма

$$s=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)\times\left(2\overline{m}+\overline{n}\right)\right|=\left|2\overline{m}\times\overline{m}+\overline{m}\times\overline{n}+4\overline{n}\times\overline{m}+2\overline{n}\times\overline{n}\right|=$$

$$\left|-\left(\overline{n}\times\overline{m}\right)+4\left(\overline{n}\times\overline{m}\right)\right|=\left|3\left(\overline{n}\times\overline{m}\right)\right|=3\sin30^{\circ}=1{,}5.$$

6. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=(2,1,-1)$ і $\overline{b}=(1,-3,1)$.

Розв'язання. Вектори діагоналей паралелограма

$\overline{a}+\overline{b}=(3,-2,0)$, і $\overline{a}-\overline{b}=(1,4,-2)$, $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{13}$ і $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{21}$.

Векторний добуток і його модуль:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=(4,\ 6,\ 14)\ \text{і}\ \left|\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right|=\sqrt{248}.$$

За означенням модуля векторного добутку $\sqrt{248}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{21}\sin\varphi$.

Звідси $\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{248}{13\cdot21}}=0{,}9531$.

7. Знайти нормаль $\overline{n}$ площини, обмеженої колом $y=r\cos t, z=r\sin t$ у базисі $\left(\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$.

Розв'язання. Орт нормалі площини, обмеженої колом: $\overline{i}=\overline{j}\times\overline{k}$. Нормаль площини $\overline{n}=\pi r^2\overline{i}$, де πr^2 — площа круга.

8. Задані $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$ і $\overline{a}\cdot\overline{b}=-6$. Знайти $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Розв'язання. Знаходимо кут $\left(\overline{a},\wedge\overline{b}\right)=\varphi$

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \varphi=120^{\circ}.$$

Тоді

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=ab\sin\varphi=3\cdot4\sin120^{\circ}=6\sqrt{3}.$$

9. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$ і $\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=5$, $\left|\overline{n}\right|=3$, $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Площа S паралелограма дорівнює

$$s=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)\times\left(\overline{m}-3\overline{n}\right)\right|=\left|\overline{m}\times\overline{m}-3\overline{m}\times\overline{n}+2\overline{n}\times\overline{m}-6\overline{n}\times\overline{n}\right|=\left|5n\times m\right|=$$

$$=5nm\sin(n,\wedge m)=5\cdot3\cdot5\sin\frac{\pi}{6}=37{,}5.$$

10. Вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$. Виразити через вектор $\overline{c}$ вектори:

$$1)\overline{a}+\overline{b}\times\overline{a}-\overline{b}\ \text{ і }\ 2)\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right).$$

Розв'язання. За властивістю лінійності векторного добутку маємо:

$$1)\ \overline{a}+\overline{b}\times\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)+\overline{b}\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=\overline{a}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{a}-\overline{b}\times\overline{b}=-\overline{a}\times\overline{b}-\overline{a}\times\overline{b}=$$

$$=-2\overline{a}\times\overline{b}=-2\overline{c}.$$

2) аналогічно

$$\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)=\frac{1}{2}\overline{a}\times\left(\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)+\frac{1}{2}\overline{b}\times\left(\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)-\frac{1}{4}\left(\overline{a}\times\overline{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{b}\times\overline{b}\right)-\frac{1}{4}\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\frac{3}{4}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\frac{3}{4}\overline{c}.$$

11. Довести, що площа S трикутника, вектори сторін якого дорівнюють векторам медіан ΔABC, становить $3/4$ площі σ ΔABC.

Розв'язання. Позначимо $\overline{CA}=\overline{a},\ \overline{CB}=\overline{b};$ медіани $\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$, $\overline{B_1B}=\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}$ і $\sigma=\times\left|\overline{a}\ \overline{b}\right|$.

Тоді

$$s=\left|\overline{CC_1}\times\overline{B_1B}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}\right)\right|=\left\|\frac{1}{2}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{b}\times\overline{b}\right)-\frac{1}{4}(\overline{a}\times\overline{a})-\frac{1}{4}\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\right\|=\frac{3}{4}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{3}{4}\sigma.$$

12. На сторонах ΔABC вибрані точки $M\in AB, N\in BC, P\in CA$ так, що $\overline{AM}=m\overline{AB},$ $\overline{BN}=m\overline{BC},\ \overline{CP}=m\overline{CA}.$ При якому значенні *m* площа *S(m)* трикутника, вектори сторін якого є вектори $\overline{CM},\overline{AN},\overline{BP},$ найменша?

Розв'язання. Нехай $\overline{CA}=\overline{a},\ \overline{CB}=\overline{b},\ S_{ABC}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|.$ Покажемо, що вектори $\overline{CM},\overline{AN},\overline{BP}$ утворюють трикутник, тобто $\overline{CM}+\overline{AN}+\overline{BP}=0$:

$\overline{CM}=\overline{a}+m\left(\overline{b}-\overline{a}\right),\ \overline{AN}=m\overline{b}-\overline{a},\ \overline{BP}=\overline{a}-\overline{b}-m\overline{a}.$

Тоді

$\overline{CM}+\overline{AN}+\overline{BP}=\left(1-2m\right)\overline{a}+\left(2m-1\right)\overline{b}.$

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ неколінеарні, тому $\overline{CM}+\overline{AN}+\overline{BP}=0$ тоді й тільки тоді, коли $2m-1=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}.$ Отже, при $m=\frac{1}{2}$ площа $S(m)$ буде найменшою. При $m=\frac{1}{2}$ вектори $\overline{CM},\overline{AN}$ і $\overline{BP}$ є медіанами $\Delta ABC,$ тому $S\left(m=\frac{1}{2}\right)=3/4\,S_{ABC}.$

13. Розкласти вектор $\overline{d}=\left(3\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}+5\overline{c}\right)$ за ортогональним векторам $\overline{a},\overline{b},\overline{c}.$

Розв'язання.

$$\overline{d}=3\overline{a}\times\overline{a}-3\overline{a}\times\overline{b}+15\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a}-\overline{b}\times\overline{b}+5\overline{b}\times\overline{c}-2\overline{c}\times\overline{a}+2\overline{c}\times\overline{b}-10\overline{c}\times\overline{c}=$$
$$=-4\overline{a}\times\overline{b}-17\overline{c}\times\overline{a}+3\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$$

Вектори $\overline{a}\perp\overline{b}\perp\overline{c}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{c};\ \ \overline{c}\times\overline{a}=\overline{b},\ \overline{b}\times\overline{c}=\overline{a}.$

Отже,

$d=3\overline{a}-17\overline{b}-4\overline{c}.$

14. Знайти вектор $\overline{x}$, якщо

$\overline{x}\perp\overline{a}=\left(4,-2,-3\right),\quad \overline{x}\perp\overline{b}=\left(0,1,3\right),\quad \left|\overline{x}\right|=26$ і $\frac{\pi}{2}<\left(\widehat{\overline{x},\ \overline{j}}\right)<\pi$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\overline{x}$ з ортом $\overline{j}$ утворює тупий кут, то трійка $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{x}$ — орієнтована з базисом $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$. Тому

$$\overline{x} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3,\ -12,\ 4),$$

звідси $|\overline{x}| = \sqrt{9+14+16} = 13$. За умовою $|\overline{x}| = 26$. Отже, $\overline{x} = (-6,\ -24,\ 8)$.

Вправи

41. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{b} = 2\overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $(\overline{m}, \widehat{\ } \overline{n}) = 30°$.

42. Знайти $\overline{a} \times \overline{b}$**,** якщо $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ і $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

43. Обчислити площу трикутника, вершини якого *A*(1, 0, 6), *B*(4, 5, –2) і *C*(7, 3, 4).

44. Задано вершини трикутника *A*(5, –6, 2), *B*(1, 3, –1) і *C*(1, –1, 2). Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини *A*.

45. Спростити вирази:

1) $\overline{a} \times ((\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b}))$, 2) $(\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}) \times ((\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}))$.

46. Спростити вирази:

$2\overline{i} \cdot (\overline{j} \times \overline{k}) + 3\overline{j} \cdot (\overline{i} \times \overline{k}) + 4\overline{k} \cdot (\overline{i} \times \overline{j})$.

47. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ і $3\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}, \widehat{\ } \overline{b}) = 45°$.

48. Обчислити площу паралелограма, діагоналі якого є вектори $2\overline{m} - \overline{n}$ і $4\overline{m} - 5\overline{n}$, $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $(\overline{m}, \widehat{\ } \overline{n}) = 45°$.

49. Знайти діагоналі та площу *S* паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = (0,\ -1,\ 1)$, $\overline{b} = (1,\ 1,\ 1)$.

50. Якій умові задовольнятимуть вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, щоб вектори $\overline{m} = 3\overline{a} + \overline{b}$ і $\overline{n} = \overline{a} - 3\overline{b}$ були колінеарні?

51. Задано $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$, $|\overline{a} \times \overline{b}| = 72$. Обчислити $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

52. Знайти синус кута між векторами $\overline{a} = (11,\ 10,\ 2)$ і $\overline{b} = (2,\ 2,\ 1)$.

53. Вектори $\overline{a} = (2,1,2)$ і $\overline{b} = (-2,2,1)$ зі спільним початком є ребра куба. Знайти вектор його третього ребра.

54. Знайти вектор $\overline{x}$ із системи рівнянь

$$\begin{cases} \overline{x} \cdot \overline{i} = 3, \\ \overline{x} \times \overline{i} = -2\overline{k}. \end{cases}$$

55. Знайти вектор $\overline{x}$, якщо $\overline{x} \perp \overline{a} = (2,\ 3,\ -1)$ і $\overline{x} \perp \overline{b} = (1,\ -1,\ 3)$ і є коренем рівняння $\overline{x} \cdot (2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}) = 51$.

56. Знайти вектор $\overline{x}$, якщо $\overline{x} \perp \overline{a} = (2,\ 3, -1)$ і $\overline{x} \perp \overline{b} = (1,\ -1,\ 3)$, $\frac{\pi}{2} < (\overline{x}, \widehat{\ } \overline{i}) < \pi$, $|\overline{x}| = \sqrt{138}$.

57. Задано вектори $\overline{a} = (2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) \times (\overline{i} + 5\overline{j})$ і $\overline{b} = (2,\ -1,\ 2)$. Знайти $a_{\overline{b}}$.

58. При яких значеннях λ, μ вектори $\overline{a}=(3,\ 4,\ 1)$ і $\overline{b}=(\alpha,\ 2,\ \beta)$ будуть колінеарними?

59. Знайти висоту паралелограма *ABCD* з основою *AD*, якщо $\overline{AB}\in\overline{a}=5\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{AD}\in\overline{b}=\overline{p}-3\overline{q}$ і $|\overline{p}|=\sqrt{2}$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p},\hat{\ }\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

60. Знайти координати вектора $\overline{x}$, якщо $\overline{x}\perp Oz$, $\overline{x}\perp\overline{a}=(8,-15,3)$, $0<\left(\overline{x},\hat{\ }\overline{i}\right)<\dfrac{\pi}{2}$ і $|x|=51$.

§ 4. Мішаний (векторно-скалярний) добуток трьох векторів

4.1. Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ (позначається: $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$) називається число (скаляр) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.

4.2. Геометричний зміст мішаного добутку. Нехай $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — некомпланарні. Позначимо $\overline{a}\times\overline{b}=s\overline{e}$, $|\overline{e}|=1$, $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=s$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ зі спільним початком. Тоді $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=s\left(\overline{e}\cdot\overline{c}\right)=sc_{\overline{e}}=s(\pm H)$,

де $c_{\overline{e}}=\pm H$ — висота похилого паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ (рис. 1.25) Отже, $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=s(\pm H)=\pm V$ — *об'єм паралелепіпеда* (*V>0* для правої трійки і *–V>0* — для лівої трійки векторів),

або

$$\left|(a\times b)\cdot\overline{c}\right|=V.$$

Об'єм *V* тетраедра, побудованого на векторах $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$, дорівнює $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|$.

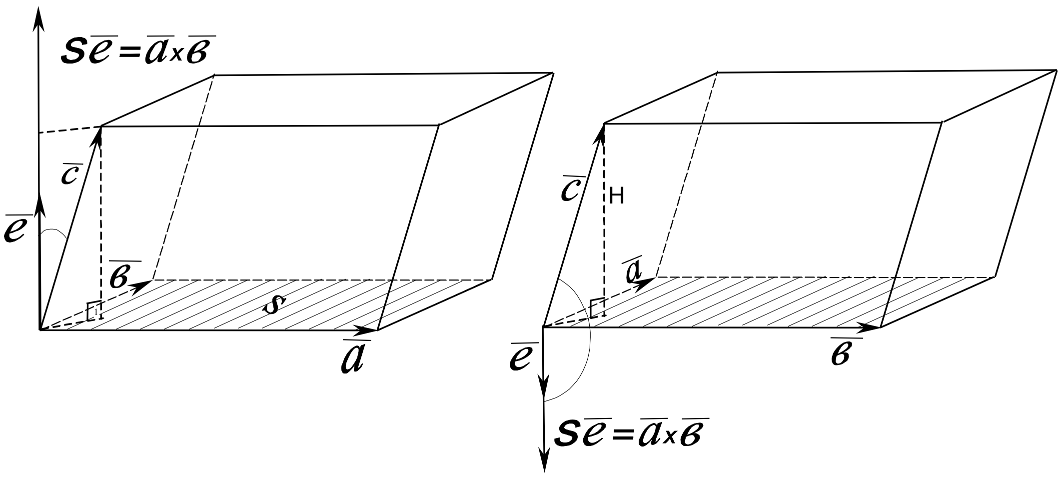


Рис. 1.25

4.3. Закони мішаного добутку

1) Закон сполучення. З геометричного змісту мішаного добутку об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$, не зміниться, якщо розглядати за його основу, яка визначається векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ або $\overline{b}$ і $\overline{c}$, або $\overline{c}$ і $\overline{a}$, при цьому відповідно їх трійка: $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$ і $\overline{c},\overline{a},\overline{b}$ — права. Тому знак векторного добутку «×» можна поставити між будь-якою парою векторів мішаного добутку $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, а перестановка векторів у цих парах змінює лише знак мішаного добутку, їх трійки будуть ліві та об'єм *(–V)>0.*

Ця властивість схематично визначається коловою перестановкою векторів мішаного добутку $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ без знаків векторного й скалярного множення. Таким чином,

$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right)=-\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=-\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right).$

2) Розподільний закон

$\left(\bar{a}+\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}\right)=\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)+\left(\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}\right).$

3) Закон сполучення відносно скалярних множників

$\left(\lambda\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)=\lambda\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right).$

Умова компланарності трьох векторів. Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — компланарні, якщо $\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)=0$.

4.4. Вираз мішаного добутку через координати векторів. Нехай $\bar{a}=\left(x_1\ y_1\ z_1\right)$, $\bar{b}=\left(x_2\ y_2\ z_2\right)$, $\bar{c}=\left(x_3\ y_3\ z_3\right)$. Тоді мішаний добуток ($\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$), визначається за допомогою визначника

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4.5. Векторно-векторний добуток трьох векторів визначається за формулами

$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right),$

$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right).$

Задачі

1. Довести, якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ неколінеарні, то вектори $\bar{a}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ і $\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$ взаємно перпендикулярні між собою.

Розв'язання. Знаходимо скалярні добутки цих векторів:

1) $\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\bar{b}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{a}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}\perp\bar{a}\times\bar{b};$

2) $\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right)=\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)-\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\right)=\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}\perp\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right);$

3) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)-\bar{b}\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\right)=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{b}\right)=$

$=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{\mathrm{a}},\bar{a},\bar{b}\right)-\left(\bar{\mathrm{a}}\cdot\bar{a}\right)\left(\bar{\mathrm{a}},\bar{b},\bar{b}\right)=0 \Rightarrow \quad \bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$

.

тут у мішаних добутках $\left(\bar{a},\bar{a},\bar{b}\right)$ і $\left(\bar{\mathrm{a}},\bar{b},\bar{b}\right)$ — два однакових вектора, тому вони дорівнюють нулю.

Отже, три заданих вектора взаємно перпендикулярні.

2. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}=\left(3, 2, -5\right)$, $\bar{b}=\left(1, -1, 4\right)$, $\bar{c}=\left(1, -3, 1\right)$, якщо в основі його лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Розв'язання. Обчислюємо об'єм V паралелепіпеда

$$V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\left|3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\right|=\left|33+13+3\right|=49.$$

Знаходимо площу основи паралелепіпеда:

$$s=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\left|(3,\ -17,\ -5)\right|=\sqrt{9+289+25}=\sqrt{323}\approx 17{,}97\,.$$

Отже, $h=\dfrac{V}{S}=\dfrac{49}{17{,}97}\approx 2{,}727$.

3. Обчислити кути ΔABC, якщо $\overline{AB}=(2,1,-2)$, $\overline{BC}=(3,2,6)$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\cos B=\frac{-\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{AB\cdot BC}=\frac{(-2,-1,2)\cdot(3,2,6)}{3\cdot 7}=\frac{-6-2+12}{21}=\frac{4}{21}\approx 0{,}1905\,,$$

$$\overrightarrow{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=(2,1,-2)+(3,2,6)=(5,3,4).$$

Обчислюємо

$$\cos A=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{(2,1,-2)\cdot(5,3,4)}{3\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{10+3-8}{15\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=0{,}2357,$$

$$\cos C=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{BC\cdot AC}=\frac{(3,2,6)\cdot(5,3,4)}{7\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{15+6+24}{35\sqrt{2}}=\frac{9}{7\sqrt{2}}=0{,}9091.$$

4. Об'єм трикутної піраміди дорівнює 9, його вершини: $A(4, -1, 2)$, $B(5, 1, 4)$, $C(3, 2, -1)$. Знайти вершину $D\in Oz$.

Розв'язання. Вектори $\overline{AB}=(1,2,2)$, $\overline{AC}=(-1,3,-3)$, $\overline{AD}=(-4,1,z-2)$.

Об'єм піраміди

$$9=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -3\\ -4 & 1 & z-2\end{vmatrix}\Rightarrow 54=39+5z\Rightarrow\ \ z=3.$$

Вершина піраміди $D(0, 0, 3)$.

5. Знайти висоту H трикутної піраміди, опущеної з вершини D, якщо її вершини $A(3, 2, 1)$, $B(4, 0, -1)$, $C(2, -1, 0)$ і $D(4, 2, 5)$.

Розв'язання. Вектори $\overline{AB}=(1,-2,-2)$, $\overline{AC}=(-1,-3,-1)$, $\overline{AD}=(1,0,4)$. Об'єм V піраміди

$$V=\left(\overline{AB},\overline{AC},\ \overline{AD}\right)=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=4\,.$$

Площа S основи ABC:

$$S=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & -2\\ -1 & -3 & -1\end{vmatrix}=\operatorname{mod}(-4,\ +3,\ -5)=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2}.$$

Висота H піраміди

$$H=\frac{V}{S}=\frac{4}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\,.$$

6. Довести, що вектори $\overline{a}=(-1,3,2)$, $\overline{b}=(2,-3,-4)$, $\overline{c}=(-3,12,6)$ компланарні та розкласти вектор $\overline{c}$ за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Розв'язання. Якщо вектори компланарні, то мішаний добуток

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=18+48+36-18-48=0.$$

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні. Розкладаємо вектор $\overline{c}$ за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\overline{c}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}$, тобто

$$(-3,12,6)=\lambda_1(-1,3,2)+\lambda_2(2,-3,-4)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-3=-\lambda_1+2\lambda_2\,,\\ 12=3\lambda_1-3\lambda_2,\\ 6=2\lambda_1-4\lambda_2\end{cases}\qquad\Rightarrow\ \lambda_1=5,\ \ \lambda_2=1.$$

Отже,

$$\overline{c}=5\overline{a}+\overline{b}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overline{OA},\ \overline{OB},\ \overline{OC}$, які напрямлені по бісектрисах координатних кутів, якщо $\left|\overline{OA}\right|=\left|\overline{OB}\right|=\left|\overline{OC}\right|=2$.

Розв'язання. $\overline{OA}=\sqrt{2}(1,1,0)$; $\overline{OB}=\sqrt{2}(0,1,1)$; $\overline{OC}=\sqrt{2}(1,0,1)$

Об'єм тетраедра

$$V=\frac{1}{6}2\sqrt{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

8. Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку. Обчислити мішаний добуток ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$), якщо $\overline{a}\perp\overline{b}\perp\overline{c}$ і $\left|\overline{a}\right|=4$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\left|\overline{c}\right|=2$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=ab$. Тоді $\overline{a}\times\overline{b}=ab\overline{c^\circ}$, $\left|\overline{c}^\circ\right|=1$. Мішаний добуток

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=ab\overline{c^\circ}\cdot\overline{cc^\circ}=abc\overline{c^\circ}^2=abc.$$

9. Довести, що вектори $\overline{a}=3\overline{m}+5\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$ і $\overline{c}=2\overline{m}+7\overline{n}$ компланарні.

Доведення. Вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток

$$\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|=\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|=0.$$

Знаходимо

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(3\overline{m}+5\overline{n}\right)\times\left(\overline{m}-2\overline{n}\right)=3\overline{m}\times\overline{m}-6\overline{m}\times\overline{n}+5\overline{n}\times\overline{m}-10\overline{n}\times\overline{n}=11\overline{n}\times\overline{m},$$

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=11\left(\overline{n}\times\overline{m}\right)\cdot\left(2\overline{m}+7\overline{n}\right)=11\left(2\left(\overline{n},\overline{m},\overline{m}\right)+7\left(\overline{n},\overline{m},\overline{n}\right)\right)=0.$$

Отже, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — компланарні.

10. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q}-5\overline{r}$, $\overline{b}=\overline{p}-\overline{q}+4\overline{r}$ і $\overline{c}=\overline{p}-3\overline{q}+\overline{r}$, де $\overline{p}\perp\overline{q}\perp\overline{r}$, $\left|\overline{p}\right|=\left|\overline{q}\right|=\left|\overline{r}\right|=1$ з основою паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Розв'язання. Висота паралелепіпеда

$h=\dfrac{V}{S}$, де V — об'єм, S — площа основи паралелепіпеда,

$V=\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|=\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|.$

Обчислюємо

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(3\bar{p}+2\bar{q}-5\bar{r}\right)\times\left(\bar{p}-\bar{q}+4\bar{r}\right)=3\bar{p}\times\bar{p}-3\bar{p}\times\bar{q}+12\bar{p}\times\bar{r}+2\bar{q}\times\bar{p}-2\bar{q}\times\bar{q}+$$
$$+8\bar{q}\times\bar{r}-5\bar{r}\times\bar{p}+5\bar{r}\times\bar{q}-20\bar{r}\times\bar{r}=5\bar{q}\times\bar{p}+17\bar{p}\times\bar{r}+3\bar{q}\times\bar{r}=5\bar{r}+17\bar{q}-3\bar{p}.$$

Звідси

$$s=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|5\bar{r}+17\bar{q}-3\bar{p}\right|=\sqrt{25+289+9}=\sqrt{323}.$$

Знаходимо

$$V=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=$$

$$=\left(5\bar{r}+17\bar{q}-3\bar{p}\right)\cdot\left(\bar{p}-3\bar{q}+\bar{r}\right)=15\bar{r}\cdot\bar{p}-15\bar{r}\cdot\bar{q}+5\bar{r}\cdot\bar{r}+17\bar{q}\cdot\bar{p}-51\bar{q}\cdot\bar{q}+17\bar{q}\cdot\bar{r}-3\bar{p}\cdot\bar{p}+9\bar{p}\cdot\bar{q}-$$
$$-3\bar{p}\cdot\bar{r}=5\bar{r}\cdot\bar{r}-51\bar{q}\cdot\bar{q}-3\bar{p}\cdot\bar{p}=-49.$$

Отже,

$$V=49,\qquad h=\frac{49}{\sqrt{323}}.$$

11. Довести, якщо $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=0,$ то вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні.

Доведення. Нехай в'язка векторів $\bar{a},\bar{b}$ і $\bar{c}$ права. За умовою вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ортогональні, тому $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c},\ \bar{b}\times\bar{c}=\bar{a}$ і $\bar{c}\times\bar{a}=\bar{b}.$

Звідси

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}\Rightarrow$ вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні.

12. Знайти скалярний добуток двох векторних добутків

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right).$$

Розв'язання. Розглянемо як мішаний добуток трьох векторів

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\times\bar{d}\right)=\left(\bar{c}\times\bar{d},\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\times\bar{a})\cdot\bar{b}=\left[\bar{d}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{b}=$$
$$=\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{c}\\ \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{b}\cdot\bar{d}\end{vmatrix},$$

тут рівність: $\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\times\bar{a}=\bar{d}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ дістали за формулою в задачі 8.

13. Точки $A(5,1,-4)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,-4)$, $S(2,2,2)-$ вершини піраміди. Знайти висоту, опущену із вершини s на грань ABC.

Розв'язання. Об'єм піраміди:

$$V=\frac{1}{3}hs\Rightarrow h=\frac{3V}{S}.$$

Знайдемо площу s основи ABC піраміди:

$$\overline{AS}=\left(-3,1,6\right),\ \overline{AB}=(-4,1,3),\overline{AC}=\left(-2,2,0\right),$$

$$V=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-3 & 1 & 6\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|(-6,-6,-6)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 36}=3\sqrt{3}.$$

Отже, $h=\dfrac{3\cdot 4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}.$

Вправи

61. Задано три вектори: $\bar{a}=(2,-3,1)$, $\bar{b}=(1,1,2)$, $\bar{c}=(3,1,-1)$. Знайти $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ і $(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$. Яка з цих трійок векторів права?

62. На векторах $\bar{a}=(3,2,0)$, $\bar{b}=(2,3,0)$, $\bar{c}=(1,2,3)$ побудований паралелепіпед. Обчислити об'єм та висоту, опущену на грань $(\bar{a},\bar{b})$.

63. Обчислити $\bar{p}=\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ і $\bar{q}=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$, коли $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{k}$.

64. Задано вершини тетраедра: $A(-5,-4,8)$, $B(2,3,1)$, $C(4,1,-2)$ і $D(6,3,7)$. Знайти довжину його висоти, опущеної із вершини A.

65. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}=(1,-3,1)$, $\bar{b}=(2,1,-3)$, $\bar{c}=(1,2,1)$.

66. Задано: $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$, $(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})=30^\circ$, $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=3$. Обчислити $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

67. Довести тотожність $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{c}+\bar{a})=2\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$.

68. Довести, чи компланарні вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, якщо:

$\bar{a}=(3,-2,1)$, $\bar{b}=(2,1,2)$, $\bar{c}=(3,-1,-2)$?

69. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ *і* $D(2,1,3)$ лежать на площині.

70. Об'єм тетраедра $V=5$, три його вершини: $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Знайти четверту його вершину D, якщо вона лежить на вісі Oy.

71. Обчислити $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$, якщо $\bar{a}=(5,4,1)$, $\bar{b}=(3,4,0)$, $\bar{c}=(-1,3,1)$.

72. У паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ $\overline{AB}\in\bar{a}=(2,4,-3)$, $\overline{AD}\in\bar{b}=(1,-2,5)$ і $\overline{AA'}\in\bar{c}=(-1,3,-2)$. Обчислити: 1) об'єм паралелепіпеда; 2) площі граней; 3) висоту, опущену на основу $ABCD$; 4) площі перерізів $(ACA'C')$ і $(BDB'D')$; 5) косинус кута між гранями $(ABA'B')$ і $(ABCD)$.

73. Вершини трикутної піраміди $A(2,1,-1)$, $B(3,-2,-7)$, $C(5,1,-1)$, $D(1,4,-3)$. Обчислити її об'єм.

74. Знайти таке λ, щоб вектори $\bar{a}=(3,2,-1)$, $\bar{b}=(4,5,1)$, $\bar{c}=(\lambda,0,1)$ були компланарними.

76. Довести, чи компланарні вектори:

$\bar{a}=(8,-3,2)$; $\bar{b}=(0,2,-1)$, $\bar{c}=(2,4,-2)$?

77. З'ясувати, чи компланарні вектори: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$?

78. Розкласти вектор $\bar{c}=(-3,12,6)$ за векторами $\bar{a}=(-1,3,2)$ і $\bar{b}=(2,-3,-4)$.

79. Знайти лінійну залежність векторів: $\bar{a}=(1,1,4)$, $\bar{b}=(1,-2,0)$, $\bar{c}=(3,-3,4)$.

РОЗДІЛ 2. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Розміщення прямої лінії *l* на площині *Oxy*

Розміщення прямої лінії l на площині Oxy однозначно визначається такими способами:

1. *Точкою* $M_0(x_0, y_0) \in l$ *і нормаллю прямої* $\overline{n} = (A, B)$, $\overline{n} \perp l$ (рис. 2.1).

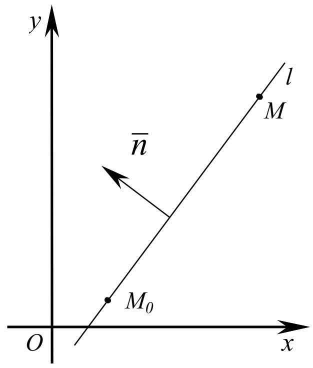


Рис. 2.1

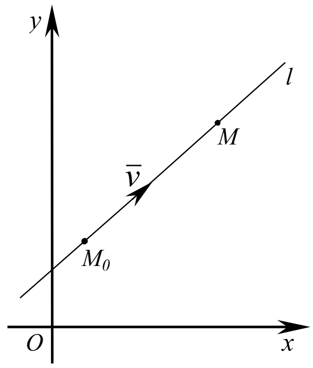


Рис. 2.2

M(x,y) $\in l$ — змінна точка прямої. Тоді змінний вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0) \perp \overline{n} = (A, B)$; їх скалярний добуток:

$\overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0$ або $(x - x_0,\ y - y_0) \cdot (\overline{A, B}) = 0$, дістаємо *загальне рівняння прямої:*

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

де $C = -x_0A - y_0B,\ A^2 + B^2 \neq 0 \Leftrightarrow \overline{n} \neq \overline{0}.$ Залежно від значень параметрів *A, B* і *C* визначаються такі положення прямої на площині O*xy*:

а) $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0.$ Пряма *Ax+By=0* проходить через початок координат.

б) $A \neq 0,\ B = 0,\ C \neq 0.$ Пряма $x = -\dfrac{C}{A}$ паралельна осі *Oy*.

в) $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.$ Пряма $y = -\dfrac{C}{B}$ паралельна осі *Ox.*

г) $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0.$ Пряма $x = 0$ і суміщається з віссю *Oy* ($x = 0$ – рівняння осі *Oy*).

д) $A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0.$ Пряма $y = 0$ і суміщається з віссю *Ox* ($y = 0$ – рівняння осі *Ox*).

2. *Точкою* $M_0(x_0y_0) \in l,\ \overline{V} = (m, n)$ — *напрямним вектором.* $M(x, y) \in l$ — змінна точка, $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ – змінний вектор (рис. 2.2). Тоді $\overline{V} = (m, n) \parallel \overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ — *канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Звідси дістаємо *параметричні рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad t \in R - \text{ параметр.} \tag{2.2}$$

3. *Двома точками* $M_0(x_0, y_0),\ M_1(x_1, y_1) \in l.$ $M(x, y) \in l$ — змінна точка (рис. 2.3),

$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \parallel \overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0),$$

звідки

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{2.3}$$

є рівняння прямої, що визначається двома заданими точками.

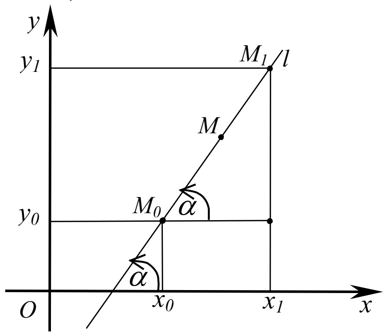


Рис. 2.3

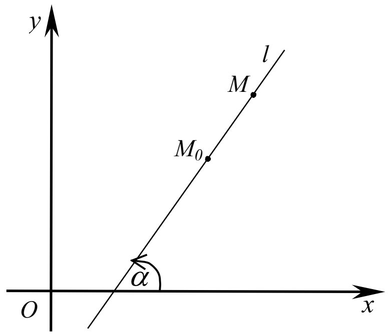


Рис. 2.4

З рівняння (2.3)

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = k = tg\alpha, \; x_1 \neq x_0. \qquad (2.4)$$

Вираз (2.4) називається *кутовим коефіцієнтом прямої l*, *α>0 – кутом нахилу прямої,* що вимірюється кутом, який утворюється між додатним напрямом осі Ox і прямою *l* проти годинникової стрілки. Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу цієї прямої до додатного напряму осі *Ox*.

4. *Точкою* $M_0 \in l$ *і кутовим коефіцієнтом k прямої* (рис. 2.4). Рівняння прямої має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad , \qquad (2.5)$$

або

$$y = kx + b, \text{ де } b = y_0 - kx_0.$$

5. *Відрізками на осях Ox і Oy.* З рівняння (2.1) $Ax + By + C = 0, \; A \neq 0, \; B \neq 0, \; C \neq 0$:

$$Ax + By = -C \Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Позначимо: $-\frac{C}{A} = a, \; -\frac{C}{B} = b.$ Тоді рівняння прямої у відрізках $|a|, |b|$ на координатних осях має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (2.6)$$

де *a* — абсциса і *b* – ордината точок перетину прямої відповідно з осями *Ox* і *Oy* (рис. 2.5, коли $a > 0$ і $b > 0$).

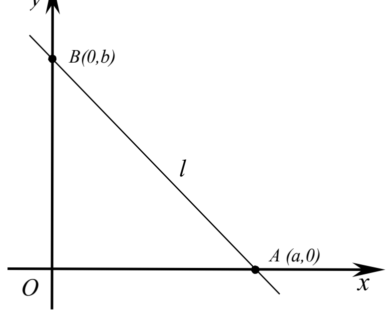


Рис. 2.5

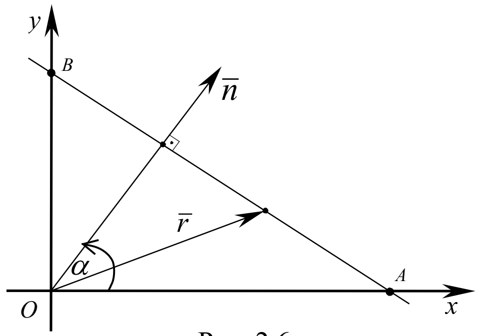


Рис. 2.6

6. *Нормаллю прямої* $\overline{n}^{\circ} \perp l$, *кутом нахилу* α *нормалі та відстанню p>0 точки O(0,0) до прямої l.* Змінний радіус-вектор $\overline{r} = (x, y)$ точки $M \in l$ (рис. 2.6), $\overline{n^{\circ}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\left|\overline{n^{\circ}}\right| = 1$, $\text{Пр}_{\overline{n^{\circ}}}\overline{r} = p$. За формулою скалярного добутку

$$\overline{n^{\circ}} \cdot \overline{r} = \left|\overline{n^{\circ}}\right| \text{Пр}_{\overline{n^{\circ}}}\overline{r} \Rightarrow \overline{n^{\circ}} \cdot \overline{r} = p \Rightarrow \left(\overline{\cos\alpha, \sin\alpha}\right) \cdot \left(\overline{x, y}\right) = p,$$

звідки

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{2.7}$$

є нормальним рівнянням прямої.

7. *Зведення загального рівняння прямої l до нормального вигляду.*

З рівняння

$$Ax + By + C = 0,\ \overline{n} = (A, B),\ \left|\overline{n}\right| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

за формулами напрямних косинусів вектора:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тоді

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \Rightarrow \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

($\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -p < 0,$ тому при зведенні вибираємо знак кореня, протилежний зі знаком параметра *C*). Рівняння прямої

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \tag{2.8}$$

є зведене до нормального вигляду загальне рівняння.

8. *Відстань* $d > 0$ *від точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямої* $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Радіус-вектор $\overline{r} = (x_1, y_1)$ точки $M \notin l$, $Пр_{\overline{n^{\circ}}}\overline{r_1} = p + d > 0$, $\overline{n^{\circ}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\left|\overline{n^{\circ}}\right| = 1$.

За формулою (1.3)

$$\overline{n^{\circ}} \cdot \overline{r_1} = \left|\overline{n^{\circ}}\right| Пр_{\overline{n^{\circ}}}\overline{r_1} = p + d,$$

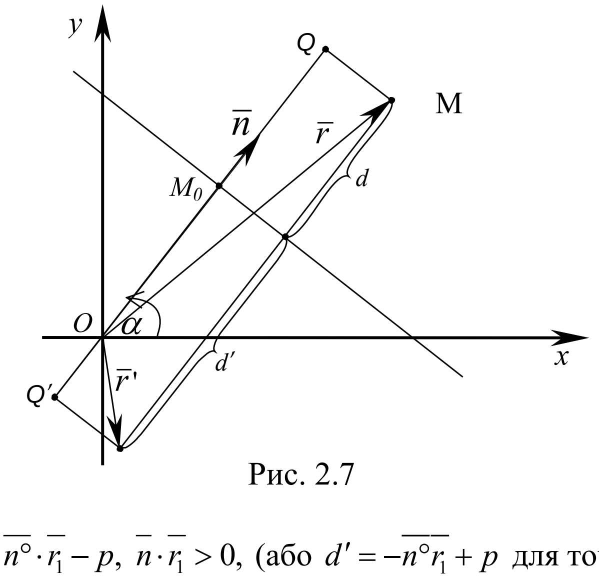


Рис. 2.7

звідки (рис. 2.7) $d = \overline{n^{\circ}} \cdot \overline{r_1} - p$, $\overline{n} \cdot \overline{r_1} > 0$, (або $d' = -\overline{n^{\circ}r_1} + p$ для точки N', тут: $\overline{n^{\circ}r_1} < 0$).

Отже,

$$d = \left|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p\right|. \tag{2.9}$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то відстань

$$d = \frac{\left| \; Ax + By + C \; \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.10}$$

9. *Геометричний смисл нерівності Ax+By+C>0 (або Ax+By+C<0).*

Число $Ax_1 + By_1 + C = \delta$ називається *відхиленням точки* $N(x_1, y_1)$ від прямої *Ax+By+C=0.* Формула (2.10) через відхилення δ має вигляд

$$d = \frac{|\delta|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

За означенням відхилення δ є додатнє (від'ємне) число, якщо $Ax_1 + By_1 + C > 0 \left(Ax_1 + By_1 + C < 0\right)$.

Пряма $Ax + By + C = 0$, $\bar{n} = (A, B)$ поділяє площину *Oxy* на дві півплощини (області множини точок), в одній з них тричлен $Ax + By + C \geq 0$, а в іншій — $Ax + By + C \leq 0$. Знак тричлена визначається напрямом нормалі $\bar{n} = (A, B)$ прямої $Ax + By + C = 0$ (рис. 2.8, а, б).

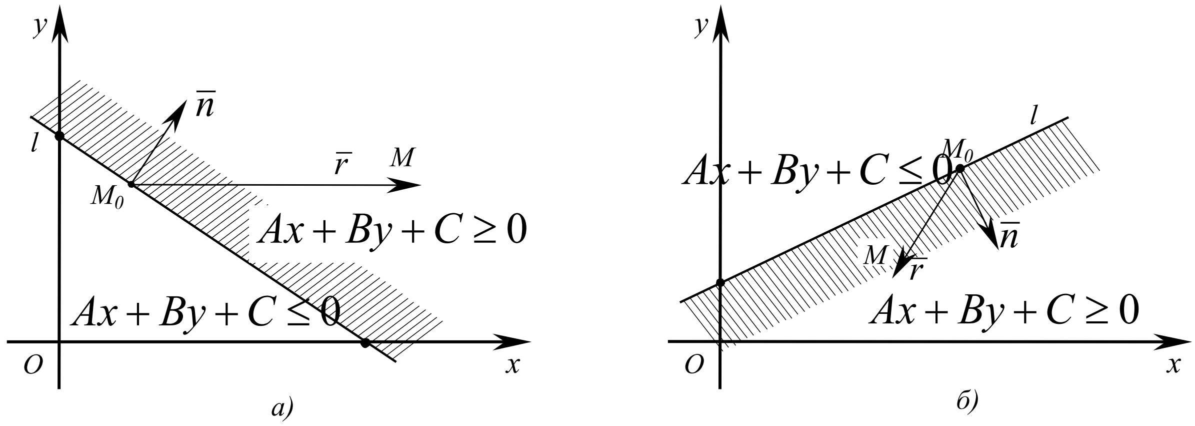


Рис. 2.8

Якщо точки $M(x, y)$ лежать у півплощині, у якій є кінець вектора нормалі $\bar{n}$, то кут $\left(\bar{n}, \widehat{\ } \, \overline{M_0M}\right) < \frac{\pi}{2}$ і за формулою

$$\cos\alpha = \frac{\bar{n} \cdot \overline{M_0M}}{|\bar{n}||M_0M|} > 0 \Rightarrow \bar{n} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) > 0$$

або

$$Ax + By + C > 0.$$

Тоді для точок *M*, що лежать у другій півплощині, кут $\left(\bar{n}, \widehat{\ } \, \overline{M_0M}\right) > \frac{\pi}{2}$, тричлен $Ax + By + C < 0$.

З цього випливає, що відхилення $\delta > 0 \, (\delta < 0)$ точки $M(x, y)$ відносно прямої, якщо точка *M* і початок координат *O* (0,0) лежать по різні (по один) бік від прямої.

10. *Рівняння бісектрис двох суміжних кутів, утворених прямими* (рис. 2.9):

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

(за властивістю, що відстані точок $M(x,y)$ бісектриси кута від його сторін l_1 і l_2 однакові: $d_1 = d_2$, дістаємо рівняння бісектрис: $M_4M_3 = \frac{\delta_1}{n_1} + \frac{\delta_2}{n_2} = 0$ і $M_2M_1 = \frac{\delta_1}{n_1} - \frac{\delta_2}{n_2} = 0$, $n_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ $\delta_i = A_i x + B_i y + C_i, i = 1,2$ (рис. 2.9):

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \qquad (2.11)$$

(знак „+” („–“) між доданками в рівнянні бісектриси кута, коли точки його області мають протилежні (однакові) знаки відхилення від сторін кута).

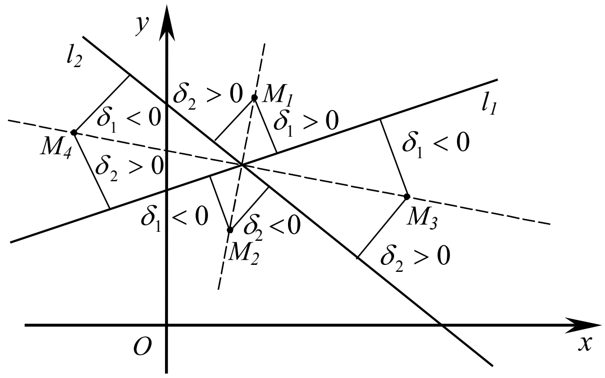


Рис. 2.9

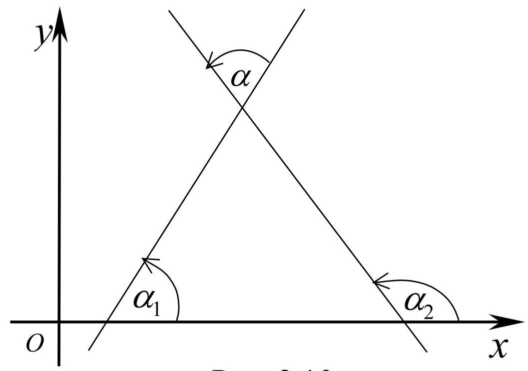


Рис. 2.10

11. *Кут* α *між двома прямими* l_1 і l_2 *з відповідними кутовими коефіцієнтами* k_1 і k_2 (рис. 2.10). Позначимо: $(l_1 \hat{,} l_2) = \alpha > 0$ (вимірюється орієнтованим додатним кутом, утвореним обертанням прямої l_1 навколо точки їх перетину до суміщення з прямою l_2 проти годинникової стрілки).

З ΔABC $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Тому

$$tg\alpha = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2},\ tg\alpha_2 = k_2 \text{ і } tg\alpha_1 = k_1,$$

або

$$tg\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2},\ \ \alpha = \left(l_1, \hat{}\ l_2\right) = -\left(l_2, \hat{}\ l_1\right),\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \qquad (2.12)$$

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (прямі: $l_1 \perp l_2$), то $1 + k_1k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Кут α між прямими l_1 і l_2 з відповідними нормалями $\overline{n_1} = (A_1, B_1)$ і $\overline{n_2} = (A_2, B_2)$ обчислюється за формулою

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (2.13)$$

12. *Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.*

$$\begin{aligned} &l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,\ \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \\ &l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1,\ n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.14)$$

13. *Пучок прямих.* Якщо прямі $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ і $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ перетинаються в точці S (система рівнянь прямих має єдиний розв'язок), то рівняння

$$\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0, \qquad (2.15)$$

де $\lambda \in R$ при різних значеннях параметра λ є рівняннями прямих, що проходять через точку S.

Рівняння (2.15) сукупності всіх прямих площини, які проходять через точку S, називається *рівнянням пучка прямих* з центром S.

14. *Перетин двох прямих.* Координати точки перетину двох прямих знаходимо із системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \qquad (2.16)$$

За методом виключення невідомих дістаємо еквівалентну даній систему:

$$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_1, \\ \Delta\cdot y=\Delta_2, \end{cases} \qquad (2.17)$$

де

$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=B_1C_2-B_2C_1,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=C_1A_2-C_2A_1.$ — визначники другого порядку системи (2.16).

З (2.17) випливає:

а) $\Delta\neq 0$ — прямі перетинаються, координати точки перетину знаходимо за формулами:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \qquad (2.18)$$

б) $\Delta=0,\ \Delta_1\neq 0$ або $\Delta_2\neq 0$ — система (2.16) не має розв'язку, прямі паралельні;

в) $\Delta=0,\ \Delta_1=0$ і $\Delta_2=0$ — система має безліч розв'язків, прямі суміщаться.

15. *Умова перетину трьох прямих:*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3=0. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Із системи (2.19) перших двох рівнянь прямих, що перетинаються, координати точки їх перетину (2.18) підставляємо в третє рівняння, дістаємо:

$$A_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}-B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,$$

або (це розклад визначника 3-го порядку за елементами 3-го рядка)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.20)$$

(правило обчислення визначника (2.20)).

Це необхідна й достатня (якщо прямі попарно перетинаються) умова, що три прямі перетинаються в одній точці.

Задачі

1. Знайти рівняння прямої *l*, симетричної прямій l_1: $3x-2y+1=0$ відносно точки $M(5,1)$.

Розв'язання. Пряма $l \parallel l_1$, її рівняння 3x-2y+C = 0. Відстані точки *M* від прямих l і l_1 однакові. За формулою (2.10):

$$\frac{|3\cdot 5-2\cdot 1+C|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3\cdot 5-2\cdot 1+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}.$$

Звідси

$13+C=\pm 14 \Rightarrow C=1$ і $C=-27.$

Отже, рівняння прямої l:

$3x-2y+27=6$.

2. Рівняння падаючого променя точкового джерела світла на вісь *Ox*

2x – 3y – 12 = 0. Знайти рівняння відбитого променя.

Розв'язання. З рівняння падаючого променя при *y* = 0 знаходимо точку $M(6,0)$ відбитого променя від осі *Ox*. Кутовий коефіцієнт падаючого променя $k=\frac{2}{3}.$ Кутовий коефіцієнт відбитого променя $k_1=tg\left(\pi-arctg\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$ За формулою (2.5) рівняння відбитого променя

$y=-\frac{2}{3}(x-6)\Rightarrow 2x+3y-4=0.$

3. Знайти рівняння сторін квадрата, якщо його вершина $A_1(2,-4)$ і точка перетину його діагоналей M(5,2).

Розв'язання. За формулами (1.2) знаходимо вершину квадрата $A_3(x,y)$:

$$5=\frac{x+2}{2}\Rightarrow x=8 \quad і \quad 2=\frac{y-4}{2}\Rightarrow y=8,\ A_3(8,8).$$

За формулою (2.4) кутовий коефіцієнт *k* прямої A_1A_3:

$$k=\frac{8+4}{8-2}=2.$$

Кут $(A_1A_3,\, A_1A_4)=\frac{\pi}{4}$. З формули (2.12) кутовий коефіцієнт k_1 прямої A_1A_4:

$tg\frac{\pi}{4}=\frac{k-k_1}{1+kk_1}\Rightarrow 1=\frac{2-k_1}{1+2k_1}\Rightarrow k_1=\frac{1}{3}.$

Рівняння сторін A_1A_4 і A_3A_4 квадрата відповідно:

$$A_1A_4:\ y+4=\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow x-3y-14=0,$$

$$A_3A_4:\ y-8=-3(x-8)\Rightarrow 3x+y-32=0.$$

Рівняння сторін A_1A_2 і A_2A_3 квадрата відповідно:

$$A_1A_2:\ y+4=-3(x-2)\Rightarrow 3x+y-2=0,$$

$$A_2A_3:\ y-8=\frac{1}{3}(x-8)\Rightarrow x-3y+16=0.$$

4. Знайти рівняння прямої *l*, що проходить через центр мас трикутника $A(3,1)$, $B(2,0)$, $C(2,0)$ і поділяє відрізок між точками $O(0,0)$ і $N(6,4)$ у відношенні λ.

Розв'язання. Центр мас ΔABC є точка $M\left(\frac{3+2+4}{3}, \frac{1+5+3}{3}\right) = M(3,2)$. Точка $P(x, y) \in ON$ поділяє відрізок у відношенні $\frac{OP}{PN} = \lambda$, її координати

$$x = \frac{0+6\lambda}{1+\lambda}, \ y = \frac{0+4\lambda}{1+\lambda}.$$

Рівняння прямої MP:

$$\frac{y-2}{\frac{4\lambda}{1+\lambda}-2} = \frac{x-3}{\frac{6\lambda}{1+\lambda}-3} \Rightarrow \frac{y-2}{2(\lambda-1)} = \frac{x-3}{3(\lambda-1)} \Rightarrow 2x-3y=0$$

(точка M суміщається з точкою O).

5. Знайти рівняння сторін ΔABC, якщо задані вершина $B(2,-1)$ і рівняння висоти $x-7y+15 = 0$ та бісектриси $7x+y+5=0$, які проведені з однієї вершини.

Розв'язання. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} x-7y+15=0, \\ 7x+y+5=0 \end{cases}$$

знаходимо $A(-1,2)$ — вершину трикутника. За формулою (2.3) рівняння сторони AB має вигляд $4x-3y+10=0$. Висота AB і бісектриса AM взаємно перпендикулярні, бо добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює –1. Задана точка B є вершиною тупого кута ΔABC. З рівності кутів $(AB,\wedge AM)=(AM,\wedge BC)$ маємо рівність

$$tg(AB,\wedge AM)=tg(AM,\wedge BC) \Rightarrow \left|\frac{-7-\frac{4}{3}}{1-7\cdot\frac{4}{3}}\right| = \left|\frac{-7-k}{1-7k}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{7+k}{1-7k}\right| \Rightarrow 7+k = \pm(1-7k) \Rightarrow k=-\frac{3}{4} \text{ і } k=\frac{4}{3}$$

($k=\frac{4}{3}$ — кутовий коефіцієнт AB), отже, $k=-\frac{3}{4}$ — кутовий коефіцієнт сторони AC, її рівняння: $y-2=-\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 3x+4y-5=0.$

Рівняння сторони $BC \perp AD$ знаходимо за формулою (2.5):

$$y-6=-7(x-2) \Rightarrow 7x+y-20=0.$$

6. Знайти рівняння прямої *l*, яка проходить через точку $M(-2,1)$, і її відстань від точки $N(3,1)$ дорівнює 4.

Розв'язання. $M \in l$, рівняння прямої має вигляд: $y-1=k(x+2)$ або $kx-y+2k+1=0 \Rightarrow \frac{kx-y+2k+1}{\sqrt{k^2+1}}=0$ — нормальне рівняння прямої *l*.

За формулою (2.10)

$$4=\frac{|k\cdot 3-1+2k+1|}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow 4\sqrt{k^2+1}=\pm 5k,$$

розв'язуючи це рівняння відносно *k*, знаходимо $k=\pm\frac{4}{3}$.

Рівняння прямої *l*:

$$y-1=\pm\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow 4x-3y+11=0 \text{ і } 4x+3y+5=0.$$

7. У $\Delta ABC: A(-3,-1),\ B(1,-5),\ C(9,3),$ сторони AB і AC поділені у відношенні $\lambda = 3$ в напрямі від вершини A. Довести, що точки поділу, сполучені з протилежними вершинами, і медіана AM перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Координати точок поділу $A_1(x_1, y_1) \in AB$ і $A_2(x_2, y_2) \in AC$ знаходимо за формулою (1.2)

$$x_1 = \frac{-3+3\cdot 1}{1+3} = 0,\ y_1 = \frac{-1-3\cdot 5}{1+3} = -4 \Rightarrow A_1(0,-4);$$

$$x_2 = \frac{-3+3\cdot 9}{1+3} = 6,\ y_2 = \frac{-1-3\cdot 3}{1+3} = 2 \Rightarrow A_2(6,2).$$

Координати точки $M(x, y)$:

$$x = \frac{1+9}{2} = 5,\ y = \frac{-5+3}{2} = -1 \Rightarrow M(5,-1).$$

Знаходимо рівняння прямих A_1C, A_2B і AM за формулою (2.3):

$$A_1C:\ 7x - 9y - 36 = 0,$$

$$A_2B:\ 7x - 5y - 32 = 0,$$

$$AM:\ y + 1 = 0.$$

Ці прямі перетинаються в одній точці, оскільки виконується умова (2.20):

$$\begin{vmatrix} 7 & -9 & -36 \\ 7 & -5 & -32 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 & -36 \\ 6 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Знайти рівняння бісектриси кута між прямими $l_1:\ x + 2y - 1 = 0$ і $l_2:\ 3x - 6y - 5 = 0$, в області якого є точка $M(1,3)$.

Розв'язання. Відхилення δ_1 *і* δ_2 точки M відповідно від прямої l_1 і l_2 :

$$\delta_1 = 1 + 2(-3) - 1 = -6,\ \delta_1 < 0;$$

$$\delta_2 = 3 - 6(-3) - 5 = 16,\ \delta_2 > 0.$$

Рівняння бісектриси за формулою (2.1) має вигляд:

$$\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+2^2}} + \frac{3x-6y-5}{\sqrt{3^2+6^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{19}{3}.$$

9. Знайти рівняння бісектриси тупого кута, утвореного прямими $l_1:\ x - 3y + 5 = 0$ і $l_2:\ 3x - y + 15 = 0.$

Розв'язання. Якщо відхилення точки O(0,0) – початку координат мало ознакою знаки від сторін кута, то точка O(0,0) лежить в області тупого кута, тут: $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$.За формулою (2.13) рівняння бісектриси тупого кута має вигляд

$$\frac{x-3y+5}{\sqrt{10}} - \frac{3x-y+15}{\sqrt{10}} = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0.$$

Вправи

1. Задано рівняння $x + y - 2 = 0$ і $2x + y + 4 = 0$ двох сторін паралелограма й точка (3,1) перетину його діагоналей. Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.

2. Задані вершини трикутника $A(-6,2)$, $B(2,-2)$ і точка $M(1,2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C.

3. Площа ΔABC дорівнює 1,5, його вершини $A(2,-3)$, $B(3,-2)$, а центр мас лежить на прямій $3x - y - 8 = 0$. Знайти координати вершини C.

4. Рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 2y - 7 = 0$ і вершина $A(2,-3)$. Знайти рівняння двох інших сторін прямокутника.

5. Вершини трикутника $A(1,-1)$, $B(-2,1)$ і $C(3,5)$. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

6. Вершини трикутника $A(1,-2)$, $B(5,4)$ і $C(-2,0)$. Знайти рівняння бісектриси $\angle BAC$.

7. На прямій $2x-y-5=0$ знайти таку точку M, щоб сума її відстаней до точок $A(-7,1)$, $B(-5,5)$ була б найменшою.

8. Точка $M(1,-1)$ – центр квадрата, $x-2y+12=0$ — рівняння його сторони. Знайти рівняння інших сторін квадрата.

9. Рівняння падаючого променя точкового джерела світла $x-2y+5=0$ відбивається від прямої $3x-2y+7=0$. Знайти рівняння відбитого променя.

10. Вершини трикутника $A(-10,2)$ і $B(6,4)$; його висоти перетинаються в точці $M(5,2)$. Знайти вершину C.

11. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо його вершина $A(4,-1)$ і рівняння двох бісектрис $x-1=0$ і $x-y-1=0$.

12. Знайти рівняння сторін ΔABC, якщо задана вершина $B(2,6)$ і рівняння висоти $x-7y+15=0$ та бісектриси $7x+y+5=0$, що проведені з однієї вершини.

13. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3,0)$, якщо її відрізок між прямими $2x-y-2=0$, $x+y+3=0$ ділиться в точці M навпіл.

14. Знайти значення m, при якому прямі $(m-1)x+my-5=0$ і $mx+(2m-1)y+7=0$ перетинаються на осі Ox.

15. Знайти значення m, при якому прямі $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$, $mx+y-13=0$ перетинаються в одній точці.

16. Задано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ і вершина $A(-2,1)$. Знайти площу S прямокутника.

17. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку $M(2,7)$ і на відстані, що дорівнює 5, від точки $N(1,2)$.

18. Рівняння сторони квадрата $4x-3y-7=0$ і його вершина $A(5,-1)$. Знайти рівняння інших сторін квадрата.

19. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку $M(2,-1)$ і з прямими $2x-y+5=0$ і $3x+6y-1=0$ утворюють рівнобедрені трикутники.

20. Яка з областей тупого чи гострого кутів, утворених прямими $3x-5y-4=0$ і $x+2y+3=0$, містить точку $M(2,-5)$?

21. Знайти рівняння бісектриси кута між прямими $x+2y-11=0$ і $3x-6y-5=0$, у якому міститься точка $M(1,-3)$.

22. Знайти рівняння прямої пучка $11x+3y-7+\lambda(12x+y-19)=0$, відстані якої однакові від точок $M(3,-2)$ і $N(-1,6)$.

23. Вершини трикутника $A(3,-2)$, $B(1,5)$, $C(-4,3)$. Знайти площу S трикутника, вершинами якого є основи висот ΔABC.

24. У рівнобедреному ΔABC рівняння основи AC: $2x-3y-5=0$ і бічної сторони AB: $x+y+1=0$. Знайти рівняння сторони BC, що проходить через точку $M(1,1)$.

РОЗДІЛ 3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§1. Основні поняття

Рівняння другого степеня відносно змінних x, y:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (3.1)$$

де a_{ij}, $i,j=1,2,3$ — параметри рівняння, на декартовій площині *Oxy* означає лінію другого порядку.

Нехай прямі *a* і *b* перетинаються в точці *S*. При обертанні прямої *a* навколо осі — прямої *b* — дістанемо конічну поверхню обертання дво-порожнинного конуса: *S* — вершина, *b* — вісь, *a* — твірна конічної поверхні (рис. 3.1, а).

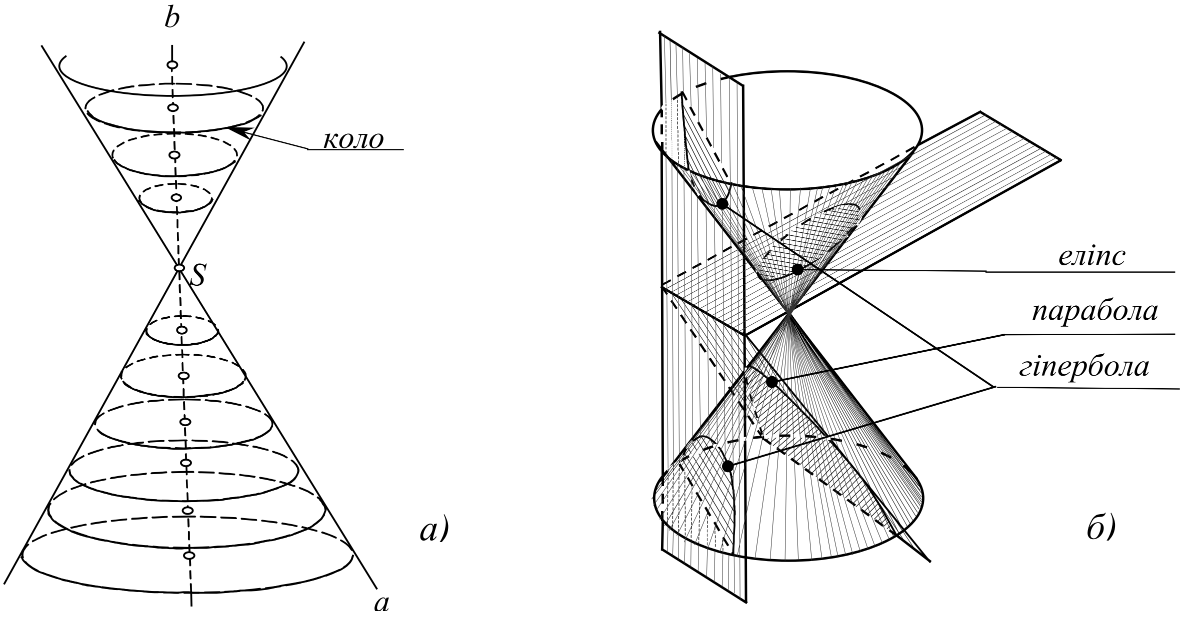


Рис. 3.1

У перерізі прямого конуса площиною *П* можливі такі криві: коло, якщо площина $П \perp b$ — осі конуса; еліпс, парабола, гіпербола, якщо площина *П* не проходить через вершину конуса S і відповідно перетинає всі твірні конуса, паралельна одній з його твірних і перетинає обидві порожнини конуса; вони називаються конічними перерізами (рис. 3.1, б).

Рівняння (3.1) конічних перерізів (якщо його параметр $a12 = 0$), коли їх осі симетрії збігаються з осями координат декартової площини *Oxy* або паралельні до них, деякими перетвореннями зводяться до виду канонічних рівнянь залежно від його параметрів (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

$a_{12}=0$	$a_{11}=a_{22}\neq 0$ $a_{13}^2+a_{23}^2-4a_{11}a_{33}>0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}>0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}=0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}<0$	$a_{11}=a_{22}=0$
	коло	еліпс	парабола	гіпербола	пряма

Конічні перерізи, крім параболи, називаються центральними кривими.

§2. Коло

2.1. *Рівняння кола.* Рівняння кола з центром O_1 (x_0,y_0) і радіусом r (позначається: $k(O_1,r)$ має вигляд (рис. 3.2):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \qquad (3.2)$$

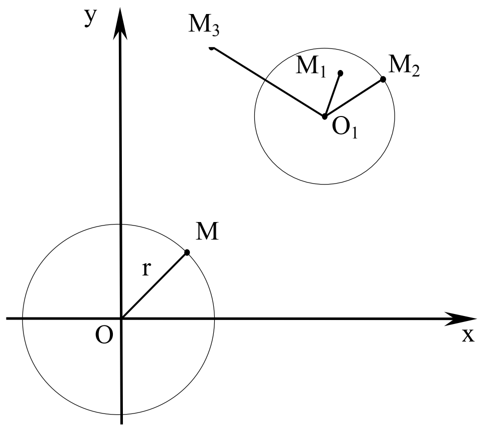


Рис. 3.2

Рівняння кола $\bar{k}$ (O,r) з центром у початку координат:

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (3.3)$$

Точка $M(x_1,y_1)$ площини Oxy лежить усередині кола, на колі або поза колом, якщо вираз:

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \ \le \mathrm{r}^2 \text{ або } > \mathrm{r}^2. \qquad (3.4)$$

Рівняння (3.1) називається *загальним* рівнянням кола, якщо $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, $a_{13}^2+a_{23}^2-4a_{11}a_{33}>0$.

2.2. *Рівняння дотичної до кола.* Рівняння дотичної до кола $k(O_1,r)$ у точці $M(x_1,y_1)$:

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=r^2. \qquad (3.5)$$

Зокрема, якщо точка дотику $M(x_1,y_1)\in k\,(O,r)$, то рівняння дотичної

$$x_1x+y_1y=r^2. \qquad (3.6)$$

2.3. *Точки перетину кола з прямою.* Точки перетину кола k(O$_1$,r) з прямою $Ax+By+C=0$ знаходимо із системи рівнянь кола та прямої, виключаючи в системі невідоме y, дістаємо квадратне рівняння відносно x. Якщо його дискримінант $D\ge 0$ або <0, то відповідно пряма перетинає коло, дотична до нього або лежить поза колом.

2.4. *Полюс і поляра кола.* Нехай прямі PA і PB, проведені з точки P, — дотичні до кола $k(O_1,r)$ в його точках A і B. Тоді точка P називається *полюсом,* а пряма AB — його *полярою* відносно кола $k(O_1,r)$ (рис. 3.3).

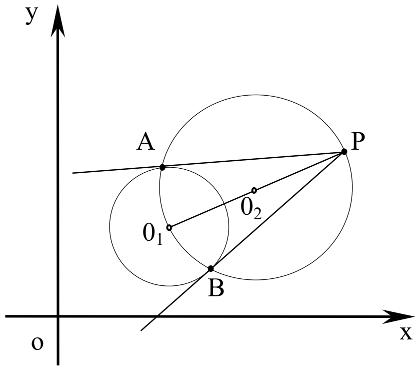


Рис. 3.3

Рівняння поляри AB полюса $P(x_1y_1)$ відносно кола $k(O_1,r)$

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=r^2, \qquad (3.7)$$

зокрема відносно кола $k(O,r)$:

$$x_1x+y_1y=r^2. \qquad (3.8)$$

Якщо полюс $P(x_1, y_1)$ суміщається з точкою кола $k(O_1,r)$, то рівняння поляри (3.7) зводиться до рівняння дотичної (3.5).

2.5. *Рівняння дотичних до кола, проведених з точки, що лежить поза колом.*

Із системи рівнянь кола $k(O_1,r)$ і поляри (3.7) полюса $P(x_1, y_1)$ знаходимо точки їх перетину A і B. Тоді рівняння дотичних PA і PB до кола записуємо як рівняння прямих, що проходять через дві точки: P і A та P і B.

Геометрично точки дотику A і $B \in (O_1, r)$ визначаються як точки перетину кола $k(O_1, r)$ з колом діаметра PO_1 (рис. 3.3).

Задачі

1. Знайти канонічне рівняння кола, заданого загальним рівнянням:

$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0.$

Розв'язання. Утворимо повні квадрати відносно змінних x і y:

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = 15 + 9 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+5)^2 = 49.$

Отже, $k(O_1,r)$: O_1 (3,–5), r=7.

2. Знайти рівняння кола $k(O_1, r)$, що проходить через точки A(3,0) і B(–1,2), з центром на прямій x–y+2=0.

Розв'язання. Діаметр кола $k(O_1, r)$ $O_1M \perp AB$, $M1(1,1) \in O_1M \cap AB$, кутові коефіцієнти: kAB = –1, kCM = 2 (рис. 3.4). Дістанемо рівняння прямої O_1M: y — 1 = 2(x – 1).

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y - 1 = 2(x-1), \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

знаходимо центр кола O1(3,5). Тоді

$$r = BO_1 = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = 5.$$

Отже, k (O_1,r): $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

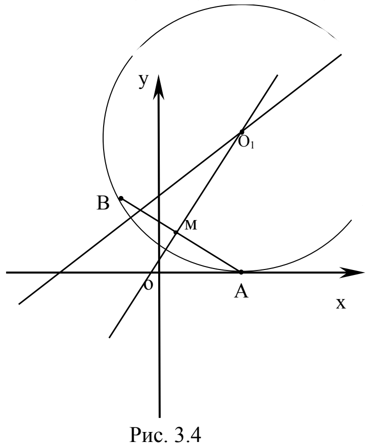


Рис. 3.4

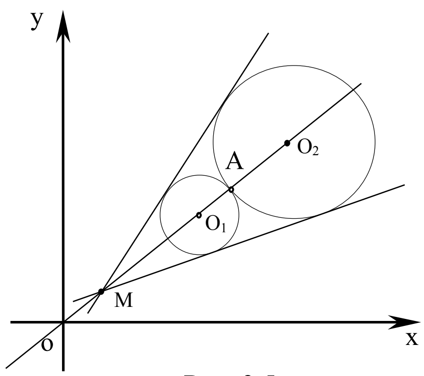


Рис. 3.5

3. Знайти рівняння кола, що проходить через точку A(1,1) і дотикається до прямих l_1: $7x$+y-3=0 і l_2 :x+$7y$–3=0.

Розв'язання. Точка $M\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) = l_1 \cap l_2$ є розв'язок системи

$$\begin{cases} 7x + y - 3 = 0, \\ x + 7y - 3 = 0. \end{cases}$$

Точки M і A лежать на бісектрисі першого координатного кута. Тому центр O_1 (a,a) шуканого кола $k(O_1, r)$ лежить на бісектрисі $y = x$, його рівняння має вигляд:

$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2.$

Оскільки $A \in k(O_1,r)$, то $r = \sqrt{2}\left|1-a\right|$ є відстань між точками A і O_1. За формулою відстані від точки O_1 (a,a) до прямої $x + 7y — 3 = 0$ дістанемо $r = \frac{\left|8a-3\right|}{5\sqrt{2}}$.

Тоді $\sqrt{2}(1-a) = \pm\frac{8a-3}{5\sqrt{2}}$. Звідси $a = \frac{7}{2}$ і $a = \frac{13}{18}$; відповідно $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$ і $r = \frac{5}{9\sqrt{2}}$.

Отже, існує два розв'язки (рис. 3.5):

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ і $\left(x-\frac{13}{18}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{25}{162}.$

4. Знайти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2-2x-4=0$ в точці (3.1).

Розв'язання. Канонічне рівняння кола

$(x-1)^2 + y^2 = 5.$

Точка (3,1) належить колу. За формулою (3.5) рівняння дотичної:

$2(x-1) + y = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 7 = 0.$

5. Знайти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, проведених із точки P (1,–1).

Розв'язання. Канонічне рівняння кола

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20.$

За формулою (3.7) рівняння поляри точки P

$6(x+5) - 2(y-1) = 20 \quad \Rightarrow \quad 3x - y + 6 = 0.$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y-1)^2 = 20, \\ 3x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

дістаємо точки A (–1,3) і B(–3,–3) перетину кола з полярою.

Рівняння дотичних PA і PB — це рівняння прямих, проведених через дві точки A і P; B і P: $2x + y - 1 = 0$ і $x - 2y - 3 = 0.$

6. Знайти рівняння г.м.т. P, якщо довжина хорди між точками дотику A і B дотичних до кола k (O,r), проведених з точки P, дорівнює 2s.

Розв'язання. За умовою $OA= r$, $AM=s$. Позначимо: $OP=R$, $OM=\sqrt{r^2 - s^2}$. Г.м.т. $P(x,y)$ є коло k (O,R) (рис. 3.6) За теоремою: $OA_2=OM\cdot OP$ маємо $r^2 = \sqrt{r^2 - s^2} \cdot R \Rightarrow R = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$

Рівняння г.м.т. $M(x,y)$ $x^2 + y^2 = \frac{r^4}{r^2 - s^2}.$

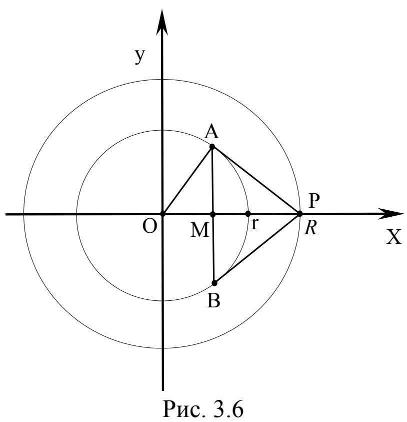


Рис. 3.6

Вправи

1. Знайти коло з центром на прямій $9x + 4y — 47 = 0$, яке проходить через точку (6, 1) і перетинає під прямим кутом коло $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$.

2. Знайти довжини дотичних, які приведені до кола $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ з точки (0, –1).

3. Знайти коло $k(C, 3)$, яке проходить через точку (2, 3) і ортогональне до кола $x^2 + y^2 = 1$.

4. Знайти г.м.т., з яких коло $x^2 + y^2 = r^2$ видно під прямим кутом.

5. Знайти кут, під яким видно коло $x^2 + y^2 = 16$ з точки (8, 0).

6. Знайти рівняння кіл, що проходять через точку (1, 2) і дотикаються до прямих: $x — y + 3=0$, $x — y - 1 = 0$.

7. Знайти рівняння дотичних, проведених до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ з точки (5, 2).

8. Знайти рівняння кола, що проходить через точку (1, –2) і точки перетину прямої $x - 7y + 10 = 0$ з колом $x^2 + y^2 - 2x + 4y — 20 = 0$.

9. Знайти множину точок, що задовольняють умовам:

а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 0$; б) $1 \leq (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$.

10. Знайти рівняння кіл, що дотикаються прямих $2x — 3y — 10 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, та їх центри лежать на прямій $4x - 5y — 3 = 0$.

11. Знайти найменшу відстань від точки (3, 9) до кола $x2 + y2 - 26x + 30y + 313 = 0$.

12. Знайти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, паралельних до прямої $x - 2y + 9 = 0$.

13. Знайти найменшу відстань від кола $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y — 43 = 0$ до прямої $8x - 4y + 73 = 0$.

14. Знайти коло $k(C, r)$, $C(1, 3)$, яке відтинає на прямій $x + 3y — 2 = 0$ хорду, довжина якої дорівнює 8.

15. Через точку $P \in k(C, r)$ проведені всі можливі хорди. Знайти г.м.т., які ділять ці хорди у відношенні λ.

§3. Еліпс

Означення. Еліпсом називається г.м.т., сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) стала, більша, ніж відстань між фокусами.

3.1. *Параметри еліпса.* Нехай $M(x,y)$ — точка еліпса (рис. 3.10). F_1 (–c, 0) і F_2(c, 0) — фокуси, $F_1F_2 = 2c$ — міжфокусна відстань; $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ — фокальні радіуси: $r_1 + r_2 = 2a > 2c$.

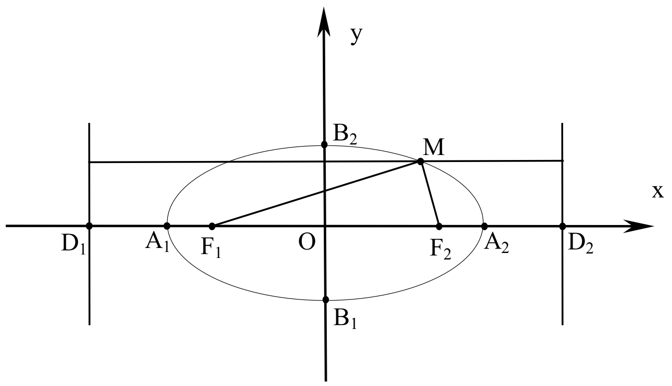


Рис. 3.10

$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ – вершини еліпса ($a>b$). A_1A_2 — велика і B_1B_2 — мала осі еліпса, $F_1F_2 \subset A_1A_2$. Звідси a і b — відповідно велика та мала півосі, точка $O(0,0) = A_1A_2 \cap B_1B_2$ — центр еліпса (центр симетрії). Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ — *ексцентриситет* еліпса.

3.2. *Директрисою* еліпса називається така пряма, для якої відношення відстаней будь-якої точки еліпса до неї й до суміжного її фокуса стале.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — директриси еліпса, відповідні суміжним фокусам F_2 і F_1.

Формули фокальних радіусів: $r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$.

3.3. *Директоріальна властивість еліпса.* Відношення фокального радіуса $r_2(r_1)$ будь-якої точки *M* еліпса до відстані $d_2(d_1)$ її від відповідної директриси дорівнює ексцентриситету: $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \ \left(\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon\right)$ (рис. 3.10).

3.4. *Канонічне рівняння еліпса* з центром $O(0,0)$ або O_1 (x_0,y_0):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Залежність між параметрами еліпса *a,b*, і *c*: $c_2 = a_2 — b_2$.

Еліпс дістаємо в результаті рівномірного стиску кола $X^2 + Y^2 = a^2$ до його діаметра (рис. 3.11) з коефіцієнтом стиску $\frac{b}{a}: x = X,\ y = \frac{b}{a}Y \Rightarrow X = x,\ Y = \frac{a}{b}y,$ тобто координати будь-якої точки (x, y) є образом точки (X, Y) кола:

$$X^2 + Y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Нехай *M(x,y)* — довільна точка еліпса, *P*(*X,У*) — її праобраз на колі. Позначимо через φ кут нахилу радіуса *OP*; тоді

$$X = a\cos\varphi,\ Y = a\sin\varphi \Rightarrow x = X = a\cos\varphi,\ y = \frac{b}{a}Y = b\sin\varphi.$$

Рівняння

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$$

є параметричними рівняннями еліпса. Параметр φ називається ексцентричним кутом точки *M* еліпса.

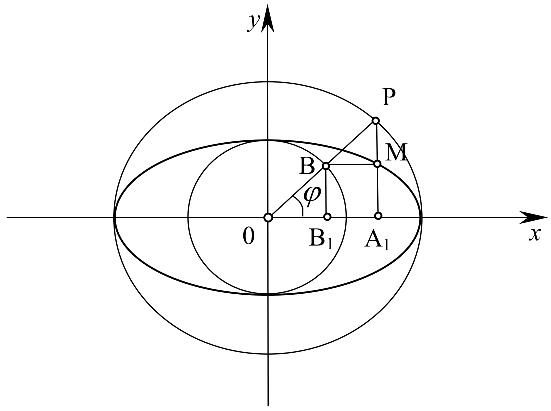


Рис. 3.11

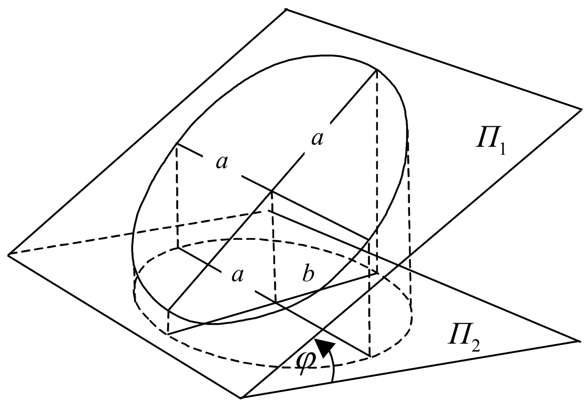


Рис. 3.12

Двогранний кут між площинами $\varphi = (\Pi_1, \Pi_2)$ (рис. 3.12) можна інтерпретувати як ортогональну проекцію площини Π_1 кола на площину Π_2 еліпса.

3.5. *Фокальний параметр еліпса.* (позначається *p*) — це довжина відрізка перпендикуляра до великої осі, проведеної з фокуса до точки його перетину з еліпсом, яка дорівнює: $p=\frac{b^2}{a}$.

3.6. *Площа еліпса.* Еліпс з півосями a і b дістаємо з кола, радіуса a, рівномірним стиском $k = \frac{b}{a}$ до його діаметра (рис. 3.11). При цьому площа круга зміниться у відношенні $b : a$. Оскільки площа круга $S = \pi a^2$, то площа еліпса $S = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$.

3.7. *Рівняння дотичної до еліпса*. Нехай $M(x_1, y_1)$ — точка дотику еліпса з центром $O(0,0)$ або O_1 (x_0, y_0), тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x_1 - x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_1 - y_0}{b^2}(y - y_0) = 1.$$

3.8. *Полюс і поляра еліпса*. Нехай PP_1 і PP_2 дотичні до еліпса в точках P_1 і P_2. Тоді точка P — полюс, а відрізок P_1P_2 — поляра еліпса.

Рівняння поляри полюса $P(x_1, y_1)$ відносно еліпса з центром $O(0,0)$ або O_1 (x_0, y_0):

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x_1 - x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_1 - x_0}{b^2}(y - y_0) = 1.$$

3.9. *Хорда еліпса* — це відрізок прямої між точками перетину її з еліпсом.

3.10. *Діаметр еліпса* — це будь-яка пряма, що проходить через центр еліпса, і середини паралельних хорд еліпса, які називаються спряженими з діаметром (рис. 3.13). Якщо k' і k — кутові коефіцієнти відповідно діаметра та спряжених з ним хорд, то має місце рівність: $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$. Рівняння діаметра: $y = -\frac{b^2}{a^2k}x$.

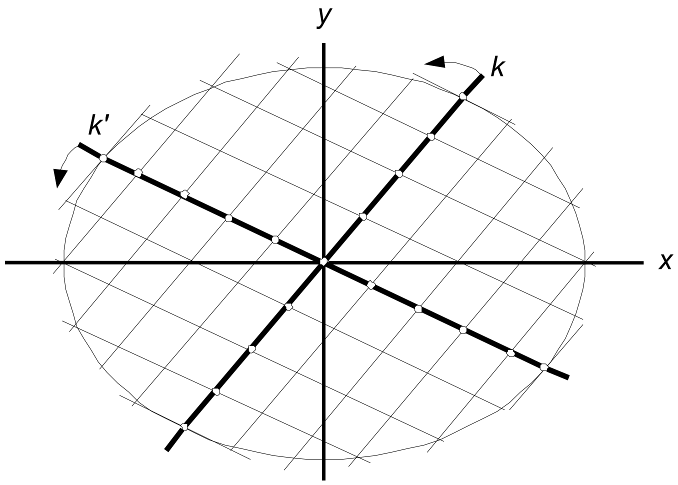


Рис. 3.13

Діаметри еліпса називаються спряженими, коли перший поділяє навпіл хорди, паралельні другому, і навпаки, другий поділяє навпіл хорди, паралельні першому (рис. 3.13).

Взаємно перпендикулярні спряжені діаметри називаються головними осями еліпса (осями симетрії). Вершинами еліпса є точки його перетину з його осями симетрії.

Задачі

1. Знайти рівняння еліпса, якщо його директриса $x = 8$, суміжний їй фокус $F_2(2,0)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. З рівняння директриси $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ знаходимо $a = 4$. За умовою $F_2(2,0)$, звідки $c = 2$. З рівності $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b2 = 12$.

Отже, рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

2. Знайти рівняння еліпса, якщо його вершина $A_1(0,0)$, фокус $F_1(2,0)$ і директриса $x = 12$ суміжного фокуса F_2.

Розв'язання. Оскільки центром еліпса є точка O_1 $(a,0)$, то рівняння директриси із суміжним фокусом F_2 має вигляд $x-a=\frac{a^2}{x}$. За умовою фокальна піввісь $c = a - 2$. Тому велику піввісь a знаходимо з рівняння: $a^2-7a+12=0 \Rightarrow$ $a = 3$ і $a = 4$. Тоді $c = 1$ і $c = 2$; $b_2 = 9 - 1 = 8$ і $b_2 = 16 - 4 = 12$.

Маємо два рівняння еліпса

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \quad \text{і} \quad \frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

3. Знайти рівняння г.м.т. середин хорд, проведених з вершини $B_2(0,b)$ еліпса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Розв'язання. Позначимо координати точки перетину хорд, проведених з вершини B_2, з еліпсом через (u,v), а точку середини цих хорд (x,y). Тоді

$x=\frac{u}{2}$, $y=\frac{b+v}{2}$ Звідси $u = 2x$, $v = 2y — b$. Оскільки точка (u,v) належить еліпсу, то г.м.т. є рівняння:

$$\frac{4x^2}{a^2}+\frac{(2y-b)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(a/2\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(b/2\right)^2}=1.$$

4. Знайти рівняння еліпса, який дотикається до осі Oy у точці (0,3) і перетинає вісь Ox у точках (3, 0), і (7, 0).

Розв'язання. Точки (3, 0) і (7, 0) — симетричні відносно малої головної осі. Велика головна вісь проходить через точку дотику (0, 3). Тоді центр еліпса O_1 (5,3). Велика піввісь $a = 5$. Рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1.$$

Підставляючи в це рівняння координати точки (3, 0), дістанемо $b^2=\frac{75}{7}$. Рівняння еліпса

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{75/7}=1.$$

5. Знайти рівняння хорди, що проходить через точку (2, 1) еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$ і ділиться діаметром $2x + y = 0$ навпіл.

Розв'язання. Шукана хорда є спряженою з діаметром. Тому їх кутові коефіцієнти $k_1k=-\frac{b^2}{a^2}$, кутовий коефіцієнт діаметра $k_1=-2$. Тоді кутовий коефіцієнт спряженої хорди $k=\frac{9}{50}$. Рівняння хорди має вигляд:

$$y-1=\frac{9}{50}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 9x-50y+32=0.$$

6. Знайти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, паралельних до прямої $3x + 2y + 7 = 0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до еліпса в точці (x_1, y_1)

$\frac{x_1}{10}x+\frac{2y_1}{5}y=1$.

Якщо дотична паралельна до цієї прямої, то їх кутові коефіцієнти однакові. Після перетворення дістаємо $x_1 = 6y_1$. Знаходимо точки дотику із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{10} + \dfrac{2y_1^2}{5} = 1, \\ x_1 = 6y_1 \end{cases} \Rightarrow \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right).$$

Рівняння дотичних:

$$3x + 2y \pm 10 = 0.$$

Вправи

16. Знайти полюс прямої $3x - 4y - 12 = 0$ відносно еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$.

17. Знайти полюс поляри $Ax + By + C = 0$ відносно еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

18. Знайти рівняння хорди еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, що проходить через точку (x_1, y_1) і ділиться в цій точці навпіл діаметром $Ax + By = 0$.

19. Довести, що площа ΔP_1OP_2, який визначається будь-якими спряженими півдіаметрами еліпса, стала та дорівнює $\dfrac{ab}{2}$.

20. Знайти рівняння діаметра, спряженого до діаметра еліпса $5x^2 + 9y^2 = 45^2$, який проходить через точку (10, 21).

21. Знайти рівняння лінії, у яку перетворюється еліпс $9x^2 + 25y^2 = 144$ при рівномірному стиску площини до вісі Oy з коефіцієнтом стиску, що дорівнює 0,75.

22. Знайти г.м.т. вершин трикутників з нерухомою основою, що дорівнює 24, якщо їх периметр сталий і дорівнює 50.

23. Довести, що добуток відстаней від фокусів до будь-якої дотичної до еліпса дорівнює квадрату малої півосі.

24. Знайти відстань від точки (–16, 9) до її поляри відносно еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

25. Знайти рівняння дотичних, проведених із точки (10/3, 5/3) до еліпса $5x^2 + 20y^2 = 100$.

26. Знайти найменшу відстань від еліпса $8x^2 + 18y^2 = 144$ до прямої $2x - 3y + 25 = 0$.

27. Знайти рівняння еліпса, ексцентриситет якого $\varepsilon = 0{,}5$, фокус $F_1(3,0)$ і директриса $x + y - 1 = 0$.

28. Знайти г.м.т. центра кола, яке дотикається до кола $k(O,r)$ і дотикається зовні кола $k_1(O_1, \frac{r}{3})$, $O_1\left(\frac{r}{3}, 0\right)$.

29. Знайти г.м.т. основ перпендикулярів, опущених з точок прямої $x = a$ на їх поляри відносно еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

30. Знайти г.м.т. полюсів дотичних до еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, які є полярами відносно кола $x^2 + y^2 = a^2$.

31. Довести, що площа ΔOP_1P_2, який визначається двома будь-якими спряженими діаметрами OP_1 і OP_2 еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, стала й дорівнює 0,5.

32. Через точку (10,21) проведено діаметр еліпса $5x^2 + 9y^2 = 45^2$. Знайти рівняння діаметра, спряженого до нього.

33. Довести, що діагоналі паралелограма, описаного навколо еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, є спряженими його діаметрами.

34. Через вершину $A_2(a,0)$ еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ проведена дотична, з кожної її точки опущено перпендикуляр на її поляру відносно цього еліпса. Знайти г.м.т. основ перпендикулярів.

35. Кінці відрізка сталої довжини сковзають по координатним осям. Знайти г.м.т., яке описує точка відрізка, що ділить його на відрізки довжиною a і b.

§4. Гіпербола

Означення. Гіперболою називається г.м.т., абсолютна величина різниці відстаней яких від двох заданих точок (фокусів) стала, менша відстані між фокусами.

4.1. *Параметри гіперболи.* Нехай $M(x,y)$ — точка гіперболи, $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$ — фокуси, $F_1F_2 = 2c$ — міжфокусна відстань; $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ — фокальні радіуси: $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$ або $r_1 - r_2 = \pm 2a$. $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ — вершини гіперболи, A_1A_2 — дійсна вісь (вісь симетрії — головна вісь), OA_2=OA_2=a — дійсна піввісь, $F_1F_2 \subset A_1A_2$. Координатні вісі — осі симетрії, $O(0,0)$ — центр симетрії, B_1B_2 — уявна вісь.

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ симетричний відносно осей гіперболи та дотикається в її вершинах називається основним прямокутником гіперболи (рис. 3.15).

4.2. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ — ексцентриситет гіперболи.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — директриси гіперболи відповідно до суміжних фокусів F_2 (зі знаком «+») і F_1 (зі знаком «–»).

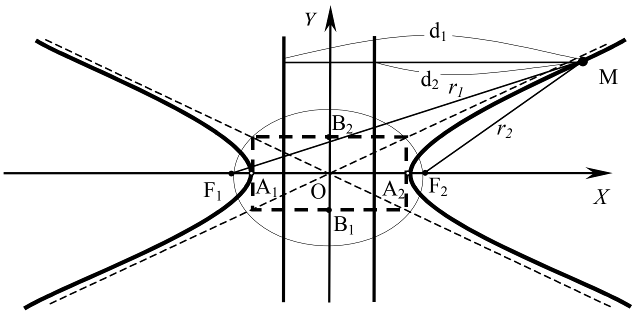


Рис. 3.15

4.3. Формули фокальних радіусів точки $M(x,y)$ гіперболи:

$$\begin{matrix} r_1 = \varepsilon x + a, \\ r_2 = \varepsilon x - a, \end{matrix} \quad \text{якщо } x \ge a \quad \text{і} \quad \begin{matrix} r_1 = -(\varepsilon x + a), \\ r_2 = -(\varepsilon x - a), \end{matrix} \quad \text{якщо } x \le -a.$$

4.4. Канонічне рівняння гіперболи з центром $O(0,0)$ або O_1 (x_0,y_0) має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.9)$$

Фокальний параметр гіперболи: $p = \dfrac{b^2}{a}$.

4.5. Параметричні рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Позначимо

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t.$$

Тоді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Звідси параметричні рівняння гіперболи:

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

$$y = \frac{b}{2}\left(-t + \frac{1}{t}\right), \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Якщо $x > 0 \ (x < 0)$, то $t > 0 \ (t < 0)$ (рис. 3.16).

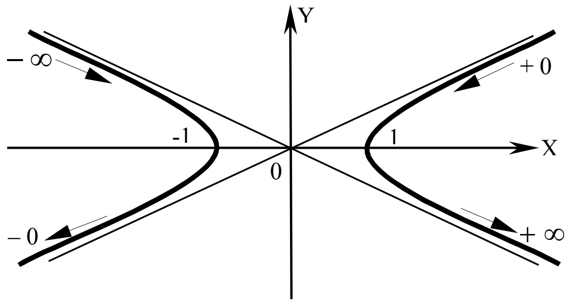


Рис. 3.16

4.6. Прямі, що суміщаються з діагоналями основного прямокутника, називаються *асимптотами гіперболи* (рис. 3.15). Рівняння асимптот

$$y = \pm\frac{b}{a}x\,.$$

Асимптота гіперболи, як і будь-якої кривої, — це пряма, відстань до якої від точки М(x,y) гіперболи прямує до нуля при $x \to \pm\infty$.

Відстань d від точки $M(x,y)$ гіперболи до прямої $bx - ay = 0$ дорівнює

$$d = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{3.10}$$

Підставляючи в (3.10) значення

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

з (3.9) дістанемо:

$$d = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \to 0 \quad \text{для } x \to \infty\,.$$

4.7. *Спряжені гіперболи*. Дві гіперболи, задані рівняннями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

називаються взаємно спряженими (рис. 3.17). Вони мають спільні асимптоти, при цьому в них дійсна вісь стає уявною, а уявна — дійсною, і навпаки.

4.8. *Рівняння дотичної до гіперболи* з центром $O(0,0)$ або O_1 (x_0, y_0) в точці $M(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$\frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = 1$$

або

$$\frac{x_1 - x_0}{a^2}x - \frac{y_1 - y_0}{b^2}y = 1.$$

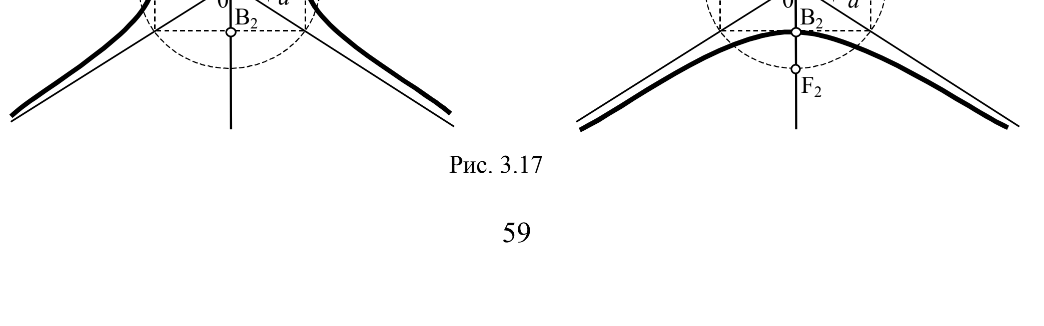


Рис. 3.17

4.9. *Полюс і поляра гіперболи*. Нехай $P(x_1,y_1)$ — полюс відносно гіперболи. Тоді рівняння поляри гіперболи з центром $O(0,0)$ або $O_1\ (x_0,y_0)$ має вигляд:

$$\frac{y_1}{a_2}x-\frac{y_1}{b^2}y=1 \quad \text{або} \quad \frac{x_1-x_0}{a^2}x-\frac{y_1-y_0}{b^2}y=1.$$

4.10. Точка *M(x,y)* лежить між вітками гіперболи, на гіперболі або всередині віток гіперболи, якщо відповідно виконується залежність:

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2\geq 0 \text{ або } \leq 0.$$

4.11. *Хорда гіперболи* — це відрізок прямої між двома точками перетину її з гіперболою.

4.12. *Діаметр гіперболи* — це пряма, що проходить через центр і середини паралельних хорд гіперболи. Він називається спряженим до цих хорд.

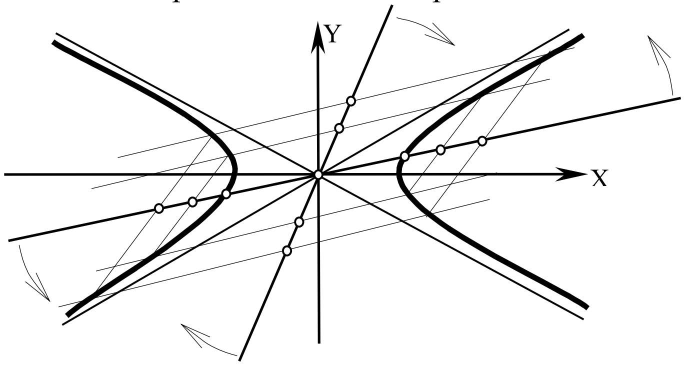


Рис. 3.18

Якщо k' і k — кутові коефіцієнти відповідно діаметра та спряжених з ним хорд, то має місце рівність: $k'k=\dfrac{b^2}{a^2}$. Тоді рівняння діаметра

$$y=\frac{b^2}{a^2k}x.$$

Два діаметра гіперболи, з яких кожний є спряженим з хордами, паралельними іншому, називаються взаємно спряженими (рис. 3.18).

З рівності $k'k=\dfrac{b^2}{a^2}$ випливає, що $k'k>0$, тобто спряжені діаметри проходять в одній координатній чверті. Якщо k' збільшується, то k зменшується і при $k'=k$ обидва діаметра збігаються з асимптотами. Якщо $k\to 0$, то $k'\to\infty$ і спряжені діаметри збігаються з координатними осями. З двох спряжених діаметрів один з них не перетинає вітки гіперболи.

4.13. *Рівняння гіперболи відносно її асимптот*.

Рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1;$$

рівняння асимптот гіперболи:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \ \Rightarrow\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Покладемо в рівнянні гіперболи в прямокутній системі координат *Oxy*

$$X=\frac{x}{a}-\frac{y}{b} \quad \text{і} \quad Y=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},$$

дістанемо рівняння гіперболи в косокутній системі координат *OXY:*

$XY=1$.

4.14. *Рівняння асимптот рівносторонньої гіперболи*. Рівняння асимптот $(a-b)$: $y=\pm x$, асимптоти взаємно перпендикулярні. При обертанні площини гіперболи навколо центра

$O(0,0)$ на кут $\alpha = 45^\circ$ її осі збігаються з асимптотами. Приймемо ці асимптоти за осі OX і OY. За формулами перетворення координат в ортогональних базисах Oxy і OXY:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

дістанемо рівняння гіперболи в прямокутній системі координат OXY:

$$XY = \frac{a^2}{2}, \qquad X\cdot Y > 0.$$

Позначимо: $\frac{a^2}{2} = m.$ Тоді

$$Y = \frac{m}{X}.$$

Отже, рівностороння гіпербола є графіком обернено пропорційної залежності.

Загалом графік дробово-раціональної функції:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0, \quad a^2+b^2 \neq 0, \quad \Delta = ad - bc \neq 0, \quad x \in \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$$

є гіпербола, у якої $y = \frac{a}{c}$ – горизонтальна і $x = -\frac{d}{c}$ — вертикальна асимптоти.

Виконаємо перетворення:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \;\Rightarrow\; cxy + dy - ax = b, \quad y\left(x+\frac{d}{c}\right) - \frac{a}{c}\left(x+\frac{d}{c}\right) = -\frac{ad-bc}{c^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{d}{c}\right)\left(y-\frac{a}{c}\right) = -\frac{\Delta}{c^2}.$$

Покладемо: $X = x + \frac{d}{c}$, $Y = y - \frac{a}{c}$, дістанемо рівняння рівносторонньої гіперболи з центром $O_1\left(-\frac{d}{a};\ \frac{a}{c}\right)$ та осями OX і OY, які є асимптотами цієї гіперболи, у вигляді $XY = m$.

Задачі

1. Знайти рівняння гіперболи, якщо її центр $O(0,0)$ і дійсна вісь $A_1A_2 \subset Ox$, яка проходить через точки $(8;\ 2\sqrt{3})$ і $(6;\ \sqrt{5})$.

Розв'язання. Рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметри a і b знаходимо із системи рівнянь:

$$\frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{36}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1,$$

її розв'язок: $a^2 = 16,\ b^2 = 4.$ Отже, рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

2. Знайти канонічне рівняння кривої

$$5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки у рівнянні

$a_{12} = 0,\ a_{11} \neq a_{22}$ і $a_{11}a_{22} < 0,$ то воно є рівнянням гіперболи.

Перетворення:

$$5(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 - 2y + 1) = 45, \;\Rightarrow\; \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

3. Знайти рівняння гіперболи, якщо відомі її точка $M(12;\ 3\sqrt{3})$ і асимптоти $y = \pm\frac{1}{2}x.$

Розв'язання. З рівняння асимптот випливає, що точка $O(0,0)$ — центр гіперболи і $F_1F_2 \in Ox$. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З рівняння асимптоти маємо відношення $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4},$ підставляючи в рівняння гіперболи координати точки M і $a^2 = 4b^2$, знаходимо:

$$\frac{144}{4b^2} - \frac{27}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 9,\ a^2 = 36.$$

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4. Знайти дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$, проведені з точки (2,0).

Розв'язання. Оскільки $8y^2 - 9x^2 + 72 > 0$ у точці (2,0), то ця точка лежить між вітками гіперболи. Рівняння поляри полюса (2,0) відносно гіперболи має вигляд $x - 4 = 0$.

Із системи
$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$$
знаходимо точки дотику: (4,3) і (4,–3). Рівняння дотичних мають вигляд:

$3x + 2y - 6 = 0$ і $3x - 2y - 6 = 0.$

5. Знайти рівняння дотичних до гіперболи

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1,$$

паралельних до прямої $x + y - 7 = 0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до гіперболи в точці (x_1, y_1)

$$\frac{x_1}{15}x - \frac{y_1}{6}y = 1,$$

її кутовий коефіцієнт дорівнює кутовому коефіцієнту заданої прямої, тобто

$$\frac{2}{5}\frac{x_1}{y_1} = -1.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{15} - \frac{y_1^2}{6} = 1, \\ \frac{2}{5}\frac{x_1}{y_1} = -1 \end{cases}$$

знаходимо точки дотику: (5,–2) і (–5,2). Рівняння дотичних мають вигляд:

$x + y \pm 3 = 0.$

6. Знайти рівняння хорди гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1,$ яка в точці (5,1) ділиться навпіл.

Розв'язання. Точка (5,1) належить діаметру $y = \frac{1}{5}x,$ який спряжений з шуканою хордою. З формули $k' = \frac{b^2}{a^2k}$ знаходимо кутовий коефіцієнт хорди $k' = \frac{4 \cdot 5}{9} = \frac{20}{9}$.

Рівняння хорди: $y-1=\frac{20}{9}(x-5) \Rightarrow 20x-9y-91=0.$

7. Дійсна вісь гіперболи є основою трикутника, вершина якого рухається по гіперболі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Знайти г.м.т. центра мас трикутників.

Розв'язання. OM — медіана ΔA_1A_2M (рис. 3.19). Центр мас $C\,(x,y)$ є точка перетину медіан ΔA_1A_2M, вона ділить відрізок MO у відношенні $MC : CO = 2 : 1$. Нехай $M(u,v)$. Тоді координати точки C: $x=\frac{u}{3}$ і $y=\frac{v}{3}$, звідки $u=3x$ і $v=3y$. Точка $M(u,v)$ належить гіперболі, отже, г.м.т. є гіпербола (рис. 3.19):

$$\frac{(3x)^2}{a^2}-\frac{(3y)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}-\frac{y}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1.$$

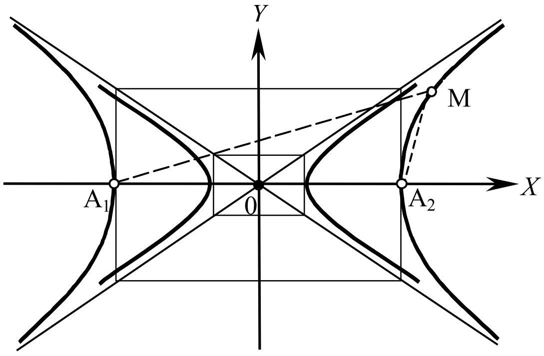


Рис. 3.19

Вправи

36. Знайти рівняння гіперболи з центром $O(0,0)$ і з координатними осями симетрії, якщо задана точка $M(3,2;\,2,4)$ перетину асимптоти з директрисою цієї гіперболи.

37. Знайти рівняння діаметра гіперболи $9x^2-16y^2=576$, якщо його довжина дорівнює 20.

38. Знайти рівняння хорди гіперболи $x^2-4y^2=4$, яка в точці (3, –1) ділиться навпіл.

39. Знайти точку гіперболи $9x^2-16y^2=144$, для якої фокальні радіуси перпендикулярні між собою.

40. Знайти рівняння дотичної до гіперболи $4x^2-5y^2=20$ у точці (5, –4).

41. Знайти рівняння гіперболи, якщо рівняння її дотичної в точці (4,2) є $x-y-2=0$.

42. Знайти рівняння дотичної до гіперболи $6x^2-15y^2=90$, яка перпендикулярна до прямої $x-2y=0$.

43. Знайти траєкторію вершини прямого кута, сторони якого дотикаються до гіперболи $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

44. Довести, що еліпс і гіпербола зі спільними фокусами перетинаються під прямим кутом.

45. Звести до канонічного вигляду рівняння гіперболи $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$.

46. Знайти рівняння гіперболи, яка відтинає від осі Oy хорду довжиною, що дорівнює 32, якщо її центр O_1 (–15, 0), фокус $F_2(0, 0)$.

47. Знайти рівняння діаметра гіперболи $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, який спряжений до хорди, що проходить через вершину $A_2(a, 0)$.

48. Знайти г.м.т. середин фокальних радіусів, проведених з фокуса $F_2(c, 0)$ до точок гіперболи $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

49. Знайти рівняння гіперболи з центром $O_1(-2,7)$, дійсна вісь $A_1A_2||Ox$ дорівнює 12, а її ексцентриситет $\varepsilon = -1,25$.

50. Знайти полюс $P(x, y)$, рівняння поляри якого $4x - 25y = 25$ відносно гіперболи $9x^2 - 25y^2 = 225$.

51. Побудувати графік рівносторонньої гіперболи, заданої дробово-лінійною функцією $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

52. Знайти канонічне рівняння кривої $9x^2 - 25y^2 - 18x + 200y - 616 = 0$.

53. Точка M рухається по директрисі гіперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, з неї опущені перпендикуляри на її поляри відносно гіперболи. Знайти г.м.т. основ перпендикулярів.

54. Знайти г.м.т. полюсів, дотичних до кола $x^2 + y^2 = r^2$ як поляр відносно гіперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

55. У гіперболі $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ рухається хорда $Q_1Q_2 \perp F_1F_2$. Знайти г.м.т. $P = F_1Q_1 \cap F_2Q_2$.

§5. Парабола

Означення. Параболою називається г.м.т., відстані яких від заданої точки (фокуса) і прямої (директриси) однакові.

Відстань від фокуса параболи до її директриси називається параметром параболи (позначається: p).

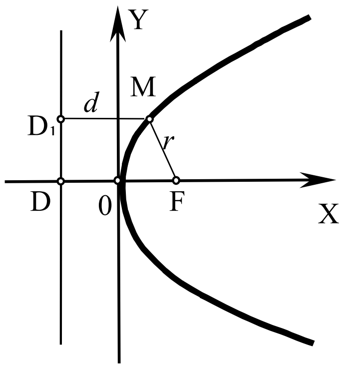


Рис. 3.20

5.1. *Канонічне рівняння параболи.* Якщо за вісь абсцис прийняти пряму, що проходить через фокус, перпендикулярну до директриси, і початком координат — точку, що є серединою відрізка осі абсцис між фокусом і директрисою (рис. 3.20), то канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px,$$

де $DF=p$ — параметр параболи, O — вершина ($OD=DF=\dfrac{p}{2}$), $DD_1 \perp Ox$ — директриса параболи, $r = MF$ — фокальний радіус точки $M(x,y)$ параболи: $r = x + \dfrac{p}{2}$, $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ — фокус параболи (рис. 3.20). Рівняння параболи з вершиною O_1 (x_0, y_0):

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

пряма $x = x_0$ — вісь симетрії параболи.

5.2. *Можливі положення параболи в системі координат Oxy* показано на рис. 3.21.

5.3. *Діаметр параболи* — пряма, що проходить через середини паралельних хорд параболи (рис. 3.22). Усі діаметри параболи паралельні між собою.

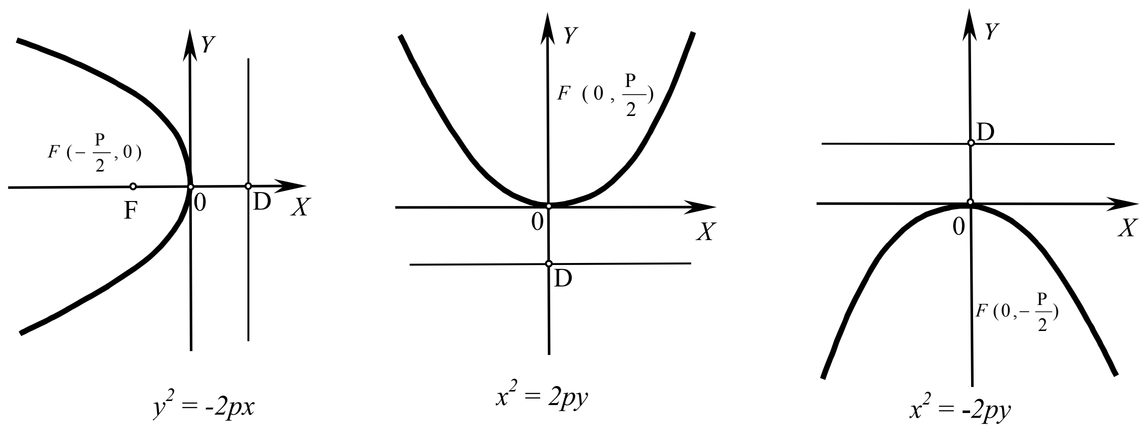


Рис. 3.21

Паралельні хорди з кутовим коефіцієнтом k є спряжені з діаметром. Якщо $y^2 = 2px$ $\left(x^2 = 2py\right)$ — рівняння параболи, то рівняння діаметра, спряженого хордам з кутовим коефіцієнтом k, має вигляд: $y = \pm \dfrac{p}{k}$ $\left(x = \pm \dfrac{p}{k}\right)$.

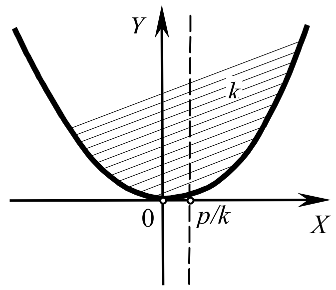


Рис. 3.22

5.4. *Рівняння дотичної* до параболи. У точці (x_1, y_1) параболи $y^2 = 2px$ або $x^2 = 2py$ рівняння дотичної має вигляд:

$$y_1 y = p(x + x_1) \text{ або } x_1 x = p(y + y_1).$$

Рівняння поляри точки (x_1, y_1) відносно параболи $y^2 = 2px$:

$$y_1 y = p(x + x_1).$$

Умова, при якій точка (x_1, y_1) лежить поза параболою, на параболі або всередині параболи: $y^2 - 2px \geq 0$ або ≤ 0.

5.5. *Графік квадратичної функції*

$$y = ax^2 + bx + c$$

є парабола.

Виконаємо перетворення:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Позначимо:

$$y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad x_0 = \frac{b}{2a}.$$

Тоді

$$\left(x-|x_0|\right)^2=\frac{1}{a}\left(y-|y_0|\right)$$

є рівняння параболи з вершиною $O_1\left(|x_0|,|y_0|\right)$ і параметром $p=\dfrac{1}{2a}$, $x=|x_0|-$ вісь симетрії параболи (рис. 3.23).

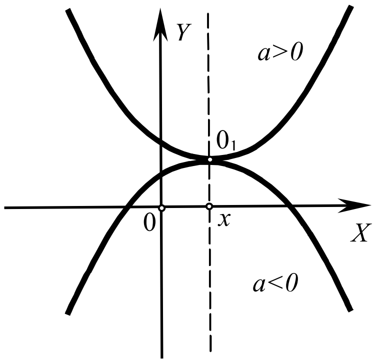


Рис. 3.23

Задачі

1. Знайти канонічне рівняння кривої 2-го порядку

$$y^2-6y+12x+57=0.$$

Розв'язання. Оскільки в загальному рівнянні другого порядку $a_{11}\neq a_{22}$ і $a_{11}a_{22}=0$, $a_{12}=0$, то воно є параболою. Зведемо його до вигляду $\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right)$.

Виконаємо перетворення: $y^2-2\cdot 3\cdot y+9=-12x-57+9 \Rightarrow \left(y-3\right)^2=-12\left(x+4\right)$ — це парабола з вершиною O_1 (–4,3), параметром p = 6; рівняння директриси x = –1, F(–7,3), y = 3 — вісь параболи;

2. Знайти рівняння параболи, якщо задані три її точки (–5, 3), (1, 9), (19, –9), а її вісь паралельна до осі *Ox*.

Розв'язання. Загальне рівняння параболи з віссю, паралельною *Ox*, має вигляд $\left(a_{11}=0,\ a_{22}\neq 0,\ a_{12}=0\right)$:

$$a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{23}=0.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} 9a_{22}-10a_{13}+6a_{23}+a_{33}=0, \\ 81a_{22}+2a_{13}+18a_{23}+a_{33}=0, \\ 81a_{22}+38a_{13}-18a_{23}+a_{33}=0, \end{cases}$$

знаходимо параметри $a_{22}=1,\ a_{13}=a_{23}=-3,\ \ a_{33}=-21.$

Отже, рівняння параболи

$$y^2-6x+6y-21=0 \quad \Rightarrow \quad \left(y-3\right)^2=6\left(x+5\right),$$

тут: $O_1\left(-5{,}3\right)$ вершина, $F\left(-2{,}3\right)$ фокус, : x = –8 директриса параболи.

3. Знайти рівняння параболи, якщо її директриса: y = –3 і фокус F(4,1).

Розв'язання. За умовою директриса паралельна осі *Ox*; тому вісь параболи паралельна до осі О*y* і її рівняння x = 4. Вісь параболи перетинає директрису в точці A(4, –3). Параметр параболи p = 4, вершина параболи $O_1\left(\dfrac{4+4}{2}=4;\dfrac{1-3}{2}=-1\right)$. Рівняння параболи $\left(x-4\right)^2=8\left(y+1\right)$.

4. Знайти рівняння хорди параболи $y^2=-8x$, яка в точці (–1, 1) ділиться навпіл.

Розв'язання. У рівнянні хорди $y-1=k(x+1)$, кутовий коефіцієнт k знайдемо з рівняння діаметра, спряженого з цією хордою: $y=-\dfrac{p}{k}$.

Оскільки діаметри параболи паралельні до її осі, то $y = 1$; параметр параболи $p = 4$. З рівняння діаметра знаходимо: $k = –4$. Отже, рівняння хорди

$$y-1=-4(x+1) \;\Rightarrow\; 4x+y+3=0.$$

5. Знайти рівняння дотичної до параболи $y^2=\dfrac{1}{2}x$, яка паралельна до прямої $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до параболи в точці (x_1, y_1):

$$y_1 y=p(x+x_1),\; p=\frac{1}{4}.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту заданої прямої, тому $\dfrac{p}{y_1}=\dfrac{1}{2}$, звідки $y_1=\dfrac{1}{2}$. З рівняння параболи знаходимо $x_1=\dfrac{1}{2}$.

Отже, рівняння дотичної $\dfrac{1}{2}\cdot y=\dfrac{1}{4}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x-4y+1=0$.

6. Знайти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 4x$, проведених з точки (–3, 2).

Розв'язання. Оскільки $y^2-4x>0$ в точці (–3, 2), то вона лежить поза параболою та є полюсом поляри $2y=p(x-3)$, $p=2$ відносно параболи. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x-3 \end{cases}$$

знаходимо точки дотику (9, 1) і (1, 2). Прямі, що проходять відповідно через ці дві точки й точку (–3, 2) є дотичними $x-12y-21=0$ і $y=2$.

7. Знайти діаметри параболи $y^2=6x$, спряжені з прямою $y=2x+5$.

Розв'язання. Рівняння діаметра параболи

$$y=\frac{p}{k},\quad p=3,$$

де $k=2$ — кутовий коефіцієнт спряженої прямої. Рівняння діаметра:

$$y=\frac{3}{2}.$$

Вправи

56. Знайти канонічні рівняння парабол:

а) $x^2+6x+5y+27=0$; *б)* $y^2+6x+2y+31=0$.

57. Знайти рівняння параболи, якщо її вісь паралельна до осі *Oy* та задано на ній три точки: (–12, 2), (–18, 8), (0, 98).

58. Знайти рівняння хорди параболи $y^2=18x$, яка в точці (2, 3) ділиться навпіл.

59. Знайти рівняння діаметра параболи $y^2=6x$, спряженого з хордою: $2x-y+5=0$.

60. Знайти рівняння сторін трикутника, вписаного в параболу $y^2=8x$, якщо одна з його вершин *O* (0, 0), а точка перетину його висот є фокусом параболи.

61. Знайти рівняння дотичних до параболи $y^2=8x$, проведених з точки (5, –7).

62. Знайти г.м.т. вершини прямого кута, якщо при русі вершини його сторони дотикаються параболи $y^2=2px$.

63. Довести, що параболи із спільним фокусом і протилежно напрямленими осями перетинаються під прямим кутом.

64. Знайти рівняння параболи з віссю *Oy*, яка відтинає на осі *Ox* відрізки $\pm a$, а на осі *Oy* — відрізок *b*.

65. Знайти г.м.т. центрів кіл, які дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 1$ і осі *Oy*.

66. Знайти найменшу відстань від параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x + 3y - 14 = 0$.

67. Визначити параметр параболи $y^2 = 2px$, якщо вона дотикається до прямої $x - 2y + 5 = 0$.

68. Визначити полюс прямої $2x + 5y - 10 = 0$ відносно параболи $y^2 = 6x$.

69. Визначити г.м.т., що виражається системою нерівностей $\begin{cases} x - y + 2 > 0, \\ y > x. \end{cases}$

70. Через точки перетину параболи $4x^2 - 9y = 0$ з колом $x^2 + y^2 = 25$ провести діаметри параболи.

71. Знайти г.м.т., що виражається системою нерівностей $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 1, \\ x^2 > 2(y-1). \end{cases}$

72. У точці *M* проведено дотичну до параболи $y^2 = 2px.$ Знайти г.м.т. її поляр відносно кола $x^2 + y^2 = r^2$.

73. Знайти г.м.т. полюсів дотичних до параболи $x^2 = 2py$ відносно параболи $y^2 = 2px.$

74. Знайти г.м.т. полюсів дотичних до параболи $y^2 = 2px$ відносно кола $x^2 + y^2 = r^2$.

75. Через вершину параболи $y^2 = 2px$ проведено хорду *OP* і спряжений їй діаметр. З точки *D* перетину цього діаметра з директрисою параболи опущений перпендикуляр на *OP*. Знайти г.м.т. основ перпендикуляра.

76. З будь-якої точки *P* прямої $y = b$ опускається перпендикуляр на її поляру відносно параболи $y^2 = 2px.$ Знайти г.м.т. основ перпендикуляра.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В ЕКОНОМІЦІ

§1.*Огляд основних кривих*

В економіці криві другого порядку застосовуються під час вивчення взаємозв’язку між рівнем інфляції та рівнем безробіття (крива Філіпса), для аналізу вподобань споживача (крива байдужості), вивчення факторів виробництва, які можуть бути використані для певного обсягу продукції (ізокванта), для вивчення закону розподілу прибутків (закон Парето), ринків збуту, для розв’язку задачі про розподіл зон економічного впливу.

1.1. *Крива байдужості* — це лінія рівної корисності, усі точки якої показують множину наборів комбінацій двох благ, що забезпечують один і той же рівень корисності. Будь-яка комбінація двох благ може бути показана точкою в прямокутній системі координат. З’єднавши точки з такими комбінаціями товарів, які забезпечують однаковий рівень задоволення потреб, отримуємо криву байдужості .

Для опису вподобань споживача щодо всіх можливих комбінацій двох товарів застосовується карта байдужості — сукупність кривих байдужості, кожна з яких представляє інший рівень корисності (рис. 4.1). Вона описує поведінку споживача без урахування видатків на будь-який кошик і є «моделлю бажаного».

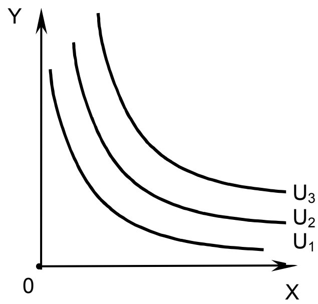


Рис. 4.1

Рухаючись уздовж обраної кривої байдужості, споживач залишається на одному й тому ж рівні корисності, але може змінювати набір товарів у кошику. Опуклість кривих байдужості в бік початку координат означає, що збільшення в кошику кількості одного товару супроводжується зменшенням кількості іншого, тобто споживач може лише замінювати один товар іншим.

Кількість одного блага, від якої змушений відмовитися споживач, щоб отримати додаткову одиницю іншого, називається *граничною нормою заміни*. Вона може бути визначена як кутовий коефіцієнт кривої байдужості в кожній точці.

Крива байдужості на рис. 4.1 стає пологішою при просуванні вздовж неї, а гранична норма заміни зменшується, тобто споживач готовий відмовлятися від усе меншої кількості блага заради отримання додаткової одиниці товару зі зменшенням у кошику запасу товару.

1.2. *Крива Філіпса* (рис. 4.2) — графік залежності між середнім рівнем інфляції в країні та рівнем безробіття. Згідно з кривою Філіпса, зі зростанням безробіття інфляція зменшується. О.У. Філіпс показав також зв’язок між рівнем безробіття і темпами зростання середньої заробітної плати: безробіття високе, коли заробітна платня зростає повільніше, і падає, коли заробітна платня підвищується швидше. Високий рівень інфляціїї зазвичай супроводжується низьким рівнем безробіття й навпаки.

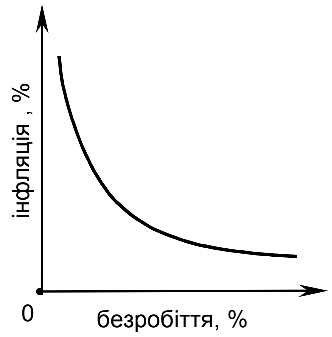


Рис. 4.2

Крива Філіпса свідчить, що рівень інфляції залежить від трьох факторів:
— очікуваної інфляції;
— циклічного безробіття, тобто відхилення фактичного рівня безробіття від його природного значення;
— шокових змін пропозиції.

1.3. *Ізокванта.* Виробнича функція кожного виду виробництва, яка описує конкретну комбінацію факторів виробництва, виражається *ізоквантою* — лінією рівного випуску (рис. 4.3).

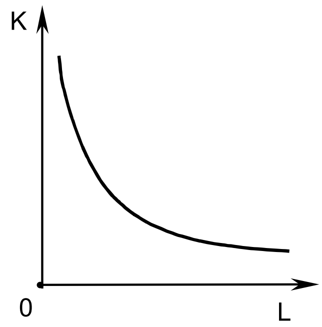


Рис. 4.3

Ізокванта відображає різні комбінації витрат факторів виробництва (L — праця, K — капітал), які можуть бути використані для випуску певного обсягу продукції. Ізокванта показує, що існує безліч варіантів для виробництва певного обсягу продукції. Ізокванти схожі з кривими байдужості. Як і криві байдужості, вони відображають альтернативні варіанти споживчого вибору благ, які забезпечують певний рівень корисності, ізокванта відображає альтернативні варіанти комбінацій витрат факторів для виробництва певного обсягу продукції.

Карта ізоквант — це сукупність ізоквант однієї виробничої функції, кожна з яких відповідає певному обсягу випуску продукції (рис. 4.4). Карта ізоквант може бути використана для того, щоб показати можливості вибору серед варіантів організації виробництва в короткостроковому періоді, якщо капітал є постійним фактором, а праця — змінним.

Ізокванти ілюструють гнучкість ухвалених фірмами рішень у виробництві. У більшості випадків фірми можуть досягти певного випуску продукції, використовуючи різні поєднання виробничих факторів. Керівник фірми повинен розуміти природу такої гнучкості, оскільки це дасть йому змогу вибирати такі поєднання виробничих факторів, які мінімізують витрати виробництва й максимізують прибуток.

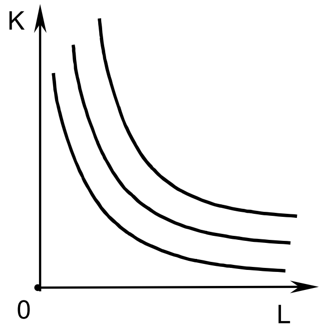


Рис. 4.4

1.4. *Закон Парето*. Кількість y осіб, які мають прибуток не менш як x, можна визначити за формулою: $y = \frac{a}{x^n}$ $(n = 2, 3, ...)$. Лінії, які задані рівняннями $y = \frac{a}{x^n}$, $a \neq 0$, $n > 0$, називаються лініями гіперболічного типу. Закон Парето доволі точно описує розподіл великих прибутків, але не справджується для низьких.

1.5. *Крива освоєння, крива досвіду, крива навчання* — співвідношення між зростанням досвіду робітників і зменшенням вартості праці (рис. 4.5). Ця крива була описана в 1936 р. Т.П. Райтом. Зараз експерти погоджуються, що ефект досвіду — це результат дії багатьох факторів, а не тільки набуття робітниками певних навичок. Це може бути результатом дії й таких факторів, як підбір інструментів та обладнання, дизайну виробу, аналізу виробничих методів та інших зусиль, витрачених ще до запуску виробничого процесу. Важливим фактором є також діяльність керівництва підприємства — поліпшення планування виробничого процесу, удосконалення робочих графіків, підвищення контролю за виробничими процесами тощо. Проте ступінь освоєння виробу залежить насамперед від кількості виготовлених виробів з початку виробництва. Існує певна кореляційна залежність між порядковим номером виробу та його трудомісткістю. Аналогічна залежність існує між номерами виробів і собівартістю. Ця залежність визначається формулами:

$$T_{p_i} = T_{p_1} N_i^{-b}; C_i = C_1 N_i^{-b},$$

де T_{p_i}, C_i — собівартість і трудомісткість i-го виробу з моменту початку випуску виробів; T_{p_1}, C_1 — собівартість і трудомісткість i-го виробу (трудомісткість у момент початку освоєння); N_i — номер виробу з початку випуску; b — показник ступеня.

Показник ступеня характеризує крутизну кривої освоєння. Величина b доволі вузько обмежена (0,25—0,45) (рис. 4.5).

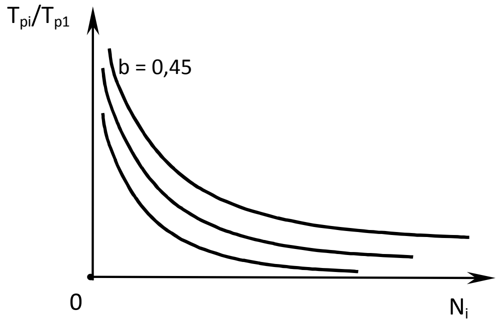


Рис. 4.5. Залежність трудомісткості від обсягу випуску за різних характеристик кривих освоєння

Теорію кривих освоєння доволі широко використовують під час:
— планування кількості робочої сили та складання виробничих графіків;
— здійснення закупівель і постачання;
— визначення ціни на нову продукцію;
— планування бюджету, закупівель, матеріальних запасів виробництва.

Знаючи перспективи зміни обсягу виробництва продукції під час освоєння випуску, працівникам планового відділу буде легше ухвалили правильне рішення про необхідну кількість робітників. Криві освоєння дають змогу кількісно розрахувати прогнозовані майбутні поліпшення у виробничому процесі.

1.6. *Крива Лаффера* — крива, яка характеризує залежність державних доходів від середнього рівня податкових ставок у країні. Крива показує наявність оптимального рівня оподаткування, за якого державні доходи досягають свого максимуму (рис. 4.6).

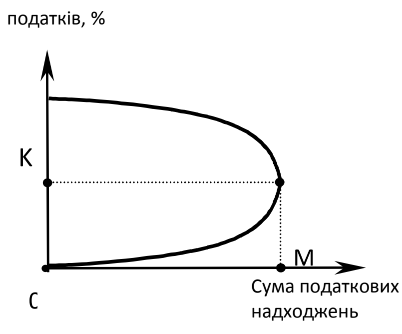


Рис. 4.6. Залежність суми податкових надходжень від ставки податків

Як видно з рис. 4.6, при зростанні ставки оподаткування суми податкових надходжень зростають до точки *M*, у якій збір податків сягає максимуму (при ставці оподаткування). Однак при подальшому підвищенні ставки оподаткування абсолютні суми податків, що збираються, починають падати, доходячи до нуля при 100 %-ній ставці.

1.7. *Крива Лоренца.* Одним з показників диференціації населення за рівнем доходів у соціально-економічній статистиці є індекс концентрації доходів, або коефіцієнт Джині, який відображає характер розподілу всієї суми доходів населення між окремими його групами. Величина його може коливатися від 0 до 1. За рівномірного розподілу доходів коефіцієнт наближається до 0. Чим вище значення показника, тобто чим ближче до 1, тим нерівномірніше розподілені доходи в суспільстві.

Основою коефіцієнта Джині, який розраховується за допомогою *кривої Лоренца*, є ідея, що крайніми позиціями в розподілі доходів або благ між групами осіб є егалітарне (усі, хто бере участь у розподілі отримують рівні частки) та антиегалітарне (один учасник розподілу отримує всі блага). У першому випадку маємо повну рівність, у другому — абсолютну нерівність у розподілі. Розрахунок коефіцієнта Джині здійснюється на основі даних про розподіл домогосподарств (населення) за рівнем середнього на домогосподарство (члена домогосподарства) доходу.

Загальну кількість осіб, які отримують дохід, ділять на п'ять рівних квантильних груп і визначають, якою часткою доходу володіє кожна група домогосподарств (населення). Потім за отриманими накопиченими результатами будується крива Лоренца (графічне зображення рівня концентрації явища). Щоб зобразити криву Лоренца на осях координат з процентною шкалою від 0 до 100, відкладаються кумулятивні (накопичені) результати розподілів: на горизонтальній осі — квантилі осіб, які отримують дохід, на вертикальній — квантилі отриманих доходів. Крива Лоренца будується сполученням крапок, що відповідають кумулятивним відсотковим часткам доходів, отриманих квантильними групами населення.

За рівномірного розподілу доходів кожна 20-% група населення мала б п'яту частину доходів суспільства. На графіку це зображається діагоналлю квадрата і є лінією рівномірного розподілу. За нерівномірного розподілу «лінія концентрації» являє собою увігнуту вниз криву. Чим більше відхилення кривої Лоренца від діагоналі квадрата, тим нерівномірніше розподілені доходи в суспільстві.

Коефіцієнт Джині являє собою відношення площі сегмента, створеного кривою Лоренца, і лінії рівномірного розподілу до площі трикутника нижче лінії рівномірного розподілу.

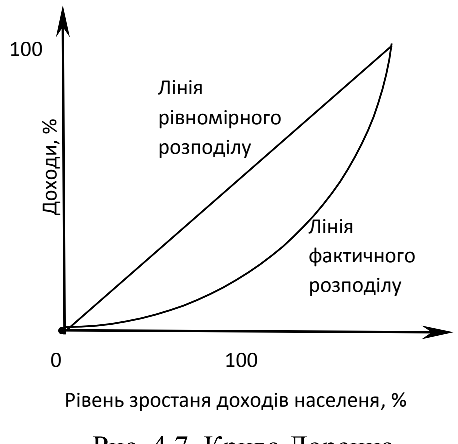


Рис. 4.7. Крива Лоренца

Коефіцієнт Джині виявляє середню різницю в доходах між двома одержувачами. Наприклад, якщо коефіцієнт Джині дорівнює 0,2, то це означає, що середня різниця в доходах одержувачів, які належать до цієї сукупності, становить 40 % середнього доходу сукупності.

Величина доходів і різниця між ними зумовлені впливом таких факторів:

— соціально-політичних;

— соціально-демографічних (стать, вік, наявність таланту та здібностей тощо);

— соціально-професійних (професія, спеціальність, освіта, кваліфікація, досвід тощо);

— соціально-статусних (зайнята або незайнята особа суспільно корисною діяльністю, дитина, молодь, яка вчиться, найманий працівник, власник майна, підприємець, фермер, пенсіонер, інвалід та ін.);

— соціально-економічних (вид занять або діяльності, вид виробництва, умови праці тощо);

— соціально-географічних (природно-кліматичні особливості місця проживання, щільність і характер розселення, національні особливості).

Крім того, на формування доходів, їх величину впливають нівелюючі й диференціюючі фактори: нівелюючі — складання заробітків сім'ї, пенсії пенсіонерів, які живуть у сім'ї і вносять свою пенсію до бюджету сім'ї, допомоги, що отримують члени сім'ї; диференціюючі

— наявність непрацездатних членів сім'ї, їхня кількість у сім'ї, співвідношення працюючих і непрацюючих членів сім'ї.

§*2. Виробнича функція Кобба-Дугласа*

Виробнича функція $X = F(K,L)$ називається неокласичною, якщо вона є гладкою й задовольняє таким умовам, що піддаються природній економічній інтерпретації:

11) $F(0,L) = F(K,0) = 0$ — за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе;

22) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ — із зростанням ресурсів випуск зростає;

33) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — зі збільшенням ресурсів швидкість зростання випуску сповільнюється;

44) $F(+\infty,L) = F(K,+\infty) > 0$ — при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск необмежено зростає.

Мультиплікативна виробнича функція задається виразом:

$$X = AK^{a_2}L^{a_2} \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0, \qquad (4.1)$$

де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу; α_1, α_2 — коефіцієнти еластичності за працею й фондам.

На рис. 4.8 і 4.9 графіки функцій Кобба-Дугласа $X = AK^{a_2}L^{a_2}$ відповідно при $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $A = 1$, $L \geq 0$, $K \geq 0$ і при $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4}$, $A = 1$, $L \geq 0$, $K \geq 0$.

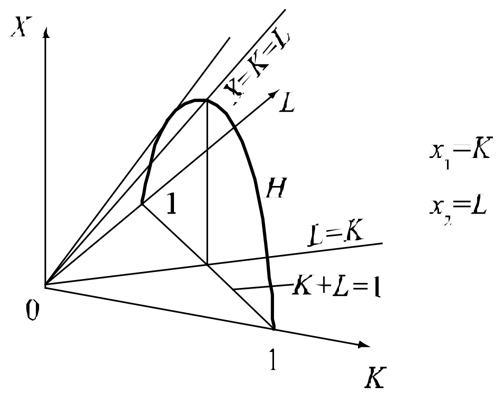


Рис. 4.8

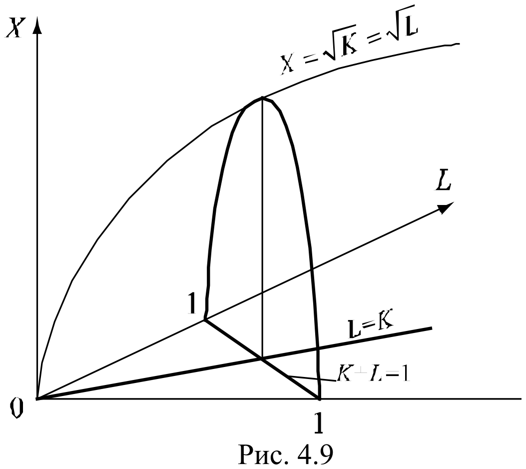


Рис. 4.9

На рис. 4.8 графік функції є конічна поверхня, твірні якої є промені з початком в точці 0, а твірна H у вертикальній площині $K + L = 1$ має рівняння $X = K^{1/2}L(1-K)^{1/2}$.

На рис. 4.9 графік функції є параболічна поверхня, меридіани якої є параболи з початком у точці 0, а напрямна H у вертикальній площині $K + L = 1$ має рівняння $X = K^{1/4}(1-K)^{1/4}$.

Функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$X = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

де $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1-\alpha$.

Лінією рівня на площині K, L, або ізоквантою (рис. 4.10), називається множина тих точок площини, для яких $F(K, L) = X_0 = \text{const}$. Для мультиплікативної виробничої функції ізокванта має вигляд

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}, \text{ або } K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A}L^{-\alpha_2},$$

тобто є степеневою гіперболою, асимптоти якої — осі координат.

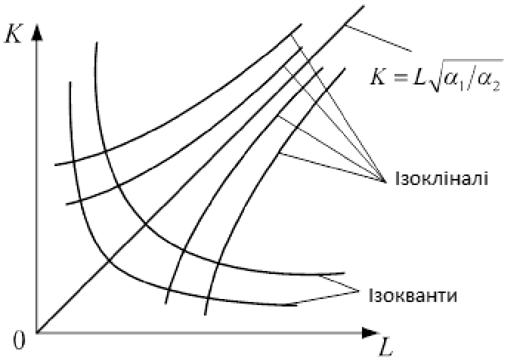


Рис. 4.10

Для різних *K*, *L*, які належать ізокванті, випуск дорівнює значенню X_0, що еквівалентно твердженню про взаємозамінності ресурсів.

Оскільки на ізокванті $F(K, L) = X_0 = \text{const}$, то

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0 \qquad (4.2)$$

У цьому співвідношенні $\frac{\partial F}{\partial K} \rangle 0, \frac{\partial F}{\partial L} \rangle 0,$ тому dK і dL мають різні знаки: якщо $dL < 0$, що означає скорочення об'єму праці, то $dK \rangle 0$, тобто праця в об'ємі $|dL|$ заміщується фондами в об'ємі dK.

З (4.2) випливає таке визначення: граничною нормою заміни праці фондами називається відношення модулів диференціалів основних фондів і праці

$$S_K = \frac{dK}{|dL|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}; \qquad (4.3)$$

відповідно, гранична норма заміни S_L фондів працею $S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}, S_K S_L = 1.$

Для мультиплікативної функції норма заміщення праці фондами пропорційна фондозабезпеченню: $S_K = \frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L} = \frac{a_2}{a_1}k,\ k = \frac{K}{L}$, що цілком природно: недостатність праці можна компенсувати його фондозабезпеченням.

Іізоклiналями називаються лінії найбільшого зростання ВФ. Ізоклінали ортогональні лініям нульового росту, тобто ізоквантам. Оскільки напрям найбільшого зростання в кожній точці (*K*, *L*) задається градієнтом $F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right)$, то рівняння ізокліналі записується у вигляді

$$\frac{dK}{(\partial F / \partial K)} = \frac{dL}{(\partial F / \partial L)}.$$

Зокрема, для мультиплікативної виробничої функції отримуємо $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}$, тому ізокліналь задається дифференціальним рівнянням $\frac{1}{a_1} = KdK = \frac{1}{a_2}LdL,$ яке має розв'язок:

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}L^2 + a}, \quad a = K_0{}^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}L_0{}^2,$$

де (L_0, K_0) — координати точки, через яку проходить ізокліналь. Найпростіша ізокліналь при $a = 0$ є прямою: $K = L\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$

Ізокванти та ізоклінали мультиплікативної виробничої функції зображено на рис. 4.10.

§*3. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях*

Нехай, наприклад, монополіст, знаючи (з маркетингових досліджень) функцію попиту на свій товар, вирішує, скільки йому виробляти та за якою ціною продавати свій товар. Якщо він установить достатньо високу ціну, то споживачі за певний період куплять у нього не дуже багато товару. Якщо він вироблятиме більше, то йому доведеться знизити ціну, щоб продати всю продукцію за певний період часу. При цьому прибуток збільшиться за рахунок обсягу продажу (виторг) і одночасно зменшиться за рахунок зниження ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що виявиться більшим: виторг чи витрати. Як же монополіст може визначити оптимальний обсяг випуску? Для цього він повинен визначити залежність прибутку (якщо враховувати витрати випуску) від обсягу випуску $P(q)=R(q)-C(q)=p(q)q-C(q)$ і визначити, за якого обсягу прибуток буде максимальним.

Розглянемо задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функція прибутку якої може бути змодельована залежністю:

$$P(q)=R(q)-C(q)=q^2-8q+10.$$

1. Знаходимо похідну $P'(q)=2q-8=0$. 2. За необхідною умовою локального екстремуму прирівнюємо похідну до нуля $P'(q)=2q-8$, дістанемо $q_0=4$. 3. Проаналізуємо*,* чи є обсяг випуску $q=4$ оптимальним для фірми? Досліджуємо зміни знаку похідної при переході через точку q_0 (тобто використовуємо достатні умови локального екстремуму): при $q<q_0$ маємо $P'(q)<0$, і функція прибутку спадає; при $q>q_0$, маємо $P'(q)>0$), і функція прибутку зростає.

Отже, у точці $q_0=4$ прибуток набуває мінімального значення, таким чином, обсяг виробництва не є оптимальним.

Розглянемо задачу прибутку фірми та обсягу податків, що надходять державі за даної податкової ставки. Нехай ціна на продукцію $P(q)=a-bq$, тобто лінійно спадає зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а витрати $C(q)$ залежать від обсягу продукції q у вигляді: $C(q)=cq^2+dq+e$, де *a*, *b*, *c*, *d*, *e* — деякі додатні числа. Нехай податок є акцизом зі ставкою *t*, тобто з кожної проданої одиниці товару держава отримує податок *t*, і податкова сума дорівнює $T=tq$. Тоді фірма має прибуток:

$$P(q)=pq-c(q)-T=q(a-bq)-cq^2-dq-e-tq.$$

1. Щоб максимізувати прибуток, фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку:

$$P'(q)=a-2bq-2cq-d-t=a-d-t-2q(b+c).$$

2. Обчислимо критичну точку q^* за необхідною умовою локального екстремуму:

$P'(q)=0$, $2q(b+c)=a-d-t$. Звідки $q^*=\dfrac{a-d-t}{2(b+c)}$.

3. За достатньою умовою локального екстремуму:

$P''(q^*)=2(b+c)<0$, тобто q^* точка максимуму функції $P(q)$.

Оскільки *t*>0, то така податкова ставка призводить до зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дії уряду щодо встановлення податкової ставки *t* обчислимо податковий дохід уряду (держави):

$$T=t\cdot q=\frac{t(a-d-t)}{2(b+c)}+\frac{-t^2}{2(b+c)}+\frac{t(a-d)}{2(b+c)}=\frac{1}{b+c}\left[-t^2+(a-d)t\right]$$

Отже, крива доходів уряду (держави) є парабола, гілки якої напрямлені вниз (рис. 4.13).

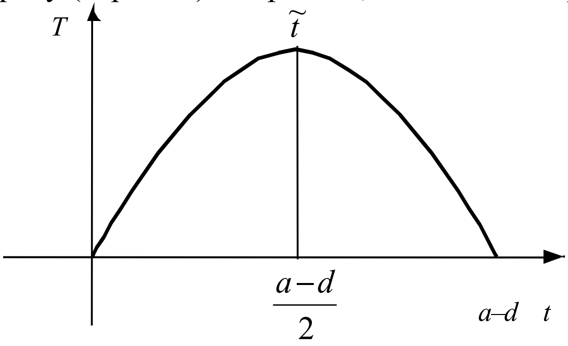


Рис. 4.13

Визначимо критичні точки функції $T(t)$ з необхідної умови $T' = \frac{1}{b+c}\left|2t + (a-d)\right|$. Звідки $t^* = \frac{a-d}{2}$. Оскільки $T^r = \frac{-2}{b+c}\langle 0$, то максимум функції $T(t)$ при $t^* = \frac{a-d}{2}$ дорівнює

$$T^r = t^\bullet \cdot q^\bullet = \frac{1}{(b+c)}\left[-\frac{(a-d)^2}{4} + \frac{(a-d)^2}{2}\right] = \frac{(a-d)^2}{4(b+c)}.$$

Оптимальний випуск продукції при цьому значенні t^* дорівнює $q_1 = \frac{(a-d)^2}{4(b+c)}$ і прибуток фірми $P(q_1) = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e.$

Загалом прибуток фірми за податкової ставки t буде:

$P(q^*(t)) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e$. Звідси випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток зменшується, якщо $0 \le t \le a–d$ і існує область значень податкової ставки при $t \ge \tilde{t} = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$, у якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи уряду додатні.

Це відбувається тому, що критерієм вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку, але не було обумовлено, що цей максимум повинен бути додатнім.

Якщо вважати, що при $t \ge \tilde{t}$ випуск продукції дійсно стане рівним нулю, то дохід уряду при $t \ge \tilde{t}$ також стане рівним нулю, бо в околі $\tilde{t}$ відбувається різке скорочення ділової активності.

Нехай t — податкова ставка. Задані функції доходу: $R(q) = 16q–q_2$ і витрат виробництва $C(q)=q_2+1$. Тоді функція прибутку

$$P(q) = R(q) - C(q) - T = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

Яким повинен бути податок t, щоб сумарний податок T з усієї продукції був найбільшим?

За необхідною умовою максимуму прибутку: $P'(q) = 16 - 4q - t = 0$. Звідки $q^* = 4 - \frac{t}{4}$. Оскільки $P^r(q^\bullet) = -4\langle 0$, то q^* — точка максимуму функції $P(q)$. Отже, отримали оптимальний обсяг: $q_{опт} = q*$. Тоді сумарний дохід: $T = q^\bullet \cdot t = t\left(4 - \frac{t}{4}\right) = 4t - \frac{1}{4}t^2\langle 0$. Знайдемо максимум функції $T(t)$. З $T' = 4 - \frac{1}{2}t = 0$. знаходимо $t = 8$. Тому $q^* = 2$, отже максимальний прибуток становить:

$$P_{опт} = P(q_{опт}) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 7,$$

а оптимальний, з погляду податкового законодавства, податковий збір $T_{опт} = 2 \cdot 8 = 16.$

Цікаво зівставити ці цифри з цифрами за відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язок задачі на максимізацію прибутку дав би такі результати: $q_{опт} = 4$, $P_{опт} = 31$.

Отже, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції і при цьому призводить до збільшення прибутку від її реалізації. Тому виробники докладають зусилля, щоб знизити податкову ставку.

§*4. Застосування векторів в економічних дослідженнях*

Вектор є математичною моделлю реальних економічних явищ і процесів, що доволі часто зустрічаються та, відповідно, відбувався в повсякденному житті. Навіть найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів.

Для дослідження динамічних моделей різних процесів стан досліджуваної економічної системи в момент часу t описується за допомогою вектора x з n-вимірного простору, а керування процесом у той самий момент часу описується за допомогою вектора з m-вимірного простору. Таким чином, у динамічних моделях використовуються вектори n та m вимірних просторів, координати яких залежать від часу t. Поняття n-вимірного вектора широко застосовується в економіці: вектор набору товару; вектор цін; вектор вартості; вектор витрат.

Під товаром розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час і в певному місці. Уважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг i-го товару позначатимемо через x_i, i=1,2,…n. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\vec{x} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, тобто є n-вимірним вектором. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для довільного i = 1,2,…n. Множину всіх наборів товарів називають простором товарів C.

Уважаємо, що кожен товар має певну ціну. Усі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці i-го товару становить p_i, i = 1,2,…n. Тоді вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$ називають вектором цін.

На відміну від скалярних, векторні величини можуть мати однакові одиниці. Таким, наприклад, в економіці є вектор-рядок вартості $\vec{v} = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$, компоненти якого — вартості різної сировини, палива, робочої людино-години тощо.

У процесі виробництва товару чи послуг завжди наявні виробничі витрати — це фактичні витрати виробника (фірми) на придбання й використання всіх необхідних умов виробництва, які забезпечують досягнення кінцевого результату господарської діяльності.

У задачах мікроекономіки ми зустрічаємо вектор-стовпець витрат сировини, палива та праці $\vec{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_n \end{pmatrix}$.

Цікавим є економічний зміст скалярного добутку.

Означення. Скалярним добутком векторів a і b називається число $|a|\,|b|$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $ab = |a||b|\cos\varphi$.

Уважають, що фізичним змістом скалярного добутку є робота з переміщення матеріальної точки під дією певної сили.

Для набору товарів $\vec{x} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ розглянемо вектор відповідних цін $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$. Скалярний добуток цих векторів $\vec{p} \cdot \vec{x} = (p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots p_n \cdot x_n)$ є число, яке визначає ціну набору товарів і позначається $c(x)$.

Введемо позначення $\vec{x}$ — вектор обсягу споживчих товарів, $\vec{c}$ — вектор цін у поточному місяці, $\overrightarrow{c_n}$ — вектор цін у попередньому місяці.

Тоді індекс цін (%) обчислюється за формулою:

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{x}}{\overrightarrow{c_n} \cdot \vec{x}} \cdot 100.$$

Звідки $100 \cdot \vec{c} \cdot \vec{x} = p \cdot \vec{c_n} \cdot \vec{x}$ або $(100 \cdot \vec{c} - p \cdot \vec{c_n}) \cdot \vec{x} = 0$, тобто індекс можна визначити як числовий коефіцієнт *p*, який робить вектор $\vec{x}$ перпендикулярним до вектора $(100 \cdot \vec{c} - p \cdot \vec{c_n})$.

Під час аналізу закономірностей виробництва використовується продуктивна функція, яка, по суті, є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами та випущеною продукцією.

Нехай у деякому виробничому процесі є *n* виробничих ресурсів. Кількість *i*-го ресурсу, використовуваного за проміжок часу *t*, позначимо x_i. Тоді виробничі ресурси — це вектор $\vec{x} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Нехай підприємство випускає m різних виробів. Кількість *j* виробу позначемо y_i. Тоді випуск усіх виробів буде вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_m)$.

Нехай $\vec{a} = (a_1, a_3, ..., a_p)$ — вектор параметрів виробництва (наприклад, різні види транспортних чи інших витрат). Продуктивна функція пов'язує вектори ресурсів *X*, випуску *Y* та параметрів $\vec{a}$, тобто $F\,(X,Y,\,) = 0$.

Продуктивну функцію, розв'язану відносно *Y*, тобто функцію вигляду $Y = f\,(x,\,)$, називають функцією випуску, а розв'язану відносно вектора *X*, тобто вигляду $X = \varphi\,(Y,\,)$, називають функцією виробничих витрат.

Зрозуміло, що ці функції в конкретних випадках (коли вказано закони *f* та φ) використовують правила дій з векторами.

Наприклад, поточний стан банку (чи іншої фінансової інституції), можна описати за допомогою вектора характеристик: $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Кількісний та якісний склад компонент вектора *x* визначається ступенем деталізації. Фактично ця форма опису стану банку за змістом адекватна банківському балансу: компоненти вектора *x* можуть бути інтерпретовані як звичайні статті балансу, а їх кількість і структура відповідають рівню його агрегованості (щоденний — який включає рахунки другого порядку, узагальнений — квартальний тощо). Стан окремого *j*-го ресурсу ототожнюється з деяким елементом множини невід'ємних дійсних чисел $R_+^1 = [0, +\infty)$. Стан банку загалом можна подати деякою точкою *n*-мірного евклідового простору: $x \in R_+^n = \left\{ x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n) \middle| x_j \in R_+^1 \right\}$. Множина всіх можливих (допустимих) точок (векторів) *x* утворює простір станів банку: $X = \{x\} \subset R_+^n$. Можуть створюватися також певні похідні (вторинні) характеристики: $y = (y_1, ..., y_i, ..., y_m) \in R^m$. Вектор похідних характеристик *y* є функцією від вектора *x*: $y = f(x)$. Зауважимо, що найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів. Для дослідження динамічних моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається в момент часу *t,* описується за допомогою вектора *x* з *n*-вимірного простору, а керування процесом у той самий момент часу — за допомогою вектора з *m*-вимірного простору. Таким чином, у динамічних моделях використовуються вектори *n* та *m* вимірних просторів, координати яких залежати від часу *t*.

Розглянемо модель Неймана, яка є узагальненою моделлю Леонтьєва, оскільки допускає виробництво одного продукту різними способами (у моделі Леонтьєва кожна галузь виробляє один продукт і жодна інша галузь не може виробляти цей продукт). У моделі представлено *n* продуктів і *m* способів їх виробництва, кожен *j-й* спосіб задається вектором-стовпцем витрат a_i і вектором-стовпцем випусків b_i з розрахунку на одиницю інтенсивності процесу:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

З векторів витрат і випуску утворюються матриці витрат й випуску

$$A = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_m),\ B = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m). \qquad (4.5)$$

Коефіцієнти витрат a_{ij} і випуску b_{ij} — невід'ємні. Природно припустити, що для реалізації будь-якого процесу необхідні витрати хоча б одного продукту, тобто для кожного j знайдеться хоча б одне i таке, що $a_{ij} > 0$, і кожен продукт може бути вироблений хоча б одним способом, тобто для кожного i існує деяке j, таке, що $b_{ij} > 0$. З (4.4) і (4.5) випливає, що кожен стовпець матриці A і кожен рядок матриці B повинні мати принаймні один додатний елемент.

Позначимо через x_t невід'ємний вектор-стовпець інтенсивності виробничих процесів

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix},$$

а через P_t — вектор-рядок невід'ємних цін:

$$p_t = (p_1(t),\ p_2(t),\ ...,\ p_n(t)).$$

Вектор $y_t = Ax_t$ — це вектор витрат для заданого вектора інтенсивності процесів x_t а вектор $z_t = Bx_t$, — вектор випусків.

Модель Неймана описує замкнену економіку в тому сенсі, що для виробництва продукції в наступному виробничому циклі (за рік t) витрачається продукція, вироблена в попередньому виробничому циклі, тобто в продовж року (t — 1):

$$Ax_t \le Bx_{t-1},\ x_t \ge 0,\ t = 1,\ 2,\ ...,\ T, \qquad (4.6)$$

при цьому передбачається, що заданий первинний вектор запасів $Bx_0 \ge 0$, $Bx_0 \ne 0$.

Система (4.6) — це модель Неймана в натуральній формі. Такою є й уніфікована форма (4.6) моделі динамічного міжгалузевого балансу. Модель Неймана у формі (4.6) має більш теоретичний, ніж практичний характер: у ній у явному вигляді не відображені накопичення та невиробниче споживання.

Вектори використовуються також у побудові моделі Вальраса.

Основна ідея Вальраса полягає в тому, щоб за певної системи цін індивідуальні плани (наміри) учасників стали спільними, тобто така система цін забезпечує розподіл ресурсів і продукції на основі розв'язання конфлікту між учасниками. Таку рівноважну ситуацію називають конкурентною рівновагою.

У моделі Вальраса розглядається економіка з i споживачами ($i = 1,\ ...,\ l$), m виробниками ($k = 1,\ ...,\ m$) і n типами товарів ($j = 1,\ ...,\ n$). Через $p = (p_1, \ldots, p_n)$ позначатимемо вектор-рядок цін, а через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-стовпчик товарів.

У цій моделі поняття «товар» трактується розширено. Під товаром маються на увазі й предмет (продукт праці), і засіб праці (капітальне обладнання, споруди тощо), і первинні ресурси (праця та природні ресурси). Модель Вальраса можна розглядати як формалізацію річного циклу виробництва та розподілу товарів у результаті взаємодії суб'єктів економіки (споживачів і виробників), кожний з яких має свої цілі.

Розглянемо деякі приклади застосування лінійної залежності в економіці.

1. Якщо через k позначити тариф перевезення вантажу на одиницю відстані, b — витрати на перевезення вантажу, що не залежать від відстані x, то загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за допомогою формули $y = kx + b$.

2. Якщо позначити через y витрати підприємства впродовж місяця на випуск x одиниць однорідної продукції, то y може бути визначено за формулою $y = kx + b$, де величина kx визначатиме змінні витрати, що залежать від обсягу випуску (де k — витрати підприємства впродовж місяця на одиницю продукції). Величина b визначає постійні витрати підприємства, які не залежать від обсягу продукції, що випускається (витрати за рахунок амортизації будинку, заробітної плати, охорони, службовців і допоміжних робітників, опалення будинку та ін.).

Задача 1. Валова продукція на 1 га сільськогосподарських угідь за чотири роки збільшилася на 24 %. Скласти рівняння прямої, яка відображає зміну валової продукції на 1 га впродовж чотирьох років за умови, що валова продукція у відсотках змінюється пропорційно часу. Дослідити вплив розширення тракторного парку на зростання врожаю зернових.

Розв'язання. Валову продукцію, випущену першого року, приймаємо за 100 % і шукатимемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$:

$k = 24/4 = 6;$ $\qquad$ $100 = 6\cdot 1 + \mathrm{b};$ $\qquad$ $\mathrm{b} = 94.$

Отже, $y = 6x + 94$, де x — рік.

Задача 2. У 1980 р. держава мала 108,5 тисяч тракторів і отримала з одного гектара 8,5 ц зернових. У 1995 р. вона мала 510 тисяч тракторів і мала з одного гектара 21 ц зернових.

Розв'язання. Позначимо час — x, кількість тисяч тракторів — y; урожай, який отримали з одного гектара, позначимо — z (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки:

A(x_1, y_1); x_1 = 1980, y_1 = 108,5;

B(x_2, y_2); x_2 = 1995, y_2 = 510;

M(x_1, z_1); x_1 = 1980, z_1 = 8,5;

M(x_2, z_2); x_2 = 1995, z_2 = 21.

Знайдемо рівняння прямих — графіків зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980—1995 р. у вигляді $y = kx + b$, — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані очки, отримаємо:

$$\frac{x-1980}{1995-1980}=\frac{y-180{,}5}{510-108{,}5}\Rightarrow\frac{x-1980}{15}=\frac{y-180{,}5}{401{,}5}\Rightarrow 401{,}5x-401{,}5\cdot 1980=15y-15\cdot 108{,}5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y=15\cdot 108{,}5+401{,}5\cdot x-401{,}5\cdot 1980\Rightarrow 15y=401{,}5x-793342{,}5\Rightarrow y=\frac{401{,}5}{15}x-\frac{793342{,}5}{15}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде:

$$k_1=\frac{401{,}5}{15}\approx 26{,}77.$$

Використовуючи точки M_1 та M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара:

$$\frac{x-1980}{1995-1980}=\frac{z-8{,}5}{21-8{,}5}\Rightarrow\frac{x-1980}{15}=\frac{z-8{,}5}{12{,}5}\Rightarrow 12{,}5x-21{,}5\cdot 1980=15z-15\cdot 8{,}5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15z=12{,}5\cdot x-12{,}5\cdot 1980-8{,}5\cdot 15\Rightarrow 15z=12{,}5x-24877{,}5.$$

Отже, її кутовий коефіцієнт буде:

$$k_2=\frac{12{,}5}{15}\approx 0{,}83.$$

З умов задачі можна зробити висновок, що в разі розширення тракторного парку врожайність зернових з 1 га зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка підвищення кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових. Таким чином, збільшення тракторного парку сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно. Зростання кількості тракторів — зростання енергоозброєності сільського господарства не є основним фактором підвищення ефективності сільського господарства. Необхідно враховувати вплив інших чинників, наприклад, якості насіння, культури агротехніки, тощо.

Задача 3. Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним та автомобільним транспортом на відстань (x) знаходять за формулами:

$$y=-\frac{1}{2}x+10 \text{ та } y=x+5,$$

де (x) вимірюється десятками км. Визначити рентабельність транспортного постачання.

Розв'язання. Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (рис. 4.14). Графіки прямих перетинаються в точці N(10; 15). Для перевірки координат точки N знайдемо точку перетину аналітично:

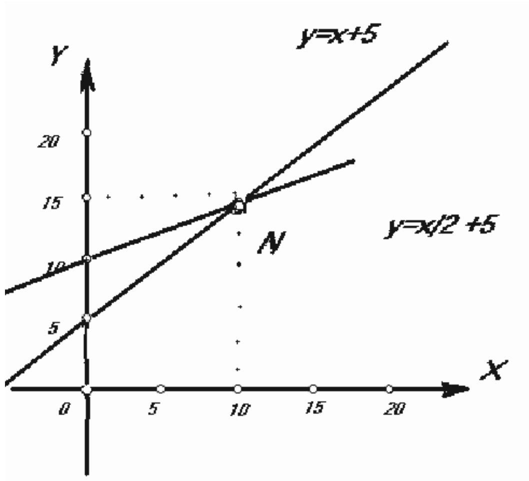


Рис. 4.14

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = 15 : x = 10.$$

Графіки витрат дають змогу дійти висновку:

а) коли $x \in [0, 10]$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати y перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

б) коли $x \in [10, \infty]$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Задача 4. Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Треба знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, ураховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачено 20 л пального за годину, а також визначити витрати пального за годину при швидкості 60 км/год.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі шукану залежність записати у вигляді:

$V^2 = km,$

де k — деякий коефіцієнт пропорційності. Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дає змогу зробити висновок, що витрати паливного змінюються за параболічним законом. Для $m = 0$, швидкість $V = 0$, тобто парабола проходить через початок системи координат mOV. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0(20; 40)$, тому її координати задовольняють рівнянню параболи $40^2 = k \cdot 20$, звідки $k = 80$.

Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна буде:

$$v^2 = 80 \cdot m \Rightarrow m = \frac{v^2}{80}.$$

Графік цієї залежності зображено на рис. 4.15. З останньої формули випливає, що при швидкості 60 км/год витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати:

$$m = \frac{60^2}{80} = 45.$$

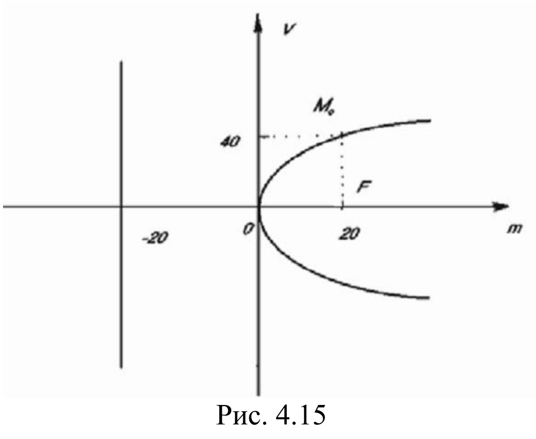


Рис. 4.15

Задача 5. Два однотипних підприємства A та B виробляють продукцію з однією й тією ж відпускною оптовою ціною m за один виріб. Однак автопарк, що обслуговує підприємство A, оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу становлять за 1 км: для підприємства A — 10 гр. од., а для підприємства B — 20 гр. од. Відстань між підприємствами — 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

Розв'язання. Позначимо через S_1 та S_2 відстані до ринку від пунктів A та B відповідно. Тоді витрати споживачів становитимуть:

$f(A) = m + 10S_1$;

$f(B) = m + 20S_2$.

Знайдемо множину точок, для яких $S_1 = 2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку, коли $f(A) = f(B)$.

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2};\ S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 = 2}\ \sqrt{(300 - x)^2 + y^2};$$

$$x^2 + y^2 = 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2;$$

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2.$$

Це коло. Таким чином, для споживача всередині кола вигідніше купувати у пункті B, поза колом — у пункті A, а на колі — однаково.

Задача 6. Компанія виробляє вироби A та продає їх по 2 долари за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума y_B загальних щотижневих витрат (у доларах) на виготовлення виробів A кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність: $y_B = 1000 + 1300x + 100x^2$.

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, яка забезпечує рівновагу витрат і доходу.

Розв'язання. Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 долари за кожний буде: $y_B = 2000x$.

Для рівноваги доходу та витрат треба, щоб виконувалась рівність:

$$y_B = y_D \Rightarrow\ 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x \Rightarrow x^2 — 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (x — 2)(x — 5\ ) = 0 \Rightarrow\ x_1 = 2;\ x_2 = 5.$$

Отже, ця задача має дві точки рівноваги. Компанія може виробляти 2000 · (x — 2) виробів A з доходом і витратами 4000 доларів, або 5000 · (x — 5) виробів з доходом і витратами 10 000 доларів.

Розглянемо на цьому прикладі можливості компанії. Позначимо щотижневий прибуток P, тоді $P = y_D — y_B = 2000x — (1000 + 1300x + 100x^2) = — 1000 + 700x — 100x^2 = — 100\ (x — 2)(x — 5\ )$.

З останньої рівності випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги. Коли $2 < x < 5$, тоді $x — 2 > 0$, $x — 5 < 0$ і маємо $P > 0$. Тобто компанія отримає прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin\ [2, 5]$, будемо мати $P < 0$ — компанія несе збитки.

Задача 7. Нехай маємо два підприємства, які віддалені одне від одного на 1 км. Підприємства виробляють одну й ту саму продукцію, причому ціна одиниці продукції однакова і дорівнює p. Відомо, що транспортні витрати на перевезення продукції від підприємства А до споживача становлять m грн/км, а від підприємства B — n грн/км. Виникає питання: як розподілити ринок збуту, щоб витрати споживачів були однаковими?

Розв'язання. Для розв'язування цієї задачі застосуємо метод координат. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат знаходився в точці А, а додатний напрямок осі абсцисс визначався δ напрямком вектора $\overrightarrow{AB}$. Оскільки $\left|\overrightarrow{AB}\right| = l$, то точка В має координати (l;0), а точка A — координати (0;0) (рис. 4.16).

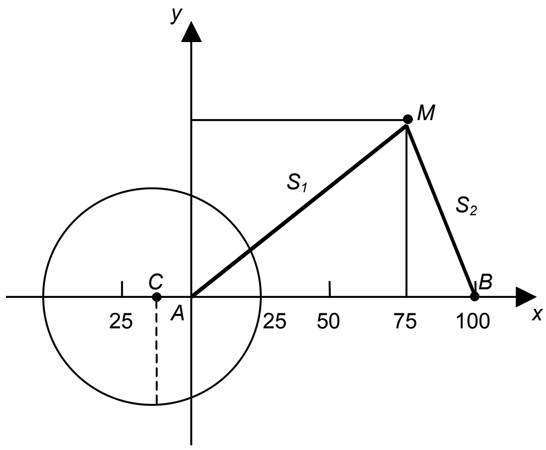


Рис. 4.16

Припустимо, що споживач знаходиться в точці $M(x; y)$. Позначимо $AM = S_1$, $BM = S_2$. Витрати споживача на придбання одиниці продукції для підприємства A становлять $p + m \cdot S_1$, а з підприємства $B - p + n \cdot S_2$.

Витрати споживачів будуть однаковими, якщо $p + m \cdot S_1 = p + n \cdot S_2$, звідки

$$\lambda S_1 = S_2, \qquad (4.7)$$

де $\lambda = \dfrac{m}{n}$.

Оскільки $S_1 = AM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $S_2 = BM = \sqrt{(l - x)^2 + y^2}$, то

$$\lambda\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(l - x)^2 + y^2}, \qquad (4.8)$$

Звідки $\lambda^2\left(x^2 + y^2\right) = (l - x)^2 + y^2$,

або $(1 - \lambda)^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 - 2lx + l^2 = 0$. $\qquad (4.9)$

Якщо $\lambda = 1$, то рівняння (4.9) має вигляд:

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (4.10)$$

У цьому випадку для споживачів, які знаходяться на прямій, що проходить через середину AB, витрати на придбання продукції підприємства A є меншими, ніж підприємства B, а для споживачів, які знаходяться праворуч від прямої (4.10), витрати на придбання продукції підприємства B є меншими, ніж підприємства A. Отже, ринок буде розподілено так:

1) споживачі, які розташовані ліворуч від прямої, купуватимуть продукцію на підприємстві A;

2) для споживачів, розташованих на прямій, неважливо, на якому підприємстві здійснювати закупівлю;

3) споживачі, які розташовані праворуч від прямої, купуватимуть продукцію на підприємстві B.

Якщо $\lambda \neq 1$, то рівняння (4.9) є загальним рівнянням кола, причому

$$A = 1 - \lambda^2,\ B = -2\lambda,\ C = 0,\ D = l^2. \qquad (4.11)$$

У цьому випадку ринок збуту буде розподілено таким чином:

1) споживачі, які розташовані всередині кола, купуватимуть продукцію на підприємстві A;

2) для споживачів, розташованих на колі, неважливо, на якому підприємстві здійснювати закупівлю;

3) споживачі, які знаходяться поза колом, купуватимуть продукцію на підприємстві B.

Наприклад, якщо l = 100 км, m = 900 грн/км, n = 300 грн/км, то $\lambda = 3$. Отже, $A = 1 - 9 = 8$, $B = -2 \cdot 100 = -200$, $C = 0$, $D = 100^2$.

Тоді знайдемо $a = -\frac{200}{16} = -\frac{25}{2}$, $b = 0$, $R = \sqrt{\frac{25^2}{4} + \frac{100^2}{8}} = \sqrt{\frac{5625}{4}} = \frac{75}{2}$.

Таким чином, рівняння (4.9) у цьому разі можна подати у вигляді $\left(x + \frac{25}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{75}{2}\right)^2$.

Отже, шукане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $C\left(-\frac{25}{2};0\right)$ і радіусом $R = \frac{75}{2}$ (рис. 4.16).

Задача 8. Нехай на прямолінійній ділянці залізниці знаходяться станції *A* і *B*, відстань між якими *L* (км). Із заводу *M* (*x*; *y*), який розташовано в околиці станції *B*, вантаж можна доставляти на станцію *A* двома шляхами:

1) спочатку по шосе до станції *B*, а потім залізницею до станції *A*;
2) безпосередньо по прямій автотранспортом до станції *A*.

При цьому тариф на залізниці (ціна перевезення 1 т вантажу на 1 км) складає *m* (грн), навантаження-розвантаження складає витрати в *k* (грн) за 1 т і тариф автотранспортом *n* (грн), *n* > *m*. Треба визначити зону впливу станції *B*, тобто зону, в якій дешевше доставляти вантаж до станції *A* мішаним шляхом: спочатку автотранспортом, а далі залізницею.

Розв'язання.

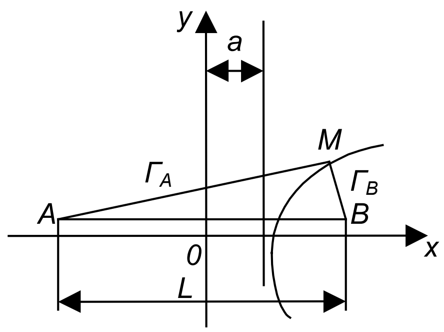


Рис. 4.17

Виберемо систему координат так, як показано на рис. 4.17.

Початок координат — точка *O* — є серединою відрізка *AB*. Нехай S_1 — вартість доставки 1 т вантажу шляхом *MBA*, S_2 — вартість доставки шляхом *MA*. Тоді

$S_1 = nr_B + k + Lm$, $S_2 = nr_A$.

Знайдемо геометричне місце точок, для яких обидва шляхи є «однаково вигідними», тобто $S_1 = S_2$, або $nr_B + k + Lm = nr_A$, звідки $r_A - r_B = \frac{Lm + k}{n}$.

Величина $2a = \frac{Lm + k}{n}$ є сталою. Отже, шуканим геометричним місцем точок є права гілка гіперболи

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a = \frac{Lm + k}{n}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4a^2}$.

Для всіх точок, які розташовані праворуч від цієї лінії, маємо $S_1 < S_2$, тобто більш вигідним є перший шлях перевезень, а для точок, що лежать ліворуч — другий. Таким чином, права гілка гіперболи окреслює зону впливу станції *B*, ліва — станції *A*.

Наприклад, якщо *L* = 100 км, *m* = 50 грн/(км · т), *k* = 1000 грн/т, *n* = 75 грн/(км · т), то $a = \frac{100 \cdot 50 + 1000}{2 \cdot 75} = 40$ км; $a^2 = 1600$, $b^2 = \frac{1}{4}\left(100^2 - 4 \cdot 40^2\right) = 900$.

Отже, шуканим геометричним місцем у цьому разі є права гілка гіперболи $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{900} = 1$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Витрати виробника на 10 одиниць деякого товару становлять 1000 гр. од., а на 50 одиниць товару — 2000 гр. од. Визначити витрати виробництва на 30 одиниць за умови, що витрати залежать від обсягу лінійно.

2. Скласти рівняння прямої, яка відображає зміну врожайності 1 га впродовж 17 років, якщо першого року з 1 га було зібрано 9,1 ц зернових культур, а останнього року — 21 ц.

3. Припускається, що перенесення вартості машини на продукцію, що виготовляється з її допомогою, залежить від часу t. Нехай первісна вартість $y = 25000$ грошових одиниць, а термін служби машини — 10 років. Побудувати лінію залежності перенесеної на продукцію частини вартості машини від терміну її служби. Якою буде ця величина через 8 років.

4. Витрати на перевезення двома видами транспорту відображаються функціями $y = 50x + 150$, $y = 25x + 250$, де x — відстань перевезень, км, а y — транспортні витрати, гр. од. При яких відстанях економічніше користуватися першим видом транспорту?

5. Перевезення вантажу від даного міста до першого пункту, який знаходиться на відстані 100 км, коштує 200 гр. од., а до другого, що знаходиться на відстані 400 км — 350 гр. од. Установити залежність вартості перевезення y від відстані x, якщо вартість є лінійною функцією від відстані (якість доріг не враховується).

6. Два підприємства, що віддалені одне від одного на 100 км, виробляють деякі однакові вироби. Ціна реалізації одиниці виробу для обох підприємств однакова й дорівнює m. Нехай транспортні витрати на перевезення одиниці виробу від підприємства A до споживача становлять 1 гр. од. на 1 км, а від B — 2 гр. од. на 1 км. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу в підприємстві A і B повинні бути однаковими? Як доцільно прикріпити споживачів до підприємств?

7. Розв'язати задачу 6 за умови, що транспортні витрати на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємства A та B до споживача однакові і становлять 1 гр. од. на 1 км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах A і B дорівнює 200 і 225 гр. од. відповідно.

8. Розв'язати задачу 6 за умови, що транспортні витрати на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємства A становлять 9 гр. од. на 1 км, а від підприємства B — 3 гр. од. на 1 км.

9. Відстань між двома заводами, що виробляють однакову продукцію, становить 300 км. Транспортні витрати на транспортування продукції від заводу A вдвічі більші, ніж від заводу B. Визначити лінію — межу районів, на якій однаково вигідно отримувати продукцію від заводів A та B.

Блочно-модульний контроль
Індивідуальна робота № 1

Задача 1

Дано координати вершин $A(A_x;A_y)$ та $B(B_x;B_y)$ трикутника *ABC*, рівняння двох його висот $x-y+m=0$ і $9x-y+n=0$ та координати довільної точки $P(P_x;P_y)$. Знайдіть:

1) рівняння сторін трикутника *ABC;*
2) рівняння медіани *CD* та координати точки *N* перетину медіан;
3) рівняння прямих BL_1 та BL_2, які проходять через точку *B* під кутом 45° до медіани *CD;*
4) площу трикутника *MPC,* де *M* — точка перетину висот трикутника *ABC.*

Числові дані знаходяться в таблиці.

Вар.	$A(A_x;A_y)$	$B(B_x;B_y)$	$P(P_x;P_y)$.	*m*	*n*
1.	(–2; 1)	(0; 7)	(–2; 10)	3	7
2.	(3;–2)	(5; 4)	(5; 0)	–5	–41
3.	(3; 0)	(5; 6)	(–1; 2)	–3	–39
4.	(–4; 0)	(–2; 6)	(–8;–6)	4	24
5.	(1; 3)	(3; 9)	(0; 0)	2	–18
6.	(–1;–10)	(1;–4)	(9;–9)	–9	–13
7.	(–4;–11)	(–2;–5)	(–1;–12)	–7	13
8.	(2; –4)	(4; 2)	(11;–3)	–6	–34
9.	(–1; 5)	(1; 11)	(0; 12)	6	2
10.	(–3; 5)	(–1; 11)	(5; 13)	8	20
11.	(–4; 3)	(–2; 9)	(–2; 2)	7	27
12.	(–1;–6)	(1; 0)	(10; 0)	–5	–9
13.	(0; 0)	(2; 6)	(4;–5)	0	–12
14.	(–1; 2)	(1; 8)	(8; 12)	3	–1
15.	(–5;–7)	(–3;–1)	(–6;–10)	–2	26
16.	(–3; 0)	(–1; 6)	(–1;–6)	3	15
17.	(–3;–7)	(–1;–1)	(–7; 1)	–4	8
18.	(–1;–11)	(1;–5)	(9;–13)	–10	–14
19.	(1;–10)	(3;–4)	(0; –12)	–11	–31
20.	(3;–8)	(5;–2)	(8;–2)	–11	–47
21.	(–2;–10)	(0;–4)	(1;–12)	–8	–4
22.	(2;–9)	(4;–3)	(0;–14)	–11	–39
23.	(1; 4)	(3; 10)	(4; 8)	3	–17
24.	(–4; 6)	(–2; 12)	(1; 1)	10	30
25.	(2;–5)	(4; 1)	(1; 4)	–7	–35
26.	(2;–1)	(4; 5)	(6; 5)	–3	–31
27.	(–2;–8)	(0;–2)	(9;–7)	–6	–2
28.	(3; 2)	(5; 8)	(7;–2)	–1	–37

Для зручності та простоти перевірки робіт у кожний приклад вставлений параметр *k*, який дорівнює порядковому номеру студента за списком у журналі відвідування занять, до якого треба додати № групи, наприклад,гр. № 3, № за списком — 21 : k = 3+21 = 24.

Задача 2

Відомі координати точок *A*(–3к+1,2,к–4), *B*(к–11, к+1, 3к–15), *C*(2к–10, к,к+1), *D*(15,k,k–1). Знайти:

1) розклад:

а) вектора $3\overline{AC}+2\overline{AD}$ за базисом $(\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD})$;

б) вектора $2\overline{AC}+3\overline{CD}$ за базисом $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})$;

2) центр мас трикутника *ABC*.

3) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, кут між ними;

4) координати точки, яка ділить відрізок DC у відношенні $\lambda=\frac{2}{3}.$;

5) розклад векторів $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ і $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$ у базисі $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})$;

6) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вісь, що утворює з осями *0x*, *0y* кути, які дорівнюють $\alpha=60^0,\beta=120^0$, а з віссю *0z* тупий кут γ;

7) проекцію вектора $\overline{AD}+\overline{AC}$ на напрям вектора $\overline{DC}$;

8) проекцію вектора $\overline{AD}+\overline{DC}$ на координатні осі;

9) проекцію вектора $3\overline{AB}+\overline{BC}$ на напрям вектора $\overline{AB}-\overline{DC}+\overline{BC}$;

10) канонічне та загальне рівняння прямої AD;

13) кут між прямими AB і AC;

14) рівняння бісектриси $\angle DAB$;

15) проекцію точки D на пряму AC;

16) координати векторів: а) $(\overline{AB}\cdot\overline{BC})\overline{DC}$, б) $\overline{AB}(\overline{AC}\cdot\overline{DC})$, в) $\overline{AB}\times\overline{AC}$,

г) $(2\overline{AB}+\overline{AC})\times\overline{DC}$;

17) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$;

18) об'єм тетраедра $ABCD$;

19) відстань від точки А до прямої DC;

20) з'ясувати, чи компланарні вектори $\overline{AB}-\overline{BC},\overline{AD}+\overline{AC},\overline{AD}-\overline{AB}$;

21) обчислити: а) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$, б) $\sqrt{\overline{AB}^2}$, в) $\sqrt{\overline{AC}^2}$;

22) модуль вектора $\overline{AB}+\overline{AC}$ і його напрямні косинуси.

Індивідуальна робота № 2

Задача 1. Функція доходу $R(q) = (1+k)\, q-q^2$, а функція витрат виробництва $C(q) = q^2 + k$. Нехай t — податкова ставка. За якої податкової ставки величина сумарного податку з усієї продукції буде найбільшою?

Задача 2. Дослідним шляхом установлено функцію попиту $q=\frac{p+(k+2)}{p+k}$ і функцію пропозиції $s=p+\frac{k}{2}$, де q і s — обсяги товарів, а p — ціна товару. Знайти рівноважну ціну; еластичність попиту і пропозиції при рівноважній ціні.

Задача 3. Відома область бюджетного обмеження споживача: $x_1 + x_2 \geq 3, \quad x_1 + x_2 \leq 7, \quad 1 \leq x_1 \leq 3$. Знайти найбільше і найменше значення функції корисності споживача $z(x_1, x_2) = kx_1^2 + (2k-1)x_2^2$ у цій області.

Задача 4. Прибуток фірми обчислюється за формулою:

$PR(x_1, x_2) = p_0 \cdot f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2, \quad x_1 \rangle 0, \quad x_2 \rangle 0$,

де $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 x_2$ — виробнича функція фірми, $p_0 = k$ — це ринкова ціна продукції, яка виробляється фірмою; $p_1 = k + 1, \quad p_2 = k + 2$ — ринкові ціни ресурсів. Знайти таку комбінацію ресурсів (x_1, x_2), при якій фірма отримає найбільший прибуток.

Задача 5. Споживач має дохід 350 грн на тиждень і може купувати 2 товари (блага) у кількості x_1 та x_2 за цінами $4k$ і $5k-1$ відповідно. Напишіть функцію бюджетного обмеження споживача, накресліть графік функції бюджетного обмеження. Відома функція корисності споживача $z(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2$. Розв'яжіть задачу споживчого вибору за допомогою методу множників Лагранжа.

Задача 6. Побудувати лінії рівня (ізолінії) для функції Кобба-Дугласа $z = K^{\frac{1}{k}} \cdot L^{1-\frac{1}{k}}$ у точках $(L_0, K_0) = (1, 2^k)$ і $(L_1, K_1) = (2^k, 1)$.

Знайти напрями найбільшого зростання функції вартості виробництва (функції Кобба-Дугласа) у цих точках, знайти кут між цими напрямами.

Відповіді
Розділ 1.

2. $\bar{r}=\lambda\left(\frac{\bar{a}}{|\bar{0}|}+\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right),\ \lambda\in R.$ **3.** $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2},\ \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2},\ \frac{\bar{b}-\bar{a}}{2},\ -\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}.$ **4.** 1) $\bar{a}\perp\bar{b}$, 2) $(a,\hat{}b)<\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}<(a,\hat{}b)<\pi.$ **5.** 30. **6.** $r=\overline{r_1}-\overline{r_2}+\overline{r_2}.$ **7.** $r=\frac{\overline{r_1}+\overline{r_2}+\overline{r3}}{3}.$ **8.** $r=\frac{\overline{r_1}+\overline{r_2}+\overline{r_3}+\overline{r_4}}{4}.$
9. $\overline{OP}=\frac{n}{m+n}\bar{a}+\frac{m}{m+n}\bar{b}.$ **10.** $\overline{OB}=2\bar{a}+\bar{b},\ \overline{OC}=2\bar{a}+2\bar{b},\ \overline{OD}=\bar{a}+2\bar{b}.$ **11.** $\overline{OM}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}+\bar{c}.$
12. $\overline{A_1M}=\frac{1}{4}\overline{A_1A_2}+\frac{2}{3}\overline{A_1A_4}+\frac{3}{4}\overline{A_1A_6}.$ **13.** $\overline{A_1K}=\frac{2}{3}\overline{A_1A_4}+\frac{2}{3}\overline{A_1A_5}.$ **14.** $\overline{A_1L}=\frac{1}{5}\overline{A_1A_2}+\frac{1}{10}A_1A_4.$
15. $\overline{AB}=\bar{a}+\bar{d},\ \overline{BC}=\bar{b}+\bar{a},\ \overline{CD}=\bar{c}+\bar{b},\ \overline{DA}=\bar{d}+\bar{c}.$ **16.** $\bar{r}=\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c}.$ **17.** $\bar{r}=5\bar{a}+2\bar{b}.$
18. 1) $(0,-2,4)$, 2) $(4,-4,4)(-2,-3,8)$ 5) $\left(2,-\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right).$ **19.** $B(1,-2),D(2,5).$ **20.** $(2,4,1)$ і $(-10,1,16).$
21. $-\frac{29}{\sqrt{65}}.$ **22.** $\sin\varphi=0{,}9531.$ **23.** 3,8. **24.** 11. **25.** $\frac{20}{\sqrt{3}}.$ **26.** $\overline{AB}_{\overline{CD}}=3\sqrt{5}.\ \overline{AB}_{\overline{CD}}=3\sqrt{5}.$
27. $\angle A=\angle B=45°,\ \angle C=90°.$ **28.** $\varphi=60°.$ **29.** $\cos\varphi=t\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$ **30.** $\varphi=120°.$ **32.** $\bar{a}_{\bar{e}}=-3.$ **33.** $\bar{x}=(2,-3,0).$ **34.** $\varphi=90^\circ.$ **35.** $\bar{x}=(-4,2,-4).$ **36.** $90^\circ.$ **37.** 10. **38.** $\bar{x}=\left(4\sqrt{2},4,4\right).$
39. $-\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{11}{2},-\frac{4}{\sqrt{2}}.$ **40.** $\frac{17}{15},\frac{10}{15},\frac{19}{15}.$ **41.** 3,5. **42.** $(5,\ -3,\ 1).$ **43.** 24,5. **44.** 5.
45. 1) $\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b})$ 2) $3\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}).$ **46.** 3. **47.** $50\sqrt{2}.$ **48.** $1{,}5\sqrt{2}.$ **49.** $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\underline{b}|=\sqrt{5}$; $S=\sqrt{6}.$
50. $\bar{a}\parallel\bar{b}.$ **51.** 96. **52.** 12. **53.** $\bar{c}=(1,\ 2,\ -2)$ і $\bar{e}=(-1,-2,\ 2).$ **54.** $x=(3,\ 2,\ 0).$
55. $\bar{x}=(24,\ -21,\ -15).$ **56.** $\bar{x}=(-8,\ 7,\ 5).$ **57.** $\frac{25}{3}.$ **58.** $\lambda=1{,}5;\ \mu=0{,}5.$ **59.** $\frac{51}{\sqrt{65}}.$
60. $\bar{x}=(45,\ 24,\ 0).$ **61.** $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-29;\ (\bar{b},\bar{a},\bar{c})=29$ (права). **62.** $V=15,h=3.$
63. $0=(-1,1,0),\quad q=(-1,0,1).\ 0=(-1,1,0),\quad q=(-1,0,1).$ **64.** 11. **65.** 25. **66.** $+27$ — трійка право, -27 — трійка ліво. **70.** $O(0,8,0)$ і $O(0,-7,0).$ **71.** $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(55,-61,-31).$
72. 1) 3,7; 2) $\sqrt{429},5\sqrt{6}$, 5) $\frac{157}{\sqrt{2574}}.$ **73.** 12. **74.** $\alpha=-1.$ **75.** 1) ліва; 2) і 3) права. **78.** $\bar{c}=5\bar{a}+\bar{b}.$ **79.** $\bar{c}=\bar{a}+2\bar{b}.$

Розділ 2

1. $x+y-6=0$, $2x-y+14=0$. **2.** $C_1(2,4)$. **3.** $C_1(1,-1)$ або $C_2(-2,-10)$. **4**. $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. **5.** $4x+y-3=0$. **6.** $5x+y-3=0$. **7.** $M(2,-1)$. **8**. $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$. **9.** $29x-2y+33=0$. **10.** C(6, –6). **11.** $2x-y+3=0$, $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **12**. $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **13.** $8x-y-24=0$. **14.** $m=\frac{}{15}$. **15.** $m=-7$. **16.** $S=6$. **17.** $5x+12y-94=0$ і $y-7=0$. **18.** Два розв'язки: 1) $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y-27=0$; 2) $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y+5=0$. **19.** $x-3y-5=0$, $3x+y-5=0$. **20.** Обла с ть тупого кута. **21.** $3x-19=0$. **22.** $7x+y-9=0$ і $2x+y+1=0$. **23.** S = 1,68 . **24.** $17x+7y-24=0$.

Розділ 3.

1. $(x-7)^2+(y+4)^2=26$. **2.**3. **3.** $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ **4.** $x^2+y^2=2r^2$. **5.** $\frac{\pi}{3}$.
6. $x^2+(y-1)^2=2,\quad (x-2)^2+(y-3)^2=2$. **7.** $x+2y-9=0$ *і* $2x-y-8=0$. **8.** $x^2+y^2-x-3y-10=0.$
9. а) частина площини, що лежить поза колом К(С,3), С(1,–2); б) частина площини, що ле-

жить між колами K(C,1) і K(C,3), C(1,–2) **10.** $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$; $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$. **11.** 17. **12.** $2x+y-1=0,\ 2x+y+19=0$. **13.** $2\sqrt{5}$. **14.** $[\ (x-1)^2+(y-3)^2=26$. **15.** коло з внутрішнім дотиком у точці P кола $\bar{k}$ (C,R), $R=\frac{a\lambda}{1+\lambda}$. **16.** $(3;\ 0,\ 12)$. **17.** $\left(-\frac{a^2A}{C};\ -\frac{b^2B}{C}\right)$.

18. $\frac{A(x-x_1)}{a^2}-\frac{B(y-y_1)}{b^2}=0$. **20.** $50x+189y=0$. **21.** $x^2+y^2=9$. **22.** $\frac{x^2}{109}+\frac{y^2}{25}=1$. **24.** 18. **25.** $x+y-5=0,\ x+4y-10=0$. **26.** $\sqrt{13}$. **27.** $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$.

28. $9\frac{\left(x-\frac{r}{3}\right)^2}{4r^2}+\frac{12y^2}{5r^2}=1$. **29.** $\left(x-\frac{2a^2-b^2}{2a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{4a^2}$. **30.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$. **32.** $50x+189y=0$. **34.** $\left(x-\frac{2a^2-b^2}{2a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{4a^2}$. **35.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **36.** $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{\frac{256}{9}}=1$. **37.** $9x\pm4\sqrt{34}y=0$.

38. $3x-4y-5=0$. **39.** $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$ і $y=\pm1{,}8$. **40.** $x+y-1=0$. **41.** $4x^2-8y^2=32$.

42. $2x+y\pm\sqrt{54}=0$. **43.** $x^2+y^2=a^2-b^2$. **45.** $-\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$.

46. $\frac{(x+15)^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$. **47.** $\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$. **48.** $\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{\left(y-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$.

49. $\frac{(x+2)^2}{36}-\frac{(y-7)^2}{\frac{181}{4}}=1$. **50.** 4,9. **52.** $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$. **53.** $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{c^2}{4}$.

54. $\frac{x^2}{c^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{r^2}$. **55.** $\frac{x^2}{c^4}+\frac{y^2}{c^2b^2}=\frac{1}{a^2}$. **56.** а) $(x+3)^2=-5\left(y+\frac{18}{5}\right)$, б) $(y+1)^2=-6(x+5)$.

57. $(x+14)^2=2y$. **58.** $3x-y-3=0$. **59.** $y=\frac{3}{2}$ **60.** $x-10=0;\ 2x\pm\sqrt{5}y=0$.

61. $-x+y+2=0;\ \ 2x+5y+25=0$. **62.** $x=-\frac{p}{2}$. **64.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1$. **65.** $y^2=\pm2x+1$. **66.** 10.

67. $p=\frac{5}{2}$. **68.** (–5; –7,5). **69.** $\begin{cases}x-y+2>0,\\ y>x.\end{cases}$ **70.** $x\pm3=0$. **71.** $\begin{cases}x^2+(y-1)^2\le1,\\ x^2>2(y-1)\end{cases}$

72. $y^2=-\frac{2r^2}{p}x$. **73.** $xy=-\frac{p^2}{2}$. **74.** $y^2=-\frac{2r^2}{p}x$. **75.** $\left(x-\frac{p}{4}\right)^2-y^2=\frac{p^2}{16}$. **76.** $y\left(p^2-b^2\right)+2bpx-p^2b=0$.

Розділ 4.

1. 1500. **2.** y = 0,7x + 8,4. **3.** 5. **4.** При $x>400$ більш економічними є перевезення другим видом транспорту. **5.** y = 0,5x + 150. **6.** Споживачам, які знаходяться всередині круга $(x-83{,}3)^2+y^2\le66{,}7^2$, доцільніше купувати на В, поза кругом — на А. **7.** Усередині круга $(x+62{,}5)^2+y^2\le37{,}5^2$ купуватимуть на підприємстві А, поза кругом – на В. **8.** Усередині круга $(x+12{,}5)^2+y^2\le37{,}5^2$ купуватимуть на підприємстві А, поза колом – на В. **9.** $(x+100)^2+y^2=200^2$.

Література

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометри. — М.: Наука, 1968. — С. 912.
2. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1964. — С. 440.
3. *Білоусова В.П., Ільїн І.Г.* і др. Аналітична геометрія.— К.: Вища школа, 1973. — С. 328.
4.*Вітлінський В. В.,* Моделювання економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.
5.*Гаврилишин О.* Основні елементи теорії ринкової системи. — К.: Наукова думка, 1992.
6.*Гусак А. А.* Аналітична геометрія і лінійна алгебра. — Мн.: Тетрасистемс, 1998.
7.*Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И* «Микроэономика». Т.І. — СПБ, 1996.
8. *Гамільтои Дж.* Методичний посібник до «Мікроекономіки» Р. Піндайка та Д.Рубшфельда. К., 1996.
9.*Дадаян А.А., Маслова Е.С.* Сборник задач по аналитической геометри и элементам линейной алгебры. — Мн.: Вышэйшая школа, 1982. — С. 206.
10. *Долан Э., Линдсей Д,* Рьшок: микроэкономическая модель, — СПБ, 1992.
11. Економічна теорія: Макро- та мікроекономіка: навч, посібник / За ред. 3. Г. Ватаманюка та С. М. Панчишина. — 2-ге вид.,доп, — Львів: Інтереко, 1998.
12.*Ефимов Н.В.* Кратний курс аналитической геометри. — М.: Наука, 1969. — С. 272.
13. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М., 1975.
14. *Каньоса М.І.* — Два підходи до аналізу поведінки споживача. — Кам'янець-Подільський, 1998.
15. *Карагодова О.О., Черваньов Д.М*, Мікроекономіка, — К., 1997.
16.*Клепко В.Ю., ГолецьВ.Л.,* Вища математика в прикладах і задачах:Навчальний посібник — К.: Центр учбової літератури, 2009. — С. 594.
17. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. —М.: Физматгиз, 1963. — С. 244.
18. *Лисовицкий В. Н.* Микроэкономика, Харьков. РИП, «Оригінал», 1993.
19 *Макконнелл К., Брю С.* Мікроекономіка / за ред. Панчишина С. : Львів: Просвіта, 1999.
20.Математика: Підручник для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. І—II рівнів акредитації / Лейфура В.М, Голодницький Г. І, Файст Й. І, за ред Лейфура В.М. — К. : Техніка, 2003. — 639 с.
21. Математическая экономика на персональном компьютере: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1991.
22. Мікроекономіка і макроекономіка: Підручник для студентів екон. спец. закл. освіти: У 2ч. / С. Будаговська, О. Кілієвич, І. Луніна та ін. За заг. ред. С. Будаговської. — К.: Основи, 1998.
23. Микро- и макроэкономика. Практикум. — СПБ, 1994.
24. Микроэкономика для студентов по специальности бакалавр менеджмента. / Сост. — Е. И. Лабурцева, — К.: ГАЛПУ, 1995.
25. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. — М.: МГУ, 1969.— С. 563.
26. *Мэнкью Н. Г.* Принципи экономикс. — СПБ: Питер Ком, 1999.
27.*Овсеец М. І., Світла Є. М.* Збірник завдань із вищу математику. Навчальне видання. — Мн.: ЧИУиП, 2006. — 67.
28.*Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроекономика. — М.: Економика, Дело, 1992.
29.*Пунько Б.М,* Основи підприємницької діяльності (практичні аспекти): Навчальний посібник. — Л., 1997.
30. *Райзберг Б. А.* Основы экономики и предпринимательства. — М.: Просвещение, 1995.
31. *Райзберг Б. А.* — Экономическая знциклопедия для детей и взрослых. — М.: АОЗТ «Нефтехиминвест», 1995.
32. Рыночная экономика. Учебник, Т.І., Ч.1. М., 1992.
33. *Семюельсон П.* Економіка: Підручник. — Львів, Світ, 1993.
34. *Семюельсон П., Нордхаус Д.* — Економіка — У 2т. — К., 1995.
35. *Слухай С.В.* — Довідник базових термінів та понять з мікроекономіки. — К.: Лібра. 1998.
36. Современная экономика. Общедоступный учебный курс. Ростов-на-Дону, изд-во «Фенікс», 1998.
37.Теория потребительского спроса и поведения. // Вехи экономической мысли, Вып. 1. — СПБ. 1994.
38. Теория фирмы // Вехи экономической мысли. Вып. 2. — СПБ, 1995.
39. *Федорчук В.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. Пособие. — М.: МГУ, 1990. — С. 328.
40. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометри. — М.: Наука, 1968. — С. 303.

Навчальне видання

БЛУДОВА Тетяна Володимирівна,
ЛІСОВСЬКА Валентина Петрівна,
МАГДА Олена Вікторівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчально-методичний посібник для СРС

Редактор *Н. Підлужна*
Коректор *С. Фіялка*
Верстка *О. Руденко*

Підп. до друку 30.10.15. Формат 60×84/8.
Друк. арк. 7,09. Зам. 13-4733.

Державний вищий навчальний заклад
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)
Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua