**Тема Планіметрія Лобачевського.**

**Мета:** Сформувати навички доведення основних теорем планіметрії Лобачевського.

**Методичні рекомендації.** При доведенні теорем планіметрії Лобачевського часто використовуються теореми абсолютної геометрії.

**Приклади розв’язання задач**

**Задача 1.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Середня лінія трикутника менша половини його основи».

****Розглянемо трикутник ,  – середня лінія. Доведемо, що .

***План доведення.***

1. Через середини сторін  і  проведемо пряму і опустимо на неї перпендикуляри з вершин трикутника.
2. Доведемо рівність трикутників:  та 
3. Доведемо, що чотирикутник  є чотирикутником Саккері.
4. Доведемо, що , звідки .
5. Покажемо, що , звідки випливає .

 **Задача 2.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Кут, під яким діаметр кола видно з будь-якої точки цього кола, відмінної від кінців діаметра, – гострий»

******

**Питання:** 1) Як формулюється відповідна теорема в геометрії Евкліда? А в абсолютній геометрії?

**Задача 3.** Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «В прямокутному трикутнику величина хоча б одного з його кутів менше ».

**Питання:** 1) Чи справедлива ця теорема в геометрії Евкліда? Відповідь обгрунтувати.

**Задача 4.** Довести твердження: «Якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні» (четверта ознака рівності трикутників.)

******

***Доведення.*** Розглянемо трикутники  та , в яких , , . Потрібно довести рівність відповідних сторін цих трикутників.

Припустимо, що . Існує така точка , що . Через точку  проведемо півпряму  так, що . За теоремою 46 пряма  паралельна стороні . За аксіомою Паша промінь  перетинає відрізок , позначимо точку перетину . Трикутники  і  конгруентні (за теоремою 15). Ми довели, що трикутники  і  подібні та не конгруентні. Але твердження про існування подібних не конгруентних трикутників є еквівалентом п’ятого постулату Евкліда. Отже, отримали протиріччя, а значить , звідки за теоремою 15 можемо зробити висновок про рівність даних трикутників.

**Завдання:** 1) Завершити формулювання теореми у геометрії Евкліда: «Якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то…»

**Задача 5.** Довести, що існують такі трикутники, навколо яких не можна описати коло.

***Доведення*.** На площині Лобачевського проведемо прямі . Через точку  проведемо пряму , яка з прямою  утворює кут  – кут паралельності . Візьмемо точку , побудуємо точку , яка симетрична точці  відносно прямої  та точку , яка симетрична точці  відносно прямої . Точки  не належать одній прямій, оскільки в противному випадку , що неможливо для кута паралельності. Розглянемо трикутник . В ньому пряма  є серединним перпендикуляром до сторони , пряма  є серединним перпендикуляром до сторони  та  за умовою, тому навколо цього трикутника не можна описати коло.

**Завдання:** 1) Побудувати заперечення твердження: «Існують трикутники, навколо яких не можна описати коло».

**Задача 5.** Довести, що ортогональна проекція однієї зі сторін гострого кута на іншу сторону є півінтервалом.



***Доведення.*** Розглянемо гострий кут . Відомо, що яким би не був гострий кут, завжди існує єдина пряма, перпендикулярна до сторони  цього кута і паралельна стороні . Отже, точка *С* не є ортогональною проекцією жодної з точок прямої  на сторону  кута, а кожна з точок півінтервала  буде ортогональною проекцією деякої точки сторони .

**Задачі для самостійного розв’язання (2 частина індивідуального завдання) – 10 балів**