

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Декан математичного факультету

С.І. Гоменюк

2019 р.



**ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНОГО  
ТВЕРДОГО ТІЛА**

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

підготовки магістра

спеціальності 113 Прикладна математика

освітньо-професійна програма Прикладна математика

Укладач Швидка Світлана Петрівна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри  
прикладної математики і механіки

Обговорено та ухвалено  
на засіданні кафедри  
прикладної математики і механіки

Протокол № 1 від 21 серпня 2019 р.

Завідувач кафедри

  
В.З. Гриншак  
(підпис, прізвище і ініціал)

Ухвалено науково-методичною радою  
математичного факультету

Протокол № 1 від «02» вересня 2019 р.

Голова науково-методичної ради  
факультету

  
О.С. Пшенична  
(підпис)

2019 рік

## 1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 5	Галузь знань 11 Математика та статистика	Вибіркова	
		Цикл дисциплін професійної підготовки	
Розділів – 2	Спеціальності: 113 Прикладна математика	<b>Рік підготовки:</b>	
		2-й	
Загальна кількість годин – 150	Освітньо-професійна програма Прикладна математика	<b>Лекції</b>	
		22 год.	
		<b>Лабораторні заняття</b>	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента – 10	Рівень вищої освіти: <b>магістерський</b>	22 год.	
		<b>Самостійна робота</b>	
		106 год.	
		<b>Вид контролю:</b> залік	

## 2. Мета та завдання навчальної дисципліни

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Варіаційні методи в механіці деформівного твердого тіла» є отримання нових знань з варіаційних принципів і методів та алгоритмів їх застосування для розв'язання задач статичної і динамічної деформівних твердих тіл; удосконалення навичок використання варіаційних методів для дослідження практичних задач та набуття вміння проведення дослідження і розробки методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла з використанням сучасних персональних комп'ютерів.

### **Основними завданнями курсу є:**

- ознайомлення з лінійною теорією пружності у декартових координатах;
- ознайомлення з основними варіаційними принципами;
- отримання системних знань стосовно постановок та методів розв'язання варіаційних задач статичної і динамічної деформівних твердих тіл та конструкцій;
- ознайомлення з варіаційними методами в механіці;
- набуття навичок застосування теоретичних відомостей до розв'язування практичних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:** основні варіаційні принципи та методи розв'язування задач механіки деформівного твердого тіла, границі застосування варіаційних методів, критерії оцінки отриманих результатів;

**вміти:** формулювати математичну постановку задач механіки деформівного твердого тіла як варіаційних, застосовувати основні варіаційні принципи та методи до пошуку розв'язків типових задач; проводити аналіз отриманих аналітичних розв'язків та робити відповідні висновки.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких **компетентностей**:

- здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або в процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;
- здатність вести дослідницьку діяльність, включаючи аналіз проблем, вибір способу й методів дослідження, а також оцінку якості результатів;
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;
- здатність математично формалізувати постановку завдання;
- здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання практичних задач дослідження, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

### **Міждисциплінарні зв'язки**

«Варіаційні методи в механіці деформівного твердого тіла» є продовженням дисципліни «Варіаційне числення та методи оптимізації». Під час формування умінь з обох дисциплін застосовують схожий математичний апарат, принципи, методи та алгоритми. Засвоєння курсу базується на знаннях, що одержані при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Рівняння з частинними похідними». Отримані теоретичні знання і набуті практичні вміння можуть бути корисними при виконанні кваліфікаційної роботи магістра

## **3. Програма навчальної дисципліни**

### ***Розділ 1. Варіаційні принципи механіки***

*Тема 1. Історія розвитку, роль і місце варіаційних принципів та методів в механіці деформівного твердого тіла. Загальна характеристика варіаційних методів*

Приклади виникнення задач механіки деформівного твердого тіла як варіаційних. Роль і місце варіаційних принципів і методів при розв'язуванні задач механіки та особливості їх застосування. Загальна характеристика варіаційних методів. Питання вибору апроксимуючих функцій. Ступінь наближення варіаційного розв'язку до дійсного.

*Тема 2. Елементи лінійної теорії пружності у декартових координатах*  
 Напруження у точці твердого тіла. Напруження на похилій площинці. Умови на поверхні. Напруження у зразку, що деформується. Тензор напружень. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану. Інтенсивність напружень. Найбільше дотичне напруження. Розрахунок напружень. Складові переміщення і деформації та залежність між ними. Об'ємна деформація. Тензор деформації. Головні деформації. Інтенсивність деформацій. Розрахунок деформацій.

*Тема 3. Варіаційні принципи механіки*

Основні варіаційні принципи механіки пружного тіла в прямолінійній системі координат: принцип можливих переміщень Лагранжа, принцип можливих сил Кастіл'яно. Теореми Кастіл'яно. Принцип Гамільтона-Остроградського. Отримання рівняння руху пластинки з включеннями, виходячи з енергетичних передумов.

*Тема 4. Прикладна теорія пружності. Прогин тонких пластин*

Основні означення та гіпотези теорії тонких пластин. Переміщення та деформації. Напруження та зусилля. Диференціальне рівняння зігнутої серединної поверхні. Умови на контурі. Розв'язок Нав'є. Розв'язок Леві.

***Розділ 2. Варіаційні методи у статичних і динамічних задачах прикладної теорії пружності***

*Тема 5. Варіаційні методи: метод Рітца-Тимошенко, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Власова-Канторовича*

Загальна характеристика варіаційних методів. Методи Рітца-Тимошенко, Бубнова-Гальоркіна у загальній задачі пружно-пластичного середовища. Фізичне трактування методів. Застосування методів Рітца-Тимошенко та Бубнова-Гальоркіна у задачах прогину прямокутної пластини з граничними умовами шарнірного спирання та жорсткого защемлення при дії зосередженої сили та рівномірно розподіленого навантаження. Аналіз отриманих у вигляді рядів аналітичних розв'язків та дослідження збіжності розв'язків. Похибка розв'язків. Метод Власова-Канторовича та його обґрунтування Галимовим. Фізичне трактування метода. Метод Слободянського оцінювання похибки. Застосування методу Власова-Канторовича для отримання рівняння зігнутої поверхні квадратної пластини жорсткого защемлення по контуру при дії рівномірно розподіленого навантаження.

*Тема 6. Варіаційні методи у динамічних задачах теорії пружності*  
 Дослідження вільних поперечних коливань стрижня та прямокутної пластини. Визначення власних частот.

*Тема 7. Коливання пластини з включеннями*

Математична модель пластини з включеннями. Застосування принципу Гамільтона-Остроградського для отримання диференціального рівняння руху. Застосування метода Бубнова-Гальоркіна для розв'язування задачі про коливання пластини з включеннями. Аналіз отриманих у вигляді рядів аналітичних розв'язків та дослідження збіжності розв'язків. Похибка розв'язків.

#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви тематичних розділів і тем	Кількість годин							
	денна форма				заочна форма			
	усього	у тому числі			усього	у тому числі		
		л	лаб.	сам.роб.		л	лаб.	сам.роб.
				1.3				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Розділ 1. Варіаційні принципи механіки</b>								
Тема 1. Історія розвитку, роль і місце варіаційних принципів та методів в механіці деформівного твердого тіла. Загальна характеристика варіаційних методів	17	2		15				
Тема 2. Елементи лінійної теорії пружності в декартових координатах	25	4	6	15				
Тема 3. Варіаційні принципи механіки	19	2	2	15				
Тема 4. Прикладна теорія пружності. Прогин тонких пластин	21	4	2	15				
Разом за розділом 1	82	12	10	60				
<b>Розділ 2. Варіаційні методи у статичних і динамічних задачах прикладної теорії пружності</b>								
Тема 5. Варіаційні методи: метод Рітца-Тимошенко, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Власова-Канторовича	29	4	10	15				
Тема 6. Варіаційні методи у динамічних задачах теорії пружності	19	2	2	15				
Тема 7. Коливання пластини з включеннями	20	4		16				
Разом за розділом 2	68	10	12	46				
<b>Усього годин</b>	<b>150</b>	<b>22</b>	<b>22</b>	<b>106</b>				

#### 3. Теми лекційних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Історія розвитку, роль і місце варіаційних принципів та методів в механіці деформівного твердого тіла. Загальна характеристика варіаційних методів	2
2	Напруження у точці твердого тіла. Напруження на похилій площинці. Умови на поверхні. Напруження у зразку, що деформується. Тензор напружень.	2
2	Складові переміщення і деформації та залежність між ними. Об'ємна деформація. Тензор деформації.	2

3	Основні варіаційні принципи механіки пружного тіла в прямолінійній системі координат: принцип можливих переміщень Лагранжа, принцип можливих сил Кастіл'яно. Теореми Кастіл'яно. Принцип Гамільтона-Остроградського	2
4	Основні означення та гіпотези теорії тонких пластин. Переміщення та деформації. Напруження та зусилля.	2
4	Диференціальне рівняння зігнутої серединної поверхні. Умови на контурі.	2
5	Загальна характеристика варіаційних методів. Методи Рітца-Тимошенко	2
5	Метод Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича	2
6	Варіаційні методи у динамічних задачах теорії пружності	2
7	Коливання пластини з включеннями	4
<b>Разом</b>		<b>22</b>

### 6. Теми лабораторних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
2	Напруження у точці твердого тіла. Напруження на похилій площинці. Умови на поверхні. Розрахунок напружень.	2
2	Складові переміщення і деформації та залежність між ними. Розрахунок деформацій.	4
3	Застосування варіаційних принципів до задач механіки деформівного твердого тіла.	2
4	Прогин тонких пластин.	2
5	Розрахунок пластин на прогин методом Рітца-Тимошенко.	4
5	Розрахунок пластин на прогин методом Бубнова-Гальоркіна.	4
5	Розрахунок пластин на прогин методом Власова-Канторовича	2
6	Дослідження вільних поперечних коливань прямокутної пластини. Визначення власних частот.	4
<b>Разом</b>		<b>22</b>

### 7. Самостійна робота

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
1	Приклади виникнення задач механіки деформівного твердого тіла як варіаційних.	15
2	Головні напруження. Інваріанти напруженого стану. Інтенсивність напружень. Варіаційний метод розв'язування задач в напруженнях. Найбільше дотичне напруження. Головні деформації. Інтенсивність деформацій.	15
3	Варіаційний метод розв'язування задач в напруженнях. Отримання рівняння руху пластинки з включеннями, виходячи з енергетичних передумов.	15
4	Розв'язок Нав'є. Розв'язок Леві.	15

5	Метод скінчених різниць.	15
6	Розрахунок динамічних задач для стрижневих систем.	15
7	Коливання пластини з включеннями: випадок включення довільної форми.	16
<b>Разом</b>		<b>106</b>

### Індивідуальне завдання

Виконати розрахунок власних частот коливань для пластини з відповідною кількістю включень відповідного розміру і місця розташування. Завдання треба оформити в окремому зошиті та захистити на 9 тижні.

### 8. Види контролю і система накопичення балів

	Вид контролю	Кількість балів
<b>Розділ 1</b>	1) Лабораторна робота за темою 2	6
	2) Лабораторна робота за темою 3	6
	3) Контрольна робота за темами 2,3	12
	4) Лабораторна робота за темою 4	6
<b>Разом</b>		<b>30</b>
<b>Розділ 2</b>	5) Лабораторна робота за темою 5	18
	6) Лабораторна робота за темою 6	6
	8) Колоквіум з питань для самостійної роботи	6
<b>Разом</b>		<b>30</b>
<b>Індивідуальне завдання</b>	9) Захист індивідуального завдання	<b>20</b>
<b>Залік</b>		<b>20</b>
<b>Всього за семестр</b>		<b>100</b>

### Критерії оцінювання кожного з проведених видів контролю

1) Лабораторні роботи за темами «Елементи лінійної теорії пружності в декартових координатах», «Варіаційні принципи механіки» і «Прикладна теорія пружності. Прогин тонких пластин» складаються з практичної та теоретичної частин, кожна з яких оцінюється у 4 і 2 бали відповідно.

2) Контрольна робота за темами «Елементи лінійної теорії пружності в декартових координатах» і «Варіаційні принципи механіки» складається з 4 завдань із загальною оцінкою у 12 балів.

3) Тема «Варіаційні методи: метод Рітца-Тимошенко, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Власова-Канторовича» включає 3 лабораторні роботи, кожна з яких оцінюється у 6 балів, а саме у 4 і 2 бали за практичну і теоретичну частини відповідно.

4) Лабораторна робота за темою «Варіаційні методи у динамічних задачах теорії пружності» складається з практичної та теоретичної частин, кожна з яких оцінюється у 4 і 2 бали відповідно.

5) Колоквіум проводиться з питань для самостійної роботи. Під час колоквіуму заслуховуються короткі доповіді з опрацьованих питань, після кожної доповіді обов'язкове обговорення. Максимальна оцінка – 6 балів.

5) Під час захисту індивідуального завдання треба бути готовим пояснити або окремі етапи розв'язання обраних викладачем завдань, або повністю завдання. Максимальна кількість балів дорівнює 20.

### Шкала оцінювання: національна та ECTS

ЗА ШКАЛОЮ ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Іспит	Залік
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)	Зараховано
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	75 – 84 (добре)		
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60 – 69 (достатньо)		
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	Не зараховано
F	1 – 34 (незадовільно – з обов'язковим повторним курсом)		

## 9. Рекомендована література

### Основна:

1. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач: учеб. пособие. Москва : Высш. шк., 1974. 200с.
2. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва : Наука, 1983. 448 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва : Мир, 1987. 542 с.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. Москва : Мир, 1965. 408 с.
5. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости: учеб. пособие. Москва : Высшая школа, 1984. 384 с.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие. Москва : Наука, 1982. 264 с.



7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости: учеб. пособие. Москва: Физматлит, 1959. 364 с.

**Додаткова:**

1. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. Москва: Наука, 1966. 432 с.
2. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. 234с.
3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. Москва: Мир, 1985. 590 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 527 с.

**Інформаційні ресурси:**

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. URL: [http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/fizika\\_uprugost/BOOKS/uprugost/20051023\\_BB3A5B35.djvu](http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/fizika_uprugost/BOOKS/uprugost/20051023_BB3A5B35.djvu)
2. Ланцози К. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с. URL: [http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/2008-5/matemat\\_modelir/mat\\_meh/lancosh.djvu](http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/2008-5/matemat_modelir/mat_meh/lancosh.djvu)
3. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости: учеб. пособие. Москва: Физматлит, 1959. 364 с. URL: [http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/fizika\\_uprugost/BOOKS/uprugost/filonenko.djvu](http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/fizika_uprugost/BOOKS/uprugost/filonenko.djvu).

Погоджено

навчальний відділ

« 03 » жовтня 2019 р.