

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ
МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ**



**MODERN PROBLEMS
OF MECHANICS AND MATHEMATICS**

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Збірник наукових праць

*За загальною редакцією
академіка НАН України А.М. Самойленка
та академіка НАН України Р.М. Кушніра*

Том 1

Львів – 2018

УДК 539.3; 510(061)

Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 1. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpm2018

Збірник наукових праць складається з трьох томів. Перший та другий томи збірника містять наукові праці, присвячені проблемам математичного моделювання у механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки та термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл і наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проєктування елементів конструкцій і біомеханічних систем; міцності та втоми матеріалів. Третій том присвячено сучасним проблемам математики, зокрема, алгебри і топології, теорії функцій і функціонального аналізу, числових методів, диференціальних рівнянь і математичної фізики. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», яка проходила 22-25 травня 2018 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редакційна колегія:

Головний редактор: академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Кушнір*

Заступники: д.ф.-м.н., проф. *О.Р. Гачкевич*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *В.О. Пеліх*, д.ф.-м.н., проф. *Г.Т. Сулим*

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н., ст.н.с. *В.С. Пакош*, к.ф.-м.н. *Н.М. Івасько*, к.ф.-м.н. *Н.С. Джалюк*

Члени редколегії: академіки НАН України: д.ф.-м.н., проф. *В.Т. Грінченко*, д.ф.-м.н., проф. *З.Т. Назарчук*, д.т.н., проф. *В.В. Панасюк*; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. *О.С. Андрейків*, д.т.н., проф. *В.С. Гудрамович*, д.ф.-м.н., проф. *Г.С. Кіт*; д.ф.-м.н., проф. *М.М. Войтович*, д.ф.-м.н., проф. *А.В. Загороднюк*, д.ф.-м.н., проф. *Я.О. Жук*, д.ф.-м.н., проф. *К.Б. Казарян*, д.ф.-м.н., проф. *П.І. Каленюк*, д.ф.-м.н., проф. *П.П. Костробій*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Я.І. Кунець*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Х.Й. Кучмінська*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Лобода*, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Мартиняк*, д.ф.-м.н., проф. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Михаськів*, д.т.н., проф. *В.В. Можаровський*, д.ф.-м.н., проф. *М.М. Николішин*, д.ф.-м.н., проф. *В.М. Петричків*, д.ф.-м.н., проф. *В.Я. Підстригач*, д.ф.-м.н., проф. *В.Г. Попов*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Б.В. Процюк*, д.т.н., ст.н.с. *Я.Д. П'янило*, д.ф.-м.н., проф. *М.П. Саврук*, д.ф.-м.н., проф. *Я.Г. Савула*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Ю.В. Токовий*, д.ф.-м.н., проф. *В.Ф. Чекурін*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *А.В. Ясінський*

Рецензенти: *І.М. Дмитрах*, член-кореспондент НАН України, д.т.н., проф., *М.М. Зарічний*, д.ф.-м.н., проф., *Є.Я. Чапля*, д.ф.-м.н., проф.

Ухвалено до друку

Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

National Academy of Sciences of Ukraine
Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

Modern Problems of Mechanics and Mathematics

Collection of scientific papers

Edited by

*Academician of NAS of Ukraine A.M. Samoilenko
and Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir*

Volume 1

L'viv – 2018

UDC 539.3; 510(061)

Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vol. / Edited by A.M. Samoilenko, R.M. Kushnir [Electronic resource] // Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 1. – Access mode: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

The collection of proceedings contains three volumes. The first and second volumes deal, basically, with such problems: mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics; mechanics of non-homogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions; dynamic problems of non-homogeneous environments; optimization and design of elements of the constructions and biomechanics systems, strength and fatigue of materials. The third volume is devoted to modern problems of mathematics, partially, numerical methods, theory of functions and functional analysis, theory of functions and functional analysis, differential equations and mathematical physics, algebra, geometry and topology. They were the subject for discussion on International Conference «Modern Problems of Mechanics and Mathematics», held on May 22-25, 2018, L'viv.

The book may be useful to scientists, to those working for a doctor's degree, post-graduate students, masters and students of corresponding specialties.

Editorial board

Editor-in-chief: *R.M. Kushnir*

Vice-editors-in-chief: *O.R. Hachkevych, V.O. Pelykh, H.T. Sulym*

Senior secretaries: *V.S. Pakosh, N.M. Ivas'ko, N.S. Dzhaliuk*

International Editorial Board: *O.Ye. Andreikiv, V.F. Chekurin, K.B. Ghazaryan, V.S. Hudramovych, V.T. Hrinchenko, P.I. Kalenyuk, H.S. Kit, P.P. Kostrobiiy, Kh.Yo. Kuchmins'ka, Ya.I. Kunets, V.V. Loboda, M.V. Marchuk, R.M. Martynyak, V.V. Mozharovs'kyy, V.V. Mykhas'kiv, Z.T. Nazarchuk, M.M. Nykolyshyn, V.V. Panasyuk, V.M. Petrychkovych, V.Ya. Pidstryhach, V.H. Popov, B.V. Protsyuk, Ya.D. Pyanylo, M.P. Savruk, Ya.H. Savula, M.M. Voitovych, Yu.V. Tokovyy, A.V. Yasins'kyy, A.V. Zagorodnyuk, Ya.O. Zhuk*

Reviewers: *Ye.Ya. Chaplya, I.M. Dmytrakh, M.M. Zarichnyy*

Approved for publishing

by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ISBN 978-966-02-8502-6 (common, electronic edition)
ISBN 978-966-02-8503-3 (v. 1)

© Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ЗМІСТ

Кіт Григорій, Кушнір Роман Академік Я.С. Підстригач – видатний вчений, організатор науки та громадянин	14
Акопян Ваграм Осесимметричное напряженное состояние равномерно слоистого пространства с периодическими межфазными дискообразными дефектами	22
Андрейків Олександр, Скальський Валентин, Долінська Ірина Моделі заповільненого руйнування елементів конструкцій за дії фізико-хімічних чинників і локальної повзучості	23
Боднар Дмитро, Дмитришин Роман Про збіжність деяких класів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними	25
Гарт Етері, Гудрамович Вадим Проекційно-ітераційний варіант методу локальних варіацій та його застосування до задач стійкості оболонкових конструкцій при локалізованих навантаженнях	28
Дацишин Олександра Моделювання еволюції типових контактено-втомних пошкоджень в залізничних рейках	30
Дробенко Богдан, Будз Степан, Асташкін Володимир Напружено-деформований стан та експлуатаційний ресурс елементів енергообладнання	32
Івасишен Степан, Мединський Ігор Фундаментальні розв’язки задач Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова	34
Крак Юрій Побудова роботизованої системи нанесення біосумісних покриттів на імпланти	36
Марчук Михайло, Сіренко Володимир, Харченко Володимир, Клименко Дмитро Математичні моделі та сучасні програмні засоби оцінки міцності елементів ракетно-космічної техніки з композиційних матеріалів	37
Пастернак Ярослав, Сулим Георгій Термомагнітоелектропружність тіл із тонкими оболонковими та нитковими недеформівними електропровідними включеннями	39
Пелих Володимир, Тайстра Юрій Клас точних розв’язків рівнянь Максвелла у полі Керра і нові ефекти у полі чорних дір	41
Попов Всеволод Визначення динамічних КІН для тріщини у вигляді ламаної в умовах антиплоскої деформації	43
Шарковський Олександр Детермінативна теорія детермінованого хаосу	45
Auzinger Winfried Sharp a posteriori error estimation for symmetric one-step integrators	46
Avetisyan Ara, Khachatryan Vazgen Converters of electro-acoustic waves. Vacuum-crystalline filters and resonators	47

Kuchminska Khrystyna Corresponding multidimensional continued fractions for multiple power series	49
Mykhas'kiv Viktor, Kushch Volodymyr, Strelnikova Elena Multipole expansion and boundary element analysis in computational nanomechanics of composites .	51
Pidstrygach Victor Generalised Seiberg-Witten equations and gauge theories on manifolds with exceptional holonomy	52
Sladek Jan, Sladek Vladimir, Wünsche Michael Micro/nano-sized magneto-electro-elastic structures analyzed by strain gradient theory	56
Zhao Ya-Pu A full-stress model for hydraulic fracturing: the combined effects of pressure and shear stress for a power-law fluid	58
Zhuk Yaroslav, Hashemi Mohammad Thermomechanical instability and fatigue life prediction of transversely isotropic nanocomposite rod under combined static and harmonic loading	60

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Аветісян Ара, Мусій Роман, Мельник Наталія, Тарлаковський Дмитро Варіант моделі біметалевого неферромагнітного термопружного шару за дії однорідного нестационарного електромагнітного поля	62
Боженко Богдан, Онишко Олексій, Метельські Анджей, Моринь Стефан Фізико-механічний стан біметалевої пластини, виготовленої зі сталі та нікеліду титану, за термомеханічного навантаження	64
Боженко Богдан, Онишко Олексій, Станік-Беслер Аніда, Адріан Торський Моделювання термомеханічних процесів у твердих тілах при структурних перетвореннях за дії електричного поля	66
Водка Олексій До прогнозування механічних властивостей чавунів на основі аналізу їх мікроструктури	68
Волчанські Томаш, Козакевич Тереза, Муліцка Івона Дослідження та оптимізація залишкових структурного і напруженого станів сталевих пластин за нагріву рухомими джерелами тепла при врахуванні вибраних термічних і технологічних факторів	69
Гачкевич Микола, Казарян Карен, Тріщ Богдан Моделювання температурних полів в алгоритмі оптимізації режимів нагріву конвективним способом і джерелами тепла кусково-однорідних оболонок	71
Гачкевич Микола, Козярська Анна, Чорний Борис, Шинкаренко Георгій Моделювання температури і теплових деформацій в прямих задачах термомеханіки в алгоритмах оптимізації за напруженим станом режимів технологічного нагріву кусково-однорідних скляних оболонок	73

Гачкевич Олександр, Гуменчук Орест, Маринович Анджей Температурні поля і напруження в частково прозорих тілах за теплового опромінення при наявності порожнин та відбиваючих поверхонь	75
Гачкевич Олександр, Івасько Роман, Станік-Беслер Аніда Термомеханічна поведінка магнітним'якого феромагнітного шару при дії усталеного електромагнітного поля за підмагнічування	77
Гачкевич Олександр, Чупик Ігор Моделювання залишкових напружень у титанових сплавах при нагріві – охолодженні	79
Голубева Елена, Аль-Абси Рушди Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния труб из неоднородных материалов с учетом явлений вязкоупругости	82
Голубець Тарас Моделювання напружень у зволоженому пористому шарі за двостороннього мікрохвильового опромінення	84
Горбунович Ірина Виникнення біфуркаційних станів обертових гіпердовгих стрижнів	86
Грицина Ольга До побудови градієнтної теорії діелектриків з електричними квадруполями	88
Гаск Максиміліан, Козакевич Тереза, Моринь Стефан Моделювання та оптимізація залишкових структурного і напруженого станів маловуглецевої низьколегованої сталеві пластини при нагріві рухомими розподіленими джерелами тепла	90
Дробенко Богдан, Будз Степан, Асташкін Володимир Фазовий склад низьколегованої сталі на етапі його формування	92
Жук Олександр, Жук Ярослав Дія звукової хвилі на нерухому жорстку сферу в околі вільної поверхні рідини	93
Іваницький Ярослав, Гембара Оксана, Чепіль Ольга, Сапужак Ярослав Апробація енергетичного підходу для моделювання нагромадження пошкодження в металі елементів енергетичного обладнання	95
Ірза Євгеній, Козярска Анна, Можаровський Валентин Модель термомеханіки за термічного навантаження тіл обертання з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів	97
Ірза Євгеній, Равска-Скотнічни Анна, Гаєвська Любов Числова модель оптимізації режимів технологічного нагріву тіл обертання з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів	99
Киселев Михаил Идентификация механических свойств материалов по косвенным измерениям	101
Колодяжний Анатолій, Меднікова Маргарита Про межі застосовності моделі А.І. Лур'є в задачах напружено-деформованого стану оболонки з круговим отвором	103

Круць Софія, Киричок Іван, Жук Ярослав Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної кільцевої пластини з п'єзошарами при врахуванні деформації зсуву	105
Лабібов Расим, Черняков Юрий Линии локализации при чистом изгибе пластины в ее плоскости	106
Махненко Олег, Кандаля Степан Математичне моделювання радіаційного розпухання вигородки реактора ВВЕР-1000	108
Махненко Олег, Костеневич Олена Вплив залишкових напружень в патрубковій зоні корпусу реактора ВВЕР-1000 на результати оцінки опору крихкому руйнуванню	110
Михайлишин Віра Термомеханічні пружнопластичні процеси у відпалених виробках при моделюванні умов їх експлуатації	112
Мусій Роман, Мельник Наталія, Зашкільняк Іванна, Войтечек-Ляцак Катяжина Математичне моделювання термопружної поведінки електропровідної системи (кулі з тонким покриттям) за нестационарної електромагнітної дії	114
Нагірний Тарас, Сенік Юлія Напружено-деформований стан електропровідного неферомагнітного шару із урахування геометричної неоднорідності його поверхні	116
Олійник Андрій, Незамай Борис Комплексна математична модель аварійної ситуації на трубопроводах та оцінка її впливів на довкілля	117
Павлюк Ярослав, Фернаті Павло, Рагуліна Віра Визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості у нелінійно-в'язкопружних матеріалах в кубічній теорії в'язкопружності	119
Полищук Татьяна, Кипнис Леонид, Селиванов Михаил, Черноиван Юрий Маломасштабная пластическая зона предразрушения в точке пересечения линий микропластического деформирования	121
Рожок Лілія Моделювання напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів при дії локального навантаження	123
Сенченков Игорь, Червинко Ольга, Доля Елена Математическое моделирование термомеханических процессов при многослойной наплавке листовых элементов конструкций	125
Сеньків Леся, Дяків Василь Моделювання напружено-деформованого стану ортотропної пружно-пластичної циліндричної оболонки з тріщиною вздовж гвинтової лінії	127
Силованюк Віктор, Ліснічук Андрій, Івантишин Наталія Модель тонких анізотропних прошарків та включень у суцільному середовищі	128

Сметанкіна Наталя Моделювання процесу крихкого удару кулею по пластині у фрактальній постановці	130
Терлецький Ростислав, Брухаль Мар'ян, Журавска Александра Термонапружений стан системи шарів різної прозорості за теплового опромінення зі сторони непрозорого шару	132
Феньків Володимир, Дудик Михайло, Решітник Юлія Комплексна модель зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу матеріалів	134
Фурман Віталій, Хом'як Микола, Хом'як Леонід Моделювання траєкторій напружень для гірського масиву в зоні тектонічного розлому	135
Черняков Юрий, Шнейдер Владимир Бифуркационный критерий устойчивости вязкопластических тел	137
Чопоров Сергій Проекційний підхід до генерації поверхневих сіток при функціональному поданні тіл	139
Шаповалова Марія Визначення складу сталі, виходячи із даних мікроструктурного аналізу	141
Штойко Іван Математична модель для визначення залишкового ресурсу газопроводу за дії постійного тиску, ґрунтової корозії і деградації його матеріалу	142
Ghazaryan Karen, Mozharovsky Valentin, Ohanyan Sergey, Sarkisyan Samvel Generalized Love waves in bi-material waveguide with viscous slip interface ...	144
Rushchitsky Jeremiah Auxetic materials: using nonlinear models as the next stage of study	146

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ

Бойчук Юрій, Чекурін Василь Обернена задача визначення радіаційних поверхневих властивостей діелектричних шарів	151
Веремейчик Андрей, Хвисевич Виталий Исследование напряженно-деформированного состояния неравномерно нагретого цилиндра конечной длины в условиях нейтронного облучения	153
Вовк Оксана, Соляр Тетяна Дослідження ефективності числового обернення перетворення Лапласа в задачі теплопровідності для термочутливого півпростору	155
Гарматій Галина, Калиняк Богдан Неусталений термомпружний стан термочутливої двохшарової плити із залежними від поперечної координати характеристиками	157

Горошко Володимир Математичне моделювання та дослідження термопружно-го стану п'ятишарової термочутливої порожнистої кулі за складного тепло-обміну	159
Дудик Михайло Наближений метод розв'язання матричних рівнянь Вінера-Гопфа в задачах прикладної механіки	161
Жук Ярослав, Остос Олександр Вплив попереднього деформування на циклічну термомеханічну поведінку еластомерного в'язкопружного циліндра	162
Зеленський Анатолій Про знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь в теорії згину нетонких пластин	164
Кагадій Тетяна Метод збурення в задачах електропружності	166
Кіт Григорій, Андрійчук Роман Термонапружений стан півпростору з вільною або жорстко закріпленою межею за теплоізоляції у паралельній до неї області	168
Кіт Григорій, Івасько Наталія Плоска деформація півбезмежного тіла з вільною або жорстко закріпленою межею за теплоізоляції у паралельній до неї стрічковій області	170
Колодій Юрій, Турчин Ігор, Хома Василь Змішана квазістатична задача термопружності для плити з покриттям при фрикційному нагріванні	172
Коляно Ярослав, Сасс Тарас, Свирид Оксана Нестационарна задача термовологопровідності для двошарової пластини щодо конвективного і кондуктивного сушіння поліграфічних матеріалів	173
Курпа Лідія, Ткаченко Вікторія, Шматко Тетяна Дослідження стійкості багатошарових пластин з отворами складної форми за допомогою теорії R-функцій та варіаційних методів	175
Курпа Лідія, Шматко Тетяна Застосування теорії R-функцій для дослідження нелінійних коливань функціонально градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища	177
Кушнір Роман Про науковий доробок професора В.С. Поповича з термомеханіки неоднорідних тіл	179
Лавренюк Василь, Лавренюк Микола Методи розрахунку напружено-деформованого стану анізотропної неоднорідної пластини на пружній основі	183
Махоркін Ігор Узагальнені функції в задачах стаціонарної теплопровідності термочутливих багатошарових структур простої геометрії	184
Ориняк Ігор, Селіверстова Ірина, Антонченко Віталій, Дубик Ярослав Застосування понять довгого та короткого рішень для визначення напружень у секторному згині	186
Петров Олександр, Черняков Юрій, Стеблянко Павло Феноменологічна модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалу з пам'яттю форми	188

Постолак І Леся, Чекурін Василь Визначення осесиметричних залишкових напружень у скінченному циліндрі з використанням варіаційного методу одно-рідних розв'язків	190
Процюк Борис Нестационарні задачі теплопровідності для термочутливого шару за аеродинамічного нагрівання	191
Процюк Борис, Синюта Володимир Температурне поле двошарового циліндра, зумовлене нормально розподіленим тепловим потоком, який рухається по зовнішній поверхні уздовж направляючої	194
Ревенко Віктор Метод розрахунку напруженого стану циліндричних тіл за допомогою узагальнених квадратичних форм	196
Сеник Андрій Дослідження теплової поведінки термочутливого циліндра під дією потоку енергії	198
Скородинський Ігор Реакція нескінченного в'язкопружного шару, зчепленого з жорсткою основою, на дію рівномірно розподіленого циклічного навантаження	199
Ставиченко Вадим, Пургіна Світлана, Літвінова Анастасія, Шестаков Павло, Шевцов Вадим Температурні напруження у вуглецевому композитному матеріалі, викликані пропусканням електричного струму	201
Сторожук Євген, Максимюк Володимир, Чернишенко Іван Методи розв'язання крайових задач теорії тонких некругових циліндричних оболонок	203
Токовий Юрій, Чиж Анатолій Дослідження осесиметричного термонапруженого стану довгого порожнистого циліндра зі змінними за радіальною координатою теплофізичними та термопружними характеристиками	205
Турчин Ігор, Турчин Ольга Нестационарне температурне поле в півпросторі з неоднорідним покриттям при локальному нагріванні	207
Філіпчук Анастасія, Процеров Юрій, Вайсфельд Наталя Напружений стан циліндра скінченної довжини під дією власної ваги	208
Хома Іван, Прощенко Тетяна, Стригіна Оксана Дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини з круговою порожниною при заданій на поверхні розщиплюючій силі	210
Шваб'юк Василь, Ротко Світлана, Ужегова Ольга До проблеми впливу виду крайових умов на напружено-деформований стан транстропних пластин ...	212
Шевчук Віктор, Гаврись Олександр Дослідження температурного поля півпростору з багат шаровим покриттям за циклічної зміни температури довкілля	214
Ярема Євген, Опанасович Віктор, Слободян Микола Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з криволінійною межею поділу матеріалів та прямолінійною тріщиною	216

Antonenko Nina Plane thermoelastic deformation of a three-layer plate with elastic links between the layers	218
Tokovyy Yuriy, Huang Yu-Hsi, Yen Chien-Yu, Ma Chien-Ching Analytical and experimental evaluation of stresses in elastic annuli subjected to three-point loading on the periphery	220
Yevtushenko Aleksander, Kuciej Michal, Topczewska Katarzyna Effect of the time-dependent profile of friction power on the temperature and thermal stresses in a pad-disc brake system	222
Yevtushenko Aleksander, Kuciej Michal, Topczewska Katarzyna Modelling temperature on the contact surface of the friction elements during optimal braking mode	223

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ І НАНОМЕХАНІКА

Барахов Костянтин, Куреннов Сергій Напружений стан клейового з'єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель	224
Бутрак Іванна, Слободенюк Тетяна Гранично-інтегральне формулювання тривимірної задачі взаємодії пружної хвилі з нановключенням	225
Васільєв Кирил Аналіз пружної рівноваги анізотропного півпростору з тріщиною за поздовжнього зсуву з використанням методу прямого вирізування .	226
Григоренко Олександр, Лоза Ігор, Васильєва Лариса Вимушені осесиметричні коливання порожнистої пезокерамічної кулі з функціонально градієнтного матеріалу	228
Громик Андрій Математичне моделювання коливних процесів у напівобмежених кусково-однорідних клиновидних циліндрично-кругових середовищах .	230
Дегтярьов Кирило, Стрельнікова Олена, Гнітько Василь Вплив нанорозмірного включення на механічні властивості системи матриця-включення для репрезентативного об'єму наноматеріалу	232
Дробенко Богдан, Бурик Олександр, Харченко Володимир Термомеханічна поведінка структурно-неоднорідних тіл складної форми за інтенсивного термосилового навантаження	233
Калиняк Богдан Умови відсутності термонапружень у неоднорідних тілах простоті форми та деякі способи їх реалізації	235
Карнаухов Василь, Козлов Володимир, Карнаухова Тетяна Параметричні коливання тривимірних шаруватих тіл з п'єзоелектричного в'язкопружного матеріалу	237
Кожарін Василь, Тонконоженко Анатолій, Дегтярьов Кирило, Гнітько Василь Напружено-деформований стан перфорованих оболонкових систем під дією високошвидкісного імпульсного навантаження	239

Костробій Петро, Маркович Богдан Вплив поверхні на розподіл густини маси в твердих тілах	240
Куреннов Сергей, Щербакова Юнна Напряженное состояние полубесконечного клеевого соединения. Приближенная двумерная модель	241
Максимук Олександр, Гануліч Надія Циліндричні оболонки під впливом змінних у часі локальних теплових джерел	242
Мачуга Олег, Яхно Олег Енергетичний підхід до формулювання та розв'язування задач механіки неідеалізованих структур	244
Нагірний Тарас, Червінка Костянтин Моделювання взаємозв'язаних процесів у локально неоднорідних твердих розчинах	246
Пороховський Юрій Вплив залишкових напружень на втомне руйнування оболонкових конструкцій із кільцевими зварними з'єднаннями	247
Савельсва Катерина, Дашко Ольга, Симчук Ярослав Числове дослідження взаємодії поперечних плоских хвиль в нанокompозитних матеріалах	249
Хом'як Микола, Марко Ярослав Тестування схем МСЕ з використанням В-сплайнів для теорії пластин Кірхгофа-Лява та С.П. Тимошенка	251
Чернобай Володимир Напружений стан кусково-однорідного тіла з неідеальними еліптичними границями поділу в умовах антиплоского зсуву	253
Алфавітний покажчик	256

**АКАДЕМІК Я.С. ПІДСТРИГАЧ – ВИДАТНИЙ ВЧЕНИЙ,
ОРГАНІЗАТОР НАУКИ ТА ГРОМАДЯНИН**

Григорій Кіт, Роман Кушнір

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

hkit@iapmm.lviv.ua; dyrector@iapmm.lviv.ua

Академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор Я.С. Підстригач – видатний український вчений у галузі механіки та прикладної математики, чільний представник сучасної Львівської наукової школи механіків і матеріалознавців, формування якої відбувалося у повоєнний період [1]. Він – автор фундаментальних робіт з математичного моделювання деформування тіл з урахуванням їх реальної структури та взаємозв'язку деформації і процесів немеханічної природи. Коло наукових інтересів ученого охоплювало широкий спектр споріднених природничих наук. З його іменем, зокрема, пов'язані глибокі дослідження, з використанням сучасного математичного апарату, в галузі термомеханіки, термодинаміки нерівноважних процесів, механотермодифузії, гідроакустики, поверхневих явищ і механіки тіл з покриттями, взаємодії деформівних середовищ з електромагнітними полями та в інших напрямках сучасної механіки [2-16]. Ці дослідження успішно продовжує розвивати науковий колектив створеного ним 40 років тому Інституту прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) НАН України, директором якого він був до останніх днів свого життя (28 травня 1990 року).

Ярослав Степанович Підстригач народився 25 травня 1928 р. у с. Самострілі Корецького району Рівненської області у селянській родині. Його батько, Степан Захарович, у передвоєнний період був керівником місцевої «Просвітянської хати» Волинського українського об'єднання (ВУО), утвореної після заборони польською владою у 1930 р. «Просвіти». У 1940 р., вже через 5 місяців після вступу Червоної армії на Західну Україну, його було заарештовано органами НКВС і 3 червня 1941 р. разом з іншими дев'ятьма членами ВУО с. Самостріли засуджено на 8 років виправно-трудових таборів. Покарання відбував в таборі "Богословлаг" на Північному Уралі (Свердловська область), на будівництві Богословського алюмінієвого заводу та селища Тур'їнські рудники, де й помер 12 січня 1942 р., очевидно, від виснаження і хвороб [17]. 12-річного Ярослава разом із матір'ю та 3-річним братом Тарасом висилають до Червоноармійського району Кокчетавської області Казахстану, де сім'я перебувала до 1945 р., після чого їм було дозволено повернутися в

Україну, до рідного села. Вже маючи завершену середню освіту, він ще раз іде до випускного класу Межиріцької середньої школи, після закінчення якої зі срібною медаллю в 1946 р. вступає на фізико-математичний факультет Львівського державного університету (ЛДУ) ім. Івана Франка. Спочатку він хотів вступати на журналістику, але під час подачі документів йому порадили не робити цього, бо, враховуючи трагічну долю його родини, жодних шансів туди потрапити у нього не було.

Студентське життя Ярослава Підстригача було нелегким, напівголодним, проте це аж ніяк не впливало на його жадобу до знань. Маючи непересічні здібності до математичних наук, він почав відвідувати Львівський міський семінар з механіки під керівництвом академіка АН УРСР Г.М. Савіна, якого в 1945 р. перевели з Дніпропетровська для керівництва Львівським філіалом АН УРСР, а в 1948 р. призначили ректором ЛДУ імені Івана Франка. В автобіографії Я.С. Підстригач зазначає: «... велику роль у розширенні мого наукового світогляду відіграли лекції проф. Лопатинського Я.Б., проф. Шереметьєва М.П., проф. Кованька О.С., проф. Глаубермана А.Ю., доцента Соколова І.Г., проф. Зарицького М.О. та доц. Клімовської Л.К., які приклали багато зусиль для виховання кадрів молодих науковців. Перші кроки в серйозній науковій роботі були зроблені мною під керівництвом академіка АН УРСР Г.М. Савіна, чл.-кор. АН УРСР О.С. Парасюка та проф. М.Я. Леонова, співпраця з якими поряд з розширенням наукового світогляду обумовила мій науковий напрямок...». Починаючи з 4-го курсу Ярослав Підстригач працював обчислювачем у Львівській астрономічній обсерваторії, де й виконав свою першу наукову роботу з небесної механіки, опубліковану в «Доповідях та повідомленнях ЛДУ імені Івана Франка».

Після закінчення з відзнакою у 1951 р. фізико-математичного факультету Львівського державного університету ім. І. Франка поступив до аспірантури при Інституті машинознавства та автоматики АН України (зараз Фізико-механічний інститут (ФМІ) ім. Г.В. Карпенка), де під керівництвом академіка АН України Г.М. Савіна досліджував концентрацію напружень біля отворів. Після захисту у 1954 р. дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук Я.С. Підстригач подальшу свою роботу в основному пов'язував з розвитком теорії і методів термомеханіки тонкостінних елементів, термодинамічних основ побудови узагальнених математичних моделей деформування середовищ у розширеному фазовому просторі, основ нелокальної механіки. Зокрема, при проведенні досліджень з термопружності він побудував зображення загального розв'язку взаємозв'язаної динамічної задачі, її фундаментальні розв'язки для опису та оцінки впливу термопружного розсіювання на механічну поведінку деформівних тіл за швидкозмінних навантажень.

Я.С. Підстригач, з використанням операторного методу, розробив нову ефективну методіку зведення тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної та здійснив послідовне формулювання основних положень і співвідношень теплопровідності та термопружності тонких оболонок. Подальший розвиток операторного методу для зведення просторових задач до двовимірних, який не вимагає попередніх гіпотез кінематичного характеру, дозволив йому отримати рівняння теплопровідності однорідних, шаруватих і з покриттями пластин та оболонок, а також опромінюваних і рулонованих оболонок. Основні ідеї та конструктивні підходи цього методу були використані при математичному моделюванні теплообміну в системі тіл при неідеальному тепловому контакті та через тонкі проміжкові і приповерхневі шари, що стало основою для проведення ґрунтовних досліджень з механіки поверхневих явищ і покритть.

В 50-60-х роках минулого століття розвиток промисловості потребував розрахунків елементів конструкцій, які експлуатуються при одночасній дії агресивних середовищ, підвищених температур і силових навантажень. Для розв'язання цієї проблеми Я.С. Підстригач, з використанням останніх досягнень механіки суцільного середовища, фізики твердого тіла, термодинаміки нерівноважних процесів, побудував математичну модель для дослідження у взаємозв'язку процесів деформації, теплопровідності та дифузії у термодинамічних системах, стан яких визначається тензорами напружень і деформації, температурою та ентропією, хімічним потенціалом і концентрацією дифундуючої речовини, а пізніше удосконалив цю модель шляхом введення замість скалярних параметрів стану (хімічного потенціалу та концентрації) відповідних тензорних величин. Принципово суттєвим кроком у розвитку математичного моделювання і дослідження взаємозв'язаних процесів стало введення ним, крім термодинамічних функцій стану, кінетичних потенціалів як характеристичних функцій термодинамічних сил, які, як і відповідні їм термодинамічні потоки, могли мати тензорний характер. Такий підхід дозволив отримати нелокальні реологічні співвідношення і у прикладному аспекті – досліджувати релаксаційні явища, дифузійну стабільність хімічного складу твердих розчинів та сумішей, прогнозувати довговічність і робочий ресурс конструкцій в екстремальних умовах експлуатації з урахуванням локальних неоднорідностей типу включень, дислокацій, приповерхневих явищ й інших факторів, які інтенсифікують процеси та їх взаємозв'язок. Ці результати увійшли до його докторської дисертації «Деякі питання дифузійної теорії процесу деформації твердих тіл», яку він успішно захистив у Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка у 1967 р. Через новаторські підходи, використані в його дисертаційній роботі, її затвердження тривало майже півтора року.

Розроблений термодинамічний підхід до побудови моделей механіки на-

був особливого розвитку при дослідженні взаємодії матеріальних середовищ з електромагнітними полями, при побудові теорії деформації електропровідних тіл, поширеної на електропровідні суміші та тверді розчини, і при дослідженні механотермоелектродифузійних явищ в приконтактних шарах.

Багато уваги вчений приділяв питанням побудови розрахункових моделей термопружності тіл кусково-однорідної та неоднорідної структури з використанням апарату узагальнених функцій, розробці методів розв'язування вихідних рівнянь термопружності, єдиних для всієї кусково-однорідної області, питанням урахування у термомеханіці скінченної швидкості поширення тепла, дослідженням термомеханічних процесів у тілах із залежними від температури характеристиками.

Я.С. Підстригачем разом з учнями розроблялися теоретичні і прикладні проблеми оптимізації, створювалися наукові засади визначення режимів зміцнювальної локальної термообробки елементів конструкцій та теорії оптимального за швидкодією керування температурними режимами при нагріві з урахуванням обмежень на керування, параметри нагріву і термонапруження.

Під керівництвом Я.С. Підстригача запропоновано новий спосіб зведення задач пружної граничної рівноваги непологих і пологих оболонок з розрізами (тріщинами) до систем інтегральних рівнянь та запропоновано метод їх розв'язування, досліджено напружено-деформований і граничний стани циліндричних і сферичних оболонок із системами тріщин. За його участю розроблено ефективний неруйнівний теоретико-експериментальний метод визначення залишкових напружень, який ґрунтується на розв'язуванні відповідних обернених задач. На цій основі розроблено відповідну методику прискорених досліджень довговічності різнотипових склоконструкцій складної форми.

Наукова спадщина вченого у галузі математичного моделювання фізико-механічних процесів та математичних проблем механіки – це невичерпне джерело сміливих ідей, основоположних досліджень, які опубліковані у понад 300 роботах, зокрема у 14 монографіях [3-16].

Нові узагальнені математичні моделі взаємозв'язаних процесів різної природи показали, що для успішного проведення на їх основі якісних і кількісних досліджень механічної поведінки неоднорідних середовищ необхідно застосувати сучасні математичні методи і засоби математичного моделювання. Цій актуальній проблемі він надавав важливого значення протягом всієї своєї наукової діяльності. Для її вирішення необхідно було сформувати потужний, вихований на цих ідеях, науковий колектив. Я.С. Підстригач відразу ж після створення у 1962 р. відділу термоміцності постійно і наполегливо працював над підготовкою спеціалістів високої кваліфікації для формування такого колективу – математиків, механіків і фізиків. Успішна робота у цьому

напрямку дала можливість йому організувати сектор механіки і математики у ФМІ АН України, а в 1973 р. на його базі – Львівський філіал математичної фізики Інституту математики АН України. Його активна науково-організаційна діяльність була зауважена академічною науковою громадськістю і професора Я.С. Підстригача було обрано спочатку членом-кореспондентом (кінець грудня 1969 р.), а потім й академіком АН УРСР (17 березня 1972 р.).

Після досягнення створеного ним колективу належного наукового рівня, визнання його результатів досліджень провідними науковими центрами академік Я.С. Підстригач у 1978 році домігся реорганізації цього філіалу в ІППММ АН України. Зробити це було досить непросто, оскільки у Львові дослідження в галузі механіки вже успішно розвивалися у ФМІ АН України, але Президія Академії і особисто академік Б.Є. Патон підтримали ідею створення окремого інституту. Сприяли цьому і організація в 1975 р. Обчислювального центру при Філіалі для проведення прикладних досліджень та впровадження їх результатів насамперед на приладобудівних підприємствах Львова та західного регіону України, заснування того самого року міжвідомчого збірника наукових праць «Математичні методи і фізико-механічні поля» (з 1988 р. почав перекладатися англійською видавництвом Plenum, а з 1996 р. став щоквартальним науковим журналом, який з 2008 р. перекладається видавництвом Springer як складова частина Journal of Mathematical Sciences), а також відкриття у 1976 р. спеціалізованої вченої ради з присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних і технічних наук за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла» (з 1995 р. – і доктора наук за цією спеціальністю, а також за спеціальністю «математичне моделювання та обчислювальні методи»).

Під керівництвом академіка Я.С. Підстригача ІППММ АН України одразу посів гідне місце серед академічних установ України, розвинув свою матеріально-технічну базу, став координаційним центром розвитку досліджень у галузі математики, математичних проблем механіки і математичного моделювання у західному регіоні України, організатором двох всесоюзних (з 1992 р. мають статус міжнародних) наукових конференцій з математичних проблем механіки неоднорідних структур (з 1983 р. проводяться раз на 4-5 років, 9-та відбулася у 2014 р.) та з сучасних проблем математики (з 1987 р. проводяться раз на 3-4 роки, 10-та відбулася у 2015 р.). Цю відповідальну місію Інститут продовжує виконувати й дотепер.

Важливу роль у формуванні та в утвердженні наукової школи Я.С. Підстригача у галузі термомеханіки відіграла плідна співпраця з науковцями Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, зокрема академіком АН України А.Д. Коваленком та представниками його наукової школи – академіками НАН України Я.М. Григоренком і В.Т. Грінченком, членом-кореспондентом НАН України А.Ф. Улітком, а також членом-кореспондентом АН

СРСР Е.І. Григолюком із Московського авіаційного інституту та його науковою школою. Були налагоджені тісні контакти з академіком ПАН Вітольдом Новацьким та представниками його наукової школи, чому в значній мірі сприяло проведення радянсько-польських (а по суті українсько-польських) конференцій з неklasичних проблем теорії пружності. Ці конференції були започатковані академіками Г.М. Савіним і В. Новацьким у 1970 р., перша з яких відбулася у Варшаві. Згодом вони проходили по чергово у Києві (1971, 1975 рр.), Варшаві (1973 р.), Новіцах (біля Кракова, 1978 р.) [1].

Варто також відзначити і довголітню наукову та науково-організаційну співпрацю Я.С. Підстригача з академіками НАН України В.В. Панасюком та І.Р. Юхновським, професором Д.В. Грилицьким (довголітнім завідувачем кафедри механіки ЛДУ ім. Івана Франка), яка розпочалася ще під час їхнього спільного навчання на фізико-математичному факультеті цього університету. Кожен із цих видатних українських вчених створив свої наукові школи, представники яких і надалі активно співпрацюють.

Академік Я.С. Підстригач був талановитим стратегом і організатором вітчизняної науки. Впродовж багатьох років він був членом Президії АН України, головою Західного наукового центру АН України, членом Національного комітету з теоретичної і прикладної механіки СРСР і Наукової ради союзної академії з проблем міцності і пластичності, а також обіймав багато інших державних і громадських посад. Науково-організаційна діяльність академіка Я.С. Підстригача належно оцінені державою і науковою громадськістю. Він нагороджений орденами та медалями держави, відзначений Державною премією України у галузі науки і техніки (1975 р.) та премією ім. М.М. Крилова АН України (1978 р.), йому присвоєно почесне звання Заслуженого діяча науки України (1979 р.). Під його керівництвом започатковані нові форми взаємозв'язку науки з виробництвом, у рамках яких були розроблені ефективні підходи до розв'язування актуальних, важливих для народного господарства проблем [18] та реалізовані через міжвідомчі науково-виробничі комплекси в інтересах провідних галузей економіки західного регіону України.

Академік Я.С. Підстригач розумів, що для вирішення актуальних проблем народного господарства потрібні висококваліфіковані кадри. Багато зусиль та енергії віддав він створенню у регіоні ефективної системи підготовки спеціалістів, наукових та науково-педагогічних працівників вищої школи, науково-дослідних установ і підприємств та удосконаленню всіх її ланок. Вона включає в себе участь науковців у відшуванні талановитих школярів і роботу з ними у Малій академії наук та залучення їх до навчання у спеціалізованих ліцеях або у спецкласах гімназій чи шкіл регіону; виявлення здібних до наукової праці студентів в університетах, читання їм спецкурсів, керівництво з боку провідних науковців академічних установ їх курсовими і магістерськи-

ми роботами, перш за все, на спільних з установами кафедрах, науково-навчальних комплексах; активна співпраця з вузівськими партнерами щодо підбору кандидатур для стажування та навчання в аспірантурі і докторантурі установ, всебічне сприяння їм у проведенні наукових досліджень, апробації отриманих результатів у провідних вітчизняних і зарубіжних наукових центрах. Плідну наукову та науково-організаційну роботу Я.С. Підстригач успішно поєднував з педагогічною діяльністю. Понад чверть століття викладав у Львівському університеті ім. І. Франка, завідував створеною в університеті за його ініціативою на базі ІППММ АН України кафедрою математичного моделювання. Серед учнів Ярослава Степановича Підстригача – понад 50 докторів і кандидатів наук.

Ярослав Степанович Підстригач був великим патріотом України, вболівав за розвиток освіти і науки, намагався зробити все від нього залежне, щоб результати українських учених були широко відомі у світі. Він брав безпосередню участь у відновленні діяльності в Україні Наукового товариства імені Шевченка (НТШ) – першої української наукової академічної інституції, організованої у Львові ще в 1873 р. Розквіт НТШ припав на 1897-1913 рр., коли його очолював історик Михайло Грушевський, керівником філологічної секції був Іван Франко, а науковим секретарем – етнограф і фольклорист Володимир Гнатюк. Після створення у 1918 р. Української академії наук НТШ разом з нею охоплювали всю українську академічну науку. Проте на початку 1940 р. НТШ було ліквідовано, частину його майна передано новоствореним академічним установам, багато членів Товариства змушені були покинути Україну, деякі з них трагічно загинули. У післявоєнні роки Товариство відновило свою діяльність за кордоном, почали функціонувати крайові осередки НТШ у Західній Європі, Австралії, Канаді та США. Лише у 1989 р., завдяки авторитету академіків Я.С. Підстригача, Р.В. Кучера, В.В. Панасюка, І.Р. Юхновського, членів-кореспондентів Я.Й. Бурака, М.А. Голубця, Г.Г. Максимовича, О.М. Романіва, відомих науковців-гуманітаріїв Я.Р. Дашкевича, Я.Д. Ісаєвича, О.А. Купчинського та інших, вдалося відновити діяльність Товариства в Україні і налагодити плідну співпрацю вчених академічних установ і вишів України зі своїми колегами в єдиному світовому НТШівському просторі.

Академік АН України Я.С. Підстригач своєю науковою, науково-організаційною та громадською діяльністю постійно дбав про розвиток наукового та інтелектуального потенціалу держави, створення і підтримання високого авторитету вітчизняної науки.

1. *Панасюк В.В.* Львівська наукова школа з проблем механіки матеріалів і матеріалознавства. – Львів: СПОЛОМ, 2015. – 522 с.
2. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.

3. *Подстригач Я.С., Ярема С.Я.* Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
4. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
5. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
6. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лозбень В.Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. – Киев: Наук. думка, 1977. – 158 с.
7. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 247 с.
8. *Подстригач Я.С., Швеиц Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
9. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
10. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Шелепец В.И. др.* Оптимизация и управление в электровакуумном производстве. – Киев: Наук. думка, 1980. – 215 с.
11. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 342 с.
12. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 293 с.
13. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
14. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
15. *Подстригач Я.С., Поддубняк А.П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.
16. *Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – Киев: Наук. думка, 1991. – 290 с.
17. *Жив'юк А.* Самострілівська десятка // Реабілітовані історією. Рівненська область. – Рівне, 2006. – Кн. 1. – С. 351-358.
18. *Подстригач Я.С., Чуmachenко Н.Г., Барьяхтар В.Г. и др.* Проблемы регионального управления научно-техническим прогрессом: Теория, методика, практика. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

ACADEMICIAN YA.S. PIDSTRYHACH – A PROMINENT SCIENTIST, SCIENCE ORGANIZER AND CITIZEN

A brief biography of academician Ya. S. Pidstryhach and survey of his scientific, scientific-pedagogical and scientific-organizational activities are presented.

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
РАВНОМЕРНО СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МЕЖФАЗНЫМИ
ДИСКООБРАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

Ваграм Акопян

Институт механики НАН Республики Армения

vhakobyan@sci.am

Методом интегрального преобразования Ханкеля построены разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства, полученного при помощи поочередного соединения двух разнородных слоев одинаковой толщины, которое на плоскостях соединения слоев содержит периодическую систему круговых дискообразных параллельных дефектов. На основе полученных решений, в качестве примеров, записаны ключевые системы интегральных уравнений с ядрами типа Вебера-Сонина в двух случаях: когда дефекты из себя представляют абсолютно жесткие дискообразные включения и когда дефектами являются круговые дискообразные трещины. При помощи операторов вращения определяющие системы уравнений в обоих случаях сведены к сингулярному интегральному уравнению второго рода относительно комплексной комбинации образов Абеля функции разрывов напряжений, в первом случае, и относительно комплексной комбинации образов Абеля функции разрывов смещений, во втором случае. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений на окружностях, окаймляющих трещины, а также для раскрытия трещин и жесткого смещения включений.

В обоих случаях проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения указанных величин в зависимости от геометрических и физико-механических параметров задач. В частности в первой задаче показано, что растягивающие напряжения на бесконечности уменьшают, а сжимающие напряжения увеличивают жесткие смещения включений. Во второй же задаче показано, что чем меньше расстояние между трещинами, тем меньше их раскрытие.

МОДЕЛІ ЗАПОВІЛЬНЕНОГО РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ДІЇ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ЧИННИКІВ І ЛОКАЛЬНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

Олександр Андрейків, Валентин Скальський, Ірина Долінська

Львівський національний університет ім. Івана Франка (Україна);

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

andreykiv@ipm.lviv.ua; skal@ipm.lviv.ua; ira_dolinska@ukr.net

Заповільнене руйнування матеріалів – це руйнування, за якого тріщини в матеріалі поширюються малими стрибками Δl за досить великі проміжки часу Δt . У роботі розроблено загальний енергетичний підхід для дослідження такого руйнування, зокрема кінетики поширення тріщин за довготривалого навантаження і дії фізико-хімічних чинників. Суть його така.

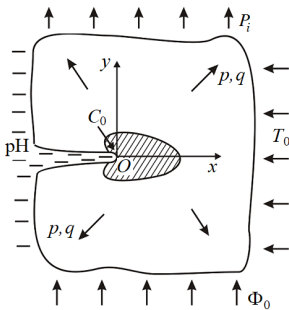


Рис. 1. Схема навантаження пластины з тріщиною

Формулювання підходу. Розглянемо металеву пластину з тріщиною довжини l , яка може бути піддана дії різних зовнішніх чинників: постійного рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності p ; зосереджених силових факторів прикладання-знімання зусиль p або динамічного прикладання зосереджених у часі зусиль P_i , які фіксують або через проміжки t_i часу, або через задані відрізки просування тріщини l_i ($i = 1, \dots, n$); циклічного навантаження амплітуди q ; постійного підвищеного температурного поля T_0 ; на-

водненню з газової фази; корозійного кислого середовища; опромінення потоком нейтронів інтенсивністю Φ_0 (рис. 1). Задача полягає у визначенні часу $t = t_*$, за який тріщина в результаті дії згаданих чинників підросте до критичного розміру $l = l_*$ і пластина зруйнується. Вважаємо, що у даному випадку проходить заповільнене руйнування пластины.

Для розв'язання задачі застосовано перший закон термодинаміки, тобто баланс роботи, викликаной згаданими зовнішніми чинниками і енергетичними складовими процесу для одного стрибка тріщини, а також баланс швид-

костей зміни енергетичних складових. В результаті цього для визначення кінетики поширення тріщини отримано рівняння

$$V = \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}[\Gamma - (A - W)] / \frac{\partial}{\partial l}[\Gamma - (A - W)]. \quad (1)$$

Тут $A = A(p, P_i)$ – робота зовнішніх сил; $W = W(p, P_i, t_i, l_i, q, T_0, C_0, \Phi_0)$ – енергія деформування пластини з тріщиною ($j = 1, 2$); $\Gamma = \Gamma(T_0, C_0, S_C, \Phi_0)$ – енергія руйнування матеріалу пластини; S_C – площа руйнування за один стрибок тріщини; C_0 – концентрація водню у вершині тріщини.

У випадку циклічного навантаження, швидкість росту тріщини подаємо в одиницях циклу N урахувавши, що $t = NT$ (T – витримка періоду циклу).

Якщо тріщина поширюється не в симетричному напруженому полі тоді її траєкторія визначається згідно напрямку можливого максимуму швидкості

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\Gamma - (A - W)] / \frac{\partial}{\partial l}[\Gamma - (A - W)] \right\} = 0, \quad (2)$$

де θ – кут між напрямком поширення тріщини і дотичної до її контуру у вершині.

Оскільки ми розглядаємо незворотні і нерівноважні процеси, то для визначення напрямку поширення тріщини можна також застосувати другий закон термодинаміки стосовно зростання ентропії за незворотніх процесів. Для отримання замкнутої математичної моделі визначення періоду $t = t_*$ докритичного росту тріщини (залишкового ресурсу) до рівнянь (1), (2) необхідно додати початкову і кінцеву умови процесу:

$$t = 0, l(0) = l_0; \quad t = t_*, l(t_*) = l_*. \quad (3)$$

Для конкретних тонкостінних елементів конструкцій і умов їх навантаження зроблено наближене подання енергетичних функцій W, Γ у вигляді суми їх складових. На основі енергетичного підходу (1)-(3) створено низку математичних моделей оцінювання залишкового ресурсу елементів конструкцій, які працюють за згаданих вище експлуатаційних умов. При цьому у всіх цих випадках приймається єдина реологічна модель: сам матеріал конструкції є ідеально пружним, а в зоні передруйнування біля вершини тріщини матеріал вважається в'язко-пластичним, у результаті чого і проходить повзучість і підростання тріщини.

MODELS OF SLOW FRACTURE OF STRUCTURAL ELEMENTS UNDER THE EFFECTS OF PHYSICO-CHEMICAL FACTORS AND LOCAL CREEP

A general energy approach for the research of slow fracture has been developed. At the base of the approach – the balance of energy components and the balance of the rate of change of energy components.

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Дмитро Боднар, Роман Дмитришин

Тернопільський національний економічний університет (Україна);

ДВНЗ «Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника» (Україна)

bodnar4755@ukr.net; dmytryshynr@hotmail.com

Гіллясті ланцюгові дроби є багатовимірними узагальненнями неперервних дробів. Можливо, найважливішим підкласом таких дробів є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Ці дроби є ефективним інструментом для наближення функцій багатьох змінних, які представлені формальними кратними степеневими рядами. Однією із найважливіших задач дослідження гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є встановлення критеріїв їх збіжності.

Нехай N – фіксоване натуральне число,

$$I_k = \{i(k) : i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k), 1 \leq i_p \leq i_{p+1}, 1 \leq p \leq k, i_0 = N, \}, k \geq 1,$$

– множини мультиіндексів.

Гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1 + b_{i(1)} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1, i_2}} a_{i(2)} z_{i_2}}{1 + b_{i(2)} z_{i_2}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2, i_3}} a_{i(3)} z_{i_3}}{1 + b_{i(3)} z_{i_3}} + \dots, \quad (1)$$

де $a_{i(k)}$ і $b_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, – комплексні сталі такі, що всі $a_{i(k)} \neq 0$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, називається приєднаним багатовимірним дробом з нерівнозначними змінними.

Правильними є такі терми.

Теорема 1. *Приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними (1), де*

$$\operatorname{Re}(b_{i(k)}) \geq 0, i(k) \in I_k, k \geq 1, \quad (2)$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{|a_{i(k+1)}| - \operatorname{Re}((-1)^{\delta_{i_k, i_{k+1}}} a_{i(k+1)})}{l_{i_{k+1}}(1 - g_{i(k+1)})} \leq \frac{l_{i_k} g_{i(k)}}{2}, i(k) \in I_k, k \geq 1, \quad (3)$$

$l_k > 0, 1 \leq k \leq N, 0 < g_{i(k)} < 1, i(k) \in I_k, k \geq 1$, збігається до функції, голоморфної в області

$$D_{l_1, l_2, \dots, l_N} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| < \frac{2}{l_k} \cos(\arg z_k), |\arg z_k| < \frac{\pi}{2}, 1 \leq k \leq N \right\},$$

якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M, i(k) \in I_k, k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області D_{l_1, l_2, \dots, l_N} .

Теорема 2. Приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними (1), де $b_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 1$, задовольняють умови (2),

$$|a_{i(k)}| - \operatorname{Re}((-1)^{\delta_{ik-1, ik}} a_{i(k)}) \leq \frac{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})}{2}, i(k) \in I_k, k \geq 2, \quad (4)$$

$l_k > 0, 1 \leq k \leq N, 0 < g_{i(k)} < 1, i(k) \in I_k, k \geq 1$, збігається до функції, голоморфної в області

$$Q_{l_1, l_2, \dots, l_N} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^N \frac{l_k |z_k|}{2 \cos(\arg z_k)} < 1, |\arg z_k| < \frac{\pi}{2}, 1 \leq k \leq N \right\},$$

якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M, i(k) \in I_k, k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області Q_{l_1, l_2, \dots, l_N} .

Теорема 3. Приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними (1), де $b_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 1$, задовольняють умови (2), $(-1)^{\delta_{ik-1, ik}} a_{i(k)} > 0, i(k) \in I_k, k \geq 2$, збігається до функції голоморфної в області

$$D = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg z_k| < \frac{\pi}{2}, 1 \leq k \leq N \right\}, \quad (5)$$

якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M, i(k) \in I_k, k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області D .

Із теорем 1-3 отримуємо відповідно такі наслідки.

Наслідок 1. Багатовимірний J -дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1, i_2}} a_{i(2)}}{b_{i(2)} + z_{i_2}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2, i_3}} a_{i(3)}}{b_{i(3)} + z_{i_3}} + \dots, \quad (6)$$

де $b_{i(k)}$ і $a_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, задовольняють умови (2) і (3) відповідно, збігається до функції голоморфної в області

$$P_{I_1, I_2, \dots, I_N} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re}(z_k) > \frac{l_k}{2}, 1 \leq k \leq N \right\},$$

якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області P_{I_1, I_2, \dots, I_N} .

Наслідок 2. Багатовимірний J -дріб з нерівнозначними змінними (6), де $b_{i(k)}$ і $a_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, задовольняють умови (2) і (4) відповідно, збігається до функції, голоморфної в області

$$O_{I_1, I_2, \dots, I_N} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^N \frac{l_k}{\operatorname{Re}(z_k)} < 2, |\arg z_k| < \frac{\pi}{2}, 1 \leq k \leq N \right\},$$

якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області O_{I_1, I_2, \dots, I_N} .

Наслідок 3. Багатовимірний J -дріб з нерівнозначними змінними (6), де $\operatorname{Re}(b_{i(k)}) \geq 0$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, $(-1)^{\delta_{i_{k-1}, i_k}} a_{i(k)} > 0$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 2$, збігається до функції голоморфної в області (5), якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_{i(k)}| \leq M$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області D .

ON THE CONVERGENCE OF SOME CLASSES OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH INDEPENDENT VARIABLES

We investigate the convergence of branched continued fractions with independent variables, which are a multidimensional generalizations of functional continued fractions. These fractions are an efficient tool for the approximation of multivariable functions, which are represented by multiple power series. We have established some new convergence criteria for the associated multidimensional fractions with independent variables and for the multidimensional J -fractions with independent variables that are closely related to each other.

**ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИЙ ВАРІАНТ МЕТОДУ ЛОКАЛЬНИХ
ВАРІАЦІЙ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ
ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ЛОКАЛІЗОВАНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ**

Етері Гарт, Вадим Гудрамович

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара (Україна);

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України

hart@ua.fm; hudramovich@i.ua

Ефективним числовим методом розв'язання варіаційних задач є метод локальних варіацій (МЛВ), досліджений у працях Ф.Л. Черноусько [5]. Він є варіантом методів варіацій у фазовому просторі, що розвинуто у працях М.М. Моїсеєва. МЛВ є привабливим для суттєво неоднорідних напружених станів і дозволяє розглянути різні види локалізованих навантажень. Однак для розв'язання варіаційних задач, що зводяться до лінійних крайових задач, МЛВ потребує більше часу розрахунку, ніж скінченно-різницеві методи і варіаційні методи типу Рітта. Більш ефективні схеми його реалізації ґрунтуються на ідеології проекційно-ітераційних методів. Такі схеми при використанні варіаційно-сіткового методу скінченних елементів для широкого кола задач механіки неоднорідних структур і механіки руйнування розглянуто в багатьох роботах (див., наприклад, [4, 6, 7]).

Розроблено новий проекційно-ітераційний варіант МЛВ, алгоритм розрахунку на його основі, доведено його збіжність при використанні апарату функціонального аналізу [1]. З огляду на те, що процес обчислювань здійснюється на послідовності вкладених сіток, що згущуються не до повної збіжності ітерацій як за розв'язком, так і за функціоналом, а будується лише декілька ітерацій (їх кількість задається апріорно, або виходячи з певного критерію), варіант, що пропонується, дає змогу суттєво зменшити витрати комп'ютерного часу розрахунків.

Розроблений варіант МЛВ з успіхом може бути застосований для задач стійкості оболонкових конструкцій при локалізованих навантаженнях. Такі задачі мають значення для пріоритетних галузей сучасної техніки (ракетно-космічна, антенно-хвилеводна, енергетика) [3].

Розглянуто стійкість сферичної оболонки, як частини оболонкової конструкції, при локалізованому навантаженні. Для мінімізації квадратичного функціоналу потенціальної енергії здійснюється скінченно-різницева дискретизація за криволінійними координатами оболонки при знаходженні критичних зусиль і форм хвилеутворення (їх межа знаходиться з умови зміни знаку прогину). Застосування проекційно-ітераційного варіанту МЛВ дозволило

зменшити витрати комп'ютерного часу для розрахунків у 4-5 разів у порівнянні зі звичайним використанням МЛІВ. Відмітимо, що розробка однієї з проекційно-ітераційних модифікацій МЛІВ здійснена у [2].

Розрахункові значення критичних зусиль і форми хвилеутворення підтверджено результатами експериментів (понад 40 випробувань).

Особливості навантаження і властивостей використовуваних матеріалів призводять також до фізично нелінійних задач. Методи їх розв'язання пов'язані з побудовою процесів послідовних наближень для сукупності задач теорії пружності.

При дослідженні пружно-пластичної стійкості логічним є підхід, коли будується залежність навантаження від прогину із знаходженням граничних точок. Критичні навантаження, що відповідають їм, є близькими до біфуркаційних (вище за них).

1. *Гарт Э.Л., Гудрамович В.С.* Проекционно-итерационная модификация метода локальных вариаций для задач с квадратичным функционалом // Прикладная математика и механика. – 2016. – **80**, вып. 2. – С. 218-229.
Те ж саме: *Hart E.L., Hudramovich V.S.* Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. – 2016. – **80**, is. 2. – P. 156-163.
2. *Гарт Е., Гудрамович В.* Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок // Сучасні проблеми механіки та математики: матер. міжн. наук. конф. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2008. – Т. 3. – С. 18-20.
3. *Гудрамович В.С.* Механика контактных взаимодействий оболочечных систем при локальном нагружении // Прикл. мех. – 2009. – **45**, № 7. – С. 24-51.
Те ж саме: *Hudramovich V.S.* Contact mechanics of shell structures under local loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7. – P. 708-729.
4. *Гудрамович В.С., Гарт Э.Л.* Конечно-элементный анализ процесса рассеянного разрушения плоско-деформированных упругопластических сред с локальными концентраторами напряжений // Упругость и неупругость: матер. межд. науч. симп., посв. 105-летию со дня рожд. А.А. Ильюшина. – М.: Изд. МГУ, 2016. – С. 158-161.
5. *Черноузько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 238 с.
6. *Hart E.L., Hudramovich V.S.* Applications of the projective-iterative versions of FEM in damage problems for engineering structures // Proc. 2nd Int. Conf. «Maintenance-2012». – Zenica, Bosnia-Herzegovina: Univ. of Zenica, 2012. – P. 157-164.
7. *Hudramovich V.S., Hart E.L., Rjabokon' S.A.* Plastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Math. Eng. – 2013. – **78**, № 1. – P. 181-197.

PROJECTIVE-ITERATIVE VERSION OF THE METHOD OF LOCAL VARIATIONS AND ITS USE TO THE STABILITY PROBLEMS OF LOCALLY LOADED SHELL STRUCTURES

The projective-iterative version of the method of local variations which lead to the decrease computer time of calculation is developed. The efficiency of the proposed version is demonstrated on the example of the stability problem for spherical shell under local edge loading. Calculated values of the critical loads and the configuration of the types of wave formation are confirmed by the results of experiments.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ТИПОВИХ КОНТАКТНО-ВТОМНИХ ПОШКОДЖЕНЬ В ЗАЛІЗНИЧНИХ РЕЙКАХ**Олександра Дацишин***Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*datsyshy@ipm.lviv.ua

Під час руху поїзда на біговій доріжці рейки часто виникають тріщини, які, розвиваючись, формують різноманітні контактні дефекти. Типовими серед них є пітинг, відшарування, "нора", "риски". Їх поява знижує працездатність рейки, зокрема її контактну міцність, довговічність та зносостійкість. Деякі з дефектів ("нора", "риски") можуть еволюціонувати в магістральну руйнівну тріщину. Таким чином, проблема забезпечення та підвищення контактної довговічності та зносостійкості рейок є актуальною. Дана робота присвячена теоретичним аспектам проблеми.

В рамках раніше запропонованої загальної моделі оцінювання контактної довговічності і руйнування елементів конструкцій (трибоспрями) за циклічного навантаження [1, 2] сформульовано розрахункові схеми для моделювання формування основних контактних дефектів (пітинг, відшарування, "нора", "риски") на бігових доріжках рейок. Побудовано траєкторії поширення приповерхневих тріщин, які формують ці пошкодження. Траєкторії, коефіцієнти інтенсивності напружень (K_I , K_{II} , K_{I0}) та їх розмахи (ΔK_{II} і ΔK_{I0}), що контролюють ріст тріщини відповідно за механізмом поперечного зсуву та нормального розриву в циклі контакту, визначаються з розв'язків сингулярних інтегральних рівнянь двовимірних контактних задач для пружної півплощини, послабленої криволінійними тріщинами, береги яких контактують під дією рухомого модельного навантаження на краю півплощини. При цьому передбачаються загальні умови контактування берегів (проковзування з тертям, зчеплення, розкриття) та їх кінетика. Оцінено контактну довговічність рейок і рейкових сталей за критеріями утворення контактних дефектів (за кількістю циклів кочення до утворення пошкодження) з урахуванням експлуатаційних умов в системі колесо-рейка (тертя між колесом і рейкою та між берегами тріщин, наявність води або мастила, величина контактних тисків тощо) та характеристик циклічної тріщиностійкості рейкових сталей за умов нормального розриву та поперечного зсуву.

На основі отриманих числових даних побудовано криві контактної втоми для рейкових сталей (RSB12 та 75ХГСТ) за критеріями утворення пітингу

та відшарування (залежності кількості циклів кочення N_f від максимального значення тиску p_0 на ділянці контакту).

Теоретично показано, що основною причиною утворення пітингу в рейках є наявність води, мастила чи іншого експлуатаційного середовища, яке проникає в крайові тріщини і розклинює їх.

Встановлено, що підповерхневі горизонтальні тріщини можуть розвиватися як до поверхні рейки, формуючи дефект типу відшарування або вищербини, так і вглиб матеріалу з переходом на спонтанний розвиток за деяких конфігурацій значень експлуатаційних параметрів та характеристик тріщиностійкості. Виявили, що тріщини, розташовані на глибині 0,15–0,30 від довжини ділянки контакту, схильні тривало рости під поверхнею рейки.

Основні ліва і права гілки "нори" на першому етапі розвиваються майже прямолінійно за механізмом поперечного зсуву; ліва гілка росте в напрямку дотичних зусиль під колесами локомотива, а права – в протилежному напрямку під дією коліс вагонів, коли поїзд рухається в режимі тяги. Нові відгалуження "нори" розвиваються в основному за механізмом нормального розриву вглиб матеріалу (рейки). При цьому нерідко формуються небезпечні магістральні тріщини.

Паралельні тріщини в дефекті "риски" на перших порах розвиваються за механізмом поперечного зсуву під характерним кутом до поверхні рейки $\approx 20^\circ$ – 30° в напрямку руху поїзда. Віддаль між тріщинами суттєво залежить від довжини $2a$ ділянки контакту між колесом і рейкою і змінюється в діапазоні $a \dots 2a$. Коли ці тріщини входять в зону розтягу, то починають рости за механізмом нормального розриву і, як у випадку "нори", на кінцевому етапі еволюції "рисок" може розвинутиись руйнівна магістральна тріщина.

Отримані теоретичні результати добре корелюють з відомими інженерними даними.

1. *Дацишин О.П.* Довговічність і руйнування твердих тіл при їх циклічній контактній взаємодії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 6. – С. 5-25.
2. *Datsyshyn O.P., Panasyuk V.V., Glazov A.Yu.* The model of the residual life time estimation of trybojoint elements by formation criteria of the typical contact fatigue damages // Int. J. Fatigue. – 2016. – **83**, Part 2. – P. 300-312.

MODELLING OF TYPICAL CONTACT FATIGUE DAMAGES EVOLUTION IN RAILWAY RAILS

Calculational model schemes for construction of nearsurface crack paths propagation in zone of rail running surface and formation by them typical contact fatigue damages under operation process have been proposed. Peculiarities and causes of formation of such damages as pitting, spalling, squat, checks have been investigated; also curves of residual contact lifetime of rail (some rail steels) by criteria of such damages arising have been constructed.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНИЙ РЕСУРС ЕЛЕМЕНТІВ ЕНЕРГООБЛАДНАННЯ

Богдан Дробенко, Степан Будз, Володимир Асташкін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

drobenko@ukr.net; budz@iapmm.lviv.ua

Проблема продовження термінів експлуатації елементів і вузлів енергетичного обладнання є однією з найважливіших у сучасній вітчизняній енергетиці, оскільки значна частина елементів такого обладнання вже вичерпала свій паспортний ресурс чи наблизилась до цієї межі. У зв'язку з цим повстає проблема забезпечення надійності роботи енергообладнання, що відпрацювало гарантований на момент інсталяції термін, та збільшення його експлуатаційного ресурсу, під яким розуміють напрацювання об'єкта від початку експлуатації чи його відновлення після ремонту до досягнення ним граничного стану, регламентованого нормативно-технічною документацією.

Основним чинником вичерпання ресурсу елементів та вузлів енергообладнання є накопичення пошкоджень і розвиток тріщин в зонах конструктивних концентраторів напружень внаслідок циклічних навантажень, підвищеної температури, впливу корозійно активного робочого середовища, зміни міцнісних характеристик металу в процесі тривалої експлуатації. Оцінювання ресурсу таких елементів виконують шляхом визначення їх стану за рівнем накопичення пошкоджень металу, розрахунок якого є базою для визначення залишкового експлуатаційного ресурсу енергообладнання, можливостей та умов його подальшого використання. Кількісна оцінка накопиченої пошкоженості металу безпосередньо залежить від амплітуди коливань напружень під час циклічних режимів промислової експлуатації енергообладнання. Тому важливо якнайточніше визначити напружений стан і зони виникнення максимальних напружень в елементах енергообладнання під час експлуатації.

На сьогоднішній день потужним чинником вирішення зазначених проблем є сучасні засоби комп'ютерного моделювання процесів деформування твердих деформівних тіл за дії комплексного навантаження, розроблені на основі уточнених математичних моделей і числових методів їх розв'язування. Уточнення розрахункових моделей має два аспекти – геометричний та фізичний. Геометричний аспект передбачає виконання обчислень для тіл реальної форми, фізичний – пов'язаний з використанням розширених моделей опису механічної поведінки твердих тіл, які враховують можливість нелінійного де-

формування. У цій роботі уточнений аналіз напружено-деформованого стану енергообладнання здійснюється на основі співвідношень просторово-тривимірної теорії неізотермічної термопружно-пластичності з використанням методу скінченних елементів. Розроблене на цій основі програмне забезпечення [1] дає змогу в стислі терміни провести весь процес оцінювання експлуатаційного ресурсу розглядуваного обладнання у віртуальному просторі і вийти на раціональні рішення відзначених вище проблем.

Методологію дослідження напружено-деформованого стану елементів діючого енергетичного обладнання та отримання на цій основі кількісної оцінки їхнього залишкового експлуатаційного ресурсу, а також розроблення рекомендацій щодо виконання ремонтних робіт в них проілюстровано на прикладі барабана № 18501 парового котла 18/ТП-100 блоку № 1 Бурштинської ТЕС, який за станом на квітень 2017 року відпрацював 297198 год.

Виконано дослідження напружено-деформованого стану розглядуваного барабана з метою встановлення можливості продовження його експлуатації. Визначено найнавантаженіші ділянки барабана. Науково обґрунтовано технологію виконання ремонтних робіт в барабані шляхом вибірки металу навколо пошкоджених зон, запропоновано оптимальні за напруженнями форми цих вибірок. Встановлено сумарне значення параметра накопиченої пошкоджуваності металу барабана. Досліджено вклад різних режимів експлуатації барабана в накопичену пошкоджуваність. Отримано кількісну оцінку його залишкового ресурсу після виконання ремонтних робіт і можливості подальшої експлуатації. На підставі виконаних досліджень зроблено висновок про можливість продовження терміну його експлуатації на конкретний термін.

1. *Моделивання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / О.Р. Гачкевич, Б.Д. Дробенко. – Львів: СПОЛІОМ, 2010. – 256 с.*

STRESS-STRAIN STATE AND OPERATIONAL LIFE OF POWER EQUIPMENT

The efficient approach for computer simulation of deformation processes in power equipment elements under in-service conditions is developed. The software, developed on the basis of 3D non-isothermal thermo-elastic-plasticity and finite element method, enables one to analyze, for short term, the mechanical behavior of power structural elements with damages or after repairs procedure under conditions modeling the in-service ones, and to obtain an expert evaluation of its safety margin. These data are used in deciding on the possibility of temporary prolongation of the operation life of power equipment and in developing recommendations on the corresponding repair measures. The methodology is illustrated on the example of the operating drum of the steam boiler of high pressure of Burshtyn power plant. The factors that contributed most to the accumulated defectiveness of metal of drum are determined, and recommendations on repair technologies in order to extend its service life are developed. Conclusion about possible extension of its service life over the routine period is made on the basis of these researches.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОВОРА

Степан Івасишен, Ігор Мединський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського";
Національний університет "Львівська політехніка" (Україна)*

ivasysheh.sd@gmail.com; i.p.medynsky@gmail.com

Доповідь присвячена викладу останніх результатів авторів з побудови та дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова вигляду

$$\left(S - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} - a_0(t,x) \right) u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_T := (0,T) \times R^n, \quad (1)$$

де

$$x := (x_1, x_2, x_3), \quad x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in R^{n_l}, \quad l \in \{1, 2, 3\}, \quad n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1,$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n, \quad S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}.$$

Коефіцієнти a_{jl} , a_j , $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, і a_0 є комплекснозначними функціями на $\bar{\Pi}_T$, які задовольняють такі умови:

(A_1) вони є обмеженими і неперервними та

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (t,x) \in \bar{\Pi}_T \quad \forall \sigma_1 \in R^{n_1} : \operatorname{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \sigma_{1j} \sigma_{1l} \geq \delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^2;$$

(A_2) вони є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists M_1 > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \{x_1, z_1\} \subset R^{n_1} \quad \forall x_2 \in R^{n_2} \quad \forall x_3 \in R^{n_3} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2, x_3)) - a(t, (z_1, x_2, x_3))| \leq M_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1},$$

$$\exists M_2 > 0 \quad \forall \{t, h\} \subset [0, T] \quad \forall x_1 \in R^{n_1} \quad \forall x_3 \in R^{n_3} \quad \forall \{x_2, z_2\} \subset R^{n_2} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2, x_3)) - a(t, (x_1, z_2, x_3))| \leq M_2 (h^{3\alpha_2/2} + |x_2 + h\hat{x}_1 - z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\exists M_3 > 0 \quad \forall \{t, h\} \subset [0, T] \quad \forall x_1 \in R^{n_1} \quad \forall x_2 \in R^{n_2} \quad \forall \{x_3, z_3\} \subset R^{n_3} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2, x_3)) - a(t, (x_1, x_2, z_3))| \leq M_3 \left(h^{5\alpha_3/2} + |x_3 + hx'_2 + 2^{-1}h^2x'_1 - z_3|^{\alpha_3} \right),$$

де

$$\alpha_1 \in (1/3, 1], \quad \alpha_2 \in (1/3, 2/3], \quad \alpha_3 \in (3/5, 2/3], \quad \hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2}),$$

$$x'_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_3}), \quad x'_2 := (x_{11}, \dots, x_{1n_3}), \quad a \in \{a_{jl}, a_j, a_0\}.$$

Теорема. Нехай виконуються умови A_1 і A_2 , тоді для рівняння (1) існує класичний ФРЗК, для якого справджуються точні оцінки.

Отримання цих результатів потребувало використання нових підходів, які запропоновані в [1], вдосконалення техніки вибору і дослідження параметрику та об'ємного потенціалу, розвинутої в попередніх працях [2-3]. Ці результати узагальнюють і доповнюють відповідні результати з [4] для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова.

1. Івасишен С., Мединський І. Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 36-38.
2. Івасишен С.Д., Мединський І.П. Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В.А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108-155.
3. Івасишен С.Д., Мединський І.П. Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 28-42.
4. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS OF KOLMOGOROV TYPE

Conditions on coefficients of degenerate second order partial differential equations of Kolmogorov type where proposed. Under these conditions there was constructed and investigated classical fundamental solutions of the Cauchy problems.

УДК 004.42

ПОБУДОВА РОБОТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ НАНЕСЕННЯ БІОСУМІСНИХ ПОКРИТТІВ НА ІМПЛАНТИ

Юрій Крак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна);

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Krak@univ.kiev.ua; yuri.krak@gmail.com

В доповіді наведено результати по створенню робототехнічного комплексу для автоматизації процесів плазмового напилення біоактивних компонентів на імпланти [1]. Сформульовано проблеми, що виникають при створенні таких систем і запропоновано ефективні методи їх вирішення. Проведено дослідження геометро-топологічних структур наявних імплантів, на підставі яких були сформульовані наступні актуальні для цієї області досліджень проблеми: створення бази даних (сховища даних) існуючих і можливих імплантів різних виробників; розробка системи класифікації імплантів за типом застосування і матеріалах виготовлення; класифікація імплантів за геометро-топологічними розмірами складових; дослідження програмного забезпечення при побудові 3d моделей імплантів для верстатів з числовим програмним управлінням.

Для вирішення проблеми плазмового напилення була розроблена технологічна модель роботизованого комплексу нанесення плазмового напилення на базі промислового робота, яка включає: планування спеціальних траєкторій руху робота з заданими швидкостями; розробку та використання додаткових пристроїв (оснащення) для напилення імплантів складної форми; розробку методів спільного руху робота і оснащення для напилення.

Проведені експериментальні дослідження показали ефективність запропоновано підходу.

1. *Karymsakova I.B., Krak Iu.V., Denissova N.F.* Criteria for implants classification for coating implants using plasma spraying by robotic complex // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. – 2017. – 5, № 3. – P. 44-52.

ROBOTIZED SYSTEM CONSTRUCTION FOR A OF BIOCHEMICAL COVERAGE ON IMPLANTS

The results for the creation of a robotic complex for the automation of bioactive components plasma spraying on implants are presented. Problems that arise when given type systems creating and effective methods for solution ones are proposed.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА СУЧАСНІ ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ОЦІНКИ МІЦНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ З КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

**Михайло Марчук, Володимир Сіренко,
Володимир Харченко, Дмитро Клименко**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

ДП Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля (Україна)

mv_marchuk@ukr.net; v.n.sirenko@i.ua;
volod.kharchenko@meta.ua; klymenko_dv@hotmail.com

В останні роки в світі поряд із державними ракетно-космічними компаніями на авансцену виходять нові приватні компанії, що суттєво збільшують конкуренцію серед розробників ракет-носіїв. Щоб займати лідируючі позиції в цій галузі необхідно розробляти високоефективні зразки ракетно-космічної техніки (РКТ) з залученням на базі системного підходу сучасних наукових методів проектування та експериментального відпрацювання конструкцій, новітніх матеріалів і технологій.

Розробка, дослідження механічної поведінки та обґрунтоване використання у відповідальних елементах нових полімерних композиційних матеріалів (ПКМ), завдяки їх унікальним властивостям, значно підвищує основні тактико-технічні характеристики конструкцій ракетної та РКТ, надає значного поштовху для розвитку ракетно-космічної промисловості взагалі.

Враховуючи суттєві відмінності структури та механічних властивостей ПКМ, в порівнянні із металами та іншими конструкційними матеріалами, нагальною потребою ефективного використання таких матеріалів в ракетній та ракетно-космічній техніці в ДП «КБ «Південне» за участю провідних наукових установ Національної академії наук України створений спеціалізований, орієнтований саме на такий клас матеріалів, комплекс розрахунково-теоретичних і експериментальних методів досліджень.

Метою представленої в доповіді роботи було розроблення комплексу розрахунково-теоретичних і експериментальних методів досліджень міцності елементів із новітніх КМ, створення та верифікація на цій основі високопродуктивних програмних засобів.

Для досягнення поставленої мети були вирішені такі завдання:

- розроблено уточнені теорії, нові методи та математичні моделі розра-

хунку конструкцій РКТ з КМ при дії статичних та динамічних навантажень та нагріву;

- проведені проектні і повірочні розрахунки на міцність конструкцій з полімерних композиційних матеріалів (ракетних двигунів твердого палива, міжступеневих відсіків, головних обтічників та ін.);
- розроблено та удосконалено експериментальне обладнання і устаткування, інформаційно-вимірювальні системи для оснащення випробувальних установок і стендів та програмне забезпечення для випробувань композиційних матеріалів;
- проведено численні дослідження на зразках і моделях та одержані невідомі раніше дані про властивості новітніх матеріалів на вуглецевій основі в широкому температурному діапазоні;
- розроблена програмно-методична документація для експериментального відпрацювання міцності конструкцій з КМ;
- проведені дослідження на зразках та моделях фізико-механічних властивостей (ФМХ) конструкційних КМ;
- оптимізовано обсяг і терміни експериментального відпрацювання міцності конструкцій РКТ з КМ.

За результатами виконаних науково-експериментальних досліджень вперше в Україні створено маршовий двигун твердого палива на базі високо-ефективних корпусів ракетних двигунів твердого палива (РДТП) типу «кокон» із сучасних композиційних матеріалів.

MATHEMATICAL MODELS AND MODERN SOFTWARE OF STRENGTH EVALUATION FOR THE ELEMENTS OF ROCKET-SPACE TECHNOLOGY FROM COMPOSITE MATERIALS

The presented work describes the created specialized complex of computational, theoretical and experimental research methods for the development of rational designs of rocket and space technology from the advanced composite materials.

**ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ
ОБОЛОНКОВИМИ ТА НИТКОВИМИ НЕДЕФОРМІВНИМИ
ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Ярослав Пастернак, Георгій Сулим

Луцький національний технічний університет (Україна);

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

yaroslav.pasternak@gmail.com; sulym@franko.lviv.ua

На сьогодні інтелектуальні матеріали, що завдяки своїй внутрішній структурі мають здатність поєднувати різні фізичні та механічне поля, все частіше використовуються у сучасних високотехнологічних приладах та пристроях. Це у свою чергу спричиняє істотний інтерес до математичного моделювання взаємодії фізико-механічних полів у таких матеріалах з урахуванням внутрішньої неоднорідної структури, зокрема за наявності тріщин, включень тощо. Наприклад, оболонкові, стрічкові та ниткові електропровідні включення є елементами, що дають змогу знімати інформацію про стан відповідної частини конструкції, у той же час змінюючи у ній розподіл фізико-механічних полів та створюючи їхню концентрацію.

На даний час поряд із методом скінченних елементів для моделювання смарт-матеріалів все частіше застосовують методи інтегральних рівнянь, особливістю та перевагою яких є необхідність дискретизації лише межі області. Для просторових задач термомагнітоелектропружності анізотропних тіл відповідні інтегральні рівняння були вперше побудовані у роботах [1, 2].

У цій роботі для моделювання тонких включень використано принцип спряження континуумів різної вимірності, на основі якого тонка неоднорідність заступається поверхнею розриву фізико-механічних полів, за яку найчастіше обирають серединну поверхню включення. Переміщення u_i неоднорідності записані у формі

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0 + \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k, \quad (1)$$

де u_i^0 – переміщення включення як жорсткого цілого; ω_j – компоненти вектора його малого повертання; ε_{ijk} – символ Леві-Чивіті.

Електричний та магнітний потенціали на включенні вважаються сталими:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi^0, \quad \psi(\mathbf{x}) = \psi^0. \quad (2)$$

Включення може бути теплоізолюваним або ідеально теплопровідним. В останньому випадку його температура вважається сталою

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta^0. \quad (3)$$

Рівняння рівноваги та балансу для тонкого включення записані у вигляді

$$\iint_S \Sigma h_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + H_0 = 0, \quad (4)$$

$$\iint_S \Sigma \tilde{t}_I(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \tilde{P}_I = 0, \quad (5)$$

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x_j \Sigma t_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + M_i = 0. \quad (6)$$

Тут символ Σ позначає суму відповідних величин на берегах поверхні S , що заступає включення; h_n – нормальна складова вектора теплового потоку; H_0 – теплота, що підводиться до включення за одиницю часу; \tilde{t}_I – розширений вектор напружень (t_i), електричних зміщень ($\tilde{t}_4 = D_n$) та магнітної індукції ($\tilde{t}_5 = B_n$); \tilde{P}_I – компоненти прикладеного до неоднорідності розширеного вектора сили; M_i – компоненти головного момента зовнішніх сил, прикладених до включення.

Разом з інтегральними співвідношеннями (10), (11), (27)-(29) роботи [2] вирази (1)-(6) формують повну систему інтегральних рівнянь для тіла із тонким просторовим включенням. Цю модель можна також поширити на випадок просторових криволінійних ниткових включень, розглядаючи смугу S та спрямовуючи її ширину до нуля. Отримані інтегральні рівняння запропоновано розв'язувати числово на основі модифікації поданої у роботі [2] схеми методу граничних елементів, що зокрема, включає застосування спеціальних базових функцій для врахування кореневої особливості на фронті неоднорідності. Останні також дають можливість високоточного обчислення коефіцієнтів інтенсивності полів на фронті включення.

1. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2016. – **64.** – P. 222-229.
2. *Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H.* Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2017. – **74.** – P. 70-78.

THERMOMAGNETOELECTROELASTICITY OF SOLIDS WITH THIN SHELL-LIKE AND THREAD-LIKE RIGID ELECTRICITY CONDUCTING INCLUSIONS

Present study develops boundary element approach for studying thin spatial inclusions in thermomagnetoelastic solids. Models of rigid electricity conducting inclusions are developed, which can be both thermally insulated or temperature conducting.

КЛАС ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У ПОЛІ КЕРРА І НОВІ ЕФЕКТИ У ПОЛІ ЧОРНИХ ДІР

Володимир Пелих, Юрій Тайстра

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

vpelykh@gmail.com; ythelloworld@gmail.com

Розв'язування рівнянь Максвелла у просторі Керра є складним математичним завданням [3, 6]. У спінорному підході за припущення однонапрявленості поля [1, 5]

$$\Phi_{AB} = \Phi_2 o_A \bar{o}_B, \quad (1)$$

де $\Phi_2 : \Phi_2 \mapsto \mathbb{C}$ – компонента спінора Максвелла Φ_{AB} у спіновій базі, o_A, ι_A – базисні спінори, розв'язок в аналітичній формі був отриманий у роботі [1]. Розв'язок з відокремленими змінними для однонапрявленого ізотропного поля має вигляд [2, 4]

$$\Phi_2 = \frac{C}{(r - ia \cos \theta) \sin \theta} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin \theta} \right)^m e^{-a\omega \cos \theta} e^{i\omega(t - r_*) + im\phi}, \quad (2)$$

де $r_* = r + M \ln \Delta + \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right| + \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right|$, C – комплексна стала. Параметр M є масою чорної діри, a – питомим кутовим моментом, ω , m – константи відокремлення, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$.

Аналіз розв'язку (2) показує, що він описує циркулярно-поляризовану електромагнітну хвилю. При $\omega > 0$ це право-поляризована хвиля, при $\omega < 0$ – ліво-поляризована.

Для опису повороту вектора поляризації у метриці Керра побудуємо поле, що є сумою право- та ліво-поляризованих хвиль

$$\Phi_2^T = \Phi_2^R + \Phi_2^L. \quad (4)$$

Накладаючи умову лінійної поляризації хвилі вздовж напрямку $\theta = \theta_0$

$$\frac{A_R^2}{A_L^2} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{c_1^2 + c_2^2} = \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^{4m} e^{-4a\omega \cos \theta}, \quad (5)$$

отримуємо вираз для кута повороту вектора поляризації

$$\chi|_{\theta=\theta_0} = \arctg\left(\frac{c_2 A_R + A_L d_2}{c_1 A_R + A_L d_1}\right) + \arctg\left(\frac{a \cos \theta_0}{r}\right), \quad (6)$$

де

$$A_R = \frac{1}{\Sigma \sin \theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^m e^{-a\omega \cos \theta}, \quad A_L = \frac{1}{\Sigma \sin \theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^{-m} e^{a\omega \cos \theta},$$

$$C = c_1 + ic_2.$$

Другий доданок у формулі (2) збігається із половиною значенням кута поляризації, визначеного формулою Скроцького, що є зрозумілим, оскільки хвиля проходить половинний шлях.

Запропонований підхід вперше описує поляризаційний ефект у просторі Керра методами хвильової оптики та виявляє його частотну дисперсію.

1. *Пелих В.О., Тайстра Ю.В.* Клас загальних розв'язків рівнянь Максвелла у просторі Керра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 1. – С. 48-57.
2. *Пелих В.О., Тайстра Ю.В.* Однонаправлені ізотропні поля у просторі Керра // *Укр. фіз. журн.* – 2017. – **62**, № 11. – С. 1000-1006.
3. *Fiziev P.P.* Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation // *Class. Quant. Grav.* – 2010. – **27**, № 13. – P. 135001 (30 pp.).
4. *Pelykh V.O., Taistra Y.V.* Solution with separable variables for null one-way Maxwell field in Kerr space-time // *Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl.* – 2017. – **10**, № 2. – P. 387-390.
5. *Stewart J.M.* *Advanced general relativity.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. – 228 p.
6. *Teukolsky S.A.* Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations // *The Astrophysical Journal.* – 1973. – **185**. – P. 635-647.

ABOUT LINEARLY POLARIZED WAVES IN THE KERR SPACETIME

We use the solution with separable variables for null one-way field, which describes circularly polarized electromagnetic waves, for obtaining linearly polarized (LP) waves as superposition of right (ω, m) and left ($-\omega, -m$) circularly polarized waves. LP wave is defined by condition of linear polarization and exists for a fixed value $\theta = \theta_0$. We obtain the formula for polarization angle of LP waves, which consist the half of the Skrotskii term.

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ КІН ДЛЯ ТРІЩИНИ У ВИГЛЯДІ ЛАМАНОЇ В УМОВАХ АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається необмежене ізотропне пружне тіло в умовах антипоскої деформації з наскрізною тріщиною, яка у площині Oxy займає ламану, що складається з N ланок. З тріщиною взаємодії плоска гармонічна хвиля по-вздовжнього зсуву, яка викликає переміщення

$$w_0(x, y) = A_0 e^{i\kappa_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де ω – частота коливань, ρ і G – густина і модуль зсуву тіла. За таких умов єдина відмінна від 0 компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца. Граничні умови формулюються на кожній границі тріщини з огляду на те, що її поверхня вважається незавантаженою.

Розв'язок задачі розшукується у вигляді суперпозиції розривних розв'язків рівняння Гельмгольца, побудованих для кожної ланки тріщини. Таке подання дозволяє отримати систему інтегро-диференціальних рівнянь, векторний запис якої має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{E}{\tau - \zeta} + G(\tau, \zeta) + R(\tau, \zeta) \right) \Phi'(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[-\kappa_0^2 \Gamma \ln|\tau - \zeta| + U(\tau, \zeta) \right] d\tau = F(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

В системі (2) введено наступні вектори та матриці:

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \vdots \\ \varphi_N(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(\tau) \\ \varphi'_2(\tau) \\ \vdots \\ \varphi'_N(\tau) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(\zeta) \\ f_2(\zeta) \\ \vdots \\ f_N(\zeta) \end{pmatrix};$$

$$\varphi_k(\tau) = \frac{\chi_k(d_k \tau)}{d_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

де $\chi_k(x_k)$ – стрибок переміщень на k -й ланці тріщини, функції $f_k(\zeta)$ пода-

ються через переміщення падаючої хвилі (1);

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & 0 & g_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{NN-1} & 0 \end{pmatrix};$$

$$g_{ll-1}(\tau, \zeta) = -\frac{\gamma_{l-1}(\gamma_{l-1}(1-\tau)\cos\alpha_{ll-1} + \gamma_2(1+\zeta))}{Q_{ll-1}(\tau, \zeta)}, l = 2, 3, \dots, N;$$

$$Q_{ll-1}(\tau, \zeta) = \gamma_{l-1}^2(1-\tau)^2 + \gamma_l^2(1+\zeta)^2 + 2\gamma_{l-1}\gamma_l(1-\tau)(1+\zeta)\cos\alpha_{ll-1};$$

$$g_{ll+1}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma_{l+1}(\gamma_{l+1}(1+\tau)\cos\alpha_{ll+1} + \gamma_l(1-\zeta))}{Q_{ll+1}(\tau, \zeta)}, l = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$Q_{ll+1}(\tau, \zeta) = \gamma_{l+1}^2(1+\tau)^2 + \gamma_l^2(1-\zeta)^2 + 2\gamma_{l+1}\gamma_l(1+\tau)(1-\zeta)\cos\alpha_{ll+1};$$

Γ – числова діагональна матриця, E – одинична матриця, матриці R і U складають обмежені при $-1 \leq \tau, \zeta \leq 1$ функції.

Наближений метод розв’язання системи (2) полягає в поданні похідних невідомих функцій у вигляді

$$\varphi_l'(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma_{l+1}}(1+\tau)^{-\sigma_l} \psi_l(\tau), \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

де степеневі показники визначаються формулами:

$$\sigma_1 = \sigma_{N+1} = \frac{1}{2}; \quad \sigma_l = \frac{\beta_{l-1}}{\beta_{l-1} - \pi}, \quad -\pi \leq \beta_{l-1} < 0, \quad \sigma_l = \frac{\beta_{l-1}}{\pi + \beta_{l-1}}, \quad 0 \leq \beta_{l-1} < \pi$$

$$\beta_{l-1} = \alpha_l - \alpha_{l-1}, \quad 0 \leq \alpha_l < \pi, \quad l = 2, \dots, N.$$

Після цього невідомі функції $\psi_l(\tau)$ наближаються інтерполяційними многочленами. Така апроксимація дає можливість отримати для сингулярних інтегралів спеціальні квадратурні формули і застосувати до (2) метод колокації. Отримано формули для розрахунку КІН і досліджено вплив на їх значення форми тріщини і частоти падаючої хвилі.

THE DETERMINATION OF DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTOR FOR BREAK-LINE SHAPED CRACK IN ANTYPLANE STRAIN CONDITION

The problem of the stress intensity factor (SIF) determination is solved for the break-line shaped crack. The crack is situated in the unbounded elastic isotropic body and the plane harmonic waves of the longitudinal shear) interact with it. The original problem is reduced to the system of singular integro-differential equations with the fixed singularity. The numerical method of this system solving which considers real asymptotic unknown function is proposed.

ДЕСКРИПТИВНА ТЕОРІЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

Олександр Шарковський

Інститут математики НАН Україниasharkov@imath.kiev.ua

Дескриптивна (тобто, описова) теорія множин – класичний розділ математики, який виник на початку минулого сторіччя. В доповіді пропонуються основи дескриптивної теорії хаосу.

Розглядаються динамічні системи на довільному компакт X , породжувані неперервним відображенням $f: X \rightarrow X$, переважно у випадку, коли X – це інтервал $I \subset \mathbb{R}$. Асимптотична поведінка кожної траєкторії визначається так званою ω -граничною множиною, або простіше, аттрактором траєкторії. Множина всіх траєкторій, які притягуються одним й тим самим аттрактором, зветься басейном цього аттрактора.

Динамічна система, якщо її топологічна ентропія додатна:

1) має дуже багато різних аттракторів траєкторій, а саме, континуум аттракторів; 2) басейни більшості аттракторів мають дуже складну будову, а саме, є множинами 3-го класу за термінологією дескриптивної теорії множин; 3) басейни різних аттракторів дуже сильно переплітаються і їх не можна відокремити один від одного ніякими відкритими чи замкненими множинами, а можна лише множинами 2-го класу складності; 4) множина всіх аттракторів динамічної системи утворює в просторі замкнених множин фазового простору (з метрикою Хаусдорфа) аттракторну сітку (мережу), комірки якої створюють Канторові множини з самих аттракторів.

Основні результати доповіді отримані ще в 60-х роках минулого сторіччя і тоді ж перекладені англійською.

1. *Шарковський А.Н.* О притягивающих и притягивающихся множествах // Доклады АН СССР – 1965. – **160**. – Р. 1036-1038 (Soviet Math. Dokl. – 1965. – **6**. – Р. 268-270).
2. *Шарковський А.Н.* Об одной классификации неподвижных точек // УМЖ. – 1965. – **17**, No. 5. – Р. 80-95 (AMS. Transl. – 1970. – **97**, No. 2. – Р. 159-179).
3. *Шарковський А.Н.* Поведение отображения в окрестности притягивающего множества // УМЖ. – 1966. – **18**, No. 2. – Р. 60-83 (AMS. Transl. – 1970. – **97**, No. 2. – Р. 227-258).
4. *Шарковський А.Н.* Частично упорядоченная система притягивающих множеств // Доклады АН СССР. – 1966. – **170**. – Р. 1276-1278 (Soviet Math. Dokl. – 1966. – **7**. – Р. 1384-1386).
5. *Шарковський А.Н.* Строение эндоморфизма на ω -предельном множестве // Int. Math. Congress (Moscow, 1966). – Секц. 6. – Тез. 51.
6. *Шарковський А.Н.* Аттракторы траекторий и их бассейны. – Київ: Наукова думка, 2013. – 320 с.

DESCRIPTIVE THEORY OF DETERMINISTIC CHAOS

The talk proposes the basis of the descriptive theory of chaos. Most of the results were obtained and translated into English back in the 60's of the last century.

SHARP A POSTERIORI ERROR ESTIMATION FOR SYMMETRIC ONE-STEP INTEGRATORS

Winfried Auzinger

Institute of Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology (Austria)

w.auzinger@tuwien.ac.at

We consider symmetric time-stepping schemes for the numerical integration of linear evolution equations $u'(t) = Hu(t), u(0) = u_0$. In [1], a method for a posteriori estimation of the local error, based on the defect of the numerical solution, was studied, in particular for splitting methods applied to Schrödinger equations. In principle, this method can be applied to general evolution equations and general one-step schemes. For the linear problem at hand, let $S(t)$ denotes the numerical flow associated with a given one-step scheme over an integration interval of length t . We define its defect by $D(t) = S'(t) - HS(t)$. This is a computable quantity, and for a scheme of order p , the quantity

$$L_{est}(t)u_0 = \frac{t}{p+1}D(t)u_0$$

is an asymptotically correct estimate for the local error committed in a single step.

For the local error $L(t)u_0 = O(t^{p+1})$, it can be shown that

$$L_{est}(t)u_0 - L(t)u_0 = O(t^{p+2}).$$

In [2], for symmetric one-step schemes the following modification was proposed and analyzed: Define the defect by

$$D(t) = S'(t) - \frac{1}{2}\{S(t), H\} = S'(t) - \frac{1}{2}(S(t)H + HS(t)),$$

and construct the local error estimator $L_{est}(t)$ in the same way as before. Now, due to a symmetry effect, we even have

$$L_{est}(t)u_0 - L(t)u_0 = O(t^{p+3}).$$

We give the proof of this increased asymptotic quality. Furthermore, we discuss the application in the context of symmetric splitting methods. We illustrate our findings by numerical results obtained integrating a linear Schrödinger equation.

1. *Auzinger W., Koch O., Thalhammer M.* Defect-based local error estimators for splitting methods, with application to Schrödinger equations. Part II: Higher-order methods for linear problems // *J. Comput. Appl. Math.* – 2013. – **255**. – P. 384-403.
2. *Auzinger W., Koch O.* An improved local error estimator for symmetric time-stepping schemes // submitted for publication.

CONVERTERS OF ELECTRO-ACOUSTIC WAVES. VACUUM-CRYSTALLINE FILTERS AND RESONATORS

Ara Avetisyan, Vazgen Khachatryan

Department of Dynamics of Deformable Systems, Institute of Mechanics of NAS of Armenia

ara.serg.avetisyan@gmail.com; khachvaz@gmail.com

In modern high-precision technologies composite periodically heterogeneous waveguides made of piezoelectric crystals are widely used as converters, filters or resonators of an electroacoustic wave signal. In some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated distribution of the elastic shear electro-active wave signal $\{0; 0; u_\gamma^{(1)}(x_\alpha, x_\beta, t); \varphi^{(1)}(x_\alpha, x_\beta, t)\}$. In addition, for some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated propagation of the electro-active wave signal of plane deformation $\{u_\alpha^{(2)}(x_\alpha, x_\beta, t); u_\beta^{(2)}(x_\alpha, x_\beta, t); 0; \varphi^{(2)}(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ [1].

The waveguide is constructed from alternating strips of piezoelectric crystals with $\{1\} \triangleq \{x_\alpha \in [0; a]; x_\beta \in [-h; h]\}$ and $\{2\} \triangleq \{x_\alpha \in [a; a + b]; x_\beta \in [-h; h]\}$ rectangular cross sections, whose materials are chosen so that alternating electroactive waves of antiplane and planar strains exist in them, respectively.

It is possible if the adjacent piezoelectric bands have a non-acoustic contact. During the propagation the electro-elastic wave signal transforms and passes from one band to the other by penetrating through the vacuum gap by means of the accompanying electrical oscillations. The propagation of a normal electroacoustic wave signal $\{f(x_\alpha, x_\beta, t)\} = \{F(x_\beta)\} \times \exp[i(kx_\alpha - \omega t)]$ in a simulated, periodically longitudinally inhomogeneous, piezoelectric waveguide of the thickness $|x_\beta| < h$ is investigated. Here $F(x_\beta)$ is the corresponding amplitude function of the wave components in the transverse piezoelectric bands of the waveguide. Depending on the imposed boundary electromechanical conditions on the surfaces $x_\beta = \pm h$ of the rectangular components $\{1\}$ and $\{2\}$ that make up the waveguide, we obtain the resulting waveforms corresponding to the possible types of electro-elastic deformation in a given interlayer.

In the case of a high-frequency electro-elastic wave signal (short waves, when $\lambda(\omega) \ll h$), in piezoelectric rectangles $\{1\}$ and $\{2\}$ the shapes of the electro-elastic surface waves of Gulyaev-Bluestyan and Rayleigh are formed, respectively. Each of them has its own phase dependence $k_{GB}(\omega)$ or $k_R(\omega)$, with its phase velocity $V_{GB}(\omega) = \omega/k_{GB}(\omega)$ or $V_R(\omega) = \omega/k_R(\omega)$ [2].

In fact, in alternating layers of the composite waveguide, heterogeneous wave fields are formed, that carry different "information". In the high-frequency mode, the wave energy is localized at the edges $x_\beta = \pm h$ of the interlayers. The regions for determining the phase velocities of slow surface waves in the interlayers are different. For permissible frequencies the lengths $\lambda_{GB}(\omega)$ or $\lambda_R(\omega)$ of propagating waves in these interlayers are also different. The determination of the bands of permissible frequencies is made, taking into account the longitudinal periodicity of the modeled inhomogeneous waveguide. We use the Floquet-Lyapunov theory for periodic structures [3].

Using the conjugacy conditions of the electromechanical field on the side surfaces $x_\alpha^0 = 0$, $x_\alpha^a = a$ and $x_\alpha^{a+b} = a + b$ of the piezoelectric layers $\{1\}$ and $\{2\}$, taking into account the periodicity of the solutions of the mathematical boundary value problem in cells, we obtain the filtering dispersion equation.

From the filtering equation for different combinations of selected pairs of piezoelectric materials the zones of admissible frequencies for localized and non-localized electro-elastic waves propagating along the composite waveguide are determined. Consequently, through appropriate choice of materials and linear dimensions of the interlayers, the optimal transfer of wave energy from one layer to another can be achieved, or vice versa.

An electromechanical resonator of certain type can be created based on this.

The equation of frequency filtering also gives forbidden frequency bands on which the composite waveguide of certain piezoelectric materials and linear dimensions does not allow the propagation of localized electro-elastic waves or any waves propagation in general.

1. *Avetisyan A.S.* The problem of propagation of shear waves in a piezoelectric medium // Proc. of NAS of Armenia, Mechanics-1985. – **38**, № 1. – P. 12-19.
2. *Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H.* The electro-elastic Rayleigh waves in a case of electrically opened or electrically closed surfaces of the waveguide // Proc. of NAS of Armenia, Mechanics – 2018. – **71**, № 1. – P. 3-21.
3. *Adams S., Craster R., Guenneau S.* Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides // Proc. Royal Soc. London A 464-2008. – P. 2669-2692.

**CORRESPONDING MULTIDIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS
FOR MULTIPLE POWER SERIES**

Khrystyna Kuchminska

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

khkuchminska@gmail.com

Correspondence of a multidimensional continued fraction (MDCF) to formal multiple power series is the basis of this communication. Correspondence principle is one of the methods of analytic function representations by multidimensional continued fractions.

Correspondence definition is being formulated, and algorithms of the formal multiple power series expansion into the corresponding MDCF with the order of correspondence of its n^{th} approximants $n + 1$ and $2n + 1$ have been constructed. Necessary and sufficient conditions of the existence of such expansions are established.

Consider a sequence of rational functions

$$R_k(z) = P_m(z) / Q_l(z), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n, k = 1, 2, \dots,$$

$$\deg P_m(z) = m(n), \quad \deg Q_l(z) = l(n).$$

Expand the function $R_k(z)$ into the formal n -dimensional power series (FnDPS) at $O = (0, \dots, 0)$. It's possible if $Q_l(0) \neq 0$. Denote $T(R_k)$ the expansion $R_k(z)$ into the n -dimensional Taylor series at $O = (0, \dots, 0)$.

Definition 1. *The sequence $\{R_k(z)\}$ is corresponding to (FnDPS) $P(z)$*

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, k = (k_1, \dots, k_n) \in Z_+^n, \tag{1}$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_n, z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \text{ at } O = (0, \dots, 0),$$

$$\text{if } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(P - T(R_k(z))) = \infty, \lambda(P) = \begin{cases} \infty, & P = 0, \\ s, & P \neq 0, \end{cases} s = |k|.$$

Consider an n -dimensional continued fraction (nDCF) $D_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}$, where

$\Phi_i^{(n-1-i)}$ is the sum of p -dimensional continued fractions ($p = 1, 2, \dots, n-1$).

Definition 2. The n -dimensional continued fraction (nDCF) is corresponding to (FnDPS) $P(z)$, if the sequence of its approximants is correspondent to $P(z)$ at $O = (0, \dots, 0)$.

Denote

$$i \left[i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right] = \left[i_1 \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right), i_2 \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right), \dots, i_n \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right) \right],$$

$$p_s = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, n},$$

$$i_k \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right) = \begin{cases} i_{p_m}, & \text{if } k = p_m, \quad m = 1, 2, \dots, s, \\ 0, & \text{if } k \neq p_m, \end{cases}$$

$$(i \pm t) \left[i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right] = \left[i_1 \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right) \pm t_1; \dots; i_s \left(i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_s} \right) \pm t_s; 0, \dots, 0 \right],$$

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_s), \quad 1 = (1, 1, \dots, 1),$$

then multiple power series (1) can be represent in the form

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_{p_1=1}^n \sum_{i_{p_1} \geq 1} c_{i_{p_1}} \left[i_{p_1} \right] z_{p_1}^{i_{p_1}} + \sum_{p_1=1}^{n-1} \sum_{p_2=p_1+1}^n z_{p_1} z_{p_2} \sum_{i_{p_1}+i_{p_2} \geq 0} c_{(i+1)} \left[i_{p_1}, i_{p_2} \right] z_{p_1}^{i_{p_1}} z_{p_2}^{i_{p_2}} + \\ & + \sum_{p_1=1}^{n-2} \sum_{p_2=p_1+1}^{n-1} \sum_{p_3=p_1+2}^n z_{p_1} z_{p_2} z_{p_3} \sum_{i_{p_1}+i_{p_2}+i_{p_3} \geq 0} c_{(i+1)} \left[i_{p_1}, i_{p_2}, i_{p_3} \right] z_{p_1}^{i_{p_1}} z_{p_2}^{i_{p_2}} z_{p_3}^{i_{p_3}} + \dots + \\ & + z_1 z_2 \dots z_n \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n \geq 0} c_{(i+1)} \left[i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_n} \right] z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n} \end{aligned}$$

and one can apply the Viskovatov-like algorithms to each of terms.

ВІДПОВІДНІ БАГАТОВИМІРНІ НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ ДЛЯ КРАТНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Запропоновано розвинення кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний неперервний дріб, використовуючи метод Вісковатова і його аналогі.

MULTIPOLE EXPANSION AND BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS IN COMPUTATIONAL NANOMECHANICS OF COMPOSITES

Viktor Mykhas'kiv, Volodymyr Kushch, Elena Strelnikova

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;

Bakul Institute for Superhard Materials NAS of Ukraine;

Pidhorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

mykhaskiv@gmail.com; vkushch@bigmir.net; elena15@gmx.com

Advanced analytical-numerical methods for the investigation of elastic properties of the particulate composites with nanoinhomogeneities are proposed. To describe the nano level effects, the Gurtin-Murdoch model of interface that includes both surface tension and surface stiffness is adopted with the formulation of imperfect contact conditions between the matrix and the inhomogeneities. For the composites with nanoparticles of canonical shape, the solutions of corresponding elastostatic problems are presented as a series over the special vector functions and surface harmonics [1]. Regarding nanoinclusions of complicated shape, their contribution into a strain-stress field is estimated numerically by the solution of appropriate boundary integral equations [2, 3]. Several examples are considered to show the efficiency and robustness of both approaches for a wide range of input parameters.

Acknowledgement. This work was supported by the Science and Technology Center in Ukraine and the National Academy of Sciences of Ukraine (Project No. 6247).

1. *Kushch V.I., Mogilevska S.G., Stolarski H.K., Crouch S.L.* Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – **50**. – P. 1141-1153.
2. *Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M.* Elastic state of a sliding short fiber inclusion in a three-dimensional matrix // *International Applied Mechanics*. – 2015. – **51**. – P. 640-647.
3. *Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U.* BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2016. – **67**. – P. 13-25.

МУЛЬТИПОЛЬНІ РОЗВИНЕННЯ ТА ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ В ОБЧИСЛОВАЛЬНІЙ НАНОМЕХАНІЦІ КОМПЗИТІВ

Запропоновано ефективні аналітико-числові методи дослідження пружних властивостей нанокомпозитів, у яких матеріалізація міжфазних поверхонь та розмірні ефекти описуються моделлю Гуртіна-Мердока.

GENERALISED SEIBERG-WITTEN EQUATIONS AND GAUGE THEORIES ON MANIFOLDS WITH EXCEPTIONAL HOLONOMY

Victor Pidstrygach

Mathematical Institute of Göttingen University (Germany)

vpidstr@uni-goettingen.de

1. Generalised Seiberg-Witten equations

Consider a connection A on a $Spin^G(4)$ -structure $Q \rightarrow X$ over a 4-dimensional manifold X with g - and $so(4)$ -components respectively given by a connection a on a G -principal bundle P and the Levi-Civita connection on the principal bundle of frames of X . Consider also a $Spin^G(4)$ -equivariant map $u: Q \rightarrow M$ to a hyperkähler manifold M with an isometric $Spin^G(4)$ -action such, that the induced action of the subgroup $G \subset Spin^G(4)$ is hyperkähler and the induced action of the subgroup $Sp(1)_+ \subset Spin^G(4)$ induces standard rotational action on the sphere of complex structures of M .

One defines ([4]) a generalised Seiberg-Witten system as the system of two equations:

$$\begin{cases} D_A(u) = 0 \\ F_a^+ + \mu(u) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where F_a^+ is a selfdual part of the connection a ,

$$\mu: M \rightarrow \Lambda_+^2 \mathbb{R}^4 \otimes \mathfrak{g}.$$

is the moment map of the G -action on M , D_A is the nonlinear Dirac operator twisted by the connection A . This system of equations on a connection a and a spinor u has gauge group G of P as a symmetry group and the moduli space M_{gSW} of G -orbits of solutions is of interest in topology of 4-dimensional manifolds, geometry of $Spin(7)$ - and G_2 -manifolds and, consequently, in various theories of mathematical physics such as quantum fields theory and string theory. The system is known to be elliptic and, therefore, Fredholm on a compact closed 4-manifold X . This implies, that for generic perturbation, the moduli space is a mani-

fold with singularities given by solutions with a nontrivial stabiliser in the gauge group. Choosing the target manifold M to be a copy of quaternions H gives the classical Seiberg-Witten theory.

Definition of the nonlinear Dirac operator is based on the fact, that the even part of the Clifford algebra of the standard Euclidean metric in dimension 4 is $H \oplus H$ and the tangent bundle of the hyperkähler manifold is a H -vector bundle, i.e. is also a $H \oplus H$ -vector bundle with the action restricted to the second component. Since the Clifford algebra of the standard Euclidean metric in dimension 3 is H , one has also a 3-dimensional version of the generalised Seiberg-Witten system.

2. G_2 -and $Spin(7)$ -instantons

Given a closed compact 4-manifold X we can consider total spaces of the real rank 3 vector bundle of selfdual forms $\Lambda_+^2 X$ or of the complex rank 2 spinor vector bundle S_X^+ as examples of (possibly nonintegrable) manifolds with G_2 -and $Spin(7)$ -holonomy (special holonomy) in dimension 7 and 8 respectively. For such manifolds one can define a generalisation of the 4-dimensional antiselfduality equation. Similarly to the general holonomy in dimension 4, a vector bundle of 2-forms $\Lambda^2 T^*Y$ is not irreducible for a manifold Y with special holonomy and one denotes by α^+ a component of a two form α on such a manifold in the irreducible component of rank 7. Considering now connections A on a given principal bundle with vanishing selfdual part $F_A^+ = 0$ modulo the gauge group action defines a moduli M_{asd} space of G_2 -, respectively $Spin(7)$ -instantons on the manifold with G_2 -, respectively $Spin(7)$ -holonomy. Starting with a $Sp(1)_+$ -equivariant principal bundle $P \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k=3$ in the case of G_2 and $k=4$ in the case of $Spin(7)$) one defines canonically a principal bundle P over $Y = \Lambda_+^2 X, S_X^+$ respectively. An infinite-dimensional hyperkähler manifold A_P of connections on P carries a hyperkähler action of the infinite-dimensional gauge group G_P of P as well as an action of the Spin-group $Spin^{G_R}(4)$ as in the previous section. Higgs mechanism of the dimensional reduction splits a connection A on P into a connection A on certain infinite-dimensional G_P -principal bundle \mathbf{P} over X and a spinor $u: \mathbf{P} \rightarrow A_P$. Following theorem sums up results relating antiselfduality for manifolds with special holonomy and generalised Seiberg-Witten equations:

Theorem. [1] *A connection A on $P \rightarrow Y$ is antiselfdual if and only if its components (A, u) satisfy suitably perturbed generalised Seiberg-Witten equation with the target hyperkähler manifold A_P .*

Moreover, antiselfdual connections on the manifolds $\Lambda_+^2 X$, S_X^+ derived from a 4-manifold X conjecturally serve as a model for bubbling-off phenomena for the moduli spaces of antiselfdual connections for an arbitrary manifolds with special holonomy. Proper control over the bubbling-off phenomena will lead to construction of a suitable generalisation to dimensions 7 and 8 of the Uhlenbeck compactification in dimension 4 and thus enable definition of invariants of manifolds with special holonomy analogous to construction of Donaldson polynomials of 4-dimensional manifolds. Currently it is a study subject of various on-going projects.

3. Applications to 4-dimensional geometry and topology

Invariants of 4-dimensional manifolds constructed with a use of classical Seiberg-Witten equations revolutionised smooth 4-dimensional topology. The system of invariants constructed is though very far from being complete. Generalised Seiberg-Witten moduli spaces for a carefully chosen target manifolds is a potential source of new invariants. Crucial for this program is construction of a suitable compactification $\overline{M}_{gSW} \supseteq M_{gSW}$ of the generalised Seiberg-Witten moduli space. Following result is instrumental in understanding of mechanisms of noncompactness. It helps to separate known Uhlenbeck-type bubble-off phenomena for connections from the new blow-up mechanisms for spinors.

Theorem. [5] *Generalised Seiberg-Witten moduli space for the target manifold given by the minimal nilpotent adjoint orbit of $sl(n)$ is fibered over the moduli spaces of antiselfdual connections with suitable topological invariants.*

Extensive and technically challenging study of the three-dimensional theory with the target space H^n (multispinor) is done in [3]. One of the important results here is that a sequence of solutions converges on a complement of a subset of Hausdorff dimension 1, as opposed to the Uhlenbeck-type bubbling, where the convergence exists on a complement of zero-dimensional subset. It is not clear whether for a generic perturbation of the equations this subset of Hausdorff dimension 1 is actually a 1-dimensional submanifold.

4. TQFT.

Topological quantum field theory (TQFT) is a convenient tool for designing invariants of manifolds. It facilitates an effective computational mechanism for the invariants based on cutting and pasting of manifolds. For example, TQFT in di-

mensions 3, 4, 5 assigns a number to a 5-dimensional manifold, a vector space to a 4-dimensional and a category to a 3-dimensional. Generalised Seiberg-Witten theories used in section 2 are related to the ones with finite-dimensional targets given by moduli spaces of anti-selfdual connections on S^4 and of Bogomolny monopoles respectively. Using moduli spaces of solutions to the celebrated Nahm equations, an ODE system on a triple of traceless skew-hermitean matrices

$$\dot{T}_1 = [T_2, T_3] \quad \dot{T}_2 = [T_3, T_1] \quad \dot{T}_3 = [T_1, T_2].$$

with suitable boundary conditions, and related infinite-dimensional target space one can construct such a TQFT ([2]). Interestingly enough, the theory can be formulated in terms of complex Morse theory for the complex version of Chern-Simons functional associated with a three-manifold (compare [6, 7]).

1. *Haydys A.* Gauge theory, calibrated geometry and harmonic spinors // J. Lond. Math. Soc. – 2012. – **86**, No. 2. – P. 482-498.
2. *Haydys A.* Fukaya-Seidel category and gauge theory // J. Symplectic Geom. – 2015. – **13**, No. 1. – P. 151-207.
3. *Haydys A., Walpuski T.* A compactness theorem for the Seiberg-Witten equation with multiple spinors in dimension three // Geom. Funct. Anal. – 2015. – **25**, No. 6. – P. 1799-1821.
4. *Pidstrigach V.Ya.* Hyper-Kähler manifolds and the Seiberg-Witten equations // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 2004. – **246** (Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.). – P. 263–276.
5. *Pidstrigach V.* Generalised Seiberg-Witten moduli spaces: examples and applications. In preparation.
6. *Witten E.* Analytic continuation of Chern-Simons theory. In Chern-Simons gauge theory: 20 years after, volume 50 of AMS/IP Stud. Adv. Math., pages 347-446. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
7. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. In Surveys in differential geometry. Volume XV. Perspectives in mathematics and physics, volume 15 of Surv. Differ. Geom., pages 345-419. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

MICRO/NANO-SIZED MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC STRUCTURES ANALYZED BY STRAIN GRADIENT THEORY

Jan Sladek, Vladimir Sladek, Michael Wünsche

Institute of Construction and Architecture, Slovak Academy of Sciences

jan.sladek@savba.sk

The fast development of technology brings a need to understand behaviours of nano/micro structures. Due to their superior features, the application of nano/micro structures was expanded into many areas such as nano-electromechanical devices, space and bio-engineering, actuators, and nanocomposite. The size effect phenomenon is observed if the component dimension is comparable to the material length scale. The size dependent structures cannot be described by classical continuum mechanics due to the lack of the material length scale. A physically similar, but simpler, problem has been analyzed very recently by the authors for nano-sized cracks in piezoelectric material (Sladek et al. 2017). Although great success has been made for magneto-electro-elastic (MEE) materials with macroscopic characteristic dimensions, applications of the conventional elastic theory in the nanoscale are not accurate because the size effects on the mechanical properties of materials may be prominent at the nanoscale. The gradient elasticity theory is also suited for studying the strain and stress fields near the crack-tip at the microscale due to the large strain and stress gradients in its vicinity. Mao and Purohit (2015) have analyzed the stress and polarization fields near point defects, dislocations and cracks in flexoelectric solids. They have shown that flexoelectricity plays an important role in the immediate vicinity of these defects where large strain gradients occur.

In this study, the gradient theory for magneto-electro-elastic materials is developed. The size-effect is considered by including the strain gradients in the constitutive equations of a magneto-electro-elastic material. The constitutive equations are given by:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k - d_{kij}H_k, \\
 \tau_{jkl} &= -f_{ijkl}E_i + g_{jklmni}\eta_{nmi} - \xi_{ijkl}H_i, \\
 D_j &= e_{jkl}\varepsilon_{kl} + a_{jk}E_k + \alpha_{jk}H_k + f_{jlmn}\eta_{lmn}, \\
 B_j &= d_{jkl}\varepsilon_{kl} + \alpha_{kj}E_k + \gamma_{jk}H_k + \xi_{jlmn}\eta_{lmn},
 \end{aligned} \tag{1}$$

where

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_j = -\phi_{,j}, \quad H_j = -\psi_{,j}. \quad (2)$$

$$\eta_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik}), \quad (3)$$

and σ_{ij} , D_k , τ_{jkl} and B_j are the stress tensor, electric displacement, higher order stress and magnetic induction, respectively. The material property tensors are denoted by \mathbf{a} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$ and $\boldsymbol{\xi}$. More specifically, \mathbf{a} and \mathbf{c} are the second-order permittivity and the fourth-order elastic constant tensors, respectively. Symbols \mathbf{e} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$ and \mathbf{d} denote the piezoelectric, electro-magnetic, magnetic permeability and piezomagnetic coefficients, respectively. The electric field–strain gradient coupling coefficient tensors \mathbf{f} represents the higher-order electromechanical coupling induced by the strain gradient and the higher-order elastic parameter \mathbf{g} represents the purely the strain gradient elasticity theory. Similarly, the symbols $\boldsymbol{\xi}$ denotes higher-order magnetomechanical coupling induced by the strain gradient.

The variational principle is applied to derive the governing equations

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) - \tau_{ijk,jk}(\mathbf{x}) &= 0, \\ D_{i,j}(\mathbf{x}) &= 0, \\ B_{i,j}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

The FEM formulation with C^1 -continuous elements is subsequently developed and implemented. Numerical examples are presented and discussed to demonstrate the effects of the strain-gradient.

1. *Sladek J., Sladek V., Stanak P., Zhang Ch., Tan C.L.* Fracture mechanics analysis of size-dependent piezoelectric solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2017. – **113**. – P. 1-9.
2. *Mao S., Purohit P.K.* Defects in flexoelectric solids // *J. Mech. Phys. Sol.* – 2015. – **84**. – P. 95-115.

A FULL-STRESS MODEL FOR HYDRAULIC FRACTURING: THE COMBINED EFFECTS OF PRESSURE AND SHEAR STRESS FOR A POWER-LAW FLUID

Ya-Pu Zhao

*State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics (LNM), Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences*

yzhao@imech.ac.cn

Over the past decade, the combination of horizontal drilling and hydraulic fracturing has allowed access to large volumes of shale gas that previously uneconomical to produce. Even though great success has been achieved in shale gas revolution in North America, hydraulic fracturing does not work well enough in China due to the more complex geological structure, higher in-situ pressure and lower permeability.

In my group, the framework for the major mechanics research related to shale gas exploitation is shown in Fig. 1.

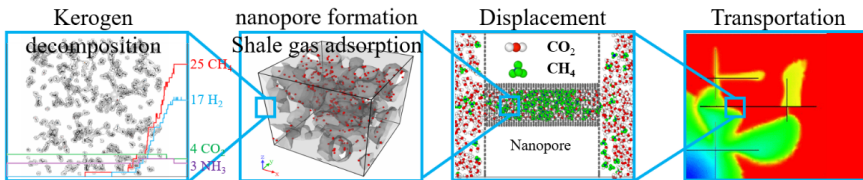


Fig 1. Kerogen decomposition, shale gas adsorption, displacement and transport in shale gas recovery

Focus of this talk is on a theoretical study on the hydraulic fracturing in the enhancement of the shale gas production. The non-squared-root stress singularities in both the fluid and solid are reexamined for the traditional hydraulic fracturing models. Shown in Fig. 2, the combined effects of the pressure and the flow-induced shear stress on the crack surface will be discussed [1, 2]. The boundary integral equations of displacement and stress fields are derived for the full space by using the integral-transform method. The analytical solution shows that a negative shear stress acting on the upper crack surface tends to inhibit the crack. Due to the shear stress, the tangential stress component is suggested rather than the normal stress component to calculate the stress intensity factor. When the viscosity of the fractu-

ring fluid is small, the largest values of circumferential stress, maximum principal stress, and strain energy density locate in front of the crack tip, indicating a straight crack path. While in the viscosity-dominant regime, the shear stress leads to singular stress intensity factors and non-physical strain energy release rates. And the circumferential stress and the maximum principal stress are largest at the crack surfaces, revealing potential crack branches on the crack surfaces behind the crack tip. This fundamental understanding of the fluid-solid problem may guide the proper design of hydraulic fracturing.

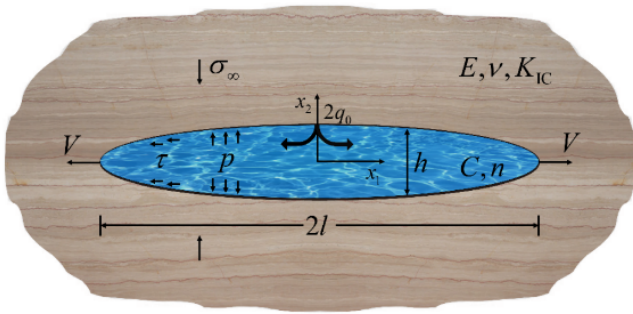


Fig. 2. Schematic of hydraulic fracturing, showing the flow of a viscous fluid into a Griffith-type crack at a constant flow rate

1. Shen W.H, Zhao Y.P. Quasi-static crack growth under symmetrical loads in hydraulic fracturing // ASME Journal of Applied Mechanics. – 2017. – **84(8)**: 081009.
2. Shen W.H, Zhao Y.P. Combined effect of pressure and shear stress on penny-shaped fluid-driven cracks // ASME Journal of Applied Mechanics. – 2018. – **85(3)**: 031003.

**THERMOMECHANICAL INSTABILITY AND FATIGUE LIFE
PREDICTION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC NANOCOMPOSITE
ROD UNDER COMBINED STATIC AND HARMONIC LOADING**

Yaroslav Zhuk, Mohammad Hashemi

Taras Shevchenko National University of Kyiv (Ukraine)

y.zhuk@i.ua

Thermal instability for polymer and nanocomposite bodies, which often leads to thermal failure of the elements [1], is one of the most interesting effect under quasi-static deformation. In this work, the particular problem of the vibro-heating of a nanocomposite rod with a circular cross section is under consideration. The length of the rod and the cross sectional radius are L and R , respectively. The nanocomposite rod is subjected to both static compressive and low amplitude harmonic loading, $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$, applied at the free end. It is assumed that excitation frequency, ω , is small enough to prevent any parametric or sub- as well as super-harmonic resonances to occur. For the loading forces and amplitudes, the inequality $P_1 \ll P_0 < P_{cr}$ holds where P_{cr} is the Eulerian critical load so that quasi static theory of viscoelasticity can be applied.

The relation between stress and strain in the viscoelastic rod is of the well-known form: $\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \omega t$, $\varepsilon(t) = \sigma_0 J^\infty + \sigma_1 \operatorname{Re} [\tilde{J} e^{i\omega t}]$, where J^∞ is equilibrium creep compliance and $\tilde{J} = J' - iJ''$ is complex creep compliance; σ_0 and σ_1 are magnitudes of the steady compressive and harmonic stress, respectively. The period-averaged energy dissipation rate, $\langle \bar{D}' \rangle$, (see Eq. (1)) is used as a heat source in the transient heat conduction equation for one dimension problem to predict the temperature evolution over the viscoelastic rod. Therefore, the equation takes the form Eq. (1). Also, the temperature is considered to have uniform distribution along the length of the rod.

$$\frac{d\theta^*}{dt} = -\frac{\alpha_t S}{C_V V} \theta^* + \frac{\alpha_t S}{C_V V} + \frac{\omega}{2C_V \theta_0} J'' \sigma_1^2, \quad \langle \bar{D}' \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \sigma(\xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi = \frac{\omega}{2} J'' \sigma_1^2, \quad (1)$$

where $\theta^* = \theta/\theta_0$ is normalized temperature. Coefficients C_V and α_t are specific heat capacity for constant volume and heat transfer coefficient through the rod surface, respectively; S , V and θ_0 are the lateral surface area, volume of the rod and

temperature of surrounding media, respectively. The mentioned heat conduction equation must be supplemented by the appropriate boundary and initial conditions.

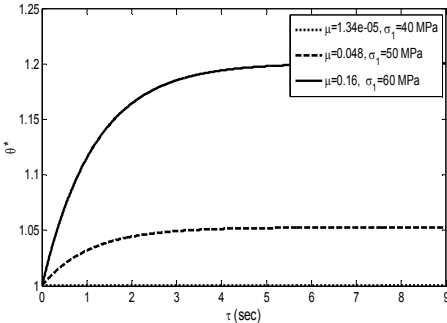


Fig. 1.

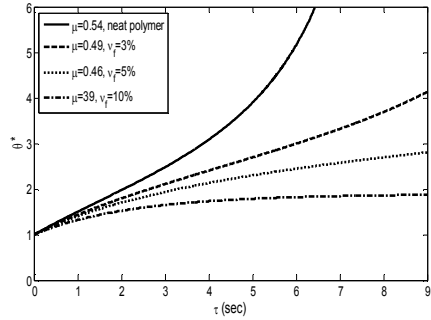


Fig. 2.

Nanocomposite rod with unidirectional orientation of nanofibers when CNTs nanofibers aligned along the rod length as well as case of randomly oriented nanofibers were investigated. Dependence of the dimensionless temperature on time in nanocomposite rod with random orientation for 3% CNTs nanofibers under different amplitude of harmonic loading, $\sigma_1 = 40, 50$ and 60 MPa are shown in Fig. 1. It is clearly observed that with increasing of excitation amplitude of cyclic loading the loss creep compliance modulus and load parameters increase. The curves in the figure show, there exists stationary self-heating regime and, therefore, thermal stability takes place under considered range of excitation amplitudes.

Influence of volume fraction on thermal stability of the rod with unidirectional orientation for different volume fraction of CNT nanofibers under constant amplitude of harmonic loading, $\sigma_1 = 75$ MPa, are presented in Fig. 2. It is clearly observed that increasing volume fraction of fibers causes decrease in the loss creep compliance modulus at the constant amplitude of cyclic loading while the heat transfer coefficient of rod improves. This figure shows that the rod with 10% unidirectionally oriented CNT nanofibers is completely capable to provide stationary thermal state occurs.

1. Hashemi M., Zhuk Y. Prediction of thermal instability–initiated performance losses by nanocomposite structure elements under cyclic loading // Strength of Materials Journal. – 2017. – 49, No 5. – P. 635-651.

ТЕРМОМЕХАНІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ТА ВТОМНА ПОВІДІНКА ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО НАНОКОМПЗИТНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ СТАТИЧНОМУ ТА ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розроблено метод прогнозування втрати роботоздатності нанокомпозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості, який ґрунтується на моделі моногармонічної апроксимації реакції матеріалу на циклічне навантаження, амплітудних співвідношеннях між основними польовими змінними та концепції комплексних модулів.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕХАНІЦІ
ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ**

УДК 539.3

**ВАРІАНТ МОДЕЛІ БІМЕТАЛЕВОГО НЕФЕРОМАГНІТНОГО
ТЕРМОПРУЖНОГО ШАРУ ЗА ДІЇ ОДНОРІДНОГО
НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ**

Ара Аветісян, Роман Мусій, Наталія Мельник, Дмитро Тарлаковський

Інститут механіки НАН Вірменії;

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна);

Московський держуніверситет ім. М.В. Ломоносова (Росія)

ara.serg.avetisyan@gmail.com; musiy@lp.edu.ua; tdvhome@mail.ru

Математичний опис процесів, що виникають у виробках за електромагнітних дій, є доволі складний. В зв'язку з цим у літературі різні властивості виробів у процесі дії, а також закономірності їх зміни залежно від характеристик матеріалу і параметрів дії вивчають з використанням спрощених моделей таких виробів, чи їх елементів, зокрема моделі однорідного електропровідного шару [1]. Такі моделі дають змогу проведення широкого аналізу розглядуваних властивостей у процесі електромагнітної дії, в т.ч. теплових і механічних, отримання фундаментальних закономірностей їх поведінки, а також певних конкретних висновків, що можуть бути використані при удосконаленні технологічних процесів виготовлення чи обробки реальних виробів складної геометрії у виробництві.

У даний час в інженерних застосуваннях часто використовують біметалеві елементи та електромагнітні дії як технологічні фактори виробництва. Для опису змін теплових і механічних властивостей біметалевого шару, зумовлених електромагнітною дією, та побудови методику розв'язування відповідних задач математичної фізики, що виникають при цьому, необхідне опрацювання моделі неферомагнітного термопружного біметалевого шару за дії нестационарних електромагнітних полів (ЕМП) різних типів. У цій моделі враховуються головні особливості розглядуваних явищ за вказаної дії, на основі яких вдається проаналізувати зміни теплових і механічних властивостей шару за розглядуваних типів електромагнітних дій з метою отримання згаданих загальних закономірностей зміни цих властивостей. Такі закономірності можуть бути використані при побудові раціональних режимів електромагнітної обробки конкретних виробів у виробничих процесах.

Запропоновано вище окреслену модель біметалевого шару з плоскопаралельними межами за дії однорідного нестационарного ЕМП. Вплив ЕМП на процеси теплопровідності і деформування враховано через зумовлені цим полем фізичні фактори – Джоулеве тепло і пондеромоторні сили. Ці фактори призводять до виникнення нестационарних температурних і механічних полів. Пондеромоторні моменти внаслідок паралельності векторів індукції і напруженостей електричного та магнітного полів дорівнюють нулю. Приймається, що ЕМП належить до класу «неруйнівних», дія яких ще не приводить до виникнення ударних хвиль (тривалість імпульсу $t_i < 0,01s$ за розгляду імпульсних полів) та з максимальними значеннями напруженості магнітного поля в тілі $H_{max} \leq 10^7 A/m$. За таких припущень ЕМП відносно тіла можна вважати зовнішньою дією, яка проявляється вказаними вище факторами при неістотності впливу рухомості середовища на параметри ЕМП.

Сформульовано відповідні початково-крайові задачі, що описують розглядувані електромагнітні, теплові і механічні властивості в процесі дії ЕМП у кожному зі складових шарів. За ключові функції прийнято: дотичну (відносно основ шару) компоненту вектора напруженості магнітного поля, температуру та нормальні компоненти тензора динамічних напружень. При визначенні даних функцій використано їх квадратичну апроксимацію відносно товщинної координати в кожному зі складових шарів. У результаті вихідні початково-крайові задачі стосовно ключових функцій зведено до відповідних задач Коші на інтегральні (по пакету шарів) характеристики цих функцій при точному виконанні крайових, контактних і початкових умов. З використанням інтегрального перетворення Лапласа по часу записано загальні розв'язки отриманих задач Коші, які подано у вигляді згорток функцій, що описують однорідні розв'язки та задані параметри електромагнітної дії, теплові і механічні крайові умови. Дані розв'язки дають змогу виконати широкий аналіз теплових і механічних властивостей біметалевих елементів, несучої здатності наявної системи і властивостей контактного з'єднання за різних типів електромагнітних дій, що застосовуються у технологічних виробничих процесах.

Як приклади розглянуто дії одиничного електромагнітного імпульсу та імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди в режимах згасної синусоїди, а також з імпульсним модульним сигналом.

1. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферромагнетних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.

A VARIANT OF THE MODEL OF BIMETALLIC NONFERROMAGNETIC THERMOELASTIC LAYER UNDER THE ACTION OF HOMOGENEOUS NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD

The variant of the model of bimetallic conductive layer for the homogeneous action of a non-stationary electromagnetic field is proposed. It is based on the influence of pulsed electromagnetic fields of characteristic types on the thermoelastic behavior of a given layer.

**ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ СТАН БІМЕТАЛЕВОЇ ПЛАСТИНИ,
ВИГОТОВЛЕНОЇ ЗІ СТАЛІ ТА НІКЕЛІДУ ТИТАНУ,
ЗА ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ****Богдан Боженко, Олексій Онишко, Анджей Метельські, Стефан Моринь***Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;**Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;**Політехніка Опольська (Польща)*b.bozhenko@po.opole.pl; onyszko@ukr.net

В сучасній техніці широко застосовуються деталі машин і механізмів, виготовлені на основі сплавів, в яких у певному діапазоні температур відбувається фазове мартенситне перетворення. Такі матеріали в літературі прийнято називати матеріалами з пам'яттю форми. Раніше [1] за участю авторів було розроблено варіант математичної моделі кількісного опису термомеханічних процесів у тілах з таких матеріалів. У даній роботі з використанням цієї моделі досліджено напружений стан і зміну фазового складу двошарової пластини, в якій для матеріалу одного з шарів (а саме, сплаву титану з нікелем) притаманний ефект пам'яті форми.

Розглядається біметалева пластинка товщиною h ($0 \leq x' \leq h$), що знаходиться під дією згинального моменту M' і розтяжного зусилля P' . Один із шарів пластини (шар I – область $x'_0 \leq x' \leq h$) виготовлений із нікеліду титану, а другий (шар II – область $0 \leq x' \leq x'_0$) – із конструкційної сталі. Приймається, що у початковому стані матеріал шару I перебуває в аустенітній фазі (відносний вміст мартенситу $\Xi = 0$). Початкова температура T_1 пластини постійна. Одночасно з навантаженням пластинка зазнає однорідного нагріву до температури $T_2 > T_1$ або охолодження до температури $T_3 < T_1$. Значення температур T_1 , T_2 і T_3 знаходяться в інтервалі, на якому навіть незначні напруження можуть викликати виникнення мартенситу. За таких умов визначається фазовий і напружений стан пластини.

За розглядуваного стану в частині $x_1 \leq x \leq h$ шару I відбувається фазове перетворення і, відповідно, утворюється суміш аустеніту і мартенситу. В частині $x_0 \leq x \leq x_1$ фазовий склад залишається незмінним ($\Xi = 0$). При цьому розподіл напружень в пластині описується виразом

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \frac{E_0}{1-\nu_0} \left[b_0(x-x_0) + b_1(x_0-x_1) - \frac{D_t \beta^M}{6D_1} t - \frac{\alpha_0 t}{3} \right], & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{E}{1-\nu} \left[b_1(x-x_1) - \frac{D_t \beta^M}{6D_1} t - \frac{\alpha t}{3} \right], & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{3E}{D_2} \left[D_3 \left\{ b_2(x-x_1) - \frac{D_t \beta^M}{6D_1} \right\} + (1-2\mu)\rho \left(K_{\xi}^M \alpha + K_{i\xi}^M \beta^M \right) t \right], & x_1 < x \leq 1. \end{cases}$$

Після зняття навантаження і повернення температури до початкової ($P=0, M=0, t=0$) фазовий стан, досягнутий в шарі I на попередньому етапі, не змінюється. Тому в пластині фіксуються залишкові напруження

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \frac{E_0}{1-\nu_0} \left[a_0^* + b_0^* x \right], & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{E}{1-\nu} \left[a_1^* + b_1^* x \right], & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{E}{1-\nu} \left[a_2^* + b_2^* x + \left(\frac{2D_1}{D_2} b_2(x-x_1) + \frac{D_t \beta^M}{3D_2} t \right) \right], & x_1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

На основі отриманих аналітичних розв'язків для різних значень і знаків зусилля P' та температур T_2 нагріву і T_3 охолодження проведено числові розрахунки розподілу залишкових напружень для пластини, один з шарів якої виготовлений із сталі 60Г, а другий – із нікеліду титану.

Виявлено істотний вплив фазового перетворення на розподіл залишкових напружень за товщиною пластини. Результати досліджень можуть бути використані при розробці режимів експлуатації двошарових функціональних елементів машин і механізмів, одна зі складових частин яких виготовлена з матеріалу з пам'яттю форми, за забезпечення оптимального рівня напружень.

1. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // *Машинознавство*. – 2003. – № 11. – С. 14-17.

INFLUENCE OF THERMOMECHANICAL LOADING ON THE PHYSICOMECHANICAL STATE OF BIMETAL PLATE MADE OF STEEL AND NITINOL

On the base of a model for quantitative description of a thermomechanical behavior of shape memory materials built with using the methods of solid mechanics and thermodynamics of non-equilibrium processes the phase composition and stress state of two-ply plate made of steel and nitinol under bending and heating-cooling is researched. The calculations made for the various options of mechanical loading and temperature. Found that under such conditions in layer occurs variable thickness distribution of martensite, resulting in the formation of inhomogeneous residual stress-strained state.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ТВЕРДИХ
ТІЛАХ ПРИ СТРУКТУРНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ ЗА ДІЇ
ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ**

**Богдан Боженко, Олексій Онишко,
Аніда Станік-Беслер, Адріан Торський**

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Політехніка Опольська (Польща)

b.bozhenko@po.opole.pl; onyzsko@ukr.net; a.stanik-besler@po.opole.pl

В даний час широко застосовуються матеріали, в яких в певному діапазоні температур при дії теплового та механічного навантаження можуть мати місце різні процеси, що суттєво впливають на структуру матеріалу тіла (хімічні реакції, фазові перетворення, рекристалізація, ефект пам'яті форми і т.п.). При практичному використанні таких матеріалів часто нагрів здійснюється з допомогою електричного поля [4]. Останнім часом зростає інтерес до матеріалів, в яких в одній з фаз проявляються магнітні властивості [3]. Тому виникає потреба в побудові моделі для кількісного опису термомеханічної поведінки твердих тіл в області структурних перетворень при силовому і температурному навантаженні з врахуванням дії електричного поля.

В даній роботі на основі проведених раніше розробок [1, 2] пропонується така модель, побудована з використанням методів механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів за врахування електричного стану відповідної термодинамічної системи. В основу термодинамічного опису розглядуваної системи покладається гіпотеза локальної термодинамічної рівноваги. За параметри стану, що відображають теплові процеси, вибираємо абсолютну температуру T та питому ентропію S . Структурні перетворення різного роду описуємо [1] за допомогою відносного вмісту фази, що утворюється, Ξ_j ($0 \leq \Xi_j \leq 1$) в одиниці об'єму, та питомої спорідненості A_j ($j=1, 2, \dots, n$) j -го перетворення. Механічні впливи, пов'язані із зміною об'єму, враховуємо через інваріанти тензора напружень σ і тензора деформацій e , а пов'язані із зміною форми тіла – відповідно через інваріанти σ_i та e_i [1]. За параметри стану, що відповідають процесу електропровідності, вибираємо електричний потенціал Φ та електричний заряд одиниці маси ω [2].

За функцію термодинамічного стану приймаємо вільну енергію $F = F(e, e_i, T, \Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_j, \dots, \Xi_n)$. Тоді узагальнене рівняння Гіббса для об-

ластей тіла, в яких відбуваються структурні перетворення, матиме вигляд

$$dF = -SdT + 3\sigma de/\rho + \sigma_i de_i/\rho + \sum_{j=1}^n A_j d\Xi_j - \omega d\Phi. \quad (1)$$

Розклавши вільну енергію F у степеневий ряд в околі вибраного початкового стану, обмежившись квадратичними членами розкладу і скориставшись (1), одержимо систему рівнянь стану моделі:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + (c_i/T_0)t + (K\alpha/\rho)e + (G\alpha'/\rho)e_i - \sum_{j=1}^n K_{t\xi_j} \xi_j - \gamma C\varphi, \\ 3\sigma &= K\left(e - \alpha t - \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j - \eta\varphi\right) + K'e_i, \\ \sigma_i &= G\left(e_i - \alpha't - \sum_{j=1}^n \beta'_j \xi_j - \eta'\varphi\right) + K'e, \\ A_j &= A_{0j} + \sum_{k=1}^n K_{\xi_j k} \xi_k + K_{t\xi_j} t - (K\beta_j/\rho)e - (G\beta'_j/\rho)e_i + K_{\xi_j\varphi} \varphi, \\ \omega &= C\left(\varphi - \gamma t - \sum_{j=1}^n K_{\xi_j\varphi} \xi_j\right) + (K\eta/\rho)e + (K\eta'/\rho)e_i, \end{aligned} \quad (2)$$

де $t = T - T_0$, $\xi_j = \Xi_j - \Xi_{0j}$, $\varphi = \Phi - \Phi_0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Використавши відому методику побудови моделей кількісного опису механічної поведінки деформівних тіл за наявності полів різної фізичної природи [1, 2], балансові та кінетичні співвідношення, рівняння стану та співвідношення Коші, а також рівняння Максвелла, отримуємо систему диференціальних рівнянь моделі для областей, в яких відбуваються фазові перетворення. Доповнивши її відповідними початковими і крайовими умовами, можна цільово аналізувати напружено-деформований стан тіл, в яких відбуваються зміни структури, за дії термосилового навантаження та електричного поля.

1. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // *Машинознавство*. – 2003. - № 11. – С. 14-17.
2. Онишко О.Є. Моделювання фізико-механічної поведінки тіл, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, за наявності електричного поля // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2017. – 53, № 4. – С. 107-111.
3. Auricchio F., Bessoud A.-L., Reali A., Stefanelli U. A three-dimensional phenomenological model for magnetic shape memory alloys // *GAMM-Mitt.* – 2011. – 34. – No. 1. – P. 90-96.
4. Musialek J., Filip P., Nieslanik J. Titanium-nickel shape memory clamps in small bone surgery // *Arch. Orthop. Trauma Surg.* – 1998. – 117. – P. 341-344.

MODELLING OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN SOLIDS WITH STRUCTURE TRANSFORMATIONS SUBJECT TO ELECTRICAL ACTION

A model for quantitative description of a thermomechanical behavior of solids allowing for structure transformations under electric field action is proposed. As a state function the Helmholtz free energy is chosen, the state equations system is written.

УДК 539.3

ДО ПРОГНОЗУВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЧАВУНІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЇХ МІКРОСТРУКТУРИ

Олексій Водка

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

Oleksii.Vodka@gmail.com

Контроль механічних властивостей виливків з чавуну в практиці виробництва часто проводиться шляхом вирізання зразків із наступним їх випробуванням. Такий підхід на сьогоднішній день добре відпрацьований і дозволяє отримати адекватні результати в найкоротші терміни. До недоліків такого підходу можна віднести необхідність виготовлення зразків, що призводить до додаткових витрат на обробку матеріалу, а також використання спеціальних машин для випробувань. Це приводить до витрат на їх купівлю, обслуговування, ремонт та утилізацію.

Альтернативою такому підходу може бути використання методів кількісної металографії і мікромеханіки матеріалів. При цьому потрібно отримати оптичний знімок мікроструктури чавуну в області, що цікавить, а потім провести математичне моделювання його механічних властивостей.

У даній роботі розглядається алгоритм визначення механічних властивостей чавунів ВЧ35-ВЧ40 на основі фотографій їх мікроструктури. Для реалізації алгоритму на першому етапі отримується зображення мікроструктури. На наступному етапі визначаються пружні константи представленої мікроструктури. Для цього проводиться серія розрахунків на розтягнення і зсув. На основі цих розрахунків визначається модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву.

Результат чисельного моделювання показав для розглядуваних чавунів хорошу відповідність отриманих розрахунковим шляхом значень модуля пружності, коефіцієнта Пуассона і модуля зсуву з довідковими даними.

DETERMINING MECHANICAL PROPERTIES OF CAST IRON BASED ON ANALYSIS OF MICROSTRUCTURE

In this paper an algorithm for determining the mechanical properties of cast irons on the basis of photos of their microstructure is considered. To determine the elastic constants of the presented microstructure a series of numerical calculations for tension and shear loads is performed. On the basis of these calculations, a modulus of elasticity, a Poisson ratio and a shear modulus are determined.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАЛИШКОВИХ СТРУКТУРНОГО І НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ СТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА НАГРІВУ РУХОМИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА ПРИ ВРАХУВАННІ ВИБРАНИХ ТЕРМІЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ФАКТОРІВ

Томаш Волчаньські, Тереза Козакевич, Івона Мулицька

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;
Політехніка Опольська (Польща)*

t.wolczanski@po.opole.pl; kozakevych.tv@gmail.com; i.mulicka@po.opole.pl

У зв'язку з широким використанням локального високотемпературного нагріву, який реально здійснюється рухомими розподіленими джерелами тепла у виробничих процесах виготовлення тонкостінних елементів конструкцій, актуальними є дослідження впливу особливостей умов нагріву, зокрема теплообміну з навколишнім середовищем, на залишкові фазовий і напружений стани таких елементів з метою зниження рівня залишкових напружень та деформацій [2].

У роботі відому математичну модель дослідження і оптимізації залишкових фазового та напруженого станів маловуглецевої низьколегованої сталеві пластини за технологічного нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла при різному розміщенні центрів локалізації цих джерел та опрацьовану на її основі розрахункову схему узагальнено на випадок наявності інших (додаткових) умов нагріву – різної вихідної температури пластини (попередній однорідний підігрів), додаткового стаціонарного поля температур (супутній підігрів) [1], змінного параметра розсіювання теплової енергії в джерелі тепла, локальної теплоізоляції основ.

Проведений числовий аналіз та комп'ютерна симуляція відповідних задач розрахункової схеми показали, що значення початкової постійної температури пластини (попереднього однорідного підігріву), а також параметра розсіювання в джерелі (який характеризує розподіл теплової енергії в ньому) істотно впливають на максимальне значення мартенситної складової та інтенсивність залишкових напружень (у розглядуваному випадку на 10÷30 %) у порівнянні з нагрівом джерела тепла при вибраних значеннях параметрів.

Від значення параметра розсіювання теплової енергії в джерелі залежить кінцевий розподіл залишкових напружень у пластині. За його зростання при підтриманні максимальної постійної температури в зоні термічного впливу необхідне збільшення потужності джерела.

Досліджено залежність максимального вмісту мартенситної складової та інтенсивність залишкових напружень від параметрів стаціонарного температурного поля підігріву (супутній підігрів) за наявності такого додаткового джерела підігріву – локального стаціонарного температурного поля підігріву. При цьому можливе зменшення значень мартенситної складової та рівня залишкових структурних напружень (до 30 % у розглядуваному випадку) у порівнянні з нагрівом тільки рухомим нормально розподіленим джерелом тепла з одним центром локалізації [1].

Опрацьовано також, оснований на методі зважених нев'язок у поєднанні з методом скінченних елементів, методику дослідження залишкового фазового складу, у тому числі максимального вмісту мартенситу, напруженого стану і розмірів зони термічного впливу в розглядуваній пластині при термоізоляції окремих локальних підобластей її основ. Локальна теплоізоляція пластини реалізується координатною залежністю на них значення коефіцієнта теплообміну з навколишнім середовищем. Отримано, що за рахунок вибору ширини зони теплоізоляції можна зменшити в досліджуваному випадку максимальні значення максимальної складової та інтенсивності залишкових напружень на 10-30 % у порівнянні з випадком конвективного теплообміну. За теплової ізоляції не спостерігаються якісні зміни у розподілах залишкових фазового складу і напружень. За цільової теплоізоляції спостерігається процес охолодження матеріалу і таким чином збільшується вміст рівноважних фаз в охолодженому сталевому виробі та зменшується нерівномірність розподілу фазових складових у структурі.

Однак значення параметрів, що описують обговорені додаткові термічні чи технологічні умови, менш суттєво впливають на залишкові фазовий склад і рівень напружень, ніж значення параметрів додаткових розподілених джерел тепла за різних центрів локалізації.

1. *Гачкевич О., Козакевич Т., Гаєк М.* Залишкові фазовий і напружений стани сталеві пластини, зумовлені рухомим розподіленим джерелом тепла і стаціонарним локальним температурним полем // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Фізико-математичні науки. – 2015. – 5. – С. 55-58.
2. *Hachkevych O., Astashkin V., Kozakevych T. et al.* Calculation of the phase content of a steel plate at local heating // *Metallic Materials (Kovové Materiály)*. – 2007. – 45, № 6. – P. 319-325.

ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF RESIDUAL STRUCTURE AND STRESS DISTRIBUTIONS OF STEEL PLATES SUBJECTED TO MOVING HEAT SOURCES TAKING INTO ACCOUNT THERMAL AND TECHNOLOGICAL FACTORS

Numerical analysis and computer simulation of the corresponding problems showed that the additional thermal or technological conditions less influence the residual phase distribution and level of stress than the values of the parameters of additional distributed heat sources for different localization centers.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В АЛГОРИТМИ
ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ НАГРІВУ КОНВЕКТИВНИМ СПОСОБОМ
І ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК**

Микола Гачкевич, Карен Казарян, Богдан Тріщ

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Інститут механіки НАН Вірменії;

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

dept13@iapmm.lviv.ua; ghkarren@gmail.com; bogdan.trishch@gmail.com

При дослідженні та оптимізації напружено-деформованого стану тонких кусково-однорідних оболонок, які працюють в умовах нестационарного нагріву конвективним способом і джерелами тепла, необхідно попередньо визначити температурне поле при заданих початкових і граничних умовах. В зв'язку з цим виникає потреба в постановці і розробці методики розв'язування відповідної прямої задачі теплопровідності для таких оболонок.

Приймаємо, що температурне поле в оболонці постійної товщини $2h$, що складається з n однорідних частин, описується в змішаній ортогональній криволінійній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t_{(k)}}{\partial \gamma^2} + p_{(k)}^2 t_{(k)} = -\frac{Q_{*(k)}}{\lambda_{(k)}}, \quad k = \overline{1; n} \quad (1)$$

за початкової умови

$$t_{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, 0) = t_0(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \equiv \text{const} \quad (2)$$

та крайових умов першого, другого чи третього роду, а на поверхні контакту різнородних частин оболонки виконуються умови ідеального теплового контакту. Тут $t_{(k)}$ – температура оболонки, $k = \overline{1; n}$ – індекс, введений для позначення величин, що відносяться до областей однорідності. В кожній складовій частині можуть діяти джерела тепла густиною $Q_{*(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau)$.

Для отримання наближеного розв'язку задачі теплопровідності (1), (2) апроксимуємо розподіл температури за товщинною координатою кубічним поліномом

$$t_{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{i=1}^m b_{i-1, k}(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \gamma^{i-1}, \quad k = \overline{1; n}. \quad (3)$$

Коефіцієнти полінома $b_{i-1, k}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ представимо через наступні усе-

реднені характеристики температурного поля за товщиною оболонки

$$T_p^{(k)} = \frac{2p-1}{2h^p} \int_{-h}^h t_{(k)} \gamma^{p-1} d\gamma, \quad p = \overline{1; m-1}, \quad k = \overline{1; n} \quad (4)$$

і задані крайові умови.

Рівняння для визначення характеристик $T_p^{(k)}$ знайдемо, помноживши рівняння (1) на γ^{p-1} ($p=1,2$) і далі проінтегрувавши результат по цій координаті з врахуванням співвідношень (4). При цьому отримаємо:

$$\left(\Delta - \frac{1}{a_{(k)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_1^{(k)} - 2R_{1,k} T_1^{(k)} - 2R_{2,k} T_2^{(k)} = -W_1^{(k)} - 3(R_{4,k} t_{1(k)}^c + R_{5,k} t_{2(k)}^c)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{a_{(k)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_2^{(k)} - 6R_{3,k} T_2^{(k)} - 6R_{2,k} T_1^{(k)} = -W_2^{(k)} - 15(R_{7,k} t_{1(k)}^c - R_{6,k} t_{2(k)}^c), \quad (5)$$

де: $R_{i,k}$ – деякі постійні величини, що виражаються через коефіцієнта Біо; $t_{1(k)}^c$, $t_{2(k)}^c$ – температура зовнішнього середовища зі сторони зовнішньої та внутрішньої поверхні оболонки (за крайових умов третього роду);

$$W_1^{(k)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \lambda_k^{-1} Q_{*k}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) d\gamma, \quad W_2^{(k)} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma \lambda_k^{-1} Q_{*k}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) d\gamma.$$

Невідомі коефіцієнти полінома (3) визначаємо з системи рівнянь, яку отримуємо безпосередньою підстановкою подань температури у вигляді полінома (3) в крайову умову і в вирази для усереднених характеристик (4).

За неоднорідних крайових умов 1-го і 2-го роду розв’язок задачі шукаємо у вигляді суми двох функцій, перша з яких визначається з рівняння теплопровідності при однорідних крайових умовах, а друга – у представленні, що задовольняє задані крайові умови на зовнішніх поверхнях. Розв’язки таких задач знаходимо за вищенаведеною схемою (при крайовій умові 3-го роду).

За неоднорідних початкових умов з використанням кубічної апроксимації розв’язок будемо у вигляді суми двох функцій, де перша задовольняє вихідне рівняння при нульовій початковій умові, а друга є добутком початкового значення температури і функції $\exp(-t)$. За різних крайових і початкових умов, як приклад, визначено і досліджено температурне поле для скляної кусково-однорідної циліндричної оболонки, що складається з трьох різномірних частин.

METHOD OF DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS IN THE ALGORITHM OF OPTIMIZATION OF HEAT MODES BY CONVECTIVE METHOD AND SOURCES OF HEAT OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS SHELLS

The method of solving the heat conduction equations during heating by a convective method and heat sources is proposed.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ І ТЕПЛОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ
В ПРЯМИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОМЕХАНІКИ В АЛГОРИТМАХ
ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА НАПРУЖЕНИМ СТАНОМ РЕЖИМІВ
ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ
СКЛЯНИХ ОБОЛОНОК**

Микола Гачкевич, Анна Козьярська, Борис Чорний, Георгій Шинкаренко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Політехніка Опольська (Польща);

*Львівський філіал Дніпровського національного університету
залізничного транспорту (Україна)*

dept13@iapmm.lviv.ua; a.kozjarska@po.opole.pl; h.shynkarenko@po.opole.pl

У прямих задачах, наявних у числових алгоритмах оптимізації за цільовими критеріями, зокрема за напруженим станом, режимів технологічного нагріву кусково-однорідних скляних оболонок, для зменшення математичної складності часто використовують поліноміальну апроксимацію температури відносно товщини. Така апроксимація суттєво спрощує структуру і вирази переміщень, деформацій і напружень в розглядуваних оболонкових системах, які є вихідними в згаданих алгоритмах оптимізації. В роботі запропоновано моделювання температури та відповідної їй теплової деформації з використанням поліноміального подання. Така апроксимація вносить певну специфіку в методику визначення параметрів відповідних механічних характеристик.

За базову при постановці прямих задач термомеханіки прийнято квазі-статичну теорію термопружності тонких термочутливих скляних оболонок (за залежного від температури тільки коефіцієнті лінійного теплового розширення) при запропонованій апроксимації відносно товщинної координати температури і теплової деформації. Розглянуто режим практично однорідного відносно повздожних координат конвективного нагріву кусково-однорідних оболонок зі сторони зовнішньої поверхні, який широко використовується в технологіях термообробки. Проаналізовано особливості отриманого при цьому теплового і напруженого стану в околі січень з'єднання складових частин оболонок, виготовлених з типів скла, що застосовується у виробництві.

Аналіз виконано з використанням модельного елемента складової оболонки, за який прийнято тонку кусково-однорідну циліндричну оболонку радіуса R , товщини $2h$, що складається з двох різнорідних частин. Внутрішня поверхня розглядуваного елемента (оболонки) теплоізолювана, а на зовнішній – підтримується однорідна змінна в часі температура $t^+(\tau)$. Прийнято,

що температурне поле за товщинною координатою γ змінюється за кубічним законом, вираз якого в безрозмірних координатах можна записати так:

$$t_{(k)}(x, \gamma, \tau) = \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{a_{10}^2}{R^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{h^2} \right) \frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} + h\gamma \left(\frac{1}{5} - \frac{\gamma^2}{3h^2} \right) \frac{a_{10}^2}{R^2} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} - a_{(k)}^2 h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{h^2} \right) \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} - h\gamma a_{(k)}^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{\gamma^2}{3h^2} \right) \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + 2 \left(T_1^{(k)} + \frac{\gamma}{h} T_2^{(k)} \right) \right], \quad (1)$$

де $x = \frac{a_{10}z}{R}$, z – осьова координата, $a_{10} = \frac{3(1-v^2)R^2}{4h^2}$, $k=1,2$. При цьому

усереднені характеристики $T_1^{(k)}, T_2^{(k)}$ температурного поля задовольняють наступну систему диференціальних рівнянь:

$$-\frac{a_{10}^2 h^2}{3R^2} \left(\frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} \right) + \frac{a_{(k)}^2 h^2}{3} \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} + \frac{a_{(k)}^2 h^2}{15} \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + T_1^{(k)} + T_2^{(k)} = t^+,$$

$$\frac{h^2 a_{10}^2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} \right) - a_{(k)}^2 h^2 \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} + \frac{2}{5} a_{(k)}^2 h^2 \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + T_2^{(k)} = 0 \quad (2)$$

при початкових і граничних умовах, які відповідають наявним умовам теплообміну з середовищем.

На основі числових розрахунків встановлено, що для використовуваних в інженерній практиці скляних кусково-однорідних оболонок, які працюють при підвищених температурах, за практично всіх реальних їх товщин збуреннями температури в околі січень спряження можна знехтувати (з точністю, прийнятою в теорії термомеханіки оболонок). Тоді задачу теплопровідності при наявній однорідній температурі зі сторони зовнішньої поверхні оболонки можна вважати одновимірною за товщинною координатою. Це істотно спрощує процедуру отримання розв'язку відповідної задачі термопружності і його структуру. При необхідності багатократного розв'язування прямих задач в алгоритмі числової оптимізації режимів технологічного нагріву такий підхід значно скорочує час розрахунку відповідних режимів цільового нагріву.

Досліджено також особливості напруженого стану в околі перерізів з'єднання скляних складових частин оболонок. Проаналізовано особливості алгоритмів оптимізації режимів, які зумовлені запропонованим підходом.

POLYNOMICAL APPROXIMATION OF TEMPERATURE AND THERMAL DEFORMATIONS IN DIRECT TESTS OF THERMOMECHANICS IN ALGORITHM OF OPTIMIZATION ON THE STRESSED STATE OF TECHNOLOGICAL HEAT MODES OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS GLASS SHELLS

The polynomial approximation of temperature and thermal deformations on the thickness of the shell is proposed, which essentially simplifies the solving of direct problems in the proposed optimization algorithm. The peculiarities of the thermal and stress state in the vicinity of the cross sections of the compound of component parts of the shells are discussed.

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ І НАПРУЖЕННЯ В ЧАСТКОВО ПРОЗОРИХ ТІЛАХ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОРОЖНИН ТА ВІДБИВАЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ

Олександр Гачкевич, Орест Гуменчук, Анджей Маринович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Політехніка Опольська (Польща)

dept13@iapmm.lviv.ua; or1961@ukr.net; a.marynowicz@po.opole.pl

Широке застосування елементів з частково прозорих матеріалів (зокрема, скла) в різноманітних пристроях, використання при їх виготовленні променевого нагрівання чи наявність такого опромінення за експлуатації цих пристроїв приводять до потреби в ефективних методиках дослідження зумовленим тепловим випромінюванням фізико-механічних і радіаційних процесів в частково прозорих тілах з метою прогнозування необхідних функціональних та міцнісних параметрів як розглядуваних елементів, так і пристроїв в цілому. Потреби практики зумовлюють також необхідність врахування відбивачів променевої енергії (які є елементами практично кожної випромінюючої системи) [1, 9], наявність конструкційних порожнин, а також спектральних залежностей радіаційних характеристик випромінювачів і відбивачів (за врахування їх нагрівання) [3]. Ці залежності в сукупності з аналогічними для поглинальних характеристик матеріалу частково прозорого тіла визначають ту кількість енергії випромінювання, яка перетворюється в тепловиділення в тілі і зумовлює виникнення полів температури і напружень.

У даній роботі запропоновано методику дослідження зумовлених тепловим опроміненням (чи опроміненням довільного спектрального складу) термомеханічних процесів у частково прозорих тілах за врахування наявності відбивачів, середовища в порожнинах тіла за його нагрівання та спектральних радіаційних характеристик випромінюючих і відбиваючих поверхонь. Вона базується на співвідношеннях феноменологічної теорії випромінювання [5, 6, 8] та квазістатичної термопружності [7], де вплив теплового опромінення враховано через об'ємні тепловиділення внаслідок поглинання матеріалом тіла енергії випромінювання [2, 4].

Проведений аналіз розв'язків відповідних складових задач (до яких зведено вихідну задачу), отриманих на основі запропонованої методики, для частково прозорих тіл канонічної форми (шар, порожнисті циліндр та куля) за однорідного відносно просторових координат зовнішнього опромінення

дав можливість оцінити вплив на термонапружений стан цих тіл як спектральних, так і інтегральних радіаційних характеристик випромінюючих та відбиваючих поверхонь [3, 5, 6, 8], а також виявити при цьому ряд закономірностей, пов'язаних з наявністю відбивачів променевої енергії та врахуванням властивостей середовища в порожнинах тіла.

Як приклад, опрацьовано режими знегажування певних типів ламп-фар з використанням променевого нагрівання, окремі з яких перевірені експериментально.

Отримані результати становлять інтерес при розробці оптимальних за енергозатратами чи напруженнями режимів технологічного променевого нагрівання конкретних виробів з частково прозорих матеріалів, а також для оцінки допустимих меж зміни параметрів термомеханічного навантаження та теплового випромінювання, при яких зберігаються функціональні властивості та міцність таких виробів.

1. *Арендарчук А.В., Слободской А.П.* Электротермическое оборудование направленного излучения. – М: Энергоатомиздат, 1991. – 80 с.
2. *Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецкий Р.Ф.* Термомеханика тел низкой электропроводности при действии электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 39-43.
3. *Воронкова Е.М., Гречушиников Б.Н., Дистлер Г.И., Петров И.П.* Оптические материалы для инфракрасной техники. – Москва: Наука, 1965. – 335 с.
4. *Гачкевич А.Р.* Термоупругость электропроводных тел, находящихся под воздействием электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот. – Львов, 1993. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача; № 10-93).
5. *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.
6. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукодел А.С.* Теплопередача. – Москва: Энергоатомиздат, 1981. – 416 с.
7. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
8. *Рубцов Н.А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с.
9. *Теплообмен излучением: Справочник / А.Г. Блох, Ю.А. Журавлев, Л.Н. Рыжков.* – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.

**TEMPERATURE FIELDS AND STRESSES IN SEMITRANSSPARENT SOLIDS
WITH CAVITIES SUBJECTED TO THERMAL RADIATION
IN THE PRESENCE OF REFLECTORS**

The research methodology of thermomechanical processes in semitransparent solids subjected to thermal radiation, taking into account the presence of reflectors, the medium in body cavities during its heating and spectral radiation characteristics of radiating and reflective surfaces, is proposed. It is based on relations of phenomenological theory of radiation and quasi-static thermoelasticity, where influence of thermal irradiation is taken into account through by volumetric heat source as a result of absorption of thermal energy by solid.

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА МАГНІТНОМ'ЯКОГО ФЕРОМАГНІТНОГО ШАРУ ПРИ ДІЇ УСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗА ПІДМАГНІЧУВАННЯ

Олександр Гачкевич, Роман Івасько, Аніда Станік-Беслер

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Політехніка Опольська (Польща)

dept13@iapmm.lviv.ua; roman_ivasko@ukr.net; a.stanik-besler@po.opole.pl

У багатьох сучасних технологіях використовують термообробку електротехнічних виробів із застосуванням змінних за часом електромагнітних полів (ЕМП). У таких виробках індуються електричні струми, які приводять до виникнення тепловиділення та пондеромоторних сил. Ці фактори спричинюють температурні поля та напруження, які можуть досягати значних величин і перевищувати допустимі. Для оцінки характеристик згаданих полів необхідні ефективні розрахункові моделі визначення ЕМП, тепловиділень, температури та механічних напружень залежно від параметрів зовнішнього електромагнітного навантаження, умов теплообміну розглядуваного тіла з довкіллям, механічних граничних умов, електрофізичних, теплофізичних та механічних характеристик матеріалу. В літературі наявні окремі задачі про визначення механічної поведінки електропровідних феромагнітних (магнітном'яких і магнітнотвердих) тіл за дії усталених і квазіусталених ЕМП [2]. Проте часто дія таких полів відбувається за наявності стороннього (природного чи створеного технічними засобами) постійного магнітного поля (т.зв. підмагнічування [1]). Тому має практичне значення дослідження термомеханічної поведінки електропровідних тіл за наявності одночасної дії двох типів магнітних полів – усталеного та незалежного від часу.

В роботі визначено та досліджено параметри, що описують термомеханічну поведінку електропровідного шару з магнітном'якого феромагнітного матеріалу за дії зовнішнього ЕМП, заданого значенням дотичного складника вектора напруженості магнітного поля на обох поверхнях.

Використано відому розрахункову схему задачі магнітотермомеханіки, при якій розв'язок будується за три етапи [2]. На першому етапі з рівнянь електродинаміки (із застосуванням розвинень за малим параметром та за конкретної нелінійної залежності між магнітними зміщенням і напруженістю поля) визначають магнітне поле в усталеному наближенні. Після цього записують усереднені за період електромагнітних коливань відповідні вирази для

потужності тепловиділень і густини пондеромоторних сил. На другому етапі з відповідного рівняння теплопровідності (в якому джерелами тепла є тепло-виділення, окреслені на першому етапі) знаходять температурне поле. На третьому етапі на основі співвідношень динамічної термопружності за відомих виразів для температури і пондеромоторних сил визначають переміщення і напруження.

Для розв'язання нелінійної задачі електродинаміки використано метод малого параметра, за який вибрано відношення амплітуди H_1 гармонічного складника напруженості магнітного поля до значення напруженості H_0 сталого складника.

Числові дослідження проведено для шару з технічно чистого заліза. Отримано, що термопружний стан магнітнот'якого шару за одночасної дії гармонічної та незалежної від часу компонент зовнішнього магнітного поля суттєво залежить від відношення H_1/H_0 та відносної глибини проникання магнітного поля. Встановлено, що нелінійна залежність між індукцією та напруженістю магнітного поля спричинює додатковий спектр як парних, так і непарних гармонік параметрів магнітного поля, які теж впливають на температуру, механічні напруження та переміщення, а також на резонансні явища, зумовлені ЕМП. Виявлено, що без підмагнічування виникають лише непарні гармоніки параметрів магнітного поля.

Досліджено закономірності розподілів температури і напружень у феромагнітному шарі для широкого діапазону значень магнітного поля, за яких шар нагрівається не вище точки Кюрі, а напруження не перевищують межі пружності (за справедливості положень класичної теорії термопружності).

1. *Гачкевич А., Івасько Р., Солодяк М., Станик-Бэслер А., Тарлаковський Д.* Модели описания электромагнитного поля в ферромагнитной среде при наличии подмагничивания // In: Manufacturing processes. Actual problems – 2013. – Vol. II. Modeling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie. – Z. 365 / Pod red. nauk.: *M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler.* – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – Гл. 2. – С. 35-44.
2. *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s.

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF MAGNETICALLY SOFT FERROMAGNETIC LAYER, SUBJECTED TO STEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS WITH BIASING

The method for approximate calculation of the parameters to describe thermoelastic state of the magnetically soft ferromagnetic layer subjected to electromagnetic field is proposed. The electromagnetic field is defined by constant and harmonic components of the magnetic field strength on the layer's surfaces. The technique is based on the development of key functions in power series in a small parameter defined as a ratio of amplitude of harmonic component to constant one. The criteria of application of the method are received (when temperature does not exceed the Curie point while stresses remain in elastic zone).

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ У ТИТАНОВИХ СПЛАВАХ ПРИ НАГРІВІ – ОХОЛОДЖЕННІ

Олександр Гачкевич, Ігор Чупик

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

dept13@iapmm.lviv.ua

У сучасних машинах широко використовують елементи, виготовлені із високоміцних матеріалів, в тому числі титанових сплавів. При цільовому технологічному нагріві, зокрема відпалі, виробів з титанових сплавів чи їх частин та наступному охолодженні у них виникають фазові перетворення, які можуть викликати істотні зміни властивостей таких виробів.

У роботі розвинуто варіант моделі опису залишкового фазового складу і напруженого стану тіл з $\alpha + \beta$ титанових сплавів за охолодження їх до натуральної температури (від стану з повною β -фазою до стану з $\alpha + \beta$ -фазою (поліморфні $(\alpha + \beta) \rightleftharpoons \beta$ перетворення при нагріві та наступному охолодженні)). Такі перетворення характерні для отриманих за стандартною технологією промислових сплавів VT20, VT22, VT23, VT30, TC6 та ін., які відрізняються різними хімічними складовими, зокрема процентним вмістом Al, Cr, V та ін. У даній моделі кінцевий вміст фазових складових (процентний вміст фаз) пов'язаний із швидкістю охолодження до натуральної температури від стану з повною β -фазою у зоні найбільшого термічного впливу та хімічним складом сплаву (який відповідає згаданим типам промислових сплавів). Процентний вміст α і β -фаз після охолодження за фіксованої його швидкості окреслено через відомі в літературі експериментальні дані чи термокінетичні діаграми стану сплавів.

Запропоновано триетапну розрахункову схему визначення залишкових напружень у тонких об'єктах, виготовлених з титанових сплавів, за нагріву до температур, при яких виникає область зі станом повної β -фази, та наступного охолодження до натурального стану. На першому етапі визначається поле температур, на основі якого встановлюється область зі станом повної β -фази та швидкість охолодження. Поле температур окреслене двовимірною нестационарною задачею теплопровідності для тонкої оболонки при локальному нагріві.

На другому етапі з використанням експериментальних даних про питомий вміст α і β -фаз за нагріву до стану повної β -фази при поліморфному $(\alpha + \beta) \leftrightarrow \beta$ перетворенні, а також охолодження в залежності від його швидкості за поліморфного $\beta \leftrightarrow (\alpha + \beta)$ перетворення для розглядуваного сплаву за прийнятих вище допущень обчислюються розподіли фазових складових.

На третьому етапі сформульовано в переміщеннях задачу про визначення залишкових напружень за підходу методу умовних залишкових деформацій при відомій структурній деформації, яка викликана різним відсотковим вмістом наявних α і β -фазових складових.

Як приклад, проведено математичне моделювання та дослідження напруженого стану оболонок обертання, виготовлених з титанового сплаву ВТ22 при локальному кільцевому осесиметричному нагріві [1], заданому розподілом значень температури відносно твірної. Приймається, що температура є сталою за товщиною і змінюється в проміжку $20^\circ C - 720^\circ C$. Оболонка вільна від зовнішнього силового навантаження. При цьому із розв'язку задачі теплопровідності (задачі першого етапу розрахункової схеми) отримано вираз для температури, окреслений залежністю

$$t = t(t_1, t_0, z_0, z)$$

(де t_0 – температура навколишнього середовища, t_1 – максимальна температура у центрі зони нагріву, z_0 – півширина локальної зони нагріву, z – біжуча координата), а залишкові напруження – залежністю

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(de_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [vde - (1+\nu)de_{\Xi}] \delta_{ij} \right)$$

де $d\sigma_{ij}$ – прирости компонент тензора напружень, de_{ij} – прирости компонент тензора деформації; E – модуль Юнга, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, ν – коефіцієнт Пуассона, δ_{ij} - символ Кронекера, $i, j = (1, 2, 3)$; $de_{\Xi} = 3\beta d\xi$ – деформація, зумовлена зміною структури, $\xi = \xi_{\beta} / (\xi_{\alpha} + \xi_{\beta})$ – ступінь повноти фазового перетворення, β – лінійний коефіцієнт дилатації структури.

Приймаємо, що за нагріву ступінь повноти фазового перетворення ξ згідно з експериментальними даними [2] змінюється так, як проілюстровано на рис. 1 (t_{f0} – температура початку фазових перетворень; ξ_{f0} – рівноважне значення функції повноти фазових перетворень). Після швидкого (миттєвого) охолодження зі стану повної β -фази, характерного для процесу гартування,

залежність ступеня повноти фазового перетворення ξ за нормальної температури $t = 20^\circ C$ описується графіком, який приведено на рис. 2. (ξ_{f1} – експериментально встановлене залишкове значення функції повноти фазових перетворень для зрізця зі сплаву ВТ22, що практично миттєво охолоджується від стану повної β -фази до стану нової $\alpha + \beta$ -фази (для точок тіла з температурою, яка міститься на проміжку $[t_{f0}, t_{f1}]$ прийнята вказана на графіку лінійна апроксимація)) [2].

Конкретний режим локального нагріву опрацьовано для циліндричної оболонки при наступних геометричних і фізичних параметрах: радіус середньої поверхні оболонки $R = 0.0245$ м, товщина $2h = 0.001$ м, $E = 106$ МПа, $\nu = 0.3$.

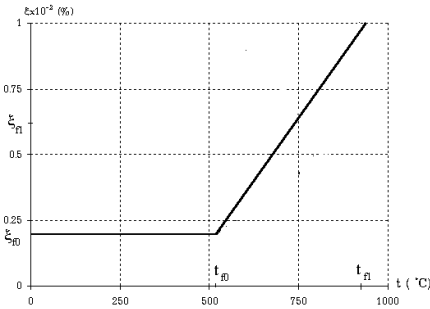


Рис. 1

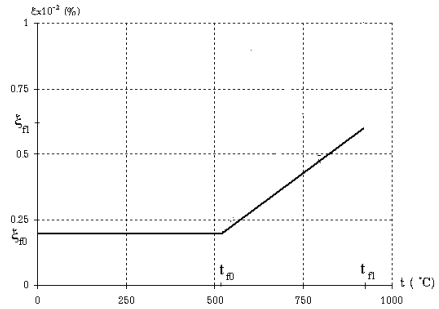


Рис.2

Запропонована модель дає можливість визначити фазовий склад і відповідний залишковий напружений стан оболонки за врахування поліморфних перетворень, а також сформулювати відповідні задачі їх оптимізації.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К., 1979.
2. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Засыпкин В.В., Майстров В.И. Объемные изменения, происходящие в (α - β) титановых сплавах при полиморфном превращении // Металловедение и термическая обработка. – 1986. – 1. – С. 52-55.

MODELLING OF RESIDUAL STRESSES IN TITANIUM ALLOYS SUBJECTED TO HEATING-COOLING

Methodic based on finite element method for definition of residual stress state of local heated axis symmetric shell made from titanium alloy is developed. Polymorphic transition in homogeneous non equilibrium phase state are taken into account.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРУБ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**Елена Голубева, Рушди Аль-Абси***Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины (Республика Беларусь)*alena_golubeva92@mail.ru; rushdiabdo@yahoo.com

Постановка задачи. В представленной работе объектом исследования является труба с внутренним радиусом a и внешним радиусом R , изготовленная из неоднородного материала, при воздействии внутреннего давления P (давление, оказанное на внутреннюю поверхность (Рис. 1)). Целью проведения исследований является изучение свойств ползучести и релаксации неоднородных материалов таких труб под воздействием внутреннего давления.

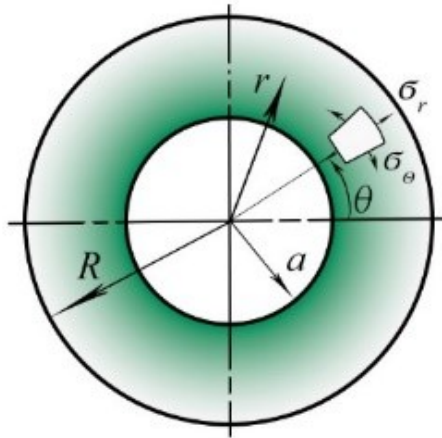


Рис. 1 Труба из неоднородного материала

Метод решения. При исследовании напряженно-деформированного состояния на основании решения упругой задачи для неоднородной трубы используем методы расчета, представленные в работе [1] (в которой приведены основные формулы для нахождения напряжений в зависимости от свойств

материалов). На основании решения упругой задачи для неоднородной трубы [1] рассматривали вязкоупругий случай. Ядра ползучести и релаксации связаны между собой интегральным соотношением. Они характеризуют основные механические свойства вязкоупругих материалов и входят в определяющие уравнения, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем.

Для описания процессов явлений ползучести и релаксации были использованы обобщенные ядра вида [2]:

$$R(\tau) = A * \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_1(\beta * \tau^\alpha; \alpha);$$

$$K(\tau) = A * \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_1(\beta\tau^\alpha; \alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$ (где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр A^* , β , λ , α – реологические параметры).

На основе проведенного эксперимента по исследованию вязкоупругих свойств трубы были определены параметры ядер ползучести и релаксации. Реологические параметры ядер находятся методами наименьших квадратов и интегральных преобразований. Построены графики изменения напряжений и деформаций во времени в трубе из неоднородного материала с учетом явлений ползучести и релаксации.

Основные результаты. Проведен анализ экспериментальных исследований вязкоупругих свойств для труб из неоднородных материалов. Разработана и апробирована компьютерная программа определения параметров деформирования во времени. Предложенная методика может быть использована в инженерных расчетах для различных конструкций из неоднородных материалов.

1. *Можаровский В.В., Старжинский В.Е.* Прикладная механика слоистых тел из композитов. – Мн., 1988. – 271 с.
2. *Tutuncu N., Ozturk M.* Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / Composites: Part B. – 2001. – 32. – P. 683-686.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE INTENSE DEFORMED CONDITION OF PIPES FROM NON-UNIFORM MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT THE VISCOELASTICITY PHENOMENA

The purpose of carrying out researches is studying of properties of creep and the relaxation of pipes from non-uniform materials under the influence of internal pressure.

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНЬ У ЗВОЛОЖЕНОМУ ПОРИСТОМУ ШАРІ ЗА ДВОСТОРОННЬОГО МІКРОХВИЛЬОВОГО ОПРОМІНЕННЯ

Тарас Голубець

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

taras_holubets@yahoo.com

Розглянуто пористий зволожений шар, у якому згідно методу просторового середнього (гомогенізації) записані локальні (усереднені в REV – репрезентативний об'єм) рівняння Whitaker [1] перенесення маси (імпульсу) і енергії (тепла). Такі рівняння містять інтенсивність джерел тепла (внутрішнього нагріву), яку у випадку мікрохвильового опромінення можна отримати виходячи з певних модельних міркувань.

Згідно результатів роботи [2] у гармонічному наближенні для немагнітного ізотропного діелектрика з слабкими провідними властивостями отримано усереднену систему рівнянь електромагнітного поля. Показано, що для електромагнітного поля мікрохвильового діапазону частот у пористому зволоженому матеріалі задовольняється умова слабко змінності хвильових властивостей матеріалу. Тому розв'язок хвильового рівняння знайдено методом Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [3]. Отримано вирази для потужності електромагнітного поля і інтенсивності джерел тепла при внутрішньому (мікрохвильовому) нагріві.

Напружено-деформований стан зволоженого пористого середовища описаний в рамках континуального підходу, коли скелет (тверда фаза), вода (плинна фаза) та двокомпонентна газова суміш (плинна фаза) розглядаються, як сукупність трьох співіснуючих між собою континуумів матеріальних точок. Розглянуто мікроскопічні рівняння балансу моменту імпульсу або напружень. Означено обмінні інтеграли моменту імпульсу і механічних зусиль. Рівновагу фаз у мікроскопічній механічній моделі розглянуто згідно роботи Hassanizaden & Gray [4]. Також за даними або результатами цієї роботи записано рівняння рівноваги напружень у твердій або плинній фазах, які враховують явище фазового перетворення в межах плинної фази.

Оскільки відомі вирази для симетричного тензора напружень у плинних фазах, згідно умови рівноваги фаз автором доповіді означено тензор напружень [5] у твердій фазі, як суму ефективних і теплових напружень. Також от-

римано вираз для повних напружень \mathbf{i} , з врахуванням ефектів в'язкого тертя Lewis&Schrefler [6], записано загальне або приведенне рівняння рівноваги напружень (моменту імпульсу) у пористому зволоженому середовищі.

1. *Whitaker S.* Simultaneous heat mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying // *Advanced in Heat Transfer*. – 1977. – **13**. – P. 119-203.
2. *Hachkevych O.R., Terlets'kyi R.F., Holubets T.V.* Calculation of effective electrophysical characteristics of moistened porous materials // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 699-717.
3. *Bass F., Resnick L.* The electromagnetic-wave propagation through a stratified inhomogeneous anisotropic medium // *Progress in Electromagnetics Research*. – 2004. – **48**. – P. 67-83.
4. *Hassanizadeh M., Gray W.G.* General conservation equations for multi-phase systems // *Advances in Water Resources*. – 1980. – **3**. – P. 191-203.
5. *Низматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
6. *Lewis R.W., Schrefler B.A.* The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media. – Chichester: John Wiley & Sons, 1998 – 377 p.

THE MODELING OF STRESS IN MOISTENED POROUS UNLIMITED PLATE UNDER SYMMETRIC ACTION OF EXTERNAL MICROWAVE IRRADIATION

According to local average method or homogenization the interconnected system of heat and mass transfer is reviewed in which intensity of heat sources according to internal microwave heating are presented. From the previous own results at the harmonically approach for nonmagnetic isotropic dielectric with weak electrical conductive properties the averaged system of electromagnetic field is obtained. It is demonstrated that for under microwave irradiation the condition of weakness of wave properties is satisfied from which the solution of the wave equation as well as an expression for the power of microwave irradiation and intensity of internal heat sources are obtained The stress or strain state for the inhomogeneous media by the continuum approach is described. From the some model approaches for the porous moistened media the microscopic relations of the stress or the momentum of impulse are defined. Exchange integrals of the momentum of impulse and mechanical forces are indicated. The equation of equilibrium stress in solid or fluid phases, which takes into account the phenomenon of phase transformation within the fluid phase, is written. The tensor of stresses in the solid phase as the sum of parts for effective and thermal stresses is defined. The expression for full stress is obtained and, taking into account the effects of viscous friction, the general or final equation of equilibrium for the effective stress or the momentum of impulse in a porous moistened medium is written.

ВИНИКНЕННЯ БІФУРКАЦІЙНИХ СТАНІВ ОБЕРТОВИХ ГІПЕРДОВГИХ СТРИЖНІВ

Ірина Горбунович

Національний транспортний університет (Україна)

irina.gorbunovich@gmail.com

Освоювання техніки й технології буріння глибоких нафтогазових свердловин є однією з найважливіших задач сучасного гірничого виробництва. Режими буріння надглибоких свердловин можуть супроводжуватися ефектами біфуркаційного випинання бурильних колон, інтенсифікацією їх вібрацій та іншими позаштатними ситуаціями. Вивчаючи ці процеси, бурильну колону ототожнюють з обертовим стрижнем.

Розглядається вертикальний обертовий трубчастий пружний гіпердовгий стрижень з внутрішнім потоком рідини. Щоб надати стрижню обертового руху, до його верхнього кінця прикладається крутний момент.

Як математична модель квазістатичної поведінки стрижня вибирається система двох диференціальних рівнянь четвертого порядку, яку побудовано з урахуванням внутрішньої поздовжньої сили $T(z)$, крутного моменту M_z , сил інерції обертального руху стрижня й внутрішнього потоку рідини [1-3].

Для дослідження біфуркаційних станів стрижня система диференціальних рівнянь четвертого порядку зводиться до системи нормальних лінійних рівнянь і застосовується метод початкових параметрів [1, 3]:

$$d\bar{y}/dz = Q_1\bar{y} + T(z)Q_2\bar{y} + dT(z)/dz Q_3\bar{y} + M_z Q_4\bar{y} + \omega^2 Q_5\bar{y} + V^2 Q_6\bar{y}, \quad (1)$$

де $\bar{y}(z)$ – восьмивимірна шукана вектор-функція, Q_1, \dots, Q_6 – сталі матриці восьмого порядку, ω – кутова швидкість стрижня, V – швидкість руху внутрішнього потоку рідини.

Вектор-функція $\bar{y}(z)$ повинна задовольняти крайовим умовам

$$A\bar{y}(0) = 0, \quad B\bar{y}(L) = 0, \quad (2)$$

де A і B – сталі матриці розміру 4×8 , L – довжина стрижня. Загальний розв'язок системи (1), (2) шукаємо у формі Коші

$$\bar{y}(z) = Y(z)\vec{C}, \quad (3)$$

де $Y(z)$ – матриця Коші восьмого порядку системи (1) з початковими умовами $Y(0) = E$, E – одинична матриця, $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_8)^T$ – шуканий сталий восьмивимірний вектор.

При інтегруванні системи (1) використовується метод зрощування й метод ортогоналізації частинних розв’язків за Годуновим [1, 3].

Підставляючи (3) в (2), дістанемо систему лінійних однорідних алгебричних рівнянь, з якої знаходимо компоненти вектора \vec{C} і біфуркаційні значення характерних параметрів стрижня. За цих значень стрижень втрачає стійкість і випинається.

Складність реалізації описаного алгоритму полягає в обчисленні матриці $Y(z)$ для великих відрізків довжини L стрижня. Щоб позбутися її пропонується інший підхід. Раніше згадана квазістатична система диференціальних рівнянь четвертого порядку зводиться до одного диференціального рівняння в безрозмірній формі щодо комплексного прогину стрижня. Останнє рівняння й крайові умови дискретним диференціальним перетворенням Тейлора [4] редукується до рекурентного рівняння. Досліджуючи його, отримуємо біфуркаційні значення характерних параметрів гіпердовгого стрижня.

1. Гуляев В.И., Луговой П.З., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В. Анализ влияния длины вращающейся буровой колонны на устойчивость ее квазистатического равновесия // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 9. – С. 83-92.
2. Гуляев В.И., Луговой П.З., Горбунович И.В. Вільні коливання бурових колон, що обертаються // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 3. – С. 64-70.
3. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. – 2006. – № 5. – С. 109-119.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений // Киев: Наукова думка, 1980.

OCCURRENCE OF BIFURCATIONAL STATES OF ROTATING HYPER LONG RODS

A vertical rotating tubular elastic hyper long rod with an internal flow of fluid is considered. The mathematical model of the quasi-static behavior of the rod is a system of two differential equations of the fourth order, which is constructed taking into account the internal longitudinal force, torque, the forces of inertia of the rotational movement of the rod and the internal fluid flow. To study the bifurcational states of the rod, the method of initial parameters, the Godunov's method of matching and orthogonalization are used.

As an alternative, a Taylor discrete differential transformation method is proposed. It reduces the boundary value problem to the recurrent equation. The bifurcation values of the characteristic parameters of the hyper long rod are calculated.

ДО ПОБУДОВИ ГРАДІЄНТНОЇ ТЕОРІЇ ДІЕЛЕКТРИКІВ З ЕЛЕКТРИЧНИМИ КВАДРУПОЛЯМИ

Ольга Грицина

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

gryt@cmm.lviv.ua; gryt045@gmail.com

Відомо, що електричний потенціал точкового (лінійного) заряду, визначений у межах класичної теорії діелектриків, є сингулярною функцією. Для подолання цієї невідповідності, та у розвиток досліджень Кафадара [2], методами нерівноважної термодинаміки сформульовано замкнену систему співвідношень градієнтної теорії термопружних неферромагнітних діелектриків, що враховує в поляризаційному струмі дипольний \mathbf{P} і квадрупольний $\hat{\mathbf{Q}}$ електричні моменти. Систему співвідношень моделі одержано, ґрунтуючись на рівняннях Максвелла, а також балансі ентропії і повної енергії системи «тіло-електромагнітне поле». За врахування подання для вектора поляризації $\mathbf{\Pi}_e = \mathbf{P} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}}/6$ та рівнянь Максвелла, отримано таке рівняння балансу енергії U_e електромагнітного поля

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_e + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}_* + \frac{1}{6} \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} : (\nabla \otimes \mathbf{E}_*) + \\ & + \mathbf{v} \cdot \left[\rho_e \mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут \mathbf{E}_* \mathbf{B} – напруженість електричного та індукція магнітного полів, \mathbf{J}_{e*} – струм провідності та конвективний струм, \mathbf{S}_e – вектор Умова-Пойнтінга, ρ_e – густина вільного електричного заряду, \mathbf{v} – вектор швидкості, t – час.

З умови інваріантності рівняння балансу повної енергії щодо просторових трансляцій, одержано рівняння балансу механічного імпульсу та балансу маси. За врахування останніх з рівняння балансу повної енергії [1] отримано таке узагальнене рівняння Гіббса

$$df = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\boldsymbol{e}} - sdT - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{E}_* - \hat{\mathbf{q}} : d(\nabla \otimes \mathbf{E}_*). \quad (2)$$

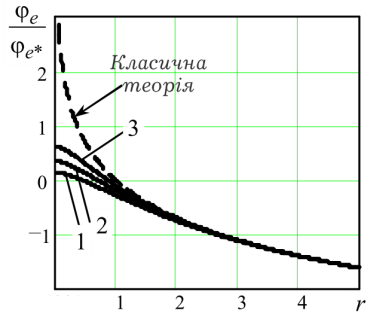
Тут f – вільна енергія Гельмгольца, ρ – густина маси, $\hat{\boldsymbol{e}}$ – тензор деформації, s – питома ентропія, T – абсолютна температура, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ – тензор напружень Коші,

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho, \quad \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{Q}}/6\rho, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho[\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p} + \hat{\mathbf{q}} : (\nabla \otimes \mathbf{E}_*)] \hat{\mathbf{I}}.$$

Співвідношення (2) дозволило сформуванати нелокальні рівняння стану моделі, які, порівняно з класичною теорією діелектриків, містять одну додаткову пару спряжених параметрів стану. Цю пару формують градієнт вектора напруженості електричного поля $\nabla \otimes \mathbf{E}_*$ та питома величина квадрупольного електричного моменту $\hat{\mathbf{q}}$. Слід зазначити, що у роботі [3] одержано такі ж рівняння стану з використанням варіаційних методів.

Співвідношення запропонованої теорії діелектриків застосовані для вивчення поля електричного потенціалу навколо лінійного електричного заряду Θ . У межах цієї теорії для електричного потенціалу одержано таку формулу: $\varphi_e = -\varphi_{e*}(\ln r + K_0(ar))$, де K_0 – модифікована функція Бесселя другого роду

нульового порядку, φ_{e*} визначається характеристиками матеріалу та лінійного заряду Θ . Результати числових досліджень наведені на рисунку. Суцільні лінії відповідають нормованому потенціалу φ_e , обчисленому на основі градієнтної теорії діелектриків з квадрупольними електричними моментами, а пунктирна – результатам класичної теорії. Криві 1-3 побудовані для $a = 1.3, 1.6, 2.1$, де параметр a визначається характеристиками матеріалу [1]. Видно, що градієнтна теорія діелектриків з електричними квадруполями дозволила уникнути сингулярності потенціалу лінійного електричного заряду, що не вдається досягти у межах класичної теорії.



1. Кондрат В., Грицина О. Рівняння локально градієнтної електромагнітотермомеханіки поляризованих неферомагнітних тіл за врахування квадрупольних електричних моментів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 108-115.
2. Kafadar C.B. Theory of multipoles in classical electromagnetism // *Int. J. Sci.* – 1971. – **9**. – P. 831-853.
3. Yang X.M., Hu Y.T., Yang J.S. Electric field gradient effects in antiplane problems of polarized ceramics // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – **41**. – P. 6801-6811.

GRADIENT THEORY OF DIELECTRICS WITH ELECTRIC QUADRUPOLES

Using the methods of nonequilibrium thermodynamics, a complete set of equations of gradient type theory of non-ferromagnetic dielectrics with electric quadrupoles is formulated. As a result of electric quadrupoles accounting the nonlocal constitutive equations are obtained. Analytical solution to the static problem of the potential field of a line source is obtained to examine the electric quadrupoles effect.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАЛИШКОВИХ
СТРУКТУРНОГО І НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ МАЛОВУГЛЕЦЕВОЇ
НИЗЬКОЛЕГОВАНОЇ СТАЛЕВОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ НАГРІВІ
РУХОМИМИ РОЗПОДІЛЕНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА**

Максиміліан Гаск, Тереза Козакевич, Стефан Моринь

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;
Політехніка Опольська (Польща)*

kozakevych.tv@gmail.com; s.moryn@po.opole.pl

Вихідною є, адаптована до розглядуваного випадку тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластин, що нагріваються до підвищених температур (температур повної аустенізації сталі в зоні максимального термічного впливу) системами рухомих розподілених джерел тепла, модель опису залишкових фазового і напруженого станів, які виникають після завершення монотонного охолодження.

У цій моделі вміст фазових складових: мартенситу, бейніту і феритоперліту пов'язано з часом перебування локальних підобластей тіла в проміжку температур поліморфних перетворень матеріалу та хімічним складом сталі. Відсотковий вміст фазових складових окреслено через наявні в літературі для таких сталей інтерполяційні аналітичні залежності, які отримані на основі результатів статистичної обробки термодинамічних діаграм розпаду аустеніту у відповідних сталевих взірцях.

Відомо, що в процесі розпаду аустеніту в матеріалі виділяється тепло, яке сповільнює процес охолодження і може проявляти вплив на розклад температури. Встановлено, що при швидкому монотонному охолодженні розглядуваних маловуглецевих сталей, при якому утворюються фазові складові, таке тепло практично не проявляється. Тому в ряді праць та в запропонованій математичній моделі таке тепло не враховується. У літературі також отримано теоретично і підтверджено експериментально, що для розглядуваних сталей залишкові напруження і деформації практично не впливають на температурне поле у виробі та фазовий склад матеріалу.

З врахуванням вищезгаданих зауважень опрацьовано багатоступову розрахункову схему визначення залишкового фазового стану, механічних властивостей та напружень у розглядуваних тонких сталевих пластинах:

– знаходження температурного поля, яке ґрунтується на формуванні відповідних двовимірних початково-крайових задач теплопровідності для тонкої пластини за локального нагріву системою рухомих розподілених джерел теп-

ла до температури повної аустенізації в околі зони максимального нагріву та подальшого монотонного охолодження до натурального стану;

– обчислення з використанням відомих аналітичних інтерполяційних залежностей, отриманих на основі статистичного аналізу (при обчисленому часі перебування точок пластини в інтервалі температур поліморфного перетворення за монотонного охолодження) відсотковому вмісту наявних залишкових фазових складових: мартенситу, бейніту та феррито-перліту;

– визначення (з використанням залежностей статистичного аналізу, що описують механічні властивості сталі, як функцій відсоткового вмісту залишкових, після монотонного охолодження, фазових складових та хімічного складу розглядуваного типу сталі) характеристик тих властивостей (твердості, міцності, в'язкості і ін.);

– встановлення залишкового напруженого стану з використанням відповідної задачі термомеханіки, сформульованої відносно переміщень. У такій задачі вихідною є залишкова деформація, викликана різним відсотковим вмістом фазових складових (при відмінних їх об'ємних властивостях), що виникли при структурному перетворенні;

– оптимізація параметрів нагріваючої системи (кількості і потужності джерел і т.п.) відносно відсоткового вмісту мартенситу (за критерію мінімуму максимального вмісту мартенситу) при зменшенні рівня залишкових напружень – для збільшення пластичних властивостей в ЗТВ.

У складових задачах розрахункової схеми характеристики матеріалу приймаються сталими. Вони встановлені при розв'язуванні теоретичних і експериментальних задач дугового зварювання маловуглецевих пластин, а також наварюванні на них технологічних валків. Залишкові напруження обчислюються в натуральному стані за механічних характеристик, що відповідають температурі 20⁰С. Фазовий склад, що утворився при охолодженні до 500⁰С, не змінюється при наступному охолодженні (згідно відомих експериментальних результатів при отриманні термодинамічних діаграм розпаду аустеніту, які є підґрунтям використовуваних статистичних залежностей, що описують відсотковий вміст фазових складових).

На основі аналізу отриманих розв'язків встановлено ряд нових закономірностей у розподілах залишкових напружень та фазових складових у пластині при конкретних термічних параметрах режимів нагріву.

MODELING AND OPTIMIZATION OF RESIDUAL STRUCTURE AND STRESS DISTRIBUTION OF LOW CARBON LOW ALLOYED STEEL PLATE SUBJECTED TO HEATING BY MOVING DISTRIBUTED HEAT SOURCES

On the basis of an adapted model for definition of residual phase and stress states, an analysis of the obtained solutions was made and a number of new regularities in the distributions of residual stresses and phase components in low-carbon plate were determined at specific thermal parameters of the heating modes.

ФАЗОВИЙ СКЛАД НИЗЬКОЛЕГОВАНОЇ СТАЛІ НА ЕТАПІ ЙОГО ФОРМУВАННЯ

Богдан Дробенко, Степан Будз, Володимир Асташкін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

drobenko@ukr.net; budz@iapmm.lviv.ua

В інженерній практиці широко використовують низьколеговані маловуглецеві сталі. Набору заданих властивостей ці сталі набувають внаслідок їхньої термічної обробки; зміна властивостей в локальних областях відбувається при зварюванні чи місцевому відпалі. Відомі випадки, коли формування фазового складу відбувається при сумісній дії нагріву-охолодження і зміні концентрації легуючих елементів.

З огляду на зазначене виникає практична потреба в розробці математичних моделей для кількісного опису процесу формування фазового складу, що, зокрема, важливо при розробці оптимальних режимів обробки виробів з таких сталей. Моделі повинні враховувати дію названих чинників. Відомі способи опису, що базуються на використанні даних статистичного аналізу про вплив хімічного складу сталей і параметрів режимів їхнього охолодження на кінцевий фазовий склад і напруження. Вони можуть бути доповнені і вдосконалені шляхом використання даних про те, як фазові перетворення відбуваються в температурних діапазонах, що не перетинаються.

У цій роботі запропоновано підхід, розрахункова схема якого реалізована в такий спосіб. Ставимо і розв'язуємо задачу теплопровідності, після чого визначаємо головний параметр задачі – тривалість перебування кожної точки тіла в діапазоні температур від 850 °С до 550 °С. За цим показником при допомозі співвідношення статистичної теорії формування фазового складу визначаємо кінцевий фазовий склад тіла. При цьому приймаємо, що формування фазового складу відбувається в окресленому температурному діапазоні. Весь температурний діапазон подаємо у вигляді окремих температурних проміжків, в межах яких відбувається перетворення. Кожна температурна складова має свій температурний діапазон. Формування фазового складу відбувається у певній послідовності. Спочатку формується ферито-перліт, далі бейніт, мартенсит.

PHASE STATE OF LOW-ALLOYED STEEL AT THE STAGE OF ITS FORMATION

A model for describing the stresses and phase distribution in low-alloyed low-carbon steel is proposed.

ДІЯ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА НЕРУХОМУ ЖОРСТКУ СФЕРУ В ОКОЛІ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Олександр Жук, Ярослав Жук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)

Моделюється та досліджується дія звукової хвилі на нерухому жорстку сферу, яка знаходиться в околі вільної поверхні ідеальної рідини. За міру дії звукової хвилі на сферу вибрано силу, обумовлену радіаційним тиском (тиском звукового випромінювання) [1]. Тиск p в звуковому полі необхідно обчислювати з урахуванням величин другого порядку по параметрах поля, які обумовлені його нелінійністю в околі сфери. Обчислення тиску p в звуковій хвилі з врахуванням величин другого порядку можливе в лінійному наближенні [1]. Задача обчислення радіаційної сили, яка діє на сферу, розв'язується в три етапи: на першому розв'язується лінійна задача дифракції на сфері первинної звукової хвилі з потенціалом Φ_i та визначаються потенціали розсіяної на сфері хвилі і відбитої від вільної поверхні рідини; на другому – розв'язується задача обчислення гідродинамічної сили, яка діє на сферу; на третьому – осередненням останньої по періоду первинної хвилі знаходиться радіаційна сила. Задача визначення радіаційної сили сформульована для ідеальної стисливої рідини, в якій на відстані ℓ від її вільної поверхні розміщена тверда сфера радіуса R (Рис. 1). Рідина характеризується густиною ρ , швидкістю звуку в ній a_0 . В напрямі, перпендикулярному до вільної поверхні рідини ($z = 0$) поширюється плоска звукова хвиля (потенціал якої Φ_i). Звукове поле, яке формує радіаційну силу, що діє на тверду сферу, утворюється інтерференцією первинної звукової хвилі з потенціалом Φ_i ; відбитою від вільної поверхні рідини первинної хвилі (потенціал Φ_s); звукової хвилі, розсіяної на твердій сфері (потенціал $\Phi_d^{(1)}$); а також частиною останньої хвилі, відбитою від вільної поверхні рідини (потенціал $\Phi_s^{(1)}$).

Потенціали вказаних звукових хвиль згідно прийнятому методу повинні задовольняти лінійному хвильовому рівнянню, а також крайовим умовам на поверхні нерухомої твердої сфери і на вільній поверхні рідини. При цьому для визначення потенціалу $\Phi_s^{(1)}$ використано метод уявних зображень. Внаслідок осьової симетрії звукового поля, потенціал якого обчислюється за формулою $\Phi = \Phi_i + \Phi_s + \Phi_d^{(1)} + \Phi_s^{(1)}$, гідродинамічна сила напрямлена вздовж осі

симетрії (якою є вісь Oz (Рис. 1)) і рівна

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^\pi p \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1 . \quad (1)$$

При цьому зазначимо, що потенціал первинної хвилі Φ_i має такий вигляд

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2)$$

де A – амплітуда; $k = \omega/a_0$ – хвильове число; ω – кутова частота.

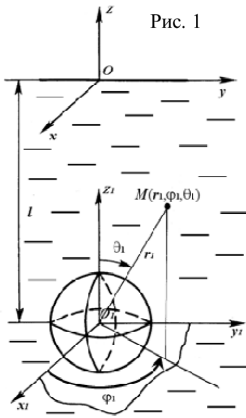


Рис. 1

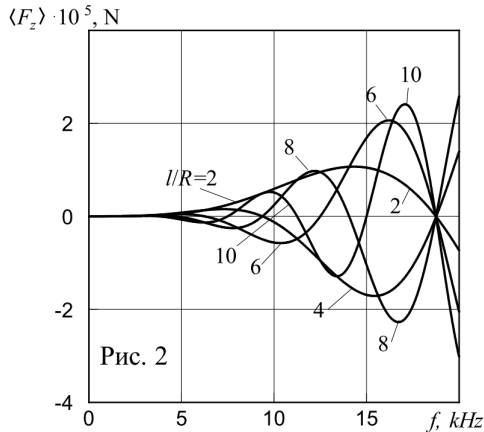


Рис. 2

В остаточному вигляді вираз для радіаційної сили, яка діє на тверду сферу в околі вільної поверхні рідини, отримуємо у вигляді

$$\langle F_z \rangle = 2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (K_n K_{n+1} + L_n L_{n+1}) [n(n+2) - \alpha^2]. \quad (3)$$

На рис. 2 подано типовий результат розрахунку залежності радіаційної сили від частоти і від відношення відстані сфери від поверхні до радіуса сфери. Первинна звукова хвиля і відбита від поверхні рідини утворюють стоячу хвилю. Знаходження сферичної частинки в пучності або у вузлі цієї хвилі може бути стійким або нестійким.

1. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity // JASA. – 2012. – **132**, No. 4. – P. 2189-2197.

EFFECT OF AN ACOUSTIC WAVE ON A RIGID IMMOVABLE SPHERE PLACED IN THE VICINITY OF A LIQUID FREE SURFACE

The formulae for radiation force calculation as well as determination of the direction of it are derived.

УДК 539.3:537.22:669.778

АПРОБАЦІЯ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НАГРОМАДЖЕННЯ ПОШКОДЖЕННЯ В МЕТАЛІ ЕЛЕМЕНТІВ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

**Ярослав Іваницький, Оксана Гембара,
Ольга Чепіль, Ярослав Сапужак**

*Національний університет «Львівська політехніка» (Україна);
Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*

dep-12@ipm.lviv.ua; hembara@ipm.lviv.ua; oljach0409@gmail.com; varagsap@gmail.com

На даний час для опису процесів непружного деформування за високих температур широко застосовують підхід Качанова-Работнова [1], згідно з яким вводиться параметр пошкодження, який у загальному випадку є мірою нагромадження мікрodefektів в об'ємі матеріалу. Конкретний вид функцій у співвідношеннях Качанова-Работнова вибирається виключно з міркувань найкращого опису конкретних експериментальних даних.

У рамках представленої роботи, з точки зору достовірного опису складного процесу нагромадження пошкоджень матеріалу без накладання додаткових гіпотез на закони нагромадження пошкодження, вводимо міру енергетичного пошкодження [2] як відношення енергії пружно-пластичного деформування локального об'єму $W(x, y, z, t)$ до її критичного значення W_C

$$\omega = W(x, y, z, t) / W_C, \quad W(x, y, z, t) = \int_0^t \sigma_{eq}(x, y, z, \tau) \dot{\epsilon}_{ij}^{cr}(x, y, z, \tau) d\tau \quad (1)$$

де σ_{eq} – еквівалентні напруження; $\dot{\epsilon}_{ij}^{cr}$ – швидкість деформацій повзучості локального об'єму елемента.

Вважаємо, що при $\omega(x, y, z, t) < 1$ локальний елемент моделі незруйнований. Час руйнування $t = t_*$ елемента визначається з умови $\omega(x, y, z, t_*) = 1$.

Для визначення константи W_C необхідно мати серію кривих стаціонарної одновісної повзучості з початковою ділянкою третьої стадії за декількох значень $\sigma = const$ в пружній області роботи матеріалу [2]. На цих кривих визначаються точки (ϵ_*^{cr}, t_*) , які відповідають межі між другою і третьою стадіями повзучості. І саме з цього моменту часу починається послідовне руйнування локальних елементів, що і є причиною появи третьої стадії на кривій повзучості. Тому величина W , яка є нагромадженою енергією в цьому елементі до моменту часу $t = t_*$, що відповідає початку третьої стадії

повзучості, і приймається за критичну величину W_C .

Апробація запропонованого підходу здійснена на прикладі розв'язування задачі, для якої є опубліковані експериментальні дані [3, 4]. Подано результати числових досліджень для зразка Бріджмана, виготовленого зі сталі 0.5Cr0.5Mo0.25V, за умов простого розтягу за температури 640 °C. Задачу розв'язували методом скінчених елементів за допомогою програмного пакету MSCMarcMentat 2014.0.0. У результаті побудовано криві, що характеризують кінетику нагромадження пошкоджень, як за класичним підходом Качанова-Работнова, так і за енергетичним підходом (1).

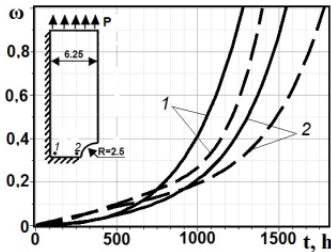


Рис. 1. Зміна параметра пошкодження з часом за повзучості, розрахованого за енергетичним критерієм (суцільні криві) та класичним кінетичним рівнянням Качанова-Работнова (штрихові) в т. 1 (1) та т. 2 (2) для зразка Бріджмана

Аналіз отриманих даних свідчить про те, що результати розрахунків, отримані за двома підходами дають задовільну збіжність з експериментальними даними [3, 4]. Проте час до руйнування, розрахований за енергетичним підходом, має вдвічі меншу похибку.

1. Hayhurst D.R., Felce I.D. Creep rupture under tri-axial tension // Eng. Frac. Mech. – 1986. – 25. – P. 645-664.
2. Іваницький Я.Л., Гембара О.В., Чепіль О.Я. Оцінювання довговічності елементів енергетичного обладнання з урахуванням впливу експлуатаційного середовища // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – 51, № 1. – С. 93-101.
3. Hyde T.H., Sun W., Tang A. Determination of material constants in creep continuum damage constitutive equations // Strain – 1998, august. – P. 83-90.
4. Rouse J.P., Sun W., Hyde T.H., Morris A. Comparative assessment of several creep damage models for use in life prediction // Int. J. of Pressure Vessels and Piping – 2013. – 108-109. – P. 81-87.

APPROBATION OF THE ENERGY APPROACH FOR MODELING THE ACCUMULATION OF DAMAGE IN THE METAL ELEMENTS OF POWER EQUIPMENT

A comparative analysis of the results of calculating the long-term strength according to the classical Kachanov-Rabatnov equations and the energy approach is carried out. The calculation results obtained by the two approaches give satisfactory convergence with experimental data. However, the time to fracture, calculated on an energy approach gives 2 times less error.

УДК 539.3

**МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЗА ТЕРМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ
ТІЛ ОБЕРТАННЯ З ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-
ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Євгеній Ірза, Анна Козярська, Валентин Можаровський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Політехніка Опольська (Польща);

Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини (Республіка Білорусь)

dept13@iapmm.lviv.ua; a.koziarska@po.opole.pl; valenmzh@gmail.com

Запропоновано варіант моделі термомеханіки тіл обертання з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів за теплових і механічних навантажень та числової методики розв'язування відповідних задач. При цьому характер градієнтності описується координатною залежністю характеристик матеріалу.

Оскільки вихідна система диференціально-інтегральних рівнянь моделі є нелінійною, а геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто є досить складною, виникає необхідність використання універсальних числових методів для розв'язування даного класу задач. Одним з таких методів є метод зважених залишків в поєднанні зі скінченно-елементним підходом [1].

Схематично суть цього методу полягає в наступному. Якщо виходити з диференціально-інтегрального рівняння $Lu - f = 0$ (L – диференціально-інтегральний оператор, f – функція навантаження) і наближений розв'язок шукати у вигляді

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^m N_i u_i, \tag{1}$$

то отримаємо

$$L\bar{u} - f = R_\Omega. \tag{2}$$

Тут \bar{u} – шукана функція; N_i – базові функції; u_i – дискретні значення функції u в області Ω ; R_Ω – похибка або залишок, який залежить від координат точок із Ω .

Мінімальну похибку забезпечує умова

$$\int_{\Omega} (L\bar{u} - f) W_l d\Omega = \int_{\Omega} R_{\Omega} W_l d\Omega = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де $\{W_l; l = \overline{1, m}\}$ – множина лінійно незалежних вагових функцій.

Для більшої ефективності методу зважених залишків його поєднують з методом скінченних елементів, що дає можливість значно спростити алгоритм пошуку розв’язку.

В розглядуваному підході алгоритм розв’язання прямих задач методом зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів включає:

- дискретизацію області кінцевими елементами;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій основі системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах і алгоритм розв’язку цієї системи.

Застосування методу зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів до рівняння (3) приводить до системи алгебраїчних рівнянь для невідомих $\{U\}$ значень функції у вузлах розбиття. Отриману систему можна записати як

$$[K]\{U\} = \{F\}. \quad (4)$$

Тут $[K]$ – глобальна матриця жорсткості; $\{F\}$ – вектор навантаження, які мають конкретний вигляд в залежності від порядку диференціально-інтегрального оператора L (при цьому крайові умови враховані в отриманій системі). В загальному випадку система алгебраїчних рівнянь (4) є нелінійною і може бути розв’язана за допомогою відповідного ітераційного методу.

Як приклад, розв’язано задачу знаходження термонапруженого стану в двохшаровому порожнистому циліндрі, який перебуває під дією температурного навантаження. Проведено числовий аналіз отриманих розв’язків.

Запропонований алгоритм розв’язування даного класу задач може бути використаний для дослідження рівня деформацій і напружень в конкретних елементах конструкцій, які зазнають температурного навантаження, а також для порівняння з розрахунками, отриманими за іншими методиками.

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite element method: Vol. 1. The Basis. – London: “Butterworth Heinemann”, 2000. – 689 p.

NUMERICAL ALGORITHM OF THE SOLUTION OF THE TERMOMECHANIC OBJECT OF THE THERMAL LOADING OF THE TREATMENT OF THERMAL-COMBUSTION FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIALS

The numerical method of solving the problems of thermomechanics for the thermomechanical loading of rotational bodies from thermo-elastic functional gradient materials is proposed. One such method is the method of suspended residues in combination with the finite-element approach, which allows to obtain approximate solutions of the above tasks.

УДК 539.3

ЧИСЛОВА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Євгеній Ірза, Анна Равска-Скотнічни, Любов Гаєвська

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;
Політехніка Опольська (Польща)*

dept13@iapmm.lviv.ua; a.rawska-skotniczny@po.opole.pl

Запропоновано числову модель оптимізації режимів технологічного нагріву тіл, виготовлених з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів, яка включає етапи:

- постановка задач;
- розробка методики розв'язування;
- комп'ютерне моделювання процесу оптимізації;
- аналіз і вибір найкращого розв'язку.

Постановка задач включає такі етапи:

- формулювання математичної моделі поведінки тіл;
- вибір критерію оптимальності;
- вибір функцій керування процесом оптимізації;
- формування математичних обмежень на параметри стану і функції керування.

Поведінка термов'язкопружного тіла описується системою рівнянь термов'язкопружності (модель Максвелла), які умовно можна подати у вигляді:

$$L_i(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{p}, \vec{u}, h) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

При цьому характер градієнтності описується координатною залежністю характеристик матеріалу.

Система рівнянь (1) при заданих зовнішній силі \vec{p} , тепловому навантаженні $h(\tau)$, параметрах конструкції і крайових умовах є замкненою і дозволяє визначити параметри стану $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$, \vec{u} , які характеризують термонапружений стан тіла.

В даній роботі за функціонали оптимальності беруться функціонали локального типу

$$J_k = \max_{\vec{r}, \tau} f_k(\vec{r}, h(\tau)), \quad k = \overline{1, e}. \quad (2)$$

Тут f_k – задана функція мети.

Вибір функції керування $h(\tau)$ здійснюється виходячи з технологічних можливостей керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термообробки.

Вимоги, які ставляться до якості виробів і до параметрів технологічних процесів термообробки, приводять до обмежень, які накладаються на змінні стану і технологічні умови процесу термообробки. Ці обмеження складаються з нерівностей, які записуються в формі:

$$\phi_j(\bar{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \bar{p}, \bar{u}, h) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}. \quad (3)$$

Таким чином, задача оптимізації полягає у визначенні функції керування $h(\tau)$, яка забезпечує мінімум (максимум) функціоналу (2), при в'язях (1) і обмеженнях (3).

Оптимальний розв'язок функції керування на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій. Значення h_{n+1} функції керування h в момент часу τ_{n+1} знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta \tau_n \quad \text{або} \quad h_{n+1} = b_n, \quad (4)$$

де a_n, b_n – шукані параметри, які змінюються в заданих межах.

Таким чином мінімізація функціоналів J_k на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної $J_k = J_k(a_n)$ або $J_k = J_k(b_n)$ (аргументом якої є параметр a_n або b_n).

Комп'ютерне моделювання процесу оптимізації полягає у створенні розрахункової програмної оболонки для персональних комп'ютерів на основі запропонованого числового алгоритму по розв'язуванню сформульованих задач та подальшому всесторонньому його цільовому аналізу в залежності від наявних параметрів.

Аналіз і вибір найкращого розв'язку проводиться на основі конкретних вимог, які мають місце в розглядуваних технологічних процесах нагріву.

NUMERICAL MODEL OF OPTIMIZATION OF THE TECHNOLOGICAL HEAT MODES OF THE TREATMENT OF THERMAL-COMBUSTION FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIALS

A numerical model for optimal control of thermal regimes in the processes of heat treatment of rotational bodies from thermo-elastic functional gradient materials is proposed. The solution of the formulated extremal problem is constructed on the basis of the principle of stepwise parametric optimization.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПО КОСВЕННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Михаил Киселев

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
имени академика В. Лазаряна (Украина)*

kiseleva47@ukr.net

Рассматривается задача об определении механических свойств материала на основе информации об его остаточном деформировании при внедрении индентора в массив материала. В качестве параметров, описывающих свойства материала, принимается вектор $\sigma = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \mu, \varepsilon_T, \delta\}^T$, в качестве измеряемых параметров – $W = \{w_{\max}, w_{it}^{\max}, k, w_{ост}, a_{\max}, t_{сoud}\}$, где k – коэффициент восстановления, w_{\max} – максимальная глубина внедрения индентора, $w_{ост}$ – глубина остаточной вмятины, a_{\max} – размер отпечатка, $t_{сoud}$ – полное время соударения. Измерение указанных параметров производится с помощью экспериментального комплекса [1]. Задача решается методом обратных задач. Квазирешение обратной задачи формулируется следующим образом

$$\sigma = \arg \min_{\sigma \in \bar{\sigma}} I(\sigma), \quad (1)$$

где $I(\sigma) = 1/2 [W_{\sigma}(\sigma) - W(\sigma)]^2$, W_{σ}, W – измеренные и вычисленные векторы, $\bar{\sigma}$ – множество возможных состояний.

Для определения значений $W(\sigma)$ используется модель, описывающая внедрение индентора в массив материала, в качестве которой используется конечноэлементная динамическая модель механики среды (пакет прикладных программ). Для описания зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ используется деформационная теория пластичности и, базирующийся на ее гипотезах, итеративный метод дополнительных деформаций. Кривая зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ аппроксимируется ломаной, при этом до $\sigma_i < \sigma_T$ принимается линейная зависимость, а, при $\sigma_i > \sigma_T$ – участок с линейным упрочнением, линия упрочнения проходит через точки $T(\sigma_T, \varepsilon_T), B(\sigma_B, \varepsilon_B)$. Интегрирование разрешающих уравнений по времени ведется пошагово θ -методом Вилсона. Уравнения для массива материала дополняются уравнением движения индентора. Область кон-

такта находится итеративно, когда на каждом шаге итеративного процесса проверяется условие совместности движения некоторой области массива и индентора. Точки, принадлежащие области контакта, фиксируются, их множество используется для следующего шага итерационного процесса. Для определения неизвестного вектора σ из условия (1) используется метод Ньютона, градиент функционала определяется с помощью разностного аналога. В качестве начального приближения используются значения σ из ГОСТ.

На основе изложенного алгоритма был проведен масштабный численный эксперимент. Варьировались как физические свойства материала, так и скорость полета и масса индентора. Из полученных результатов вытекает, что для фиксированного значения σ_b с повышением σ_T увеличиваются максимальные остаточные перемещения, время соударения, а коэффициент восстановления уменьшается. С ростом σ_b при фиксированном σ_T материал характеризуется большей степенью упрочнения, перемещения и время соударения уменьшаются, а коэффициент восстановления увеличивается. Время соударения с ростом скорости полета или уменьшением массы индентора уменьшается. Увеличение скорости полета и массы индентора повышают значения максимальных и остаточных перемещений.

Рассмотрена задача информативности каждого из измеряемых параметров при определении различных компонентов вектора σ . Так, для идентификации E, μ наиболее информативными оказались пары $\{w_{\max}, k\}$, $\{w_{it}^{\max}, k\}$.

При определении параметров $\{\sigma_T, \sigma_b, \varepsilon_T, \delta\}$ оптимальными измеряемыми параметрами являются $\{w_{\max}, k, w_{ocm}, a_{\max}\}$. Для вектора $\{\sigma_b, \sigma_T, \delta\}$ ответственными параметрами будут $\{w_{\max}, k, w_{ocm}\}$ или $\{w_{it}^{\max}, k, w_{ocm}\}$.

В процессе проведения экспериментальных исследований и компьютерного моделирования установлено, что основным фактором, влияющим на соответствие полученных результатов действительным, является точность аппроксимации $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Используемая двухзвенная аппроксимация хорошо отражает поведение марганцовистых сталей, хуже – никелевых и углеродных.

1. *Закиров К.Е., Ободан Н.В.* Автоматизированная установка для измерения пластической твердости стали ударным способом / В сб. «Контроль и управление в технических системах». Ч. 2. – Винница: ВТУУ, 1995. – С. 513-514.

IDENTIFICATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS USING NON-DIRECT MEASUREMENTS

The approach to solve identification problem was proposed and tested with the employment of the problem to estimate mechanical properties using residual stresses resulted from indenter application; the direct problem was modelled with dynamical finite element approximation of continuum. Simulation allows revealing factors most informative for identification.

ПРО МЕЖИ ЗАСТОСОВНОСТІ МОДЕЛІ А.І. ЛУР'Є В ЗАДАЧАХ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Анатолій Колодяжний, Маргарита Меднікова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара (Україна);

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне»

ім. М.К. Янгеля» (Україна)

ankol4517@gmail.com; Mednikova1990@gmail.com

Пропонується аналіз моделі розрахунку коефіцієнта концентрації напружень (ККН) в циліндричних оболонках, послаблених круговим отвором, сформульованої А.І. Лур'є [1]. Одним із важливих елементів цієї лінійної моделі є припущення про швидке загасання так званої збурюючої складової загального напруженого стану, викликаного наявністю отвору. Це припущення дає можливість використовувати геометричний параметр β [2], присутній в розв'язувальних рівняннях, як єдиний параметр, який визначає напружений стан та ККН для стандартних навантажень. Він залежить від товщини, радіусів оболонки та отвору, але не залежить від її довжини. В роботі [1] приведені розрахунки ККН для випадків навантаження оболонок з малими отворами розтягуючими зусиллями та боковим рівномірним тиском. Надалі підхід Лур'є виявився досить ефективним, він застосовувався протягом десятиліть багатьма дослідниками і для інших стандартних навантажень – стиснення та кручення. При цьому можна відзначити характерну тенденцію намагання розширення класу вирішуваних завдань і на середні, і великі за відомою класифікацією отворів.

У даній роботі наведені результати скінченно-елементного (СЕ) моделювання і параметричного аналізу напружень і деформацій для оболонок з отвором, навантажених крутним моментом або стисненням. Розглянуто випадки початкової стадії навантаження, коли є можливе застосування СЕ-лінійного аналізу (і порівняння з відомими результатами, отриманими з використанням моделі Лур'є), і наступного етапу навантаження до вичерпання несучої здатності оболонки (коли її деформування стає геометрично нелінійним).

Розрахунки, проведені в рамках лінійного СЕ-аналізу, показують, що вже для низьких рівнів навантаження вплив довжини оболонки на характер полів напружень, деформацій і на ККН досить значний (для оболонок з короткими і середніми довжинами).

Показано, що модель Лур'є дає результати, близькі до отриманих авторами з використанням СЕ-моделювання, лише для відносно довгих оболонок, причому довжина, починаючи з якої результати збігаються, істотно зростає зі збільшенням отвору. Побудована залежність межових довжин оболонок, яка виділяє діапазон застосовності розрахункової моделі Лур'є. Показано, що для менших довжин загасання збурюючих напружень, викликаних отвором, відбувається набагато повільніше, ніж це отримується за моделі Лур'є і визначається впливом крайових умов на торцевих перетинах оболонок.

Врахування геометричної нелінійності деформування, проведене на основі СЕ-аналізу, дає можливість врахувати змінність ККН за збільшення навантаження на оболонку. Особливо явно вплив нелінійності проявляється для оболонок при збільшенні отвору.

Таким чином, адекватне визначення ККН оболонок із середніми або великими отворами при розрахунку на несучу здатність вимагає врахування реальної їх довжини та геометричної нелінійності деформування.

1. *Лурье А.И.* Концентрация напряжений в области кругового отверстия на поверхности кругового цилиндра // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, № 3. – С. 307-406.
2. *Van Dyke P.* Stresses about a circular hole in a cylindrical shell // AIAA Journ. – 1965. – **3**, № 9. – P. 1733-1742.

ON THE LIMITS OF THE APPLICABILITY OF THE A. I. LURIE'S MODEL IN PROBLEMS OF STRESS-STRAIN STATE OF SHELLS WITH A CIRCULAR HOLE

The paper proposes the analysis of the calculating model of the stress concentration factor (SCF) in cylindrical shells weakened by a circular hole, formulated by A.I. Lurie. In most cases of the existing researches, the mathematical model of Lurie was applied for the solution of the described problem, based on separation of the stress state into the basic and disturbed. This model has a set of assumptions, such as the endlessness of the shell length, the linearity of the considered problems and the restriction by small sizes of holes. The model is characterized by the presence of a key curvature parameter β , which does not provide a dependence on length. It is supposed that the stresses have local nature and decay near the hole. This paper presents the results of the Finite-Elements Modeling and parametric analysis of stress-strain state of shells with a hole loaded by torque or compression.

The cases of the initial stage of loading, when linear analysis is applicable and it is possible to compare the obtained results based on the application of the Lurie's model with the next loading stage, up to the exhaustion of the load bearing capacity of a shell, when its strain state becomes geometrically nonlinear, were considered.

The dependence of the shells boundary lengths, which emphasizes the range of applicability of the Lurie's design model, was defined. It was shown that the Lurie's model gives the results that are close to the results obtained by the authors for Finite-Elements Method only for relatively long shells, besides, the length, from which the results become to match, significantly increases with increasing a hole.

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОШАРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Софія Круць, Іван Киричок, Ярослав Жук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна);

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

y.zhuk@i.ua

Одним з найпоширеніших способів активного гасіння вимушених коливань є нанесення на зовнішні поверхні тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази (для нейтралізації дії механічного збудження). Тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями можуть знаходитись під дією інтенсивних циклічних навантажень, які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву. Побудова електромеханічних моделей динамічної поведінки тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів, що враховують фізичну і геометричну нелінійність містяться зокрема у [1]. Розробка уточнених теорій термоелектромеханічної поведінки конструкцій, в яких беруться до уваги деформації зсувів, є актуальною задачею.

У даній роботі приведено наближену постановку та числовий розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої кільцевої в'язкопружної гнучкої пластини з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні за врахування деформації поперечного зсуву. Досліджено вплив деформації зсуву, геометричної нелінійності та умов теплообміну на поверхні пластини на її динамічні характеристики, температуру внаслідок дисипативного розігріву, критичні значення амплітуд механічного навантаження, при яких відбувається теплове руйнування системи. Показано можливість демпфування вимушених коливань кільцевої пластини за допомогою п'єзоактуаторів.

1. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.

RESONANT VIBRATION AND DISSIPATIVE HEATING OF FLEXIBLE VISCOELASTIC ANNULAR PLATE WITH PIEZOLAYERS ACCOUNTING FOR SHEAR STRAIN

Resonant vibration and dissipative heating of flexible viscoelastic annular plate with piezolayers accounting for shear strain are investigated. The critical loading parameters that lead to thermal failure of the plate are determined.

ЛИНИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНЫ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ

Расим Лабибов, Юрий Черняков

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара (Украина)

postrediori@gmail.com

Рассматривается чистый изгиб пластины постоянной толщины $h=1$ м под действием момента M (

Рис. 1). Механическое поведение материала образца задается диаграммой которая представляется в виде кусочно-линейной кривой, состоящей из участков упругого поведения, разупрочнения, текучести и упрочнения.

Напряженно-деформированное состояние в пластине остается однородным до тех пор, пока величина напряжений в крайних волокнах ($A-A$, $A'-A'$,

Рис. 1) не достигнет значения верхнего предела текучести $\sigma_T=100$ Мпа, отвечающего переходу от упругого участка к упруго-пластическому [1].

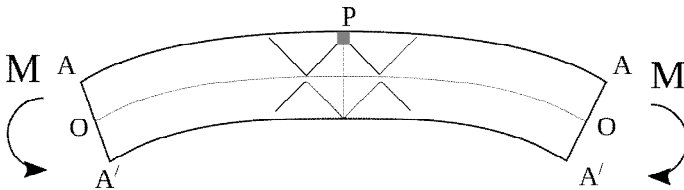
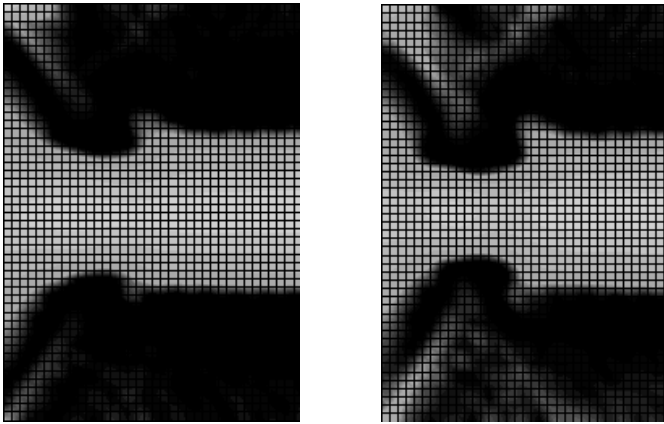


Рис. 1 Чистый изгиб пластины

При исследовании процесса деформации использовано конечно-элементную модель. На оси симметрии пластины введено начальное несовершенство P в виде конечного элемента с меньшим пределом текучести. Таким образом, процесс деформирования после достижения предела текучести становится неоднородным [2]. Ввиду симметрии в модели учитывается только правая половина пластины.

Результаты моделирования процесса деформации пластины при различных значениях изгибающего момента M представлены на Рис. 2, на котором показан фрагмент изолиний интенсивности напряжений, в котором развиваются полосы скольжения. При достижении предела текучести σ_T в точке P возникает полоса локализации [3]. При увеличении изгибающего момента полоса распространяется вглубь пластины в направлении нейтральной линии (Рис. 2а), а затем отражается от неё. После того, как отраженная полоса лока-

лизации достигает границы (Рис. 2б), развитие полос останавливается и возникает пластический шарнир. Полученный характер поведения совпадает с экспериментальными результатами [4].



а)

б)

Рис. 2 Результаты численного моделирования пластического состояния при чистом изгибе

Таким образом, для рассматриваемых материалов в отличие от идеально-пластического поведения при чистом изгибе, пластический шарнир возникает локально за счет начальных несовершенств.

1. *Kyriakides S., Miller J. E.* On the Propagation of Lüders Bands in Steel Strips // *Journal of Applied Mechanics*. – 2000. – **67**, No. 4. – P. 645.
2. *Bazant Z.P., Belytschko T.B.* Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1985. – **111**, No. 3. – P. 381-389.
3. *Shaw J., Kyriakides S.* Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension // *International Journal of Plasticity*. – 1997. – **13**. – P. 837-871.
4. *Corona E., Shaw J., Iadicola M.A.* Buckling of steel bars with Lüders bands // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – **39**. – P. 3313-3336.

PURE BENDING LOCALIZATION BANDS IN THE PLANE OF A PLATE

Quasi-static bending of a plate with constant width is considered. Mechanical properties of a material are defined by the segment of negative slope on stress-strain diagram, which follows the section of elastic deformation. Ideal plasticity shows that the hinge state starts immediately after the yielding limit is exceeded. The model shows that the negative slope on the stress-strain diagram leads to a localization bands originating at the point of an initial imperfection. Plastic hinge state starts after the bands propagate through the material down to the neutral line.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РАДІАЦІЙНОГО РОЗПУХАННЯ ВИГОРОДКИ РЕАКТОРА ВВЕР-1000

Олег Махненко, Степан Кандала

Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН Україниmakhnenko@paton.kiev.ua; st_kan@ukr.net

Основним елементом внутрішньокорпусних пристроїв (ВКП), який обмежує залишковий ресурс реакторів ВВЕР-1000 при продовженні терміну експлуатації до 60 років, є вигорodka активної зони реактора, яка експлуатується в умовах високих градієнтів температур і нейтронного опромінення. Ресурс вигородки в першу чергу визначається прогресуючою формозміною під дією процесів радіаційного розпухання і радіаційної повзучості при довготривалій експлуатації.

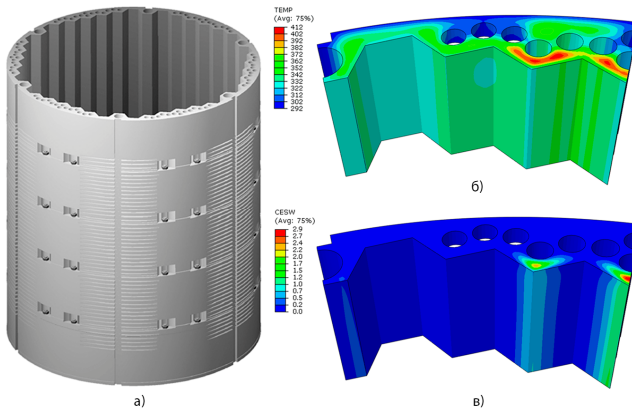


Рис. 1. Вигорodka: а) загальний вид; б) температурне поле; в) розпухання

З метою обґрунтування придатності розрахункових методів для оцінки технічного стану вигородки розглянуто 3 існуючі математичні моделі радіаційного розпухання корозійностійкої сталі 08X18H10T, з якої виготовлені всі елементи ВКП ВВЕР-1000. Найбільш спрощена модель [1] вільного розпухання S_0 , яка враховує тільки температуру T матеріалу і накопичену дозу Φ . При цьому

$$S_0 = 0,55 \cdot (\Phi + 0,1 \cdot T - 67) \cdot \exp(-29 \cdot 10^{-5} (T - 485)^2). \quad (1)$$

Модель [3], що розроблена для близької за хімічним складом сталі AISI 304, додатково враховує напруження та швидкість накопичення дози в матеріалі.

Тоді:

$$S_0 = 2\Phi\dot{\Phi}^{-0,731} \exp(22,106 - 18558 / T + 273,15); \quad (2)$$

$$S = S_0\Phi \cdot (1 + 0,005\sigma_{eq}). \quad (3)$$

Найбільш сучасна модель [2] враховує напружено-деформований стан та процес радіаційної повзучості матеріалу (5):

$$S = C_D \cdot D^n \cdot f_1(T) \cdot f_2(\sigma_m, \sigma_{eq}) \cdot f_3(\alpha); \quad (4)$$

$$\varepsilon_{eq}^{cr} = (B_0 D + \omega \varepsilon_{eq}^{sw}) \sigma_{eq} \quad (5)$$

Порівняльний аналіз показав, що модель [2] (за доброї узгодженості з моделлю [3] при довгостроковій експлуатації (Рис. 2)) дозволяє знизити консервативність результатів за напруженнями внаслідок врахування радіаційної повзучості.

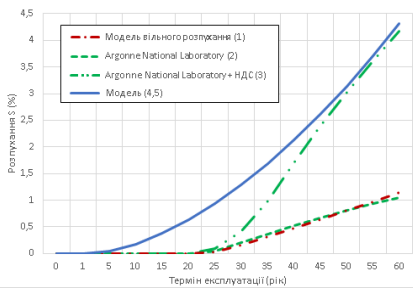


Рис. 2. Кінетика максимального розпухання матеріалу вигородки в процесі довгострокової експлуатації (60 років) в залежності від розрахункової моделі

1. Шарый Н.В., Семишкин В.П., Пиминов В.А., Драгунов Ю.Г. Прочность основного оборудования и трубопроводов реакторных установок ВВЭР. – М., 2004.
2. Degradation of LWR Core Internal Materials due to Neutron Irradiation. Prepared by O.K. Chopra. Environmental Science Division Argonne National Laboratory Argonne, IL 60439 / Appajosula S. Rao, NRC Project Manager.
3. Марголин Б.З., Мурашова А.И., Неустров В.С. Анализ влияния вида напряженного состояния на радиационное распухание и радиационную ползучесть аустенитных сталей // Проблемы прочности. – 2012. – 3. – С. 5-24.

MATHEMATICAL MODELLING OF IRRADIATION SWELLING OF THE REACTOR WWER-1000 CORE BAFFLE

The core baffle is main element of the reactor VVER-1000 internals, which determines and possibly sharply reduces the service life of reactor. Core baffle is operating in conditions of high neutron irradiation and temperature gradients. The service life of core baffle is primarily determined by its unallowable distortions, caused by radiation swelling and radiation creep processes. In order to substantiate the suitability of the calculational methods for assessing the technical condition of the core baffle, three existing mathematical models of the radiation swelling for corrosion-resistant steel 08X18H10T, from which all elements of the internals VVER-1000 are made, are considered.

ВПЛИВ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ПАТРУБКОВІЙ ЗОНІ КОРПУСУ РЕАКТОРА ВВЕР-1000 НА РЕЗУЛЬТАТИ ОЦІНКИ ОПОРУ КРИХКОМУ РУЙНУВАННЮ

Олег Махненко, Олена Костеневич

Інститут електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України

makhnenko@paton.kiev.ua; alenakostenevich@gmail.com

Патрубкова зона корпусу реактора ВВЕР-1000 належить до небезпечних ділянок з точки зору опору крихкому руйнуванню у випадку аварійної ситуації, пов'язаної з zalиванням через патрубків холодної борної води (так званий «термошок»). Залишкові напруження (ЗН), викликані зварюванням та наплавленням, можуть впливати на міцність при крихкому руйнуванні конструкції корпусу реактора. На сьогодні для цих розрахунків використовують приблизні дані, що містяться в рекомендаціях різних документів, зокрема таких, як МРК-СХР-2000 [2], VERLIFE [4] та інші [5].

Розподіл ЗН в основному матеріалі (сталь 15Х2НМФА) патрубкової зони при антикорозійному наплавленні залежить від мікроструктурного фазового складу в зоні плавлення та зоні термічного впливу. Дугове наплавлення аустенітного матеріалу під флюсом проводиться стрічкою шириною 40-60 мм при температурі підігріву до 250°C. Для комп'ютерного моделювання ЗН з урахуванням мікроструктурних фазових перетворень були використані методи на основі рівняння Аврамі [3] та регресійних залежностей [1]. В результаті термічної обробки за режимом високого відпуску при T=650°C рівень максимальних ЗН в основному матеріалі значно знижується з 650 МПа до 150 МПа (Рис. 1, б).

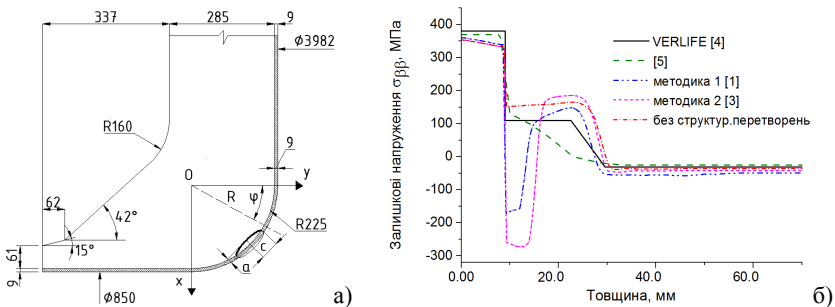


Рис. 1. Схема патрубка з тріщиною (а) і розподіл залишкових напружень (б)

При всіх розрахункових значеннях коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) для постульованої тріщини (рис.1а) при «термошоці» (Рис. 2) умова міцності на опір крихкому руйнуванню виконується: $K_I < K_{Ic} = \min[26 + 36 \exp(0,02 \cdot (T - T_k)), 200]$ при $T_k = 50^\circ\text{C}$. Значно вищий рівень ЗН, отриманих розрахунковим шляхом, у порівнянні з рекомендаціями VERLIFE (на прикладі кільцевої компоненти) при оцінці структурної цілісності ВВЕР-1000 призводить до збільшення КІН в вершині постульованої тріщини приблизно на 30 % (Рис. 2). Без урахування ЗН різниця в значеннях КІН складає більше 50 %. Це підтверджує доцільність враховувати ЗН при розрахунково-обґрунтованні терміну безпечної експлуатації реактора ВВЕР-1000.

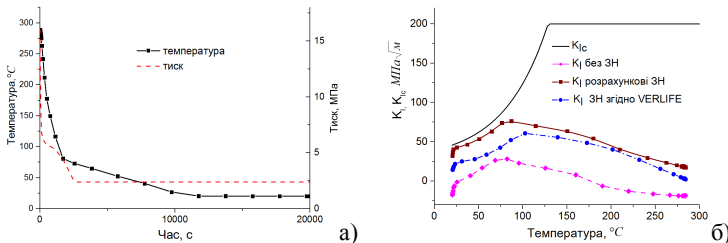


Рис. 2 Режим навантаження (а) та КІН (б) в вершині тріщини (а=15 мм; а/с=0,3; с=50 мм) при «термошоці»

1. *Касаткин О.Г., Зайффарт П.* Расчетные модели для оценки механических свойств металла ЗТВ при сварке низколегированных сталей / Сборник трудов международной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в сварке и родственных процессах». – К., 2002.
2. *Методика определения ресурса корпусов атомных реакторов в процессе эксплуатации (МПК-СХР-2000), РД ЭО 0353-02, С.-Петербург-Москва, 2000.*
3. *Dean Deng, Yangang Tong, Ninshu Ma and Hidekazu Murakawa.* Prediction of the Residual Welding Stress in 2.25Cr-1Mo Steel by Taking into Account the Effect of the Solid-State Phase Transformations. In: Acta Metall. Sin. – 2013. – 26, No. 3.
4. *Unified procedure for lifetime assessment of components and piping in WWER NPPs “VERLIFE”, ver. 2003, 5th Framework Programme of EU.*
5. *Kostylev V.I., Margolin B.Z.* Determination of residual stress and strain fields caused by cladding and tempering of reactor pressure vessels. In: International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2000. – 77.

INFLUENCE OF RESIDUAL STRESS CAUSED BY CLADDING OF ANTICORROSION LAYER IN NOZZLE ZONE OF RPV WWER-1000 ON RESULTS OF BRITTLE STRENGTH EVALUATION

Structural integrity and lifetime assessment of nuclear power plant components and RPV WWER-1000 requires a responsible data on residual stresses. Significant progress in mathematical simulation of welding stresses creates preconditions for more precise evaluation of non-relaxed residual stresses in RPV. Using exist and calculated precise data the influence of residual stresses in the nozzle zone of RPV WWER-1000 on brittle strength during thermal shock was evaluated.

УДК 539.3

**ТЕРМОМЕХАНІЧНІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ
У ВІДПАЛЕНИХ ВИРОБАХ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УМОВ
ЇХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ**

Віра Михайлишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

vira.mykhailyshyn@gmail.com

Актуальність робіт по вивченню впливу експлуатаційних умов на відпалені вироби пов'язана 1) із практичною відсутністю таких робіт; 2) із недостатньо напрацьованими теоретичними та методичними підходами до вирішення цієї проблеми; 3) із важливістю теоретичного обґрунтування доцільності чи недоцільності призначення термообробки, метою якої є пониження залишкових напружень.

Для ізотропного пластично деформівного термочутливого зміцнюваного тіла, що підлягає високотемпературній термообробці відпалом з метою релаксації відомих залишкових напружень до невідомого (шуканого) рівня і наступній його експлуатації при заданих термомеханічних умовах, формулюється послідовність задач на основі співвідношень теплопровідності та термомпластичності з різними початковими та крайовими умовами.

Модельованими факторами впливу на напружено-деформований стан відпалених виробів можуть бути нестационарні теплові режими охолодження або (і) статичні механічні навантаження. Припускається квазістатичність деформаційних процесів, відсутність масових сил, можливість виникнення великих переміщень при малих деформаціях.

Шукана температура у нестационарному тепловому процесі при конвективному теплообміні із зовнішнім середовищем є розв'язком рівняння теплопровідності з відповідними початковою та крайовою умовами.

Задача про механічний стан тіла формулюється в змінних Лагранжа на основі теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням [2]. При моделюванні впливу експлуатаційних умов на механічну поведінку відпаленого виробу початковими напруженнями є релаксовані в результаті відпалу напруження, спрогнозовані теоретично або отримані експериментально. Умовою пластичного течіння матеріалу є умова Мізеса, модифікована на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення [2].

В даній роботі остаточно в кінці відпалу напруження (як початкові для дослідження їх перерозподілу при наступних модельованих експлуатаційних

умовах) також отримані шляхом розв'язування відповідних задач термомеханіки для етапу охолодження виробу при високотемпературному відпалі. При цьому здійснена попередня оцінка досягнутого перед охолодженням напруженого стану, яка ґрунтується на відомих експериментальних і теоретичних фактах.

Запропонований наближений підхід до розв'язування задач базується на методі скінченних елементів (МСЕ). Отримано співвідношення для корекції напружень відповідно до кривої деформування матеріалів на основі рівняння стану теорії пластичного течіння. Розроблено розрахункові схеми і відповідне програмне забезпечення для розв'язування двовимірних задач [1].

Як приклад, визначено, досліджено та проаналізовано напружений стан у тонкому круглomu диску з концентричним коаксіальним отвором при сумісному впливі тиску на границю отвору та стаціонарного температурного поля. Напруження в диску характерні для зварного з'єднання стиковим зварним швом двох кільцевих дисків з однаковими розмірами в радіальному напрямку. Здійснено розрахунки в припущенні ідеального пружно-пластичного матеріалу, кінематично зміцнюваного та ізотропно-кінематично зміцнюваного. Є фізично більш обґрунтованими результати за узгодженості моделі ізотропно-кінематичного зміцнення та експериментальної кривої деформування. Для порівняння отримані результати впливу розглядуваних факторів дії на стан диску за відсутності початкових напружень у випадку пружно-пластичного матеріалу при його ізотропно-кінематичному зміцненні та пружного матеріалу. Встановлено закономірності стосовно характеру та рівнів напружень при так модельованих експлуатаційних умовах в залежності від наближень зміцнюючих властивостей матеріалу.

1. *Гачкевич О., Михайлишин В., Равска-Скотнічни А.* Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – 12. – С. 78-92.
2. *Морозов Е.М., Никишков Г.П., Черныш Т.А.* Неизотермическая модель упруго-пластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск: Уральск. науч. центр АН СССР. – 1986. – С. 87-94.

THERMOMECHANICAL ELASTOPLASTIC PROCESSES IN ANNEALED PRODUCTS BY MODELLING OF EXPLOITATION CONDITIONS

The mathematical problem for prediction of the evolution of the thermomechanical stages in annealed plastic deformable products with residual relaxed stresses is formulated. The products stand in conditions of nonstationary thermal or (and) static mechanical influences. The appropriate software based on the finite element method (FEM) is developed. The proposed approach is illustrated for disc with residual after annealing stresses.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ СИСТЕМИ (КУЛІ З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ) ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ

**Роман Мусій, Наталія Мельник, Іванна Зашкільняк,
Катажина Войтечек-Лящак**

*Національний університет "Львівська політехніка" (Україна);
Політехніка Опольська (Польща)*

musiy@lp.edu.ua; melnyk.n.pz@gmail.com; k.wojteczek-laszczak@po.opole.pl

У сучасних приладах і пристроях як конструктивні елементи використовують електропровідні немагнітні кулі з нанесеним тонким електропровідним покриттям (ЕКТЕП). В процесі експлуатації вони зазнають різних фізичних дій – силових, температурних та електромагнітних. Ці дії приводять до виникнення в ЕКТЕП термонапруженого стану, аналіз якого необхідний для прогнозування роботоздатності відповідних конструктивних елементів.

Розглядається ЕКТЕП радіуса R , товщини h_* з тонким електропровідним сферичним покриттям товщини h . Куля віднесена до сферичної системи координат (r, ϕ, ϑ) , центр O якої співпадає з її центром.

ЕКТЕП знаходиться за дії однорідного нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого значеннями азимутальної компоненти H_ϕ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; 0; H_\phi\}$ на її поверхні $r = R$. Система є теплоізолюваною і вільною від зовнішнього силового навантаження. Дія нестационарного ЕМП створює в кулі (К) і тонкому покритті (ТП) нестационарні об'ємно розподілені джерела джоулевого тепла Q і пондеромоторні сили $\vec{F} = \{F_r; 0; 0\}$. Ці два фізичні чинники зумовлюють виникнення в К і ТП нестационарних полів температури T і механічних напружень, що описуються тензором динамічних напружень $\hat{\sigma}$. Значення температури T і напружень $\hat{\sigma}$, за якими проводиться оцінка роботоздатності ЕКТЕП, залежать як від амплітудно-частотних характеристик ЕМП, так і від фізико-механічних характеристик кулі і покриття, а також від електромагнітних, теплових і механічних умов на поверхні їх з'єднання.

Для визначення термонапруженого стану ЕКТЕП побудовано математичну модель, яка оснований на співвідношеннях термомеханіки двошарової електропровідної кулі [1]. Приймається, що на поверхні з'єднання К і ТП забезпечуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного

контактів [3]. За певних значень параметрів ЕМП температура T і компоненти σ_{jj} ($j = r, \phi, \theta$) тензора $\hat{\sigma}$ досягають значень, за яких відповідні їм інтенсивності напружень σ_i^K у циліндрі та σ_i^{Π} у покритті можуть перевищувати межу плинності матеріалів кулі σ_d^K чи покриття σ_d^{Π} . Важливим для функціонування ЕКТЕП як конструктивного елемента є також збереження властивостей її контактної з'єднання. ЕКТЕП втрачає такі властивості за умови, що максимальні значення інтенсивностей напружень на поверхні з'єднання $r = R$ у кулі σ_{i*}^K чи у покритті σ_{i*}^{Π} перевищують межу міцності σ_M контактної з'єднання.

Для встановлення граничних значень параметрів ЕМП, за наявності яких не перевищується допустимий термонапружений стан ЕКТЕП необхідно, розв'язавши на основі запропонованої математичної моделі відповідну динамічну задачу термомеханіки для ЕКТЕП, обчислити величини інтенсивностей напружень σ_i^K і σ_i^{Π} , а також σ_{i*}^K і σ_{i*}^{Π} і порівняти їх із відомими з експериментальних досліджень [2] значеннями цих величин.

Розв'язок динамічної задачі термомеханіки для ЕКТЕП за однорідної дії нестационарного ЕМП побудовано, використовуючи апроксимацію визначальних функцій (компоненти H_ϕ вектора \vec{H} , температури T і радіальної компоненти U_r вектора переміщень $\vec{U} = \{U_r; 0; 0\}$) за радіальною змінною r квадратичними поліномами та інтегральне перетворення Лапласа за часом t .

Чисельно проаналізовано термонапружений стан і роботоздатність конкретної ЕКТЕП за дії електромагнітного імпульсу.

1. *Мусій Р.С., Мельник Н.Б.* Термонапружений стан порожнистої біметалевої кулі за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульованим сигналом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – **21**. – С. 139-149.
2. *Мэттьюз Ф., Ролингс Р.* Композитные материалы. Механика и технология. – М.: Техносфера, 2004. – 408 с.
3. *Подстригач Я.С., Буряк Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL-PURPOSE BEHAVIOR OF ELECTRIC PIPE WITH FINE ELECTRICAL CONCRETE NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION

A mathematical model of an electric conductive ball with a thin conductive coating for non-stationary electromagnetic action was constructed. The model uses the ratio of the thermomechanics of a two-layer conductive ball, taking into account the ideal electromagnetic, thermal and mechanical contacts on the surface of the coupling of the ball and the coating. A numerical analysis of the thermo-stressed state and the robustness of such a ball is made under the influence of the electromagnetic pulse.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО НЕФЕРОМАГНІТНОГО ШАРУ ІЗ УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ЙОГО ПОВЕРХНІ**Тарас Нагірний, Юлія Сенік***Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*t.nahirnyj@gmail.com; yuliya.senik@gmail.com

В рамках локально-градієнтного підходу в термодинаміці [1], сформульовано крайову задачу, що описує рівноважний стан вільного від силового навантаження електропровідного неферомагнітного шару із врахуванням структурної неоднорідності матеріалу, геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та нелінійної залежності модуля Юнга і коефіцієнта Пуассона від густини. Методика знаходження параметрів зв'язаних полів зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу і наступного знаходження параметрів напружено-деформованого стану.

На основі аналізу одержаного розв'язку встановлено, що для розподілу механоелектричних полів властиві три характерні розміри, які пов'язані зі структурною неоднорідністю матеріалу, шорсткістю реальної поверхні тіла та силами кулонівської взаємодії. Значення термодинамічного електричного потенціалу, заряду та напружень на поверхні шару однозначно визначаються фізичними та геометричними характеристиками тіла. Їм властивий розмірний ефект (їх значення змінюється зі зміною товщини шару, прямуючи до відповідних значень у півпросторі). Вивчено вплив параметрів нелінійності на значення механічних полів. Вказано на необхідність врахування цих параметрів для коректного опису шорсткості реальної поверхні тіла. Проведено порівняння одержаних результатів з результатами за лінеаризованого наближення [2].

1. *Тарас Нагірний, Костянтин Червінка. Основи механіки локально неоднорідних пружних тіл. Основи наномеханіки II.* – Львів: Растр-7, 2014. – 168 с.
2. *Nahirnyj T.S., Senyk Y.A., Tchervinka K.A. Modeling local non-homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid // Mathematical Modeling and Computing.* – 2014. – 1, No 2. – С. 214-223.

STRESS STRAIN STATE OF THE ELECTROCONDUCTIVE NON-FERROMAGNETIC LAYER, TAKING INTO ACCOUNT THE GEOMETRIC INHOMOGENEITY OF ITS SURFACE

In the framework of a locally gradient approach in thermomechanics, a nonlinear boundary value problem for a electroconductive nonferromagnetic layer is formulated and regularities of electromechanical fields are studied.

КОМПЛЕКСНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АВАРІЙНОЇ СИТУАЦІЇ НА ТРУБОПРОВОДАХ ТА ОЦІНКА ЇЇ ВПЛИВІВ НА ДОВКІЛЛЯ

Андрій Олійник, Борис Незамай

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу (Україна)

andrioliiny@gmail.com; boris_may@ukr.net

Проблема, що вирішується може бути розділена на три основні задачі:

1. Визначення параметрів напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів за відомою інформацією про зміну їх просторової конфігурації – як правило, такою інформацією є дані про переміщення точок поверхні досліджуваного тіла.

Ця задача детально обгрунтована в [2] і її особливістю є те, що висновок про напружено-деформований стан об'єкта робиться на основі певних інтегральних показників – переміщень точок поверхні тіла без деталізації причин виникнення цих переміщень. На основі даних про зміну напружено-деформованого стану об'єкта вдається встановити його потенційно небезпечні ділянки (на яких напруження приймають критичний рівень, або ж зміна напружень є такою, що може призвести до розгерметизації об'єкта, а також і до потенційно небезпечних екологічних впливів).

2. Оцінка інтенсивності витoku речовини при порушенні герметичності об'єкта.

Задача оцінки параметрів течії у трубопроводах та в свердловинних потоках зводиться до необхідності розв'язання наступної системи рівнянь Нав'є-Стокса [1] в двовимірній постановці:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

за умов $p=p_0-kx$ (k – коефіцієнт перепаду тиску). До системи (1) приєднуються початкові та крайові умови, які враховують потенційне місце розташування витоків в зонах, де виникають критичні напруження.

3. Визначення концентрації шкідливих речовин в зоні аварійної ситуації.

Для оцінки концентрації шкідливих речовин розв'язується рівняння дифузії, яке для двовимірної області записується у вигляді

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(x,y,t) \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(a(x,y,t) \frac{\partial C}{\partial y}). \quad (2)$$

Коефіцієнт $a(x,y,t)$ залежить від просторових координат x, y та часу t . Рівняння дифузії (2) доповнюється крайовими та початковими умовами [2]:

$$C_0(x,y) = C_0(x,y,0),$$

$$\begin{cases} C|_{x=0} = C_1(y,t), \\ C|_{x=L_1} = C_2(y,t), \\ C|_{y=0} = C_3(x,t), \\ C|_{y=L_2} = C_4(x,t). \end{cases} \quad (3)$$

При визначенні аналітичної структури $C_i(x,t), C_j(y,t), j=1,2$ використовуються допущення про пропорційність концентрації речовини на границі області швидкості витікання речовини.

Всі приведені в задачах моделі доведені до числової реалізації. Використовуються методи скінченних різниць. Особливістю одержаного розв'язку є те, що крайові умови для (1) змінюються на кожному кроці ітераційної процедури. Таким способом у випадку збіжності ітераційного процесу, вдається визначити швидкість витікання рідин з досліджуваного об'єкта.

1. *Андерсон Д., Теннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х томах. – М.: Мир, 1990 – 776 с.
2. *Олійник А.П.* Математичні моделі процесу квазістационарного деформування трубопроводних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010 – 320 с.

THE PIPELINES TECHNICAL DANGEROUS SITUATIONS COMPLEX MATHEMATICAL MODEL AND INFLUENCE ON ENVIRONMENT ESTIMATION

The method to determine the dangerous from the point of view of pipeline's stress-strained state changing has been proposed using the 6 components of stress and strain tensor, both with the method of liquids leakage velocity into the soils estimation. The suggested mathematical models of diffusion processes are based on the use of two- and three-dimensional diffusion equations with a wide range of boundary and initial conditions.

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ДРОБОВО-ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ ЯДЕР СПАДКОВОСТІ У НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛАХ В КУБІЧНІЙ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

Ярослав Павлюк, Павло Фернаті, Віра Рагуліна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

creep@inmech.kiev.ua

Найбільш загальний підхід до визначення механічних характеристик нелінійно-в'язкопружних матеріалів базується на використанні кратно-інтегрального рівняння Вольтерра-Фреше. Однак, велика кількість і багатомірна природа ядер спадковості ускладнює процедуру їх встановлення. У зв'язку з цим запропоновано спрощені варіанти загального нелінійного визначального рівняння, одним із яких є отримані на основі кубічної теорії.

Визначальне рівняння кубічної теорії в одновимірному випадку, що враховує залежність між деформаціями ε напруженнями σ і t часом, записується у вигляді [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda_1}{E_1} \left[\sigma(t) + \int_0^t K_1(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right] + \frac{\lambda_3}{E_3} \int_0^t K_3(t-\tau)\sigma^3(\tau)d\tau. \quad (1)$$

Воно використовується для опису повзучості в'язкопружних матеріалів, коли в залежності від рівня напружень можна виділити лінійну і нелінійну межу в'язкопружних властивостей. Тут $K_1(t-\tau)$ і $K_3(t-\tau)$ – ядра спадковості в лінійній і нелінійній області відповідно.

Як ядро повзучості використовують дробово-експоненційне ядро [2]

$$K(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (2)$$

де α і β – параметри ядра ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Параметри ядер повзучості і невідомі коефіцієнти визначаються за два етапи. На першому етапі знаходяться параметри ядра повзучості $K_1(t)$ і параметр λ_1 , що описують лінійне в'язкопружне деформування матеріалу. Вони визначаються шляхом мінімізації функціоналу

$$F(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma}_k, t_j)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right] \right\}, \quad (3)$$

де α_1 , β_1 і λ_1 – параметри ядра повзучості $K_1(t)$; $\bar{\varepsilon}(\cdot)$ – експериментальні значення деформацій повзучості в лінійній області ($\bar{\sigma}_k < \sigma_*$).

На другому етапі встановлюються параметри ядра повзучості $K_3(t)$ і коефіцієнт b , що описують деформування матеріалу в нелінійній області. Вони визначаються шляхом мінімізації функціоналу

$$F(\alpha_3, \beta_3, b) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\bar{\sigma}_k, t_j) - b E \tilde{\sigma}_k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t_j^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_3)(1+n)]} \right\}^2, \quad (4)$$

де α_3 , β_3 і λ_3 – параметри ядра повзучості $K_3(\cdot)$; $b = \lambda_3 E_3^{-1}$.

Значення деформацій повзучості, розраховані за рівняння (1) із ядром (2), порівняно на рис. 1 з експериментальними даними для склопластику ТС 8/3-250 (а) ($E=15690$ МПа, $\alpha_1=-0,406$, $\beta_1=0,07965$ час $^{-(1+\alpha)}$, $\lambda_1=0,0537$, $b=1,780 \cdot 10^{-3}$ час $^{-(1+\alpha)}$, $\lambda_3=0,0537$, $\beta_3=0,3778$ год $^{-(1+\alpha)}$) і склопластику контактного формування (б) ($E=4888,2$ МПа, $\alpha_1=-0,573$, $\beta_1=0,08765$ час $^{-(1+\alpha)}$, $\lambda_1=0,16$, $b=2,040 \cdot 10^{-7}$ час $^{-(1+\alpha)}$, $\lambda_3=-0,586$, $\beta_3=0,0985$ год $^{-(1+\alpha)}$) за розтягу під кутом $\varphi=45^\circ$ до напрямку армування. Результати розрахунків нанесено штриховими лініями, а експериментальні дані показано точками.

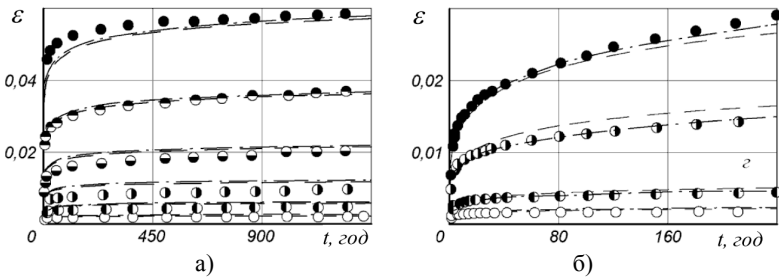


Рис. 1

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.

**DETERMINATION OF FRACTIONAL-EXPONENTIAL HEREDITY KERNELS
PARAMETERS IN NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS
IN CUBIC THEORY OF VISCOELASTICITY**

Method of the determination of fractional-exponential heredity kernels parameters in nonlinear viscoelasticity theory has been analyzed. The model of cubic theory has been chosen as nonlinear viscoelasticity model.

УДК 539.375

МАЛОМАСШТАБНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗОНА ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В ТОЧКЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ МИКРОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

**Татьяна Полишук, Леонид Кипнис,
Михаил Селиванов, Юрий Черноиван**

*Уманский государственный педагогический университет
имени Павла Тычины (Украина);*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

polischuk_t@ukr.net; fract@inmech.kiev.ua

На этапе плоской упругопластической деформации, предшествующем появлению пластических зон, в теле имеет место микропластическая деформация – движение дислокаций, которое содержит многочисленные линии микропластического деформирования (линии скольжения). Вне этих линий материал тела является линейно-упругим. Если линии микропластического деформирования пересеклись, то точка их пересечения представляет собой остроконечный концентратор напряжений.

На следующем этапе деформации вблизи содержащихся в теле различных остроконечных концентраторов напряжений (концов трещин, угловых точек), в т.ч. вблизи точки пересечения линий микропластического деформирования, возникают и развиваются пластические зоны. Разрушение материала происходит после развития в нем этих зон. Наличие информации о конфигурации и размерах локальных пластических зон позволяет полнее описать напряженно-деформированное состояние материала вблизи остроконечных концентраторов напряжений, предшествующее разрушению. Определение конфигурации и размеров таких зон является одной из основных проблем механики разрушения.

Расчетам привершинных пластических зон в рамках моделей с линиями разрыва смещения в случаях, когда остроконечными концентраторами напряжений являются концы трещин в однородных телах, посвящены работы многих авторов [1-5 и др.]. Целый ряд подобных работ относится к иным угловым точкам – остроконечным концентраторам напряжений. Точка пересечения линий микропластического деформирования в этом направлении не исследовалась. Результаты таких исследований могут быть использованы при изучении одного из дислокационных механизмов зарождения трещин – механизма Коттрелла [6]. Согласно механизму Коттрелла трещина зарождается при пересечении линий микропластического деформирования.

В данной работе методом Винера-Хопфа построено точное решение симметричной задачи теории упругости для плоскости, из точки которой исходят четыре прямые линии разрыва касательного смещения. Две из них полубесконечны, а две – конечной длины. Факторизация коэффициента уравне-

ния Винера-Хопфа на мнимой оси осуществляется путем его расщепления на функцию, факторизируемую с помощью гамма-функции, и функцию, факторизируемую с помощью свойств интеграла типа Коши. С использованием этих факторизаций, принципа аналитического продолжения, теоремы Лиувилля и некоторых других положений теории функции комплексной переменной строится точное решение уравнения, выражаемое через интегралы типа Коши и гамма-функции. На основе этого решения определена маломасштабная макропластическая зона предразрушения в точке пересечения линий микропластического деформирования. Она представляет собой пару узких пластических полосок, развивающихся из указанной точки внутри большего угла между линиями микропластического деформирования (Рис. 1) почти по биссектрисе угла α . Получена формула для длины пластических полосок.

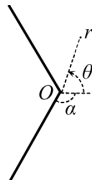


Рис. 1

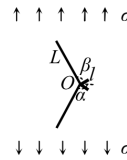


Рис. 2

Показано, что в случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (Рис. 2) с уменьшением острого угла между ними интенсивность напряжений в угловой точке и длина пластической зоны предразрушения увеличиваются.

1. *Panasyuk V.V., Savruk M.P.* Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // *Mater. Sci.* – 1992. – **28**, No. 1. – P. 41-57.
2. *Berezhnitskii L.T., Kundrat N.M.* Plastic bands at the tip of a linear rigid inclusion // *Strength of Materials.* – 1982. – **11**. – P. 1502-1505.
3. *Бережницкий Л.Т., Кундрат Н.М.* О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1983. – **19**, № 6. – С. 60-68.
4. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A.* Study of the stress state near a corner point in simulating the initial plastic zone by slipbands // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, No. 5. – P. 647-653.
5. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A.* Analysis of the plastic zone at a corner point by the trident model // *Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 5. – P. 611-616.
6. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.

SMALL-SCALE PLASTIC PREFRACTURE ZONE AT THE POINT OF INTERSECTION MICROPLASTIC DEFORMATION LINES

The small-scale plastic prefracture zone at the point of intersection microplastic deformation lines is determined. The problem on the plastic zone inserted to the symmetric problem of the theory of elasticity for a plane with four straight tangential rupture lines emerging from it point. Two of them are semi-infinite, and two have a finite length. The exact solution of the problem is constructed by the Wiener-Hopf method.

УДК 539.3

**МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРОЖНИСТИХ
ЦИЛІНДРІВ З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ З'ЄДНАНИХ
УГНУТИХ НАПІВГОФРІВ ПРИ ДІЇ ЛОКАЛЬНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

Лілія Рожок

Національний транспортний університет (Україна)r.l.s@ua.fm

В багатьох застосуваннях поряд з рівномірними та нерівномірними навантаженнями на елементи конструкцій у вигляді оболонок та оболонкових систем різної товщини діють локальні навантаження. Задачі про механічну поведінку оболонки за локального навантаження досить складні [3]. Збіжність рядів Фур'є, за допомогою яких в таких задачах апроксимується задане локальне навантаження та шукані величини, може виявитись повільною. Тому для досягнення необхідної точності потрібно враховувати значну кількість членів ряду.

В просторовій постановці із застосуванням чисельно-аналітичного підходу, що базується на використанні методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та дискретної ортогоналізації [1], розглянуто вплив локального навантаження на напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з угнутих гофрованим поперечним перерізом, поверхня відліку яких задається в параметричній формі рівнянням скороченої гіпоциклоїди [2] за певних граничних умов на торцях.

При розв'язуванні задачі прийняті такі вихідні дані: довжина циліндрів $l = 40$, товщина циліндрів $h = 2$, радіус нерухомого кола $A = 24$, радіус рухомого кола $a = 6$, параметр $\lambda = 0,4$, модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Локальне навантаження прикладається симетрично на двох ділянках бічної поверхні і математично описується як

$$q_{\gamma}(\psi) = \begin{cases} -q_0 (\cos \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ 0, & \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ q_0 (\cos \psi + \cos \beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases}$$

де ψ – центральний кут в поперечному перерізі. Таке навантаження можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q_{\gamma}(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[\sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right].$$

Параметр β характеризує інтервал прикладання локального навантаження. Розглядаються два значення параметра β : $\beta = \pi / 8$; $\beta = \pi / 16$. При цьому коефіцієнт q_0 обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при $\beta = \pi / 16$.

Результати для полів переміщень u_{γ} в середньому перерізі відносно довжини циліндра наведені на рис. 1 а, а для полів напружень σ_{ψ} на зовнішній поверхні – на рис. 1 б.

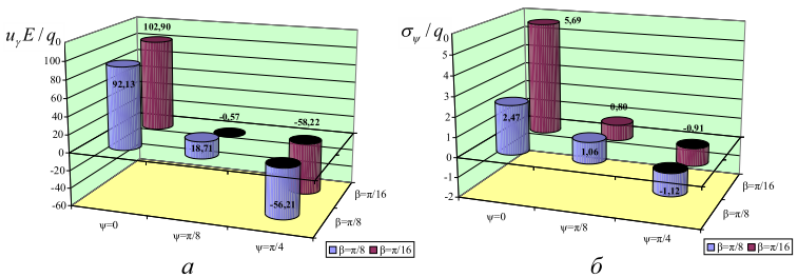


Рис. 1 Діаграма розподілу переміщень u_{γ} та напружень σ_{ψ}

З діаграми (рис. 1 а) видно, що зі збільшенням інтервалу прикладання навантаження значення переміщень u_{γ} зменшуються в зоні вершини напівгофрів ($\psi = 0$) приблизно в 1,2 рази. При цьому напруження σ_{ψ} (рис. 1 б) в цій зоні ($\psi = 0$) зменшуються приблизно у 2,3 рази.

1. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 79-100.
2. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Analysis of the stress state of hollow cylinders with concave corrugated cross sections // Math. Sci. – 2018. – 228, № 1. – P. 80-89.
3. Деревский В.М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) // Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. – М.: Машиностроение, 1968. – 2. – С. 49-96.

MODELING OF THE STRESS STATE OF HOLLOW CYLINDERS WITH CROSS SECTIONS OF THE JOANED CONCAVE SEMI-CORRUGATED SHAPES UNDER ACTION OF A LOCAL LOAD

The influence of local loading on the stressed state of hollow cylinder which cross sections are concave semi-corrugations is investigated on the basis of method of functions approximation by discrete Fourier series. It is given the distribution of the fields of displacements and stresses.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МНОГОСЛОЙНОЙ НАПЛАВКЕ ЛИСТОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Игорь Сенченков, Ольга Червинко, Елена Доля

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины;

Киевский национальный университет строительства и архитектуры (Украина)

term@inmech.kiev.ua

Излагаются постановка задачи, математические методы численного решения и результаты расчетов напряженно-деформированного и микроструктурного состояния листовых плоских (тонкостенных призматических) элементов при многослойном наращивании жидким металлом (Рис. 1).

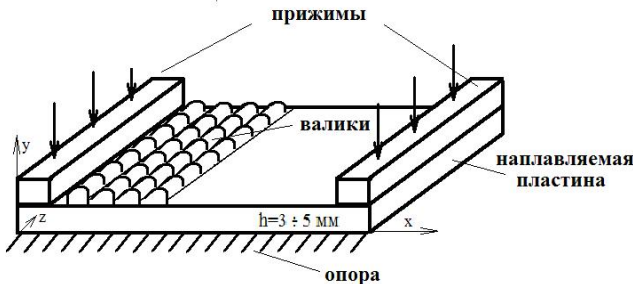


Рис. 1 Схема наплавки листового элемента

Задача решается в квазистатической постановке на основе подхода, развитого в работах [1, 2].

Поведение основного и наплавляемого материалов описывается моделью течения Боднера-Партома с изотропным упрочнением. Концентрации фаз распада аустенита рассчитываются с помощью уравнения Коистинена-Марбургера. Термомеханические условия на поверхности наращивания удовлетворяются с использованием концепции собственных деформаций и температуры.

Задача решается методом шагового интегрирования уравнения теплопроводности и уравнений течения по времени с помощью неявной схемы. Нелинейная задача на каждом временном шаге решается методом итерации.

Линеаризованная задача на каждой итерации решается методом конечных элементов с использованием вариационных принципов Лагранжа для задач механики и теплопроводности. Применяется восьмиугольный четырехугольный изопараметрический конечный элемент. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием принципа практической сходимости.

Кинетика формирования прогиба пластины $0 \leq x \leq 0,1\text{ м}$; $0 \leq y \leq 0,003\text{ м}$; $0 \leq z \leq 0,6\text{ м}$ из стали СТЗсп, наплавляемой вальками $\Delta x \leq 0,007\text{ м}$; $\Delta y \leq 0,002\text{ м}$ из стали Х5МФ показана на рис. 2.

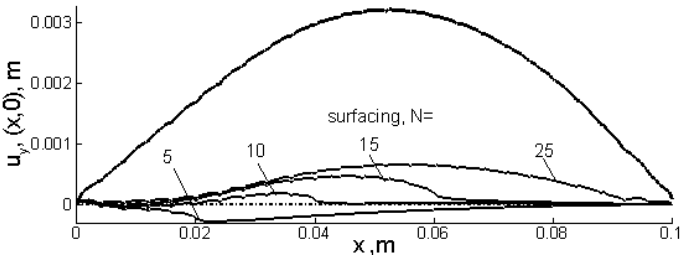


Рис. 2. Формирование прогиба пластины, плоская деформация. Нижние кривые отвечают моментам времени наплавки N-го валика, верхняя (черная) – времени окончательного остывания

Видно, что окончательный прогиб формируется уже после наплавки всех ($N = 25$) валиков, когда средняя температура элемента входит в интервал мартенситного превращения $170^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 60^{\circ}\text{C}$. При этом его максимальное значение достигается почти в центре пластины и равно ее толщине ($\sim 3\text{ мм}$).

Исследовано текущее и остаточное НДС при различных параметрах режима наплавки и типах закрепления элемента.

1. *Рябцев И.А., Сенченков И.К.* Теория и практика наплавочных работ. – Киев: Эко-технология, 2016. – 400 с.
2. *Рябцев И.А., Сенченков И.К., Турык Е.* Наплавка, материалы, технологии, математическое моделирование. – Гливице: Изд-во Силезского политехнического института, 2015 – 590 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMOMECHANICAL PROCESSES UNDER MULTILAYERED SURFACING SHEET-LIKE STRUCTURAL MEMBERS

Mathematical problem statement and numerical method of it's solving for the process of multilayered surfacing sheet-like elements are developed. Some results of calculations are presented.

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ ВЗДОВЖ ГВИНТОВОЇ ЛІНІЇ

Леся Сеньків, Василь Дяків

*Інститут прикладних проблем механіки та математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

dept20@iapmm.lviv.ua

На руйнування тонкостінних твердих тіл суттєво впливає наявність в них концентраторів напружень типу тріщин. При цьому великі навантаження призводить до пластичного течіння матеріалу в околі тріщин, яке треба враховувати при розрахунку на міцність тонкостінних твердих тіл.

Розглядається тонка неполога ортотропна замкнута циліндрична оболонка, послаблена розрізом вздовж гвинтової лінії. Вважається, що на продовженні тріщини вузькою смугою розвиваються пластичні деформації, а до берегів тріщини, які не контактують між собою, прикладено симетричне навантаження. Відповідно до аналога δ_c -моделі [1] зони пластичних деформацій моделюють фіктивними тріщинами невідомої довжини – лініями розриву переміщень і кутів повороту, на яких нормальне зусилля і згинний момент задовольняють одну з умов пластичності.

З використанням методу дисторсій для пружно-пластичної задачі про напружений стан ортотропної непологої циліндричної оболонки Кірхгофа з тріщиною вздовж гвинтової лінії записано відповідну нелінійну систему сингулярних інтегральних рівнянь з розривними правими частинами. На цій основі за врахування умови пластичності, рівності нулю коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах фіктивних тріщин та умов однозначності переміщень знайдено залежності довжини пластичної зони та розкриття тріщини від навантаження, довжини та орієнтації тріщини.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.

STRESS-STRAINED STATE OF ORTHOTROPIC ELASTO-PLASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH CRACK ALONG SPIRAL LINE

Using the distortion method and analogue of the δ_c -model the elastic-plastic problem on the stressed state of orthotropic cylindrical shell with crack along spiral line is reduced to the system of nonlinear singular integral equations. The dependence of crack opening displacements and sizes of the plastic zone from geometric and mechanical parameters is studied.

МОДЕЛЬ ТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРОШАРКІВ ТА ВКЛЮЧЕНЬ У СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Віктор Силованюк, Андрій Ліснічук, Наталія Івантишин

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

sylovan@ipm.lviv.ua; dniprovets14@gmail.com; n.ivantyshyn@gmail.com

Проблемі побудови математичних моделей тонких пружних включень присвячено чимало досліджень. Загальний підхід до розв'язання проблеми тонкого включення полягає у заміні самого включення деякими умовами контакту берегів матриці вздовж серединної поверхні неоднорідності. Вперше така ідея висловлена Я.С. Підстригачем [1] стосовно теплопровідності тіл з тонкими прошарками, а пізніше і стосовно задач пружної рівноваги тіл з тонкими включеннями [2]. Достатньо повний огляд робіт з проблеми тонких включень наведено в монографії [3]. В переважній більшості досліджень матеріал включень вважали ізотропним. Модель тонкого включення із трансверсально-ізотропного матеріалу запропоновано у працях [4]. Нижче отримані умови стрибка переміщень і напружень на тонкому анізотропному включенні у суцільному середовищі.

На основі припущення про малу товщину h включення, усереднюючи фундаментальну систему рівнянь теорії пружності анізотропного тіла по товщині включення, отримані наступні шість рівнянь, які складають математичну модель тонкого прошарку або включення, матеріал якого володіє анізотропією пружних властивостей загального виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_{klmn} \left(\frac{\partial^2 (u_m)}{\partial x_l \partial x_n} + \frac{\partial^2 (u_n)}{\partial x_l \partial x_m} \right) + C_{kl33} \frac{\partial [u_3]}{h \partial x_l} + \\ & + C_{kl3n} \left(\frac{\partial [u_n]}{h \partial x_l} + \frac{\partial^2 (u_3)}{\partial x_l \partial x_n} \right) + \frac{[\sigma_{k3}]}{h} = 0; \\ & \frac{\partial (\sigma_{k3})}{\partial x_k} + \frac{[\sigma_{33}]}{h} = 0; \\ & (\sigma_{i3}) - \frac{1}{2} C_{i3kl} \left(\frac{\partial (u_k)}{\partial x_l} + \frac{\partial (u_l)}{\partial x_k} \right) - C_{i333} \frac{[u_3]}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$-C_{i33k} \left(\frac{\partial(u_3)}{\partial x_k} + \frac{[u_k]}{h} \right) = 0; \quad k, l, m, n = 1, 2; \quad i=1, 2, 3.$$

де введені позначення $(f) = f^+ + f^-$; $[f] = f^+ - f^-$. Знаки (+) і (-) відносять величини до верхньої та нижньої відносно серединної площини поверхонь включення.

Звідси випливають умови для часткових випадків анізотропії матеріалу включення, а також умови ідеального контакту (відсутність включення), вільної поверхні та включення, реакція якого виражена моделлю вінклерівської основи.

1. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – 7. – С. 872-874.
2. Підстригач Я.С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – 12. – С. 29-31.
3. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.

MODEL OF A THIN ANISOTROPIC LAYERS AND INCLUSIONS IN A SOLID ENVIRONMENT

The problem of thin anisotropic layer, overlay or inclusion in a three-dimensional body, are reduced to relevant problem of body, which contain some surface, endowed with certain properties. In particular, the component of displacement and stress vectors get the jumps when passing through this surface. In consequence, in the complicated problems of anisotropic heterogeneity in the medium, the dimension of a heterogeneity in three-dimensional cases are reduced to two-dimensional, in two-dimensional ones are reduced to one-dimensional. As a result problems are simplified in the mathematical sense and it becomes possible to get effective solutions.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ КРИХКОГО УДАРУ КУЛЕЮ ПО ПЛАСТИНІ У ФРАКТАЛЬНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Наталя Сметанкіна

Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України

nsmetankina@ukr.net

У роботі розглядається крихкий удар кульовим індентором по пластині, при якому відбувається розтріскування або руйнування матеріалу пластини. Цей випадок удару має місце, наприклад, при зіткненні жорсткого предмета з лобовим склом рухомого транспортного засобу. Пружний удар з урахуванням контактних деформацій на основі різних гіпотез розглянуто у достатній кількості робіт [5, 6]. Але для крихкого руйнування матеріалу з можливими неупорядкованими дефектами (до якого відноситься скло) необхідно розробляти нові моделі руйнування [3, 4]. Метою цієї роботи є розробка фрактальної моделі крихкого руйнування пластини зі скла при ударі кульовим індентором.

Крихке руйнування визначається наявністю мікротріщин, які в процесі деформації формують магістральну тріщину, що приводить до руйнування пластини. Тріщини мають нерегулярну форму (наприклад, система тріщин на лобовому склі в результаті удару твердим тілом) і за зовнішнім виглядом їх можна геометрично моделювати формою траєкторії броунівської частинки.

Пропонується розглядати поширення мікротріщини як випадкове блукання броунівської частинки з точки, яка знаходиться у центрі удару. Система координат розташована у площині пластини, а її початок знаходиться посередині пластини і співпадає з центром удару. Через те, що початкове положення тріщини співпадає з початком координат, ймовірність утворення тріщини у центрі удару визначається як вірогідна подія. Початкова деформація при ударі кулі по пластині має аксіальну симетрію і тому випадкові блукання тріщини в ймовірнісному розумінні будуть мати аксіальну симетрію.

Крихке руйнування пластини при ударі пов'язано з об'єднанням мікротріщин у зв'язний лабіринт тріщин – кластер з неупорядкованою фрактальною структурою. Руйнування пластини відбувається, коли кластер виходить на поверхню пластини всередині кола тиску. У континуальному випадку неупорядкованого розміщення тріщин руйнування тіла обумовлено процесом формування з мікротріщин зв'язної множини – магістральної тріщини. У цьому випадку утворюється кластер з мікротріщин. Припущення про контину-

альність дозволяє одержати методом скейлінга [2] критичне значення фрактальної розмірності кластера фрактала, яке відповідає утворенню магістральної тріщини крихкого руйнування.

Розглянута асимптотика відповідає еволюції мікротріщини – магістральній тріщині в області епіцентру удара. Магістральні тріщини на межі епіцентру ініціюють появу макроскопічних тріщин в іншій частині пластини. При цьому для опису динаміки фрактальних кластерів (поза епіцентром) треба використовувати іншу асимптотику та враховувати можливість еміграційно-імміграційних процесів. Встановлено, що зростання та затухання поширення тріщин є експоненційно швидкими процесами, які залежать від співвідношення між зовнішніми і внутрішніми параметрами.

Проведене дослідження спрямоване на практичне розв'язання задач про стійкість лобового оскління транспортних засобів при ударі твердим тілом [1].

1. *Сметанкіна Н.В.* Аналіз міцності багатошарового оскління транспортних засобів при ударному навантаженні // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів.– 2017.– **8**. – С. 114-120.
2. *Федер Е.* Фракталы.– М.: Мир, 1991.– 254 с.
3. *Davydova M., Uvarov S., Chudinov V.* Scaling law of quasi brittle fragmentation // Procedia Materials Science. – 2014. – **3**. – P. 580-585.
4. *Ma G., Zhang Y., Zhou W., Ng T.-T., Wang Q., Chen X.* The effect of different fracture mechanisms on impact fragmentation of brittle heterogeneous solid // Int. J. Impact Eng. – 2018. – **113**. – P. 132-143.
5. *Sburlati R.* An exact solution for the impact law in thick elastic plates // Int. J. Solids and Struct.– 2004.– **41**, № 9-10. – P. 2539-2550.
6. *Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G.* A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // Trans. ASME. – J. Applied Mechanics.– 2008.– **75**, № 5. – P. 051004-1–051004-9.

MODELING OF BRITTLE IMPACT OF A BALL ON THE PLATE IN FRACTAL FORMULATION

The brittle impact a ball on the plate is considered with account cracking the plate material. The dependence of the fractal dimension of a microcracker cluster and asymptotic relationships for describing the process of crack propagation are obtained. The study is aimed at practical solution of durability problems of windshield glazing for vehicles under impact by solid body.

УДК 539.3

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН СИСТЕМИ ШАРІВ РІЗНОЇ ПРОЗОРОСТІ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ ЗІ СТОРОНИ НЕПРОЗОРОГО ШАРУ

Ростислав Терлецький, Мар'ян Брухаль, Александра Журавска

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;
Політехніка Опольська (Польща)*

dept13@iapmm.lviv.ua; a.zurawska@po.opole.pl

Елементи конструкцій і приладів, що функціонують в умовах теплових навантажень, реально перебувають в умовах теплообміну випромінюванням з оточуючим середовищем (зокрема, за цільового опромінення). Їх тепловий стан залежить від теплового стану в оточенні. Тому прогнозування термомеханічної поведінки таких систем вимагає постановки задач про теплоперенос в них за складників різної прозорості (частково прозорих та непрозорих) для випромінювання. У розглядуваному випадку побудова моделей термомеханіки для непрозорих та частково прозорих тіл, з урахуванням процесів випромінювання та поглинання теплової енергії, ускладнена тим, що при визначенні обумовлених тепловим випромінюванням теплових потоків на поверхні чи об'ємних тепловиділень у розглядуваному тілі необхідно враховувати наявність оточуючих тіл, їх тепловий стан, радіаційні властивості, геометрію та розташування.

В роботах [2, 3, 5] запропоновані підходи до дослідження теплового та термонапруженого станів опромінюваних чи охолоджуваних термочутливих частково прозорих та непрозорих тіл. Зокрема, враховано специфіку термочутливості теплофізичних, радіаційних та механічних характеристик, які входять у співвідношення сформульованих задач теплопереносу та термопружності, що особливо важливо за умов високотемпературного нагріву.

В праці [4] здійснено постановку задачі про дослідження термонапруженого стану в системі, що містить механічно незв'язані безмежні частково прозорий та непрозорий термочутливі шари, зумовленого тепловим опроміненням зі сторони частково прозорого шару, та отримано її числові розв'язки.

Нижче розглянуто аналогічну задачу для випадку опромінення зі сторони непрозорого шару. При описі поширення випромінювання в системі враховано випромінювання джерела, випромінювання і поглинання теплової енергії шарами, заломлення та дифузне відбивання на границях. Тоді, базуючись на методі балансу потоків випромінювання [2] і використовуючи умову їх балансу на поверхнях частково прозорого шару та враховуючи відбивання в системі і випромінювання на поверхні непрозорого шару, отримано систему спів-

відношень для визначення ефективних інтенсивностей випромінювання на поверхнях шарів, яка включає систему інтегральних рівнянь для частково прозорого шару та співвідношення, що пов'язує ефективні інтенсивності на суміжних поверхнях. За отриманими аналітичними виразами для інтенсивностей знайдено [2, 5] тепловиділення в частково прозорому шарі і теплові потоки на поверхні непрозорого. Їх використано в зв'язаній системі рівнянь теплопровідності і граничних умовах, що описують тепловий стан в системі шарів. Вона містить нелінійне інтегро-диференціальне рівняння для частково прозорого шару (в якому вираз для джерел залежить від температури суміжної поверхні непрозорого шару), а також нелінійне рівняння для непрозорого шару. У нелінійну граничну умову на суміжній поверхні непрозорого шару входить температура частково прозорого. При розв'язуванні системи використано методику, розвинуту в [1, 4, 5], що базується на методі скінченних елементів із застосуванням, при побудові однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом, лінеаризації нелінійних складників варіаційного рівняння.

Термонапружений стан у кожному з механічно незв'язаних шарів визначено за отриманими в [2, 5] аналітичними співвідношеннями для компонент тензора напружень шляхом числового інтегрування за запропонованих в [5] апроксимацій температурної залежності механічних характеристик та знайденого (чисельно) розподілу температури у цих шарах.

На основі отриманих числових розв'язків встановлено ряд нових закономірностей впливу теплообміну випромінюванням на теплову та механічну поведінку системи.

1. Брухаль М., Терлецький Р., Фундак О. Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2007. – **13**. – С. 59-71.
2. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202-219.
3. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Сосновий Ю.Р., Брухаль М.Б. Термонапружений стан охолоджуваних тіл за врахування випромінювання теплової енергії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 42-50.
4. Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б. Нестационарний теплообмін та напружений стан в опромінованій системі зі шарів різної прозорості // Там само. – 2016. – **50**, № 4. – С. 79-85.
5. Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б., Немировський Ю.В. Моделювання та дослідження термомеханічної поведінки термочувливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 212-224.

THERMOSTRESSED STATE IN SYSTEM WICH CONSIST OF DIFFERENT TRANSPARENCY LAYERS IRRADIATED ON SIDE THE OPAQUE LAYER

Formulation of the thermomechanical problems for semitransparent and opaque system of infinite of thermo-sensitive layers subject to thermal radiation are presented. Analysis of numerically obtained solutions revealed new peculiarities of an effect of thermal radiation heat transfer on mechanical and thermal behavior of system.

КОМПЛЕКСНА МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В КІНЦІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Володимир Феньків, Михайло Дудик, Юлія Решітник

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини (Україна)

fenkiv@ukr.net; dudik_m@hotmail.com; dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

Результати досліджень міжфазних тріщин у кусково-однорідних тілах вказують на можливість контакту берегів біля вершин, який впливає на НДС і, як наслідок, на розвиток зон передруйнування в їх околах. Існування контакту берегів враховується у комплексній моделі бічної маломасштабної зони передруйнування, вперше запропонованої в [1] для випадку міжфазної тріщини на плоскій межі поділу матеріалів.

В даній роботі розглянуто за умов плоскої деформації задачу про розрахунок маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла в кінці міжфазної тріщини, яка виходить з куткової точки ламаної межі поділу. Наявна область контакту берегів, розміри якої значно перевищують розміри зони передруйнування (Рис. 1). Взаємодія берегів здійснюється за законом сухого тертя Кулона. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу. Розв'язок задачі знайдено за допомогою методу Вінера-Гопфа. Отримано вирази для довжини зони передруйнування і локального поля напружень в її околі. Досліджено залежності розмірів зони передруйнування від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла.

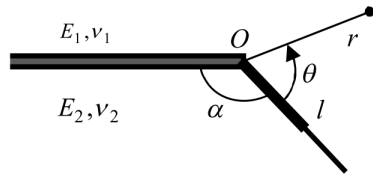


Рис. 1

1. Каминский А.А., Китнис Л.А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред // Доповіді НАН України, 2010. – № 2. – С. 59-63.

COMPLEX MODEL OF PRE-FRACTURE ZONE AT THE END OF INTERFACIAL CRACK OUTCOMING FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERFACE OF MATERIALS

Under the plane strain conditions by Wiener-Hopf method the solutions of problems about the calculation of a small-scale pre-fracture zone near the crack tip of interfacial crack with contact of the faces outgoing from angular point of the broken interface have been found.

МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЕКТОРІЙ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ГІРСЬКОГО МАСИВУ В ЗОНІ ТЕКТОНІЧНОГО РОЗЛОМУ

Віталій Фурман, Микола Хом'як, Леонід Хом'як

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

phis_geo@lnu.edu.ua; KhomNick98@gmail.com

Реконструкція полів напружень і деформацій, що мали місце протягом мільйонів років, є важливою для вивчення історії геологічного розвитку регіону (наприклад, Українських Карпат), для теоретичного пояснення структуроутворення та практичного використання, зокрема, при дослідженні нафтогазоносності надр [1]. Використання методу скінченних елементів для розв'язування прямих тектонофізичних задач у рамках механіки суцільних середовищ є потужним інструментом для отримання якісних та кількісних параметрів деформацій у геологічному середовищі за певних динамічних умов та первинної структурної організації [2]. Однією з важливих і типових для вивчення механізму формування пасток вуглеводнів є задача про стиснення осадових порід з урахуванням насування по пологому розломі. Орієнтація системи тріщинуватості гірського масиву і надлишковий відносно літостатичного тиск, що утворюються, є визначальними для формування потоків флюїдів (вода-нафта-газ) [1].

Розвиток комп'ютерного моделювання на сучасному етапі, з одного боку, дає змогу для апробації різних за просторовою складністю моделей важливих геологічних і фізичних процесів, а з іншого – ставить нові задачі щодо врахування на макрорівні низки геометричних, механічних і фізичних параметрів, а також змістовної інтерпретації результатів для геологічних застосувань. Дана робота продовжує дослідження авторів в рамках побудови методики комплексного аналізу деформацій і напружень в гірських породах, що передбачає просторово-часовий аналіз не тільки компонент тензора напружень, але й розгляд систем інваріантів (тиск, максимальне дотичне напруження або траєкторії напружень) з метою передбачення вірогідної тріщинуватості та розломоутворення [3].

Математична постановка задачі включає врахування контактної взаємодії двох масивів гірських порід під час тектонічного стиснення і переміщення насувного клину по поверхні розлому (Рис. 1). В рамках теорії пружно-пластичності для характерних значень пружних модулів і геометричних розмірів задачу розв'язано методом скінченних елементів у двовимірній квазістатичній постановці (час є параметром навантаження). У дискретній множині вуз-

лів побудовано головні напруження та інші інваріанти, важливі для геологічної інтерпретації НДС. Задачу побудови траєкторій напружень зведено до побудови ізоліній деякої потенціальної поверхні окремо в двох підобластях (тіло насуву та автохтон) з урахуванням розривів на лінії розлому. Для передбачення орієнтації нових вірогідних тріщин і розломів запропоновано аналогічно до траєкторій напружень будувати лінії ковзання, орієнтовані під кутом 30° до ліній максимального стиснення. Розроблено програмне забезпечення, що візуалізує числові результати у вигляді слайдів у задані моменти часу відповідно до переміщення тіла насуву.

Розглянуто низку моделей із різною кількістю шарів (від одного до п'яти) та їхньою орієнтацією щодо поверхні розлому. На макроскопічному рівні горизонтальну шаруватість осадових порід враховано в моделі ортотропного матеріалу з використанням правила "прості суміші". Зменшення відносної товщини шару за умови збільшення кількості шарів вимагає достатньо детального розбиття видовжених областей або застосування спеціальних алгоритмів для побудови ізоліній (траєкторій напружень і ліній ковзання). У перспективі планується автоматична перебудова області з включенням нових розломів під час стиснення.

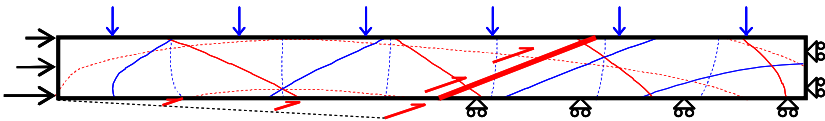


Рис. 1. Схема навантаження гірського масиву з пологим розломом, лінії траєкторій напружень (штрихові) та вірогідні лінії ковзання (суцільні)

1. *Hantschel T., Kauer auf A.I.* Fundamentals of basin and petroleum systems modeling. – Springer, 2009. – 476 p.
2. *Ramsay J.G., Lisle R.G.* The techniques of modern structural geology. Vol. 3. Applications of continuum mechanics in structural geology. – Elsevier, 2000. – P. 701-1061.
3. *Хом'як Л.М., Хом'як М.М.* Моделювання напружено-деформованого стану осадового комплексу автохтону в зоні динамічного впливу насувного клину // Геодинаміка. – 2014. – № 1(15). – С. 58-71.

STRESS TRAJECTORIES MODELLING OF ROCKS MASSIF IN THE TECTONIC FAULT ZONE

Interaction of two rocks missives in the fault zone under tectonic compression by 2D finite element method is investigated. The principal stresses are calculated in a set of the discrete nodes. Together with other stress state invariants (such as pressure and maximal shear stress) they are significant for interpretation in geology. Construction of stress trajectories is reduced to contour maps for some potential surface in each area (thrust and autochthonic body) separately. Using analogical approach we proposed also to construct possible slide lines oriented under fixed angle ($\sim 30^\circ$) to lines of maximal compression.

**БИФУРКАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Юрий Черняков, Владимир Шнейдер

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара (Украина)

yu.chernyakov@gmail.com; shneider.vladimir@gmail.com

Проблема устойчивости при ползучести до настоящего времени не получила своего разрешения. Самым надежным методом исследования устойчивости при ползучести остается деформационный расчет, для реализации которого требуется задание начальных несовершенств. Настоящая работа посвящена построению бифуркационного критерия устойчивости упруго-вязкопластических тел с помощью оператора касательной жесткости теории пластичности и ползучести, учитывающей микродеформации.

В работе [1] построены определяющие соотношения теории ползучести, учитывающей микродеформации [2], которые можно представить в виде

$$\Delta\tau^{ij} = L_c^{ijkl}(\Delta t) : \Delta\eta_{ij} + \Delta\tau_v^{ij},$$

где $\Delta\tau^{ij}$, $\Delta\eta_{ij}$, $\Delta\tau_v^{ij}$ – соответственно приращения компонентов тензоров напряжений Кирхгофа, полных деформаций Лагранжа и «вязких» напряжений за промежуток времени Δt ; $L_c^{ijkl}(\Delta t)$ – матрица касательной жесткости, которая является явной функцией шага по времени Δt . При $\Delta t \rightarrow 0$ имеем чисто упругую реакцию $L_c^{ijkl}(\Delta t) \rightarrow L_e^{ijkl}$, где L_e^{ijkl} – матрица упругой жесткости. Если формально принять Δt достаточно большим, то приходим к независящему явно от времени пластическому течению $L_c^{ijkl}(\Delta t) \rightarrow L_{cp}^{ijkl}$ (L_{cp}^{ijkl} – матрица касательной жесткости).

В точке бифуркации процесса деформирования для заданной скорости изменения нагрузки введем разности между двумя приращениями решений $\tilde{u}_i = \Delta u_i^b - \Delta u_i^a$, $\tilde{\tau}^{ij} = \Delta\tau_b^{ij} - \Delta\tau_a^{ij}$, $\tilde{\eta}_{ij} = \Delta\eta_{ij}^b - \Delta\eta_{ij}^a$. Поскольку \tilde{T}^i на S_T и \tilde{u}_i на S_u равны нулю и оба решения удовлетворяют уравнениям равновесия, то, используя обычные преобразования, приходим к условию единственности

$$H(\dot{u}_i^b, \dot{u}_i^a) \equiv \int_V [\tilde{\tau}^{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \tau^{ij} \dot{u}_i^k \dot{u}_{k,j}^{\tilde{a}}] dV \geq 0, \quad (1)$$

где $\tilde{\eta}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} + u_{,i}^k \tilde{u}_{k,j}^{\tilde{a}} + u_{,j}^k \tilde{u}_{k,i}^{\tilde{a}})$.

В общем случае, в силу дифференциальной нелинейности определяю-

сих соотношений теории пластичности, функционал H не является квадратичным и зависит от каждого из решений. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности использования условий (1) для исследования бифуркации процесса деформирования. Однако, для целого ряда вариантов теории пластичности удастся заменить условие более сильным условием, основанным на введении линеаризованного "тела сравнения" [3]. "Тело сравнения" обладает тем свойством, что его уравнения состояния линейны в скоростях и строятся так, чтобы для любых Δu_i^a и Δu_i^b имело место следующее неравенство $\tilde{\tau}^{ij} \tilde{\eta}_{ij} \geq \tilde{\eta}_{ij} L_{cp}^{ijkl} \tilde{\eta}_{kl}$.

В работе показано, что в рамках рассматриваемой теории [1] имеет место цепочка неравенств

$$\tilde{\eta}_{ij} L_{cp}^{ijkl} \tilde{\eta}_{kl} \leq \tilde{\eta}_{ij} L_c^{ijkl} \tilde{\eta}_{kl} \leq \tilde{\eta}_{ij} L_e^{ijkl} \tilde{\eta}_{kl} .$$

Таким образом, единственность будет обеспечена, если линеаризованное тело сравнения устойчиво по Эйлеру, т.е. имеет место неравенство

$$F(\lambda, \tilde{u}_i) = \int_V [L_{cp}^{ijkl} \tilde{\eta}_{ij} \tilde{\eta}_{kl} + \tau^{ij} \tilde{u}_{,i}^k \tilde{u}_{k,j}^i] dV \geq 0 .$$

Для нахождения параметра критической нагрузки λ и собственной формы потери устойчивости \tilde{u}_i можно воспользоваться вариационным уравнением:

$$\delta F(\lambda, \tilde{u}_i) = 0 .$$

Такой подход открывает широкие возможности анализа бифуркации процесса деформирования в рамках теории вязкопластичности, учитывающей микродеформации, при сложном докритическом нагружении с разными скоростями. Для решения задачи нахождения точек бифуркации процесса деформирования и собственной формы потери устойчивости можно воспользоваться многочисленными аналитическими или численными методами.

1. *Онищенко И.С., Черняков Ю.А., Шнейдер В.П.* Непрерывная формулировка теории вязкопластичности, учитывающей микродеформации // Вісник ДНУ. Серія «Механіка». – 2014. – **18**, № 5. – С. 115-122.
2. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В., Черняков Ю.А.* Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // ПММ. – 1986. – **50**, № 6. – С. 890-897.
3. *Черняков Ю.А.* Достаточные условия единственности процесса деформирования упругопластического тела // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск. – 1988. – С. 65-72.

BIFURCATION CRITERION FOR THE STABILITY OF VISCO-PLASTIC BODIES

The problem of loss of stability in the case of creep has not yet been resolved. The most reliable method of investigating the stability of creep is the deformation calculation, which requires introduction of initial imperfections. The present paper is devoted to the construction of a bifurcation criterion for the stability of elasto-viscoplastic bodies by means of the tangential stiffness operator of the theory of plasticity and creep, which takes microdeformations into account.

**ПРОЕКЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ГЕНЕРАЦІЇ ПОВЕРХНЕВИХ СІТОК
ПРИ ФУНКЦІОНАЛЬНОМУ ПОДАННІ ТІЛ**

Сергій Чопоров

Запорізький національний університет (Україна)

s.choporoff@znu.edu.ua

Числове дослідження фізико-механічного стану багатьох інженерних об'єктів пов'язане з необхідністю побудови адекватних дискретних моделей. Під дискретною моделлю геометричного об'єкту (або сіткою), зазвичай, розуміють частину евклідового простору, розбиту на фігури простої форми (елементи). Для автоматичної генерації сіток на базі елементів певної форми розроблено велику кількість складних методів і підходів [1]. Відносно менш опрацьованою залишається розробка методів генерації елементів довільної форми.

Одним з найбільш універсальних методів математичного опису геометрії досліджуваного об'єкту є використання неявної функції (яка, наприклад, буде більшою нуля для внутрішніх точок, рівною нулю у граничних і меншою нуля у зовнішніх точках. Наприклад, функція

$$\text{sphere}(x, y, z) = r^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1}$$

відповідає тілу, обмеженому сферою радіуса r з центром у початку координат. Неявні функції для складних тіл можуть бути побудовані покроково з використанням логічних операцій (заперечування, диз'юнкції та кон'юнкції), які реалізовані у системах R-функцій Рвачова В.Л. [2]. Однією з найбільш використовуваних на практиці [3] є система:

$$\begin{cases} -x_1 \equiv -x_1, \\ x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 \wedge x_2 = x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \tag{2}$$

де x_1 і x_2 – значення неявних функцій.

Так, куб зі стороною $2a$ і двома круговими отворами радіуса r з твірними Ox і Oz (Рис. 1), може бути поданий функцією

$$\begin{aligned} \text{cube}(x, y, z) = & (a^2 - x^2) \wedge (a^2 - y^2) \wedge (a^2 - z^2) \wedge \\ & \wedge \neg \left((r^2 - x^2 - y^2) \vee (r^2 - y^2 - z^2) \right). \end{aligned} \tag{3}$$

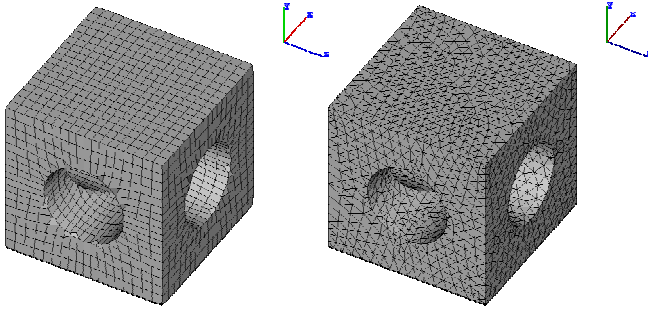


Рис. 1 Дискретні моделі куба, отримані проекційним методом

Для автоматичної генерації поверхневих сіток елементів довільної форми можна скористатися таким алгоритмом:

1. Для області, що повністю включає геометричний об'єкт, згенерувати фонову сітку (наприклад, рівномірну), форма граней якої є цільовою.

2. З фонові сітки видалити всі елементи, що мають хоча б один зовнішній вузол.

3. Видалити елементи, що можуть утворювати грані з некоректною топологією.

4. Для кожного граничного вузла фонові сітки знайти проекцію на поверхню, використовуючи градієнтний пошук коренів неявної функції, що описує геометричний об'єкт.

5. Сформувані модель межі об'єкту поєднавши вузли відповідно до граничних граней фонові сітки.

Результатом роботи алгоритму буде дискретна модель поверхні, топологія граней якої визначається топологією граней фонові сітки. На рис. 1 наведені результати роботи для фонові сітки кубів (зліва) і тетраедрів (справа).

1. Frey P.J., George P.-L. Mesh generation: application to finite elements. – ISTE Publishing Company, 2007. – 814 p.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Київ: Наукова думка, 1982. – 552 с.
3. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 75-83.

PROJECTIONAL APPROACH TO MESH GENERATION FOR FUNCTION-REPRESENTED SOLIDS

This paper describes the approach to meshing for function-represented solids. Usually, the functions representation means using implicit functions to describe a model of the solid. The approach starts with some initial grid that can be relatively easy generated for a domain around the solid. Next, we remove all outside elements and find projections of boundary faces to the implicit surface of the solid. Finally, we improve mesh quality using the local refinement algorithm.

УДК 004.932.2

ВИЗНАЧЕННЯ СКЛАДУ СТАЛІ, ВИХОДЯЧИ ІЗ ДАНИХ МІКРОСТРУКТУРНОГО АНАЛІЗУ

Марія Шаповалова

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

MiShapovalova@gmail.com

Останнім часом все частіше застосовуються технології машинного навчання, в тому числі і в промисловості. Створення нейронних мереж для дослідження поведінки матеріалу, дозволяє швидко і якісно оцінити стан зразка, спираючись лише на дані його мікроструктурного аналізу. Такий аналіз матеріалу при різних умовах експлуатації, є метою багатьох досліджень.

Ключовим завданням даної роботи є оцінка матеріалу, створення зв'язу між зображенням його мікроструктури і властивостями. Була створена база даних сталей, що містить інформацію про марку сталі, хімічний склад, технології обробки та безпосередньо зображення мікроструктури. У роботі ставилося за мету створити алгоритм оцінки хімічного складу речовини та механічних властивостей матеріалу, розпізнаючи дані зображення, та з ймовірністю визначати марку сталі, найбільш близьку до такого хімічного складу.

Використовуючи мову програмування Python створювався алгоритм розпізнавання і аналізу мікроструктури засобами CNN (згорточна нейронна мережа), що забезпечує часткову стійкість до змін масштабу, повороту, ракурсу зображення та іншим спотворенням. Завдяки топології такої мережі можливий перехід від великого числа вхідних сигналів до обмеженого числа виходів. На вхід мережі подавалися зображення 200x200 пікселів, у відтінках сірого, а на виході отримували відсотковий вміст 7-мох хімічних елементів для кожної мікроструктури. В якості функції активації обрана сигмоїда, що дозволяє підсилювати слабкі сигнали і не перенасичується з сильних сигналів. Навчання нейронної мережі відбувалося з учителем. Проводилась перевірка адекватності отриманого рішення на тестовій вибірці.

Створений підхід дозволяє зв'язати хімічний склад матеріалу та його механічні властивості із зображенням мікроструктури досліджуваного зразка.

DETERMINATION OF THE STEEL COMPOSITION BY ITS MICROSTRUCTURE

In the course of the work, a neural network was created yields a conclusion about the chemical state of steel from the image of its microstructure.

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОГО
РЕСУРСУ ГАЗОПРОВОДУ ЗА ДІЇ ПОСТІЙНОГО ТИСКУ,
ГРУНТОВОЇ КОРОЗІЇ І ДЕГРАДАЦІЇ ЙОГО МАТЕРІАЛУ****Іван Штойко***Фізико-механічний інститут імені Г.В. Карпенка НАН України*ivan.shtoyko@gmail.com

Магістральні трубопроводи (МТ) є найбільш економічним видом транспорту нафти і газу, а трубопровідні системи – це найважливіша складова частина енергетичного комплексу. Однак система МТ, що вже має значний «вік», вступила в період інтенсивної деградації металу. У зв'язку з цим, розраховуючи ресурс трубопроводів обов'язково потрібно враховувати деградацію їх матеріалів.

У даній роботі проведені дослідження зі створення розрахункової моделі для визначення залишкового ресурсу трубопроводів з врахуванням дії тривалого статичного тиску, ґрунтової корозії і деградації їх матеріалів.

Розглянемо трубу радіусу r , товщиною стінки $h = 12$ мм із сталі X52, піддану довготривалому статичному тиску $p = 8$ МПа природнім газом, яка послаблена зовнішньою поверхневою півеліптичною тріщиною з півосями a_0, b_0 (Рис. 1). Вважається, що в тріщину проникає ґрунтове середовище, що викликає її корозійно-механічне поширення. В результаті тривалої експлуатації за вказаних умов матеріал труби деградує з часом разом з поширенням тріщини. Задача полягає у визначенні часу $t = t_*$, коли корозійно-механічна тріщина пройде наскрізь стінки труби (тобто $b = h$) і настане її розгерметизація.

Як впливає з результатів експериментальних досліджень в роботі [1], за тривалого статичного навантаження і дії ґрунтової корозії корозійно-механічна тріщина буде поширюватися в сталі X52 в основному з постійною швидкістю V_k . Для нової труби ця швидкість буде $V_k(0) = 1,03 \cdot 10^{-3}$ м/рік, а для експлуатованої 30 років – $V_k(30) = 8,03$ м/рік. На основі цих даних для довільного часу експлуатації труби із сталі X52 можемо записати таку формулу для наближеного визначення швидкості $V_k \approx V_k(t)$

$$V_k(t) \approx 10^{-3} [1,03 + 0,03(t_0 + t)] \text{ (м/рік)}, \quad (1)$$

де t_0 – час початкової експлуатації труби.

Так як початкова тріщина півеліптичної форми і швидкість її поширення постійна, то можна припустити [5], що вона мало буде відрізнятися при поширенні від еліптичної. В зв'язку з цим вважаємо, що при поширенні тріщина буде мати півеліптичну конфігурацію і тому розв'язок задачі зведеться до

такої системи залежностей:

$$\frac{da}{dt} = 10^{-3}[1,03 + 0,03(t_0 + t)], \quad \frac{db}{dt} = 10^{-3}[1,03 + 0,03(t_0 + t)], \quad (2)$$

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad t = t_*, \quad a(t_*) = a_*, \quad b(t_*) = h. \quad (3)$$

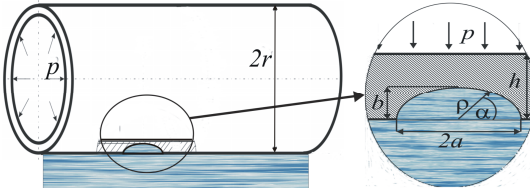


Рис. 1

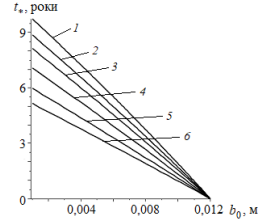


Рис. 2

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь (2) при початкових і кінцевих умовах (3), для визначення залишкового ресурсу труби отримаємо формулу

$$t_* = -0,5(103 + 3t_0) + \sqrt{0,25(103 + 3t_0)^2 + 10^5(h - b_0)}. \quad (4)$$

За формулою (4) на рис. 2 побудовані графічно залежності залишкової довговічності труби t_* від початкової глибини тріщини і початкового часу її експлуатації t_0 (тут $1 - t_0 = 0; 2 - 4; 3 - 8; 4 - 15; 5 - 25; 6 - 35$). Як впливає з цих графіків, залишкова довговічність труби значно залежить від часу t_0 її початкової експлуатації.

The research has been supported by the NATO in the Science for Peace and Security Programme under the Project G5055.

1. *Андрейків О.Є., Сас Н.Б.* Докритичний ріст плоскої тріщини в тривимірному тілі за високотемпературної повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 2. – С. 19-26.
2. *In-service degradation of gas trunk pipeline X52 steel / G. Gabetta, H.M. Nykyforchyn, E. Lunarska, P.P. Zonta, O.T. Tsyurulnyk, K. Nikiforov, M.I. Hredil, D.Yu. Petryna, and T. Vuherer* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 88-99.

MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINATION OF RESIDUAL LIFETIME OF GAS PIPELINE UNDER ACTION OF PERMANENT PRESSURE, SOIL CORROSION AND MATERIAL DEGRADATION

The method of determination of lifetime of gas pipelines with superficial crack under the action of long-term permanent pressure of gas in pipelines, soil corrosion and taking into account degradation in time of its materials are proposed. Based on the method, calculations of residual lifetime of X52 pipeline steel after long-term static loading, soil corrosion action and taking into account degradation of the steel under 30 years operation are made.

GENERALIZED LOVE WAVES IN BI-MATERIAL WAVEGUIDE WITH VISCOUS SLIP INTERFACE

**Karen Ghazaryan, Valentin Mozharovsky,
Sergey Ohanyan, Samvel Sarkisyan**

Institute of Mechanics NAS of Armenia;

F. Scorina Gomel State University (Belarus);

Yerevan State University (Armenia)

ghkarren@gmail.com; val-mozh@yandex.ru; sergohanyan@mail.ru; vas@ysu.am

The purpose of this study is to investigate shear SH wave travelling in a finite-width waveguide consisting of two elastic sub-layers imperfectly bonded at viscous linear slip interface where velocity of displacement discontinuity are taken to be linearly related to stress traction which is continuous across the interface. The SH waves in finite-width layered waveguide with perfect contact conditions of continuity of displacement and stress interface is considered in [1]. Existence conditions and character of the propagation of viscoelastic shear surface waves in an elastic half-space with a viscoelastic coating are considered in [2].

Let consider in Cartesian system $(-a_2 < x < a_1, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$ a bi-material waveguide made from different elastic materials $A(0 < x < a_1)$ and $B(-a_2 < x < 0)$ and imperfectly bonded at $x = 0$. The equation of motion for SH wave is given by

$$\sigma_{xz}^{(s)} = G^{(s)} \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial x}; \sigma_{yz}^{(s)} = G^{(s)} \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}}{\partial y} = \rho^{(s)} \frac{\partial^2 u_z^{(s)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

where $u_z^{(s)}$ are elastic displacements, $\sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}$ are the shear stresses, $\rho^{(s)}$ are the mass densities, $G^{(s)}$ are the shear elastic modulus, respectively. The indexes $s = 1, s = 2$ stand for two sub-layers A and B , respectively.

A model of an imperfectly bonded linear viscous slip interface between two elastic sublayers will be used [3]. According to this model the following contact conditions are valid at slip interface $x = 0$

$$\sigma_{xz}^{(1)}(0, y, t) = \sigma_{xz}^{(2)}(0, y, t); \frac{\partial}{\partial t} \left(u_z^{(1)}(0, y, t) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(u_z^{(2)}(0, y, t) \right) = \eta \sigma_{xz}^{(1)}(0, y, t). \quad (2)$$

We assume solutions in form of the plane time-harmonic wave travelling along the y -direction, $u_z^{(s)}(x, y, t) = u^{(s)}(x) \exp[i(ky - \omega t)]$, where ω is the wave angular frequency, k is the wave number.

Since the interface conditions at $x=0$ will be imposed on functions $u^{(s)}(x), \sigma_{xz}^{(s)}(x)$ it is convenient to introduce the column vectors

$$U^{(s)}(x) = \left(u^{(s)}(x), \sigma_{xz}^{(s)}(x) \right)^T.$$

In matrix form the solutions of (1) and interface conditions (2) can be cast as

$$U^{(s)}(x) = F^{(s)}(x) \cdot C^{(s)}, \quad U^{(1)}(0) = S U^{(2)}(0), \quad (3)$$

where column vectors $C^{(s)} = \left(c_1^{(s)}, c_2^{(s)} \right)^T$ are constants,

$$F^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \exp(iq_s x), & \exp(-iq_s x) \\ iG_s q_s \exp(iq_s x), & -iG_s q_s \exp(-iq_s x) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & i\eta\omega^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$q_s = \sqrt{\omega^2 / c_{ts}^2 - k^2}$; $c_{ts} = \sqrt{G_s / \rho_s}$ are the velocities of shear elastic waves. Eliminating vectors C_s in (3), the relations linking $U^{(s)}(x)$ vector values at the boundaries of each sub-layer via transfer matrix can be found as

$$U^{(1)}(a_1) = T_1 U^{(1)}(0); U^{(2)}(0) = T_2 U^{(2)}(-a_2),$$

$$T_s = \begin{pmatrix} \cos(a_s q_s) & (q_s G_s)^{-1} \sin(a_s q_s) \\ -q_s G_s \sin(a_s q_s) & \cos(a_s q_s) \end{pmatrix}.$$

Using the slip interface condition at interface $x = 0$, we come to the following relation which links the vectors at the waveguide walls $x = a_1, x = -a_2$

$$U^{(1)}(a_1) = M U^{(2)}(-a_2); \quad M = T_1 S T_2.$$

By means of this 4×4 matrix it is easy to obtain the dispersion equations for different boundary conditions imposed at waveguide walls. The traction free boundary conditions at the waveguide walls are considered

$$\sigma_{xz}^{(1)}(a_1, y, t) = 0; \quad \sigma_{xz}^{(2)}(-a_2, y, t) = 0.$$

The detailed numerical analysis of dispersion equation is carried out. Effects of interface viscosity properties on dynamic process in bi-material waveguide are studied. The corresponding Love surface wave multipole evanescent modes are studied. The results demonstrate the significant effects of interface viscous compliance on elastic frequencies.

1. *Newton M.I., McHale G., Martin F., Gizeli E., Melzak K.A.* Generalized Love waves // Europhysics Letters. – 2002. – **58** (6). – P. 818-822.
2. *Belubekyan V., Sarkisyan S.* Love problem for a half-space with a viscoelastic coating // NAS RA Repors. – 2018. – **118** (1) (In Russian).
3. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1980. – **68** (5). – P. 1516-1521.

AUXETIC MATERIALS: USING NONLINEAR MODELS AS THE NEXT STAGE OF STUDY**Jeremiah Rushchitsky***S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine*rushch@inmech.kiev.ua

A modern understanding the auxetic materials (auxetics) from position of mechanics is stated. An attention is accented on the theory of elastic deformation of auxetics and experiments with them – a legitimacy of using the term “negative Poisson’s ratio”, a role of internal structure of auxetics in explanation of three mechanical phenomena (swelling under tension and strengthening under indentation, synclastic and anticlastic deformation). The new nonlinear effect is described – one and the same material manifests the properties of conventional material under small deformations and the properties of auxetic material under the moderate deformations.

Metamaterials are forming the big class of new materials that exhibit the properties do not observed in study of classical materials and was out-of-interest of classical theory. The mechanical metamaterials are forming the subclass of metamaterials and are including as the constituent part the auxetic materials. The term “auxetic material” was introduced by Evans in 1991 [1] relative to materials, in which the Poisson ratio turned out the negative quantity. At present, the shorter term “auxetics” is used. Both words came from the Greek word αυξητικός (that tends to increase). One of the first mentions on materials with negative Poisson ratio is related to 1982 [1]. In fact, the first real materials with property of auxeticity were the foam-like materials. Beside the monograph [1], many reviews of the state-of-the-art of studying the auxetics are published (Google proposes even the separate option “auxetic materials reviews”). Further this lecture is divided on two parts.

Part 1. Description of auxetics by the linear model of elastic deformation.

Here the auxeticity of material is meant as the property to increase in the transverse dimension under the lateral loading and usually is associated with the negative Poisson’s ratio. Thus, the usual definition of auxetic material uses the secondary fact – the negativity of Poisson’s ratio as one of the elastic constants in the model of linearly elastic body. The primary fact is an observation in the standard for mechanics of materials experiment of the lateral tension of long prism (cylinder) when the transverse strain of cylinder is positive (the cylinder “swells”) in contrast to the classical materials, where it is negative (the cylinder makes thinner).

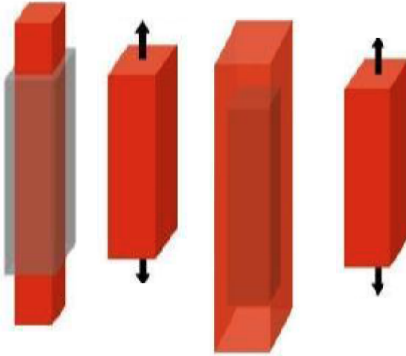


Fig. 1 [2]

The Fig. 1 shows in which way the deformation of rod is treated in the cases of traditional material (the positive Poisson ratio, left side) and auxetic material (negative Poisson ratio, right side). So, the rod in the test on the uniaxial tension becomes thinner for traditional materials, whereas it becomes thicker for auxetic materials. It should be taken into account that this test must be the basic one, in which the universal state can be realized. The universal deformations (uniform deformations, universal states) occupy the special place in the theory of elasticity. It consists in

that the theoretically and experimentally determined elastic constants of material in samples, in which the universal deformation are created purposely, are valid also for all other deformed states both samples and any different production made of this material.

Because the comments of negativity of Poisson ratio is found in the books on theory of elasticity very seldom, therefore a few sentences from the Lurie's book [10, p. 117] are worthy to be cited: "A tension of the rod with negative ν (but the more than -1) would be accompanied by increasing of transverse sizes. Energetically, an existence of such elastic materials is not excluded." "In hypothetic material with $\nu < -1$, the hydrostatic compression of the cube would accompanied by increasing its volume".

Part 2. Description of auxetics by the nonlinear models of elastic deformation.

The pioneer publications on auxetics linked the auxeticity with negativity of Poisson ratio and the prevailing part of scientists (material scientists, physicists, and partially mechanics) equate auxeticity with negativity of Poisson ratio. There exist only a few reports on using the nonlinear models [5-7] and tests on the finite strains of auxetics [4, 10, 11].

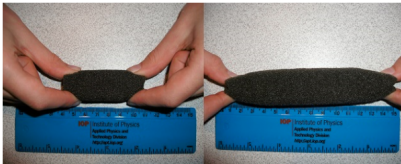


Fig. 2

The first observation that is useful for substantiation of necessity of such models is associated with the often used demonstration of auxeticity of a foam as increasing the volume of sample from a foam under tension. It is shown in Fig. 2, that are taken from [11]. This picture is really very illustrative, because it shows two basic features of

such demonstrations. First, the length of the sample is possibly not sufficient to create the classical conditions of the test on the universal deformation of uniaxial tension-compression. Second, the longitudinal and transverse strains are seemingly not sufficiently small. Therefore, this demonstration has to be described by the nonlinear models.

The nonlinear theory of elasticity includes many models, some of them are the classical ones. In the following analysis, three classical nonlinear models of hyperelastic deformation are used – two-constant Neo-Hookean model (model 1), three-constant Mooney-Rivlin model (model 2), five-constant Murnaghan model (model 3).

Model 1. The potential of Neo-Hookean model is defined as follows:

$$W = C_1(\bar{I}_1 - 3) + D_1(J - 1)^2, \quad \bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1, \quad J = \det u_{i,k},$$

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C_1 \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-2/3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 3 \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2,$$

where the elastic constants of model are linked with the classical elastic constants by relations $2C_1 = \mu$; $2D_1 = k$. The constitutive equations have the form

$$\sigma_{nm} = 2C_1 J^{-5/3} [B_{nm} - (1/3)I_1 \delta_{nm}] + 2D_1 (J - 1) \delta_{nm},$$

$$\sigma_{nn} = 2C_1 J^{-5/3} (\lambda_n - (1/3)I_1) + 2D_1 (J - 1).$$

Model 2. The potential of the Mooney-Rivlin model is defined as follows:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + D_1(J - 1)^2, \quad \bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2,$$

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C_{10} \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-2/3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 3 \right] + \\ + C_{01} \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-4/3} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) - 3 \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2,$$

where the elastic constants of the model are linked with the classical constants by relations $2(C_{10} + C_{01}) = \mu$; $2D_1 = k$. The stresses are determined by formulas:

$$\sigma = 2J^{-5/3} \left(C_{10} + C_{01} J^{-2/3} I_1 \right) B - 2J^{-7/3} C_{01} B B + \\ + \left[2D_1 (J - 1) - (2/3) J^{-5/3} \left(C_{10} I_1 + 2C_{01} J^{-2/3} I_2 \right) \right] 1 + 2C_{01} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-7/3} \times \\ \times \left[\lambda_k^2 (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) - (2/3) \lambda_k (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1).$$

Model 3. The elastic potential in the Murnaghan model has the form:

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3,$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = (1/2)\lambda I_1^2 + \mu I_2 + (1/3)A I_3 + B I_1 I_2 + (1/3)C I_1^3.$$

The Cauchy-Green strain tensor ε_{ik} and five elastic constants (two Lamé elastic constants λ, μ and three Murnaghan elastic constants A, B, C) are used in this potential.

Further, some findings are shown for the case of uniaxial tension.

The Fig. 3 shows experimental dependence of $(-\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11})$ on the strain ε_{11} .

The Fig. 4 corresponds to the theoretical dependence of ε_{22} on ε_{11} for the foam (left plot) and polystyrene (right plot). These plots show three stages: 1. A decrease of transverse strain becomes slower under transition to the moderate strains. 2. The strain ε_{22} reaches the local minimum and further increases. 3. When the strain ε_{11} continues to increase, the strain ε_{22} possesses zero value and further increases possessing already the positive values.

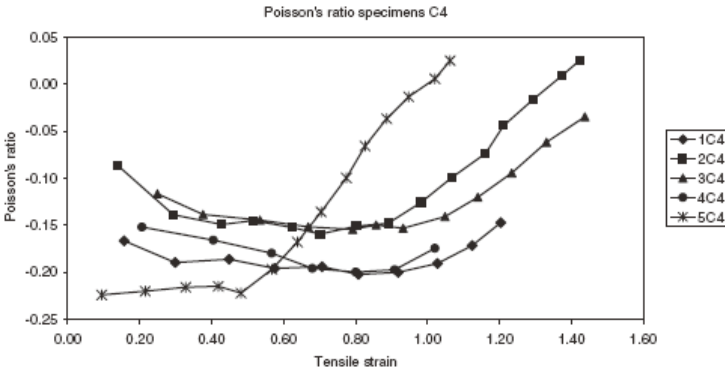


Fig. 3

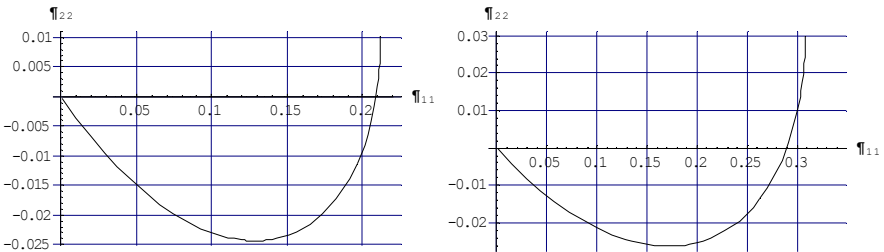


Fig. 4

The shown feature confirms the new mechanical effect – a transition of the material under its deformation to the level of moderate values of the longitudinal stretching from the class of conventional materials into the class of the auxetic materials.

In other words, the standard sample in conditions of universal deformation of uniaxial tension is deformed for small strains as if it is made of the conventional material (its cross-section is decreased) and with increasing the values of longitudinal stretching to the moderate values the sample cross-section starts to increase, what is the characteristic just for auxetic materials. The similar new phenomena occur for other universal states.

So, three used in the proposed analysis nonlinear models describe some nonlinear phenomena that are observing in experiments with auxetic materials under moderate strains. But the new phenomenon of dependence of deforming the material on the level of strains (small or moderate) is visible clearly only within the Murnaghan model, whereas the Neo-Hookean and Mooney-Rivlin models catch only a tendency of development of new phenomenon. Thus, the models of nonlinear mechanics constitute the natural next step in the progress of theory of auxetics and can be in some circumstances very useful in the adequate description of phenomenon of auxeticity.

1. *Lim T.C.* Auxetic materials and structures. – Berlin: Springer, 2015. – 564 p.
2. *Anurag C., Anvesh C.K., Katam S.* Auxetic materials // Int. J. for Research in Appl. Science & Eng. Technology. – 2015. – 3, N 4. – P. 1176-1183.
3. *Lurie A.I.* Theory of elasticity. Series: Foundations of engineering mechanics. Berlin: Springer, 2005. – 1050 p.
4. *Murphy J.G., Rogerson G.* A method to model simple tension experiments using finite elasticity theory with an application to some polyurethane foams // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – 40. – P. 499-500.
5. *Ciambella J., Saccomandi G.* A continuum hyperelastic model for auxetic materials // Proc. Roy. Soc. A. – 2014. – 470. – P. 1-14.
6. *Rushchitsky J.J.* Auxetic metamaterials from position of mechanics: linear and nonlinear models // Dopovidi of NAS of Ukraine. – 2018. – N 7 (in press).
7. *Rushchitsky J.J.* Auxetic materials: new look from position of mechanics (plenary lecture) // Materials of Int. Sci. Conf. "Modern Problems of Mechanics" (Ukraine, Kyiv, August 28-30, 2017). – P. 111-112.
8. *Rushchitsky J.J.* Nonlinearity of elastic deformation and moderateness of strains as a factor explaining the auxeticity of materials (plenary lecture) // Abstract book of 7th Int. Conf. "Auxetics and other materials and models with "negative" characteristics (Poland, Gdansk-Szymbark, September 12-16, 2016). – P. 57-59.
9. *Rushchitsky J.J.* Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing, ApS, 2012. – 270 p.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ

УДК 539.3

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЦІЙНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ШАРІВ

Юрій Бойчук, Василь Чекурін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

v.chekurin@gmail.com; yuronchuk@gmail.com

Діелектричні покриття широко використовують у теплофізиці, матеріалознавстві, інших прикладних науках, а також в різноманітних технічних застосуваннях. Це, зокрема, матеріали високої стійкості до механічних напружень (покриття на основі AlN та вольфраму), матеріали, що характеризуються хорошими теплоізоляційними властивостями (надтонкі рідкі композиційні фарби, металокерамічні, пористі, волокнисті покриття), також матеріали, які є цінними за рахунок пропускання або поглинання випромінювання в певному діапазоні енергії (шар перовскіту титану для сонячних елементів) тощо. Їхні властивості залежать від фізико-механічних і теплофізичних характеристик матеріалу, а також від об'ємних і поверхневих радіаційних властивостей. Для оптимального проектування таких покриттів, технології їх створення чи оцінювання експлуатаційних властивостей необхідні об'єктивні дані щодо їхніх фізичних характеристик, зокрема, поверхневих радіаційних властивостей – значень коефіцієнта чорноти ϵ та коефіцієнта розсіювання ρ .

Існують різні методи визначення коефіцієнта чорноти поверхні твердих тіл. Більшість із них базуються на зіставленні температур або випромінюваної енергії досліджуваного та еталонного зразків, коефіцієнт чорноти якого відомий [2, 3]. Також існують методи засновані на використанні зразка, частина поверхні якого покрита шаром матеріалу (фарбою) із відомим коефіцієнтом теплового випромінювання [1]. До недоліків цих методів слід віднести: необхідність використання еталонних зразків з відомим коефіцієнтом чорноти поверхні, неврахування розсіювання ІЧ-випромінювання поверхнею, неможливість їхнього застосування в умовах експлуатації (in situ), складність реалізації, що зумовлено необхідністю поміщення зразків у вакуумну камеру, застосування спеціальних екранів, поворотних дзеркал, охолоджувальних ус-

тановок тощо. До того ж вони не дозволяють одночасно визначати два поверхневих радіаційних параметри – коефіцієнти чорноти і розсіювання.

У доповіді представлено спосіб одночасного визначення двох поверхневих радіаційних параметрів теплоізоляційного шару – інтегральних коефіцієнтів чорноти ϵ та розсіювання ρ .

Математична модель теплових процесів запропонованого способу враховує кондуктивний і радіаційний механізми перенесення теплової енергії в об'ємі шару, поглинання, випромінювання та розсіювання ІЧ-випромінювання поверхнею, конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем через його поверхню, а також взаємовплив усіх механізмів перенесення тепла [4]. В рамках моделі сформульована обернена задача визначення поверхневих коефіцієнтів чорноти та розсіювання діелектричного шару на основі даних вимірювання поверхневої температури і потоку енергії ІЧ-випромінювання, яке виходить із шару через поверхню. Із застосуванням методу Ньютона розроблено ітераційний метод розв'язування оберненої задачі та скінченно-елементний алгоритм його реалізації.

У доповіді розглядається приклад застосування запропонованого методу для визначення поверхневих коефіцієнтів чорноти ϵ та розсіювання ρ керамічного пористого глинозему.

1. *Анисимов М.В., Лычагин Д.В., Рекунов В.С., Таалайбеков Ж.Т.* Экспериментальное определение интегральной степени черноты сверхтонких жидких композиционных теплоизолирующих покрытий // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2016. – 327. № 5. – С. 106-115.
2. *Архипов В.А., Жарова И.К., Гольдин В.Д., Куриленко Н.И.*, Анализ нестационарного метода измерения интегрального коэффициента излучения // Теплофизика и аэромеханика. – 2012, – 19, № 6. – С. 751-760.
3. *Лаповок Е.В., Мосин Д.А., Пеньков М.М., Уртминцев И.А., Ханков С.И.* Измерение степени черноты поверхностей образцов методом монотонного нагрева // Тепловые режимы и надежность приборов и систем. – 2016. – 59, № 4. – С. 311-316.
4. *Chekurin V.F., Boichuk Yu.V.* An Iterative Method for Solving of Coupled Equations for Conductive-Radiative Heat Transfer in Dielectric Layers // Advances in Mathematical Physics. – 2017. – Article ID 9139135. – 11 p.

INVERSE PROBLEM FOR DETERMINATION OF SURFACE RADIATIVE PROPERTIES OF DIELECTIC LAYERS

A nondestructive method for determination of surface radiative properties of dielectric layers has been considered in the paper. The method is based on solving of an inverse problem formulated in the frame of a mathematical model describing the conductive-radiative heat exchange in the layer. Results of measuring of the surface temperature and energy flux which the layer emits through the surface are used as the input data for the problem. Possible practical applications of the method are discussed in the paper.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В УСЛОВИЯХ НЕЙТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

Андрей Веремейчик, Виталий Хвисевич

УО «Брестский государственный технический университет» (Беларусь)

vai_mrtm@bstu.by

Рассматривается деформированный короткий сплошной круговой цилиндр из стали ОХ16Н15МЗБ, нагруженный внешним радиальным и осевым давлением и находящийся в условиях нейтронного облучения с кинетическими энергиями $\bar{E} > 0,1$ МэВ (рис. 1). Зависимость температуры T и радиационного распухания S от координат r и z приведена на рис. 2.

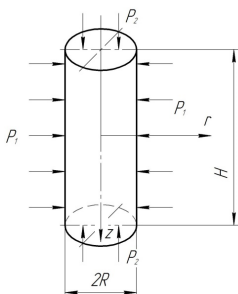


Рис. 1 Расчетная схема

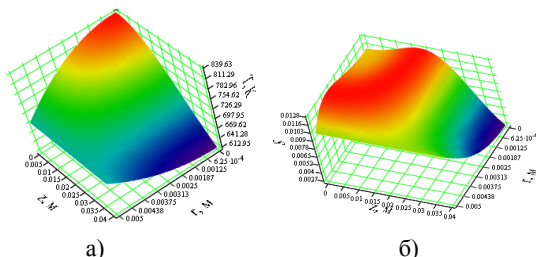


Рис. 2 Поверхности температуры (а) и радиационного распухания (б) в момент времени 1000 часов, плотность потока быстрых нейтронов $\varphi = 2,81 \cdot 10^{19}$ нейтр / (см² · ч)

Математически такая задача описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных

$$\lambda \left(\frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{E}{1-2\nu} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0,$$

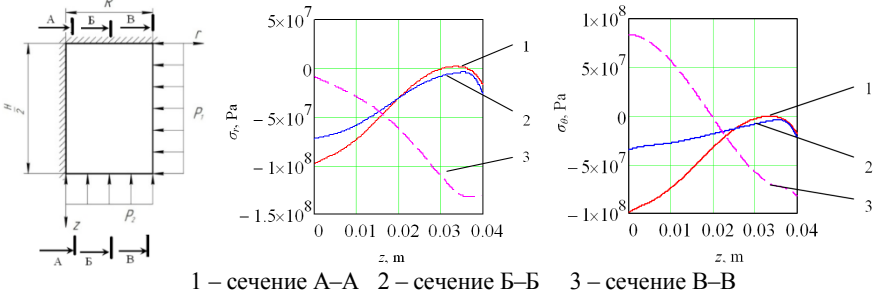
$$\lambda \left(\frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right) - \frac{E}{(1-2\nu)} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0,$$

где $\mu = E / (2 + 2\nu)$; $\lambda = E\nu(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$ – параметры Ламе, решение которой реализуется численно с использованием метода конечных разностей. Граничные условия заданы в следующем виде:

при $r = 0$: $u_r = 0$, $\partial u_z / \partial r = 0$, при $r = R$: $\sigma_r = -P_1 = -10$ МПа, $\tau_{rz} = 0$,
 при $z = 0$: $u_z = 0$, $\tau_{rz} = 0$, при $z = H/2$: $\sigma_z = -P_2 = -20$ МПа, $\tau_{rz} = 0$.

Программная реализация разработанного алгоритма выполняется на базе системы компьютерной алгебры MathCAD 15. Получена система конечно-разностных уравнений для внутренних точек области и конечно-разностные соотношения для граничных условий.

По результатам численного расчета найдены зависимости компонент тензоров напряжений и деформаций от координат с обеспечением наглядной визуализации результатов и возможностью варьирования геометрическими параметрами тела, характеристиками материала, размерами конечно-разностной сетки и условиями нагружения. Исследована зависимость напряжений и деформаций от времени облучения и свойств материала. Кроме того, проведено исследование влияния температуры и интенсивности радиационного воздействия на напряжения, деформации и перемещения точек цилиндра.



1 – сечение А–А 2 – сечение Б–Б 3 – сечение В–В
 Рис. 3 Зависимость радиальных (σ_r) и тангенциальных (σ_θ) напряжений от координаты z в различных сечениях

Достоверность модели ввиду отсутствия аналитических решений такого рода задач проверялась при отдельных механических и температурных нагружениях. Сравнение результатов с существующими аналитическими и численными решениями подтвердило точность конечно-разностных схем. При числе интервалов разбиения $k > 20$ погрешность численного расчета не превышает 0.3 %. Проведена проверка согласованности конечно-разностных схем. Устойчивость конечно-разностной задачи проверялась методом фон Неймана. Для оценки сходимости разностных схем применялась теорема Лакса.

ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A NON-UNIFORMLY HEATED CYLINDER OF FINITE LENGTH SUBJECTED TO NEUTRON IRRADIATION

A solution to the problem on determination of the stress-strain state of short cylindrical bodies subjected to mechanical loading, high-temperature heating and irradiation by fast neutron flux is considered.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЧИСЛОВОГО ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ

Оксана Вовк, Тетяна Соляр

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

dept19@iapmm.lviv.ua; t_solyar@ukr.net

Інтегральне перетворення Лапласа широко використовують для розв'язування різних класів задач нестационарної термопружності. Основна складність його застосування зумовлена проблематичністю у багатьох випадках знаходження оригіналу за одержаним зображенням. У праці [1] наведено короткий огляд числових методів обернення перетворення Лапласа, а також на прикладі задачі теплопровідності для двох контактуючих термочутливих півпросторів, проілюстровано ефективність використання числового обернення перетворення Лапласа, яке ґрунтується на модифікованій формулі Пруднікова. Тут показано ефективність даного числового обернення перетворення Лапласа при розв'язуванні нелінійної задачі нестационарної теплопровідності для термочутливого півпростору за конвективного теплообміну з довкіллям і за припущення простої нелінійності матеріалу.

Нестационарне температурне поле t термочутливого півпростору, через поверхню якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, визначається з нелінійної крайової задачі теплопровідності

$$\partial(\lambda_t(t) \partial t / \partial z) / \partial z = c_v(t) \partial t / \partial \tau, \quad z \leq z_0, \quad (1)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p, \quad [\lambda_t(t) \partial t / \partial z + \alpha(t - t_c)]|_{z=z_0} = 0, \quad \partial t / \partial z|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad (2)$$

де t_p – початкова температура півпростору, t_c – температура середовища, $\lambda_t(t)$ – коефіцієнт теплопровідності, $c_v(t)$ – об'ємна теплоємність матеріалу півпростору, α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = z_0$.

В результаті зведення задачі (1)-(2) до безрозмірного вигляду, введення змінної Кірхгофа, застосування методу лінеаризувального параметра для лінеаризації крайової умови та перетворення Лапласа до отриманої лінеаризованої задачі на змінну Кірхгофа, одержано безрозмірні залежності зображення змінної Кірхгофа:

$$\tilde{\theta} = \theta_c \operatorname{Bi}(1 + \kappa) e^{-\sqrt{s}(1 - \bar{z})} / s(\operatorname{Bi}(1 + \kappa) + \sqrt{s}), \quad \bar{z} \leq 1, \quad (3)$$

її точного оригіналу

$$\theta(Fo, \bar{z}, \kappa) = \theta_c \left[\operatorname{erfc} \left((1 - \bar{z}) / 2\sqrt{Fo} \right) - e^{\operatorname{Bi}(1+\kappa)(1-\bar{z})} \operatorname{erfc} \left(\operatorname{Bi}(1+\kappa)\sqrt{Fo} + (1 - \bar{z}) / 2\sqrt{Fo} \right) \right], \quad \bar{z} \leq 1, \quad \text{де } \theta_c = T_c / (1 + \kappa), \quad T_c = t_c / t_0 \quad (4)$$

та наближеного, отриманого з використанням чисельно-аналітичної формули, яка базується на формулі Пруднікова і при $0 < Fo < l$ має вигляд [2]

$$\theta(Fo, \bar{z}, \kappa) \cong 1/l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\Theta}_n \exp(s_n Fo) + (1 - \exp(-c))^{-1} \left[\theta(0) + l\theta'(0) \left(Fo/l + (\exp(c) - 1)^{-1} \right) \right] - R(Fo),$$

де $\tilde{\Theta}_n = \tilde{\theta}(s_n) - \left(\theta(0)/s_n + \theta'(0)/s_n^2 \right)$, $\tilde{\theta}(s)$ – зображення Лапласа від функції $\theta(Fo)$, $\theta(0)$, $\theta'(0)$ – відомі значення оригіналу та його похідної в початковий момент часу; $s_n = (c + 2\pi ni) / l$; i – уявна одиниця; l і c – сталі, які задовольняють умови $l > 0$, $\operatorname{Re}(c) > 0$; $R(Fo)$ – залишковий член формули.

Температуру півпростору визначено за припущення лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}(1 + k(T - T_p))$

$$T(Fo, \bar{z}, \kappa) = k^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k\theta(Fo, \bar{z}, \kappa)} - 1 \right) + T_p. \quad (5)$$

Тут $k = \text{const}$, $\bar{z} = z/z_0$, $T = t/t_0$, $T_p = t_p/t_0$, $Fo = a_0\tau/z_0^2$, $a_0 = \lambda_{t0}/c_{v0}$,

$\operatorname{Bi} = \alpha z_0 / \lambda_{t0}$, κ – невідомий лінеаризувальний параметр, який визначається з трансцендентного рівняння, отриманого підстановкою температурної залежності (5) у крайову умову на поверхні півпростору.

Розбіжність між точними та наближеними значеннями температури не перевищували 0,7%. Отримані при цьому результати будуть використані як тестові для порівняння з побудованими аналітико-числовими розв'язками задач теплопровідності для контактуючих термочутливих півпростору та шару за різних умов нагрівання.

1. *Вовк О.* Використання числового обернення перетворення Лапласа в задачах теплопровідності контактуючих термочутливих тіл // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – **15**. – С. 129-136.
2. *Kushnir R.M., Solyar T.Ya.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // *Mechanics, Materials Science & Engineering*. – 2016. – **3**. – pp. 90-106, doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.

RESEARCH OF EFFECTIVENESS NUMERICAL INVERSE OF LAPLACE TRANSFORM TO HEAT CONDUCTIVE PROBLEM OF THERMOSENSITIVE HALF-SPACE

A solution of the nonstationary heat conduction problem for thermosensitive half-space using the numerical inverse of the Laplace transform was constructed and the efficiency of its application was researched.

УДК 539.3

НЕУСТАЛЕНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ДВОШАРОВОЇ ПЛИТИ ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ПОПЕРЕЧНОЇ КООРДИНАТИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Галина Гарматій, Богдан Калиняк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

galynaharmatiy@gmail.com

Широке використання в сучасній техніці кусково-однорідних елементів конструкцій призводить до якісно нових практично важливих задач дослідження температурних полів, напружень і деформацій. Умови технологічного виготовлення та експлуатації в широких діапазонах температур викликають необхідність враховувати температурну залежність термомеханічних характеристик матеріалів.

Розв'язано квазістатичну незв'язану задачу термопружності у напруженнях для двошарової ізотропної нескінченної плити з урахуванням залежності термомеханічних характеристик матеріалів від температури в умовах конвективного теплообміну при наявності та відсутності силових навантажень. Вважаємо, що температура, напруження, деформації, переміщення залежать від однієї координати.

Запропонована аналітико-числова методика розв'язування відповідної нелінійної нестационарної задачі теплопровідності полягає у: переході до нової інтегральної змінної з метою можливості застосування інтегро-інтерполяційного методу; зведенні отриманої крайової задачі на нову змінну до задачі Коші для системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь (СНЗДР); числовому розв'язуванні СНЗДР; переході від введеної змінної до шуканого значення температури за допомогою оберненої інтерполяції, задаючи характеристики конкретно вибраного матеріалу. Складові напружень у перпендикулярному до товщини плити напрямі виражено у кожному шарі через дві довільні сталі $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$

$$\sigma^{(j)} = \frac{\nu^{(j)}(T^{(j)})}{1-\nu^{(j)}(T^{(j)})} \int_0^z F(\xi) d\xi - \frac{\nu^{(j)}(T^{(j)})}{1-\nu^{(j)}(T^{(j)})} p_1 - \frac{E^{(j)}(T^{(j)})}{1-\nu^{(j)}(T^{(j)})} \Phi^{(j)}(T^{(j)}) +$$

$$+ B_1^{(j)} \frac{E^{(j)}(T^{(j)})}{1-\nu^{(j)}(T^{(j)})} x + B_2^{(j)} \frac{E^{(j)}(T^{(j)})}{1-\nu^{(j)}(T^{(j)})},$$

які визначають з інтегральних умов, що стосуються силових зусиль та моментів по товщині плити та умов контакту на межах. Тут $\nu^{(j)}$, $E^{(j)}$, $T^{(j)}$ коефіцієнт Пуассона, модуль пружності, температура j -го шару, F – масові сили, p_1, p_2 – поперечні сили навантаження на протилежних поверхнях, які за-

довольняють умову $\int_0^h F(\xi)d\xi = p_2 - p_1$, $\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = \int_{T_0}^{T^{(j)}} \alpha^{(j)}(t)dt$ – тепла

деформація, $\alpha^{(j)}$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Задача термопружності розглянута у 4-х можливих постановках, які включають рівність деформацій на межі контакту шарів:

- а) довільні сталі у кожному шарі – однакові, виконуються умови відсутності поздовжніх зусиль та моментів у всій плиті по товщині;
- б) довільні сталі у кожному шарі – різні, виконуються умови відсутності поздовжніх зусиль у плиті та моментів у кожному шарі;
- в) довільні сталі у кожному шарі – різні, виконуються умови відсутності поздовжніх зусиль у кожному шарі та моментів у всій плиті;
- г) довільні сталі у кожному шарі – різні, у кожному шарі відсутні поздовжні зусилля та моменти (відповідає окремим одношаровим плитам, між якими є тепловий контакт при відсутності механічного), умови рівності деформацій на межі контакту між шарами не беруться до уваги.

Проведено розрахунки нелінійних температурних полів для різних значень чисел Біо та критеріїв Фур'є, а також зумовлених ними напружень, деформацій і переміщень за наявності та відсутності силових навантажень. Врахування температурної залежності характеристик матеріалів порівняно мало впливає на розподіл температури, але є важливим при розрахунку термонапруженого стану, особливо у багатошарових конструкціях.

Отримані розподіли напружень для вибраних матеріалів суттєво відрізняються (відхилення понад 100%) для різних постановок задачі термопружності. Це вказує на необхідність експериментальних досліджень щодо «фізичності» вибору постановки задачі у багатошарових плитах. В частковому випадку отримані відомі результати.

NON STEADY THERMAL STRESSED STATE OF THE THERMAL SENSITIVE TWO-LAYER PLATE WITH DEPENDENT ON THICKNESS CHARACTERISTICS

The quasistatic uncoupled thermo elasticity problem in isotropic two-layer infinite plate with temperature dependent thermo mechanical characteristics has been solved in terms of stresses. The analytic-numeric solution of non-linear heat transfer problem with convective heat exchange with an environment has been obtained. The corresponding elasticity problem with force loading was solved in four different statements. The numerical results have been compared.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ
ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ П'ЯТИШАРОВОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ
ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ****Володимир Горошко***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*ssserty123@gmail.com

Основою якісних розрахунків на міцність і надійність шаруватих елементів конструкцій, зокрема кульової форми є достовірне визначення їх теплового та напружено-деформованого станів. Виготовлення та експлуатація таких елементів конструкції у широких діапазонах температур вказують на необхідність розробки ефективних методів розрахунку термопружного стану багатошарових тіл з врахуванням залежностей їх фізико-механічних характеристик матеріалів шарів та параметрів теплообміну з довкіллям від температури (термочутливість матеріалу). Серед них особливе значення мають аналітичні, які дозволяють отримати температурні поля, напруження, деформації та переміщення у вигляді аналітичних виразів. Це в свою чергу приводить до необхідності розв'язання нелінійних задач теплопровідності із нелінійними умовами теплообміну з довкіллям та на поверхнях контактуючих шарів, а також розв'язання відповідних рівнянь термопружності зі змінними коефіцієнтами [1-5].

На основі моделі квазістатичної незв'язаної задачі термопружності визначено стаціонарний розподіл температури та компоненти напружено-деформованого стану елемента конструкції, що має форму п'ятишарової порожнистої кулі з внутрішнім $r = r_1$ і зовнішнім $r = r_6$ радіусами відповідно. На внутрішній поверхні підтримується стала температура t_{inp} , а через зовнішню поверхню кулі відбувається конвективно-променевий теплообмін із довкіллям температури t_{out} . На поверхнях контакту сусідніх шарів, які виготовлені з різних термочутливих матеріалів, виконуються умови ідеального теплового контакту (рівність температур і теплових потоків). Куля також нагрівається джерелами тепла, розташованими у другому та четвертому її шарах.

Отримано аналітично-числовий розв'язок нелінійної задачі теплопровідності для такої кулі за допомогою методики визначення

теплого стану шаруватих циліндрів і куль [1,3] з використанням перетворення Кірхгофа.

Визначення компонент напружено-деформованого стану розглядуваної кулі, спричиненого знайденим температурним полем та рівномірно розподіленими навантаженнями на її поверхнях, зведено до розв'язання сукупності інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду щодо радіальних та сумарних напружень та задоволення певних інтегральних умов [1,4]. За результатами числового аналізу температури та компонент напружень досліджено вплив на їх величини термочутливості матеріалів та параметрів термосилового навантаження.

1. Попович В.С., Калиняк Б.М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багат шарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 2. – С. 169–186.
2. Кушнір Р.М., Попович В.С. Про визначення усталеного термопружного стану багат шарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
3. Попович В.С., Горошко В.О., Ракоча І.І. Математичне моделювання теплового стану трьохшарової порожнистої кулі за складного теплообміну // Сучасні проблеми термомеханіки: зб. наук. праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. – С. 213–216. – Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
4. Горошко В.О., Калиняк Б.М., Попович В.С., Ракоча І.І. Математичне моделювання і визначення термопружного стану тришарової порожнистої кулі за складного теплообміну // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2016. – Вип. 14. – С. 123–132.
5. Кушнір Р.М., Калиняк Б.М., Горошко В.О. Визначення термопружного стану тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 3. – С. 111–114.

MATHEMATICAL MODELING AND DETERMINATION OF THE THERMO-ELASTIC STATE OF THE FIVE-LAYER HOLLOW SPHERE AT COMPLETED HEAT EXCHANGE

The mathematical model of the thermal and thermo-stressed state of the five-layer thermal sensitive hollow sphere at complicated heat exchange with an environment, constant force loading on its boundary surfaces has been considered. The sphere is heated by heat source in the second and fourth layers. The ideal thermo-mechanical contacts are present between the neighbour layers. The analytic-numerical solution of the heat transfer problem and analytic expressions for thermal-stressed state using reduction of the unbounded thermo-elasticity problem to the solving the set of Volterra integral equations and defined integral condition were obtained. The influence of the temperature dependence of material properties in the layers on temperature distribution and temperature stresses taking into account the dependence on thermal and power loading was analyzed.

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ВІНЕРА-ГОПФА В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Михайло Дудик

Уманський державний педагогічний університет (Україна)

dudik_m@hotmail.com

Численні плоскі крайові задачі прикладної механіки за допомогою інтегральних перетворень можуть бути зведені до систем функціональних рівнянь у комплексній площині, що розв'язуються за допомогою методу Вінера–Гопфа [1]. Ключовою проблемою їх розв'язання є факторизація матричного коефіцієнта системи. Нині відомий лише один вузький клас матричних функцій комплексної змінної, які допускають точну факторизацію [2], і це стимулює розвиток методів наближеного розв'язання матричних функціональних рівнянь Вінера–Гопфа.

Пропонується наближений метод розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера–Гопфа, який базується на поданні матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а стосовно іншої передбачається малість проти першої матриці в області визначення системи. Даний метод дозволяє уникнути необхідності факторизації загального коефіцієнта системи функціональних рівнянь. Використання методу ілюструється на прикладі розв'язання у рамках когезійної моделі задачі про зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних пружних ізотропних середовищ.

1. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
2. *Khrapkov A. A.* Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problems. – St. Petersburg: B.E. VNIIG Inc., 2001. – 144 p.

AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLUTION OF A MATRIX WIENER–HOPF EQUATIONS FOR PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS

A method of successive approximations is suggested for the solution of the Wiener–Hopf system of functional equations, using the presentation of the system matrix coefficient as the sum of two matrices in the case when the first matrix allows for the exact factorization and the second one is assumed far less first matrix in the domain of system definition. The proposed method allows us to avoid the necessity of factorization of complete coefficient of the initial functional equations system.

**ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬОГО ДЕФОРМУВАННЯ НА ЦИКЛІЧНУ
ТЕРМОМЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ ЕЛАСТОМЕРНОГО
В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА**

Ярослав Жук, Олександр Остос

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)

y.zhuk@i.ua; ostos.alexander1994@gmail.com

Широке використання еластомерних та полімерних матеріалів в багатьох практичних застосуваннях зумовлено такими унікальними властивостями як висока деформівність та здатність дисипувати значну кількість механічної енергії. Елементи конструкцій, виготовлені з них, наприклад, автомобільні шини, ролики транспортерів тощо в процесі експлуатації можуть піддаватись дії цілого комплексу високоінтенсивних навантажень, які суттєво впливають на циклічні характеристики матеріалів та динамічну поведінку конструкцій [1]. Серед параметрів зовнішнього впливу найважливішими є частота, температура, амплітуда коливань, а також попередній напружено-деформований стан, оскільки такі елементи конструкцій, як правило, додатково деформують для отримання кращої функціональності або внаслідок певних конструкційних особливостей. Термомеханічна поведінка еластомерів при циклічних навантаженнях зумовлена перш за все ефектами зв'язаності механічних і теплових полів: як згадано залежністю властивостей від температури, так і необоротними втратами механічної енергії внаслідок дисипації, що призводить до виділення тепла [1]. Малий розігрів протягом одного циклу деформування може призвести до суттєвих рівнів вібророзігріву у випадку інтенсивних багатоциклових процесів і, як наслідок, до деградації міцнісних характеристик матеріалу внаслідок розм'якшення. Попередня деформація віброізоляторів обумовлена вагою об'єкта і в загальному випадку є скінченною. Ефект амплітудної залежності динамічних характеристик відображає фізичну нелінійність матеріалу [2].

Дана робота присвячена дослідженню зв'язаної термомеханічної поведінки еластомерних елементів конструкцій з врахуванням фізичної нелінійності та попереднього деформування. Для описання такої поведінки еластомерних матеріалів застосовуються різноманітні моделі й підходи: інтегральні, інтегро-диференціальні та диференціальні, які використовують концепцію проміжних станів, для узагальнення реологічних моделей на

випадак великих деформації. У цьому дослідженні розвивається підхід, що ґрунтується на використанні концепції комплексних модулів та амплітудних визначальних рівняннях, які формуються в термінах амплітуд основних польових величин [2]. Ці визначальні рівняння є досить складними з точки зору як експериментальної конкретизації, так і застосування для розв'язання конкретних задач. В даній роботі, аналогічно із [2], застосовано принцип пружних потенціалів Муні-Рівліна. З його допомогою розвинено постановку задачі про коливання і дисипативний розігрів скінченного циліндра із заданим кінематичним збудженням поверхні.

1. Behnke R., Kaliske M. Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – **68**. – P. 101–131.
2. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Червинко О.П. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины // Прикладная механика. – 1997. – **33**, № 1. – С. 39–42.
3. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Сичко В.М., Завгородний А.В. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев жестко опертой толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели // Акустичний вісник. – 2010. – № 2. – С.28–34.

INFLUENCE OF PRELIMINARY STRAIN ON CYCLIC THERMOMECHANICAL BEHAVIOUR OF AN ELASTOMERIC VISCOELASTIC CYLINDER

The external loading to which polymer structural elements are routinely subjected has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. The most important loading factors are the temperature, the vibrational frequency and amplitude, and the preliminary strain state. To take account of these complex relations between them, adequate model to simulate material response has to be developed. In the particular case of elastomeric elements, the problem of vibroprotection and damping systems should be considered as well. Preliminary deformation of vibration insulators occurs mainly due to the gravitational force acting on the object and is normally finite. The temperature influence is associated both with the external thermal conditions and dissipative heating. General theory of prestrained viscoelastic media with temperature-dependent properties was applied, where the case of small and finite preliminary deformations were considered. Constitutive equations obtained are very complex in terms of both experimental determination of the model parameters and the solution of specific problems. Using the temperature-frequency and deformation-frequency analogies, separation of the dependence of the dynamic characteristics from the initial deformation parameters, and using nonlinear elastic potentials depending on small amount of constants (for instance, Muni-Rivlin potential), the simplicity of empirical model was achieved. In the present work, using this model, qualitative analysis of the influence of dissipative heating and preliminary deformation on the resonant vibrations of viscoelastic bodies is performed. The problem for viscoelastic cylinder under kinematic loading on the surface was solved.

**ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ТЕОРІЇ ЗГИНУ
НЕТОНКИХ ПЛАСТИН**

Анатолій Зеленський

ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури” (Україна)

a.zelensky@ukr.net

Запропоновано метод знаходження загальних розв'язків крайових задач згину трансверсально-ізотропних пластин довільної сталої товщини h за дії довільного поперечного навантаження $q(x, y)$, кососиметричного відносно серединної площини. Застосовано варіант математичної теорії [2], який базується на розкладі всіх компонент напружено-деформованого стану (НДС) у ряди Фур'є-Лежандра за поперечною координатою z , використанні варіаційного принципу Рейснера і взаємозв'язаних рівнянь. Компоненти переміщень подано у вигляді:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\left(\frac{2z}{h}\right)u_k(x, y)(U, V; u, v),$$

$$W(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}\left(\frac{2z}{h}\right)w_k(x, y),$$
(1)

де $k = 1, 3, 5, \dots$; $P_k(2z/h)$ – поліноми Лежандра, U, V, W – компоненти переміщень; u_k, v_k, w_k – складові компонент переміщень. Розрахунки пластин і оболонок за різними теоріями наведено, зокрема, в [1, 3].

Систему диференціальних рівнянь (ДР) рівноваги зведено до двох незалежних систем: одна (однорідна) описує вихровий крайовий ефект (ВКЕ), а інша (неоднорідна) – внутрішній НДС і потенціальний крайовий ефект (ПКЕ). Надалі система ВКЕ зведена до рівнянь Гельмгольца, а система внутрішнього НДС і ПКЕ – до системи ДР відносно функцій $\Phi_k(x, y)$:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \dots D_{2n-2} \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} q(x, y),$$
(2)

де $k = 1, 3, \dots, 2n-1$, n – кількість наближень у рядах (1), ∇^2 – оператор Лапласа, $D_0 = \nabla^2$, $D_i = \nabla^2 - s_i$, $D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}$; a_{k0}, s_i, s_{k0} – механіко-геометричні параметри. Складові компонент НДС виражаються через $\Phi_k(x, y)$ і вихрові функції [2].

Загальний розв'язок однорідних ДР (2) є сумою загальних розв'язків бігармонічного рівняння і диференціальних рівнянь Гельмгольца. Знаходження загальних розв'язків неоднорідних ДР (2) високого порядку $4n$ пов'язано із суттєвими математичними труднощами, які викликані, зокрема, знаходженням їх частинних розв'язків. Особливі складнощі виникають, коли поперечне навантаження є розривним. Тоді аналітичне знаходження частинних розв'язків занадто ускладнене. Тому слід спростити знаходження частинних, а отже, і загальних розв'язків ДР (2).

Застосовуючи операторний метод інтегрування, показано, що частинні розв'язки ДР (2) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(x, y) = & \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2 \dots s_{2n-2}} \left(\frac{s_2 s_3 \dots s_{2n-2}}{s_1 s_{1,2} s_{1,3} \dots s_{1,2n-2}} (f_{1,r} - f_{0r}) + \right. \\ & + \frac{s_1 s_3 s_4 \dots s_{2n-2}}{s_2 s_{2,1} s_{2,3} \dots s_{2,2n-2}} (f_{2,r} - f_{0r}) + \dots + \\ & \left. + \frac{s_1 s_2 s_3 \dots s_{2n-3}}{s_{2n-2} s_{2n-2,1} s_{2n-2,2} \dots s_{2n-2,2n-3}} (f_{2n-2,r} - f_{0r}) + f_{00r} \right); s_{m,i} = s_m - s_i, \quad (2) \end{aligned}$$

де $f_{0r}(x, y), f_{00r}(x, y), f_{i,r}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 2n - 2$) – частинні розв'язки ДР:

$$D_0 f_0(x, y) = q(x, y), \quad D_0 D_0 f_{00}(x, y) = q(x, y), \quad D_i f_i(x, y) = q(x, y).$$

Таким чином, загальні розв'язки ДР (2) високого порядку визначаються через загальні розв'язки ДР 2-го і 4-го порядків. Зведення пошуку частинних розв'язків ДР (2) до пошуку частинних розв'язків ДР 2-го і 4-го порядків значно спрощує їх знаходження. Для розривних навантажень ефективним буде застосування методів інтегральних перетворень. Розглянута крайова задача з використанням інтегрального перетворення Ханкеля.

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Зеленський А.Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2009. – 17, № 5. – С. 54–62.
3. Немши Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор // Прикл. механика. – 1991. – 29, № 11. – С. 3–27.

ON THE CONSTRUCTION OF A GENERAL SOLUTION TO A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE THICK PLATES BENDING THEORY

A method is proposed for the simplification of a general solution construction for a system of inhomogeneous high-order differential equations within the framework of the mathematical theory for bending of thick plates.

МЕТОД ЗБУРЕННЯ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

Тетяна Кагадій

*Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет» (Україна)*

kagadiy@i.ua

Широке використання в сучасній техніці анізотропних та композиційних матеріалів вимагає пошуків нових підходів до розрахунку напружено-деформованого стану та руйнування конструкцій з таких матеріалів.

В роботах [1, 2] запропоновано метод, де в якості малого параметру використовується відношення жорсткостей на розтяг-стискання в різних напрямках. Для врахування можливих співвідношень між компонентами вектора переміщень та швидкостями їх зміни вздовж координат запропоновано ввести афінні перетворення, що залежать від вказаного параметру. Вигляд цих перетворень вказує на те, що розв'язки відповідних систем рівнянь, одержаних при асимптотичному інтегруванні, мають різні властивості. Кожна з граничних систем рівнянь має більш низький порядок, ніж вихідна система. Ці граничні системи, а також відповідні асимптотичні процеси, розглядаються як взаємно додаткові. Розв'язки крайових задач будують у вигляді суперпозиції складових, що відповідають вказаним типам напружено-деформованого стану.

Ефективність методу залежить від того, чи вдається сформулювати крайові умови для основних рівнянь. Показано, що це дійсно можна зробити. Таким чином, крайові задачі теорії пружності для плоских ортотропних тіл зводяться до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу. Це відкрило нові можливості дослідження багатьох практично важливих задач, що не мали не тільки аналітичних, але й чисельних розв'язків.

В роботі [4] основні ідеї методу узагальнено на плоскі задачі для ортотропних тіл з криволінійною анізотропією, коли головні напрямки співпадають з криволінійними ізометричними координатами; просторові задачі в декартових координатах та осесиметричні для тіл з циліндричною анізотропією; відповідні задачі для в'язкопружних матеріалів; геометрично та фізично нелінійні матеріали.

Вдалося отримати аналітичні розв'язки суттєво нових практично важливих задач про передачу навантаження пружними елементами плоским та просторовим пружним (в'язкопружним) ортотропним тілам (в тому числі

складеним) з прямолінійною або криволінійною анізотропією; задач про дію жорстких штампів на тіла скінченних розмірів з різними умовами в зоні контакту (врахування тертя або тертя та сцеплення).

Розглянуто задачі про адгезійну міцність та руйнування волокнистих композитів у плоскій та просторовій постановках. У першому випадку враховується вплив сусідніх волокон. У кожній задачі показано граничні переходи до канонічних областей, отримано чисельні результати, проведено можливі порівняння.

Застосування п'єзоелектриків в сучасній техніці вимагає розгляду електромагнітопружності як єдиної науки, що об'єднує електродинаміку, теорію магнетизму та механіку суцільного середовища, що фактично сформульовані окремо одна від одної. Це пов'язано з тим, що при деформуванні деяких матеріалів на їх поверхні виникають електричні заряди, що пропорційні деформації.

З'ясувалося, що неможливо нехтувати й зворотним ефектом: виникненням механічних напружень під дією електричного поля [3]. Оскільки ізотропні матеріали в електропружності не викликають інтересу, то особливу увагу приділено анізотропним матеріалам з сильною анізотропією.

В даній роботі зроблено спробу узагальнити розроблений раніше метод збурення на двомірні задачі електропружності.

1. *Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – Киев: Вища шк., 1982. – 153 с.
2. *Маневич Л.И., Павленко А.В.* Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. – Киев: Вища шк., 1991. – 131 с.
3. *Партон В.В., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
4. *Kagadiy T.S., Sporta A.H.* The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory // Науковий вісник НГУ – 2015. – № 3. – С. 76-81.

THE PERTURBATION METHOD IN THE ELECTROELASTICITY PROBLEMS

The elaborated by author perturbation method is generalized for anisotropic electroelastic materials. Solution to thw problem is reduced to the consequent solving of potential theory problems.

**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ АБО
ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ
У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ ОБЛАСТІ**

Григорій Кіт, Роман Андрійчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

hkit@iapmm.lviv.ua; andriychukroman@gmail.com

Доповідь присвячена визначенню напружено-деформованого стану півпростору з вільною або жорстко закріпленою межею, зумовленого збуренням заданого температурного поля $t_0(x, y, z)$ паралельним до межі тонким теплоізованим включенням. При розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності використано потенціали подвійного шару, а термопружності – термопружні потенціали переміщень і функції Лява.

Температурне поле подаємо у вигляді

$$T(x, y, z) = t_0(x, y, z) + t(x, y, z),$$

де $t(x, y, z)$ – збурене температурне поле.

Граничну умову теплоізоляції на включенні запишемо так:

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = 0 \text{ або } \frac{\partial t(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{\partial t_0(x, y, z)}{\partial z} = \frac{q(x, y, z)}{\lambda},$$

де $q(x, y, z)$ – тепловий потік температурного поля $t_0(x, y, z)$.

В циліндричній системі координат з початком на межі півпростору і вісю Oz , перпендикулярною до неї, температурне поле від диполя тепла сталої потужності γ , розміщеного на віддалі h від межі, записуємо у вигляді

$$t^*(r, z) = \frac{\gamma}{4\pi} \left(\frac{z-h}{R_1^3(r, z)} + (-1)^k \frac{z+h}{R_2^3(r, z)} \right), \quad R_{1,2}(r, z) = \sqrt{r^2 + (z \mp h)^2},$$

де $k=1$ відповідає теплоізоляції, а $k=2$ – нульовій температурі межі тіла.

В цій системі координат при $z=0$ граничні умови мають вигляд:

а) для жорстко закріпленої межі

$$u_r(r, 0) = 0, \quad u_z(r, 0) = 0;$$

б) для вільної межі

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0.$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r, z) = \bar{u}(r, z) + \bar{\bar{u}}(r, z), \quad \sigma(r, z) = \bar{\sigma}(r, z) + \bar{\bar{\sigma}}(r, z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі $z \geq 0$, які забезпе-

чують виконання граничних умов.

Переміщення і напруження у безмежному тілі $\bar{u}(r, z)$ і $\bar{\sigma}(r, z)$ визначаються через термопружний потенціал переміщень.

Для визначення переміщень $\bar{u}(r, z)$ і напружень $\bar{\sigma}(r, z)$ побудована функція Гріна за допомогою бігармонічної функції Лява у півпросторі $z \geq 0$

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} [C(\alpha) + \alpha z D(\alpha)] e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ – шукані функції, які визначаються із граничних умов.

Після обчислення відповідних інтегралів наведено явні вирази для переміщень і напружень, які є функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору, зумовленого нагрівом диполями тепла, розподіленими по певній області у ньому.

Якщо диполі тепла розподілені у паралельній до межі півпростору круговій області S , то температура в декартовій системі координат $Oxyz$ з початком у центрі круга і осями Ox і Oy , розташованими в області S , визначається за формулою

$$t(x, y, z) = \iint_S \gamma(\xi, \eta) t^*(r, z, h) d\xi d\eta,$$

де $\gamma(\xi, \eta)$ – густина диполів тепла, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Густина теплових диполів $\gamma(\xi, \eta)$ визначаємо із гіперсингулярного інтегрального рівняння [1]. У зв'язку з перенесенням початку системи координат з межі півпростору в область S

$$R_1(r, z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad R_2(r, z) = \sqrt{r^2 + (z + 2h)^2}.$$

Розглянуто осесиметричну задачу для півпростору з теплоізолюваною по круговій області S межею ($h = 0$) за дії розташованого на віддалі d від межі джерела тепла.

1. Kim G.C., Сушко О.П. Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 58-70.

THERMOELASTIC STATE OF HALF-SPACE WITH FREE OR HARDLY CLAMPED BOUNDARY WITH HEAT-INSULATION IN A PARALLEL TO IT DOMAIN

Under the action of a thermal dipole, Green's functions of the stationary heat conduction and thermoelasticity problems for half-space with a free or hardly clamped boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. Expressions for temperature, displacements and stresses can be used to determine thermoelastic state of the half-space due to perturbation of a given heat flow by heat-proof thin inclusion parallel to the boundary are given.

ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ТІЛА З ВІЛЬНОЮ АБО ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ СТРІЧКОВІЙ ОБЛАСТІ

Григорій Кіт, Наталія Івасько

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

hkit@iapmm.lviv.ua; natalya_ivasko@ukr.net

Доповідь присвячена визначенню напружено-деформованого стану півпростору (рис. 1) з вільною ($\sigma_{yy}(x, 0) = 0$, $\sigma_{xy}(x, 0) = 0$) або жорстко закріпленою межею ($u_x(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$), зумовленого збуренням заданого

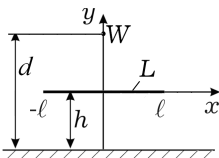


Рис. 1.

температурного поля $t_0(x, y)$ паралельним до межі тонким теплоізолююваним включенням. На межі тіла підтримується нульова температура.

При розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності використано логарифмічний потенціал подвійного шару, а термопружності – термопружний потенціал переміщень і функції Буссінеска.

Температурне поле подаємо у вигляді

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y),$$

де $t(x, y)$ – збурене температурне поле.

Граничну умову теплоізоляції в області L запишемо так:

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ або } \left. \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = - \left. \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{\lambda} q(x), \quad x \in L,$$

де $q(x, y)$ – тепловий потік температурного поля $t_0(x, y)$.

Температурне поле від диполя тепла сталої потужності γ , розміщеного на віддалі h від межі в точці $(\xi, 0)$, запишемо у вигляді

$$t^*(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi} \gamma \left(\frac{y}{r_1^2} + \frac{y+2h}{r_2^2} \right),$$

де $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+2h)^2}$.

Якщо диполі тепла густини $\gamma(\xi)$ розміщені у паралельній до межі півпростору області L , то температуру визначаємо за формулою

$$t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \gamma(\xi) t^*(x, y, \xi) d\xi.$$

Густину диполів тепла $\gamma(\xi)$ за заданої температури $t_0(x, y)$ визначаємо із гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\ln r_1 r_2] d\xi = q(x), \quad x \in L,$$

яке розв'язано наближено з використанням поліномів Чебишева 2-го роду.

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми $u(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{\bar{u}}(x, y)$, $\sigma(x, y) = \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\bar{\sigma}}(x, y)$, де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла із дзеркально розташованими до межі півпростору тепловими диполями, а другі – переміщення і напруження у півплощині $y \geq 0$, які забезпечують виконання граничних умов.

Для визначення переміщень і напружень $\bar{u}(x, y)$ і $\bar{\sigma}(x, y)$ знайдено термопружний потенціал переміщень, а для $-\bar{\bar{u}}(x, y)$ і $\bar{\bar{\sigma}}(x, y)$ побудовано функції Буссінеска по аналогії з [1, 2].

Розглянуто задачу для півпростору з теплоізолюваною в області L межею ($h=0$) за дії розташованого на віддалі d від межі джерела тепла.

1. Івасько Н.М. Двовимірна задача термопружності для півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2017. – Вип. 15. – С. 144-151.
2. Кім Г.С., Івасько Н.М. Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 147-155.

PLANE DEFORMATION OF SEMI-INFINITY BODY WITH A FREE OR RIGIDLY CLAMPED BOUNDARY WITH HEAT-INSULATION ON A PARALLEL TO IT RIBBON-LIKE DOMAIN

The two-dimensional problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity are considered for plane deformation of a semi-infinite body with a free and rigidly clamped boundary on which zero temperature is maintained. In this case, the logarithmic potential of a double layer is used to solve the heat conduction problem, and the thermoelastic displacement potential in an infinite body with a thermal dipoles that are mirror-like relative to the boundary of the half-space is used to solve the thermoelasticity problem. To satisfy the boundary conditions on the boundary of the body the Boussinesq's functions are constructed.

**ЗМІШАНА КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПЛИТИ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ФРИКЦІЙНОМУ НАГРІВАННІ**

Юрій Колодій, Ігор Турчин, Василь Хома

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

ihorturchyn@gmail.com

В роботі із використанням методу поліномів Лагерра розроблено аналітико-числову методику визначення двовимірного нестационарного температурного поля та зумовленого ним квазістатичного напружено-деформованого стану в двохшаровій плиті, спричинених змішаними умовами теплового навантаження, що моделюють процес фрикційної обробки.

Розглядається плита, що складається з двох плоско-паралельних шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями, що моделюють термопружну взаємодію покриття та основи. Джерелом квазістатичного термопружного процесу в такому тілі є симетрично розподілений на граничній поверхні покриття в смугі ширини $2d$ потік тепла, зумовлений фрикційним розігрівом граничної поверхні. Зовні цієї смуги відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що поверхня покриття в зоні дії фрикційного розігріву навантажена лише нормальними зусиллями із герцівським розподілом, а гранична поверхня основи теплоізольована і жорстко закріплена. На межі поділу покриття та основи виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Розв'язок вихідної початково-крайової задачі термопружності одержано в явному вигляді із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. Наводяться результати розрахунку температурного поля та напружено-деформованого стану, залежно від інтенсивності теплообміну, відносної товщини покриття та співвідношень термопружних характеристик покриття та основи.

**THE MIXED QUASISTATIC THERMOELASTICITY PROBLEM
FOR PLATE WITH COATING**

The analytical method for determining the two-dimensional unsteady temperature fields and quasistatic stress-strain state in a two-layer plate caused mixed load conditions is developed.

УДК 539.3:681.62

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕРМОВОЛОГОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ ЩОДО КОНВЕКТИВНОГО І КОНДУКТИВНОГО СУШІННЯ ПОЛІГРАФІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Ярослав Коляно, Тарас Сасс, Оксана Свирид

Українська академія друкарства (Україна)

oksanka123svyryd@gmail.com

Конвективний і кондуктивний (контактний) способи сушіння широко використовуються у поліграфічному виробництві [1]. Велика кількість багатошарових матеріалів (композитів) піддаються тепловій обробці (нагріванню, сушінню) на різних етапах виробництва. Такими композитами в поліграфії є: деякі види паперу (крейдований папір); картону (шаруватий картон, що складається з різних шарів (целюлоза, деревна маса, картон); картон із захисною плівкою); сучасні пакувальні матеріали (папір-лак, папір-фольга, папір-поліетилен); палітурні кришки (картон, клейовий шар, покрівельний матеріал) та ін. Оптимізація процесів сушіння таких матеріалів є важливим і актуальним завданням [2]. Першим кроком до розв'язання таких задач термовологопровідності (задач сушіння) для багатошарових тіл є розв'язання відповідних нестационарних задач теплопровідності [3].

Розглядається волога необмежена пластина товщини h , що складається з двох шарів, які мають різні термодинамічні коефіцієнти і товщини h_1, h_2 . Початкові температура t_0 , потенціал волого перенесення θ_0 . Висушування пластини здійснюється шляхом обігріву обох поверхонь оточуючим середовищем температури t_c згідно закону конвективного термовологообміну (конвективна задача), або шляхом, коли нижня поверхня нагрівається тепловим потоком q , а верхня взаємодіє з оточуючим середовищем згідно закону конвективного термовологообміну (кондуктивна задача). Потрібно знайти розподіли температури і потенціалу вологоперенесення в довільній точці цієї двошарової пластины залежно від часу. Для цього використано виведену О.В. Ликовим систему диференційних рівнянь, яка після обезрозмірення для даної задачі термовологопровідності має вигляд [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_i}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial Z^2} - \varepsilon_i K o_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo}, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo} = Lu_i \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial Z^2} - Lu_i Pn_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial Z^2}, \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

де $T_i(Z, Fo)$, $\Theta_i(Z, Fo)$ – шукані безрозмірні температури та потенціали вологоперенесення, Lu_i , ε_i , Ko_i , Pn_i – певні критерії ($i = 1, 2$). Системи (1), наприклад, за контактного способу сушіння, розв’язуються при таких безрозмірних крайових умовах:

$$T_i(Z, 0) = 0, \Theta_i(Z, 0) = 0, (i = 1, 2), Fo = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial Z}(1, Fo) - Bi_{q2}(1 - T_2) + (1 - \varepsilon_2)Ko_2Lu_2Bi_{m2}(1 - \Theta_2) = 0, Z = 1, \\ -\frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}(1, Fo) + Pn_2 \frac{\partial T_2}{\partial Z} + Bi_{m2}(1 - \Theta_2) = 0, Z = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial Z}(0, Fo) + Ki_{q1}(Fo) - (1 - \varepsilon_1)Ko_1Lu_1Ki_{m1}(Fo) = 0, Z = 0, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z}(0, Fo) - Pn_1 \frac{\partial T_1}{\partial Z} + Ki_{m1}(Fo) = 0, Z = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На поверхні поділу між шарами приймаються умови рівності потенціалів тепло- і вологопереносу та потоків тепла і вологи. Тут $Ki_{q1} = q(Fo)h/\lambda(t_c - t_0)$, $Ki_{m1} = m_{cp}(Fo)h/\lambda_m(\theta_0 - \theta_p)$ – критерії тепловий і для потоку вологи Кірпічова, $m_{cp}(Fo)$ – густини потоків тепла і вологи гріючої ($Z = 0$) поверхні, θ_0 , θ_p – початковий і рівноважний вологовмісти пластини. Розв’язок задачі (1)–(4), завдяки інтегральному перетворенню Лапласа, подано у вигляді відповідних рядів. Надалі будуть виконані числові розрахунки для різних композитних матеріалів: картон-полімер, картон-тканина, папір-фольга і т.д.

1. Шот Р.І., Стрєпко І.Т. Теплові процеси в поліграфії: навч. посібник – Львів: УАД «Фенікс», 1998. – 202 с.
2. Коляно Я.Ю., Сасс Т.С. Дослідження поведінки перехідних полів температури і потенціалу вологоперенесення в процесі кондуктивного сушіння картону // Поліграфія і видавнича справа. – 2016. – № 2(72) – С. 136-155.
3. Коляно Я.Ю., Сасс Т.С. Нестационарна задача теплопроводности для двохшаровой плиты щодо сушіння поліграфічної продукції // Комп’ютерні технології друкарства: Збірник наук. праць. – Львів: УАД, 2009. – № 21. – С. 226-234.
4. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.

NON-STATIONARY PROBLEM OF THERMAL AND MOISTURE CONDUCTIVITY OF TWO-LAYER PLATE FOR CONVECTIVE AND CONDUCTIVE DRYING OF PRINTING MATERIALS

Applying differential equation system and respective boundary conditions derived by Lykov A.V. is making possible to find solutions for problems of modeling of convective and conductive drying processes for two-layer plate (two-layer wet material).

УДК 517 (07)

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ ТА ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Лідія Курпа, Вікторія Ткаченко, Тетяна Шматко

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

kurpalidia@gmail.com; viktoryatkachenko@gmail.com; ktv_ua@yahoo.com

Аналіз наукової літератури, присвяченої розрахунку на стійкість та визначенню критичного навантаження багатошарових пластин, свідчить про актуальність даної проблеми для пластин з отворами різної геометричної форми. Складність розв'язання цієї проблеми обумовлена тим, що за наявності отворів докритичний стан пластини не є однорідним і його врахування є необхідним для правильного визначення критичного навантаження. В [1, 2] запропоновано підхід для дослідження параметричних коливань багатошарових пластин симетричної структури з прямокутним та круглим вільними отворами, який суттєво використовував теорію R-функцій [3] та варіаційні методи. Тут цей підхід розвинено для багатошарових пластин антисиметричної структури за наявності закріплених або вільно опертих отворів, які мають складну геометричну форму. В цьому випадку залежності між зусиллями, моментами та деформаціями мають більш складний вигляд і, як наслідок, вихідні рівняння та граничні умови також ускладнюються. Алгоритм розв'язування задачі містить такі ж етапи, як і у випадку пластин симетричної структури, а саме:

1. Визначення докритичного стану пластини;
2. Знаходження критичного навантаження;
3. Розв'язок задачі про лінійні коливання багатошарової пластини, що навантажена в серединній площині;
4. Розв'язання нелінійної задачі про коливання композитної пластини;
5. Дослідження параметричних коливань пластини під дією періодичного навантаження, побудова скелетних кривих;
6. Побудова зон динамічної стійкості (нестійкості) [4], визначення амплітуд коливань в зонах параметричного резонансу.

Слід зазначити, що пункт 4, пов'язаний з розв'язанням нелінійної задачі, суттєво складніший, ніж у випадку пластин симетричної структури. Метод зведення вихідної системи руху з частинними похідними до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь для багатошарових пластин

антисиметричної структури буде складнішим. Саме це питання привертає особливу увагу в даній роботі.

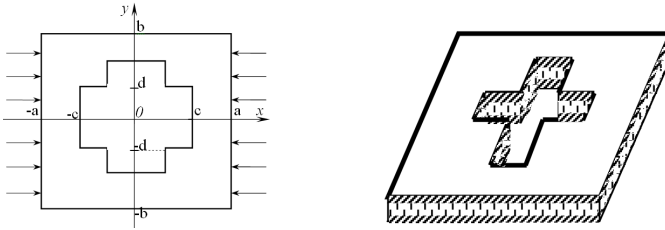


Рис. 1

Запропонований алгоритм протестовано на пластинах з прямокутним вільним отвором та застосовано для пластин з хрестоподібним закріпленням або вільно опертим отвором (рис. 1). Вивчено вплив геометричних та фізичних параметрів на амплітудно-частотні залежності та області динамічної стійкості пластини.

1. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Применение теории R-функции к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков: «НТУ ХПИ», 2016. – 492 с.
2. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout // Int. J. Non-linear Mech. – 2016. – **81**. – P. 103-114.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 500 с.

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF LAMINATED PLATES WITH CUTS OF A COMPLEX SHAPE BY THE R-FUNCTIONS THEORY AND VARIATIONAL METHODS

The laminated plates with cuts of a complex form are studied with meshless approach, based on combined application of the R-functions theory and variational methods. The proposed method is developed for thin plates of an antisymmetric form along thickness. Mathematical formulation is presented within the framework of classical nonlinear theory of plates using Kirgoff-Love's hypothesis. In order to investigate the laminated plates with a complex cut and different boundary conditions, the corresponding solution structures and admissible functions were constructed. The software was developed and tested on many problems. In particular, the obtained results were compared with available ones for a cross three-layered plate with free rectangular cut. For plates with cuts of a complex form effect of different geometrical and physical parameters was studied. Various types of fastening, geometry of the plate and different materials properties are considered. The non-dimensional buckling load, instability regions and response curves are presented for plates with complex form of cut.

УДК 517 (07)

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ТЕМПЕРАТУРНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лідія Курпа, Тетяна Шматко

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут» (Україна)*

kurpalidia@gmail.com; ktv_ua@yahoo.com

Функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) є одними з найбільш ефективних матеріалів при використанні за високих температур. ФГМ були розроблені як матеріали з високим термічним бар'єром для ядерних реакторів та космічних апаратів, але зараз вони широко використовуються в різних галузях промисловості. В останні два десятиліття з'явилася велика кількість статей, присвячених вивченню пластин та оболонок, виготовлених із ФГМ. Огляд основних досягнень у цій галузі можна знайти в публікаціях [1–3] та ін. Аналіз великої кількості публікацій показав, що практично немає досліджень пластин та оболонок складної геометричної форми з урахуванням температурного середовища. Ця проблема може бути досліджена шляхом застосування ефективного чисельно-аналітичного підходу на основі теорії R-функцій та варіаційних методів (RFM) [4].

Задачу сформульовано в рамках уточненої теорії першого порядку (теорії Тимошенка). Припустимо, що полого оболонку виготовлено зі суміші кераміки та металу. Залежність складових матеріалів від температури враховується за формулою [5]

$$P(T) = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right),$$

де P_0, P_{-1}, P_2, P_3 – коефіцієнти, які мають конкретні значення для складових матеріалів. Припустимо, що температура змінюється лише за товщиною. Тоді температурне поле моделюється одновимірним рівнянням такого типу:

$$\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0, \quad (1)$$

де $T = T_m$ при $z = -h/2$ і $T = T_c$ при $z = +h/2$. Ефективні властивості матеріалу $P(T, z)$, такі як модуль Юнга E , коефіцієнт Пуасона ν , густина ρ та коефіцієнт теплового розширення α , можуть бути виражені як [5]

$$P(T, z) = (P_c(T)V_c(z) + P_m(T)V_m(z)),$$

де V_c, V_m – керамічні та металеві об'ємні долі. Вони пов'язані як $V_c + V_m = 1$. Нижче наведено закон розподілу об'ємних часток металу та кераміки згідно з моделлю Войгта

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad V_m(z) = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k.$$

Алгоритм розв'язання поставленої проблеми зведено до реалізації наступних етапів:

- розв'язування температурної задачі (1) з метою обчислення механічних характеристик $E(T, z), \nu(T, z), \rho(T, z), k(T, z), \alpha(T, z)$ та інших;
- розв'язання лінійної задачі про коливання ФГ оболонки методом RFM;
- зведення системи диференціальних рівнянь у частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь;
- розв'язання отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта.

В доповіді наведено низку тестових прикладів з метою перевірки вірогідності запропонованого підходу та створеного програмного комплексу. Розглянуто положі оболонки складної форми у плані, які виготовлено з різних ФГМ, за дії температурного поля.

1. *Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M.* Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments // *Nonlinear Dynam.* – 2011. – **66**. – P. 251-270.
2. *Huang X.-L., Shen H.-S.* Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – **41**, No. 9-10. – P. 2403-2427.
3. *Reddy J.N., Chin C.D.* Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // *J. Therm. Stresses.* – 1998. – **21**, No. 6. – P. 593-626.
4. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. *Shen H.-S.* Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 268 p.

APPLICATION OF THE R-FUNCTIONS THEORY FOR THE INVESTIGATION OF NONLINEAR VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADIENT SHALLOW SHELLS IN THERMAL ENVIRONMEN

Geometrically nonlinear vibrations of FGM shallow shells of an arbitrary plan-form subjected to thermal environment are investigated with the use of R-functions theory and variational methods. Nonlinear first-order shear deformation of shallow shells is employed. Material properties are assumed to be temperature-dependent and varying along the thickness direction according to Voigt's law. The effect of the temperature rise, shell geometry, and constituent volume fraction index is examined. A comparison of the obtained results with the available ones is carried out for rectangular plates and shallow shells.

ПРО НАУКОВИЙ ДОРОБОК ПРОФЕСОРА В.С. ПОПОВИЧА З ТЕРМОМЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Роман Кушнір

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

director@iapmm.lviv.ua

Доктор технічних наук, професор, дійсний член НТШ В.С. Попович (01.08.1948 – 13.11.2016) – знаний український вчений у галузі механіки деформівного твердого тіла, автор низки ґрунтовних праць з математичного моделювання деформування тіл з урахуванням їх реальної структури та взаємозв'язку деформаційних і теплових процесів. Його наукова і науково-організаційна діяльність з 1973 р. була пов'язана з Інститутом прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (до вересня 1978 р. – Львівський філіал математичної фізики Інституту математики АН України), в якому він пройшов шлях наукового зростання від інженера відділу термомеханіки та аспіранта до заступника директора Інституту з наукової роботи та провідного наукового співробітника цього відділу.

Проведені В.С. Поповичем під час навчання в аспірантурі під керівництвом професора Ю.М. Коляна наукові дослідження були спрямовані на розробку методу розв'язання квазістатичних задач термопружності для кусково-однорідних тіл з використанням апарату узагальнених функцій [1, 2, 4]. Використавши рівняння термопружності неоднорідного тіла, подання фізико-механічних характеристик кусково-однорідного тіла за допомогою асиметричних одиничних функцій, ним отримані частково-вироджені диференціальні рівняння теплопровідності і термопружності з коефіцієнтами типу ступеневих та імпульсних функцій для багатошарових тіл, тіл армованих шарами скінченної товщини чи тонкими пластинками за умови виконання ідеального термомеханічного контакту на поверхнях поділу складових тіл. Отримані результати лягли в основу захищеної ним у липні 1978 р. дисертації «Термопружність кусково-однорідних тіл з плоскопаралельними границями розділу» на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла». Результати досліджень В.С. Поповича у 1974 – 1982 рр., як провідного учасника розробки методів розв'язання задач теплопровідності і термопружності тіл неоднорідної структури з використанням узагальнених функцій, увійшли до відомої монографії [3].

У середині 80-х років минулого століття академіком АН України

Я.С. Підстригачем і професором Ю.М. Коляном перед В.С. Поповичем була поставлена важлива наукова проблема у галузі технологічної термомеханіки, що полягала у розробці методів визначення та дослідження температурних полів і термонапруженого стану елементів конструкцій, які моделюються однорідними чи кусково-однорідними тілами простої геометричної форми з урахуванням залежності теплових і механічних характеристик їх матеріалів від температури (термочутливості), за складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну з довкіллям.

Для вирішення цієї проблеми В.С. Поповичем з учнями і співробітниками розроблено низку аналітичних та аналітико-числових методів визначення температурних полів та компонент напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Зокрема, для розв'язання відповідних нелінійних задач теплопровідності розроблено метод поетапної лінеаризації розв'язування двовимірних стаціонарних і одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності, що є моделями температурних полів у термочутливих елементах конструкцій з матеріалу з простою нелінійністю, на поверхнях яких відбувається конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін, а коефіцієнт теплообміну і ступені чорноти цих поверхонь теж залежать від температури. Метод апробовано при побудові розв'язків нових нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для термочутливих порожнистої та суцільної кулі, які, маючи початкову сталу температуру, нагріваються (охолоджуються) зовнішніми середовищами внаслідок конвективно-променевого теплообміну через обмежуючі поверхні за залежних від температури коефіцієнтів теплообміну та ступенів чорноти.

Запропоновано також ефективний і зручний у використанні метод лінеаризувальних параметрів знаходження температурних полів в елементах конструкцій, виготовлених з матеріалу з простою нелінійністю, через поверхні яких відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем за довільної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності. Цим методом побудовано аналітико-числові розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для термочутливої плоскої, циліндричної та сферичної стінок, які конвективно обмінюються теплом із зовнішніми середовищами через обмежуючі поверхні, та порівняно їх зі знайденими точними розв'язками цих задач.

Визначення компонент напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що моделюються тілами обертання, а всі механічні характеристики матеріалу яких залежать від температури, за одночасної дії на них осесиметричних неусталеного температурного поля та силових чинників, вісь симетрії яких збігається з віссю циліндричної системи координат, математичною моделлю якої є крайова задача для системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, методом збурень зведено до рекурентної послідовності

крайових задач для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Побудовано загальний розв'язок центрально-симетричної квазістатичної задачі термопружності для тіла, всі механічні характеристики матеріалу якого залежать від температури, а на його поверхнях задані сталі тиски.

На основі побудованих математичних моделей та розроблених методів визначено температурні поля та напруження в шарі, смузі, суцільній і порожнистій кулі та циліндрі, просторі зі сферичною порожниною, спричинені дією температурних і силових чинників та досліджено вплив термочутливості матеріалу на їх тепловий та напружено-деформований стан. При цьому розв'язки задач термопружності знаходилися методом збурень, або шляхом зведення їх до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, а розв'язки останніх будували методом послідовних наближень.

Розроблено також методику аналітично-числового визначення усталеного термопружного стану багат шарових структур за високотемпературного їх нагрівання внутрішніми джерелами тепла за складного (конвективного, конвективно-променевого чи тепловідведення шляхом кипіння або випаровування рідини) теплообміну із оточуючим середовищем через обмежуючі поверхні. Методика, залежно від умов теплообміну на зовнішніх поверхнях, уможливило отримання точного розв'язку нелінійної контактної задачі теплопровідності або зведення проблеми до числового розв'язування одного нелінійного алгебричного рівняння зі зрозумілим способом вибору початкового наближення його розв'язку. Отримано наближені аналітичні формули для визначення компонент напружено-деформованого стану, що містять вирази розподілу температури та масових сил у шарах конструкцій, силові навантаження, функціональні залежності теплових і механічних характеристик шарів від температури.

Проведені дослідження склали основу захищеної ним наприкінці 2005 року дисертації «Моделі та методи розрахунку термонапруженого стану термочувливих елементів конструкцій за умов складного теплообміну» на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла». Під його науковим керівництвом захищено 3 кандидатські дисертації за цією тематикою. У науковому доробку професора В.С. Поповича є біля 220 наукових праць, серед яких 3 монографії [5-7], 2 авторські свідоцтва на винаходи та 2 статті до 11-ти томної «Енциклопедії з температурних напружень» [4, 8], що є вагомим внеском у розвиток досліджень з термомеханіки неоднорідних тіл у світі. У складі авторських колективів він відзначений премією ім. М.О. Лаврентьєва НАН України за цикл праць «Аналітично-чисельні методи дослідження крайових задач теплопровідності та термопружності для структурно-неоднорідних тіл» (2012 р.) та Державною премією України в галузі науки і техніки за цикл праць «Ефек-

тивні методи оцінювання напруженого стану структурно-неоднорідних тіл, спричиненого дією полів різної фізичної природи» (2017 р.). Результати його ґрунтовних наукових досліджень неодноразово доповідалися на престижних вітчизняних і міжнародних симпозіумах і конференціях, серед яких всесвітні конгреси з температурних напружень (м. Блексбург, США, 2003 р.; м. Відень, Австрія, 2005 р.; м. Тайпей, Тайвань, 2007 р.; м. Будапешт, Угорщина, 2011 р.).

1. *Коляно Ю.М., Попович В.С.* Термопружність багатошарових тіл // ДАН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1109-1114.
2. *Коляно Ю.М., Попович В.С.* Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой // Физико-химическая механика материалов. – 1976. – № 2. – С. 108-112.
3. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
4. *Kushnir R., Popovych V.* Application of the Generalized Functions Method for Analysis of Thermal Stresses in Piecewise-Homogeneous Solids / Encyclopedia of Thermal Stresses. R.B. Hetnarski, ed. – Springer, 2014. – 1. – P. 224-230.
5. *Кушнір Р.М., Попович В.С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
6. *Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.
7. *Kushnir R.M., Popovych V.S.* Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange / Heat Conduction – Basic Research. V.S. Vikhrenko, ed. – In Tech, 2011. – 350 p. – P. 131-154.
8. *Popovych V.* Methods for Determination of the Thermostressed State of Thermosensitive Solids Under Complex Heat Exchange Conditions / Encyclopedia of Thermal Stresses. R.B. Hetnarski, ed. – Springer, 2014. – 6. – P. 2997-3008.

**ABOUT SCIENTIFIC CREATION OF PROFESSOR V.S. POPOVYCH
WITH THERMOMECHANICS OF INHOMOGENEOUS SOLIDS**

The brief survey of scientific creation of professor V.S. Popovych with thermomechanics of inhomogeneous solids is presented.

УДК 539.3

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Василь Лавренюк, Микола Лавренюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)

mlavrenyuk@univ.kiev.ua

Задачі розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних неоднорідних пластин, зокрема, пластин на пружній основі мають важливе значення в багатьох галузях техніки, особливо в будівельній механіці. Розглянуто застосування методу послідовних наближень до розв'язання задачі визначення прогину прямокутної неоднорідної за товщиною ортотропної пластини на пружній основі (розглянуто моделі Вінклера та Пастернака [1]). При заданих на краях пластини довільних крайових умовах задача згину пружної однорідної анізотропної пластини на пружній основі на кожному ітераційному кроці розв'язується за допомогою комбінованих чисельних методів, таких як скінченно-різницеві методи, метод колокацій та найменших нев'язок [2], метод Власова-Канторовича та дискретної ортогоналізації [3], тощо. Ефективність і точність підходу було перевірено на задачі згину неоднорідної за товщиною пружної ізотропної пластини, шарнірно опертої з усіх боків. Для цієї задачі результати чисельних розрахунків порівнювалися із результатами [3]. Обмеженням даного методу є характер неоднорідності платівки – для невеликих за абсолютною величиною відхилень товщини платівки від середнього за величиною значення метод дає швидку збіжність, водночас зі збільшенням величини цих відхилень збіжність методу погіршується.

1. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.
2. *Голушко С.К., Идумешев С.В., Шанеев В.П.* Метод колокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. – 2013. – **18**, № 6. – С. 31-43.
3. *Григоренко Я.М., Мольченко Л.В.* Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2009. – 403 с.

CALCULATING TECHNIQUES OF THE PROBLEM OF FLEXURE OF ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS PLATE ON AN ELASTIC BASE

Application of the successive approximation method to the solution of the problem of calculating the deflection of a non-homogeneous by thickness orthotropic plate on an elastic basis is considered. The efficiency and accuracy of the approach was tested on the bending problem of a elastic isotropic hingedly supported plate of non-homogeneous thickness.

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУР ПРОСТОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Ігор Махоркін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

termomech@iapmm.lviv.ua

Розглядаються багатошарові тіла з термочутливих матеріалів, віднесені до однієї з класичних (декартової – x, y, z ; циліндричної – r, φ, z ; сферичної – r, φ, θ) ортогональних систем координат (α, β, γ) . Граничні поверхні тіл співпадають з координатними поверхнями $(\alpha, \beta, \gamma) \sim \eta_i = \text{const}$ ($i = 0, n$) (багатошарові структури простої геометрії), а поверхні спряження матеріалів – з координатними поверхнями $\alpha = \alpha_i = \text{const}$ ($i = 1, n-1$) на яких виконуються умови ідеального термодотакту. Вважаємо, що тепловий стан, обумовлений термічним навантаженням, характеризується одновимірним стаціонарним температурним полем $t(\alpha)$.

Адекватною математичною моделлю теплової поведінки таких тіл, згідно з теорією неоднорідного тіла, є нелінійна крайова задача стаціонарної теплопровідності, яка полягає у визначенні функції температури t за розв'язком рівняння теплопровідності

$$\left(\alpha^k\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha^k \lambda_t(t, \alpha) \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (1)$$

(для декартової системи координат $k = k_2 = k_3 = 0, \alpha = x$; циліндричної – $k = k_2 = 1, k_3 = 0, \alpha = r$; сферичної – $k = 2, k_2 = k_3 = 1, \alpha = r$) за конкретизованих граничних умов, які описують зовнішнє термонавантаження.

Шляхом подання з заданою точністю температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалів шарів у вигляді

$$\lambda_t^{(i)}(t) \approx \Lambda^{(i)}(t) = \Lambda_1^{(i)} + \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) S_+(t - t_j),$$

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_k = t_{m+1},$$

$(\Lambda_j^{(i)})$ – із заданою точністю відповідає значенню $\lambda_t^{(i)}(t)$ в інтервалі $t_{j-1} < t < t_j$; введення у розгляд функції типу функції Кірхгофа

$$\vartheta(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(\xi) N_i(\alpha) d\xi, \quad (2)$$

($N_i(\alpha) = S_+(\alpha - \alpha_{i-1}) - S_+(\alpha - \alpha_i)$), врахування, що між ϑ та t згідно зі співвідношенням (2) існує взаємоднозначна відповідність, у наслідок чого $S_+(t - t_i) = S_+(\vartheta - \vartheta_i)$ і $\Lambda^{(i)}(t) = \Lambda^{(i)}(\vartheta)$, з (2) отримано, що

$$t = \left[\vartheta + \sum_{i=1}^n F_i(\vartheta) N_i(\alpha) \right] / \left[\sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(\vartheta) N_i(\alpha) \right], \quad (3)$$

$$F_i(\vartheta) = \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(\vartheta - \vartheta_j), \quad \vartheta_i = \vartheta_i(\alpha) = \sum_{i=1}^n \left[t_i \Lambda^{(i)}(t_i) - \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(t_i - t_j) \right] N_i(\alpha),$$

а функція ϑ є розв'язком рівняння

$$\alpha^{-k} \frac{d}{d\alpha} \left\{ \alpha^k \frac{d\vartheta}{d\alpha} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(K_i \vartheta|_{\alpha_i} + Q_i \right) \alpha_i^k \delta_+(\alpha - \alpha_i) \right\} = 0, \quad (4)$$

отриманого з рівняння теплопровідності (1) згідно з алгеброю узагальнених функцій за врахування ідеального термоконтракту між сферами.

Розв'язком рівняння (4) є функція

$$\vartheta = C_1 f_k(\alpha) + C_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(K_i \vartheta|_{\alpha_i} + Q_i \right) S_+(\alpha - \alpha_i),$$

де $f_1(\alpha) = \alpha - \alpha_0$ для пластини; $f_2(\alpha) = \ln \frac{\alpha}{\alpha_0}$ – циліндра; $f_3(\alpha) = \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 \alpha}$ –

кулі, $K_l = \left(\Lambda^{(l+1)} / \Lambda^{(l)} - 1 \right)_{\alpha_l}$, $\vartheta|_{\alpha_i} = \tilde{K}_1^{(j)} C_1 + \tilde{K}_2^{(j)} C_2 + \tilde{K}_3^{(j)}$ визначаються за

з'ясованими рекурентними співвідношеннями, $Q_l = \left(F_l \Lambda^{(l+1)} / \Lambda^{(l)}|_{\alpha_l} - F_{l+1} \right)_{\alpha_l}$.

Значення постійних інтегрування C_1 , C_2 у загальному випадку знаходяться з системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь, що отримуються шляхом підстановки виразу (3) в граничні умови. З'ясовано випадки існування замкнутого аналітичного розв'язку розглядуваної нелінійної задачі теплопровідності.

Запропонована аналітично-числова методика уможливило числове дослідження стаціонарного теплового стану багат шарових структур простої геометрії за довільного характеру температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів і не потребує з'ясування його однозначності.

GENERALIZED FUNCTIONS IN THE STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE MULTILAYER STRUCTURES OF SIMPLE GEOMETRY

An analytical-numerical method for the determination of one-dimensional stationary thermal state of multilayer structures of simple geometries for arbitrary dependences of heat conductivity factors on temperature is proposed. The method is based on the use of the elements of the algebra of generalized functions, the approximation of temporal dependences of the heat conductivity factors of materials by the piecewise homogeneous temperature functions, and the introduction into consideration the function of the Kirchhoff function type.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТЬ ДОВГОГО ТА КОРОТКОГО РІШЕНЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У СЕКТОРНОМУ ЗГІНІ

**Ігор Ориняк, Ірина Селіверстова,
Віталій Антонченко, Ярослав Дубик**

*ІІМіц імені Г.С. Писаренка НАН України;
ТОВ «ІІІ-Центр» (Україна)*

igor_orinyak@yahoo.com; seliverstovairyna24@gmail.com

Секторні згини труб широко використовуються в промисловості. Особливо важливі трубопроводи великих діаметрів для хімічних комплексів, водо-забезпечення, атомних електростанцій, коли виготовлення гладких згинів може бути непрактичним або неекономічним. У багатьох випадках проектувальники вважають за краще використовувати неперервні згини труб завдяки відносно меншій концентрації напружень та кращими характеристиками потоку. Проте секторні згини для трубопроводів великого діаметра все ще знаходять застосування. Більш того, на практиці зварний шов нерідко косий через технологічний процес стику двох прямих частин труби. Тому важливе значення має забезпечення структурної міцності та надійності секторних труб та поліпшення їх здатності зберігати форми та технічні характеристики під зовнішніми навантаженнями (статичними та динамічними). Стосовно існуючих виразів для оцінки напружень у районі косих зварних з'єднань, вони впливають з узагальнення експериментальних результатів та чисельних розрахунків. Крім того вирази для визначення концентрації напружень біля секторного згину збігаються з відповідними виразами для згину труб у сучасних стандартах [1].

У даній роботі для визначення силових та геометричних параметрів для різних типів навантаження сформульовано граничні умови для осевого зусилля N'_x , перерізного зусилля Q'_x та дотичного зусилля L' :

$$\begin{aligned} N'_x &= N_x^b \cos \theta + L^b \sin \theta \cos \phi; \\ L' &= N_\phi^b \cos \phi \sin \theta - N_x^b \cos \phi \sin \theta + L^b; \\ Q'_x &= -N_x^b \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (1)$$

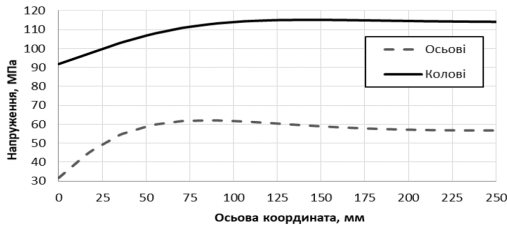
У задачі секторного згину під дією внутрішнього тиску на прямій ділянці труби діють тільки дві сили N_x^b і N_ϕ^b . З вищенаведених виразів можна записати $L' \approx -pR/2 \sin \theta \cos \phi$, $Q' \approx pR/2 \sin \theta \sin \phi$, додатково в косій ділянці

кут повороту $\gamma_x|_{x=0} = 0$, тоді вирази для напружень матимуть вигляд:

$$\sigma_\phi = -\frac{pR^2a}{2h} \sin \theta \sin \phi e^{-ax} (\cos ax + \sin ax);$$

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2} = \frac{3}{2} \frac{pR \sin \theta \sin \phi e^{-ax} (\sin ax - \cos ax)}{ah^2}. \quad (2)$$

Вирази для напружень збігаються з виразами, отриманими [2]. На рисунку представлено результат порівняння аналітичних розв'язків з результатами МСЕ, для осьових напружень σ_x та окружних напружень σ_ϕ . Представлено лише одну криву для обох напружень, оскільки результати чисельного моделювання та аналітичного розв'язку повністю співпадають. Аналітичні криві побудовано шляхом додавання номінальних компонентів напружень від внутрішнього тиску $\sigma_x = -\frac{pR}{2h} = -57 \text{ МПа}$ і $\sigma_\phi = -\frac{pR}{h} = -114 \text{ МПа}$.



Розподіл напружень: радіус труби $R = 381 \text{ мм}$; товщина стінки $h = 12.7 \text{ мм}$; половина кута секторного згину, $\theta = 2^\circ$, внутрішній тиск, $p = 2.8 \text{ МПа}$

Отримані результати добре узгоджуються і в свою чергу корисні для МСЕ аналізу, коли важливо знати необхідну довжину прямих труб біля секторного згину. Отриманий аналітичний розв'язок може бути практично включено в стандарти для визначення напружень біля секторного згину.

1. *ASME B31.8-2014*. Gas Transmission and Distribution Piping Systems. STANDARD by ASME International, 09/30/2014.
2. *Green A.E., Emmerson W.C.* Stresses in a pipe with a discontinuous bend // Journal of the Mechanics and Physics in Solids. – 1961. – 9. – P. 91-104.

THE APPLICATION OF LONG AND SHORT CYLINDRICAL SHELL SOLUTIONS FOR STRESS DETERMINATION IN A SINGLE MITRED BEND

The article describe the application of the short solution for stress evaluation in mitred bend. Its application give us possibility to solve the shell problem by using two equations of four order instead of equation of eighth order.

ФЕНОМЕНОЛОГІЧНА МОДЕЛЬ ТЕРМО-ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛУ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ

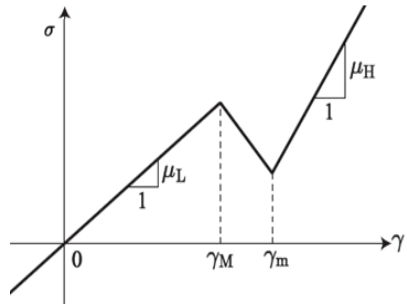
Олександр Петров, Юрій Черняков, Павло Стеблянко

Дніпровський національний університет імені О. Гончара (Україна);

Дніпровський державний технічний університет (Україна)

caf-vmi@ukr.net

В даний час відомий цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки сплавів з пам'яттю форми (СПФ). Більшість з них будується на підставі класичних уявлень, тобто ставлять за мету безпосередній опис експериментальних даних, отриманих на різних макрозразках за простого та складного навантаження [1-3]. Однак, як встановлено експериментально, поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. У доповіді сформульовано феноменологічну модель для опису властивостей СПФ саме у точці. Деформацію у точці подано сумою пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації, яка підпорядковується теорії текучості з кінематичним і трансляційним зміцненням, деформації, викликаній температурними змінами. При цьому передбачалося, що властивості матеріалу залежать від температури. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використано діаграму пружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних ділянок (див. рис.).



Таке трактування теорії приводить до нестійкої діаграми напруження–деформація і для опису термомеханічної поведінки зразків різної форми вимагає розв'язання граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації перетворення. У цих задачах враховується не лише температура навколишнього середовища, але й тепло, що виділяється в зразку при фазовому переході. Це дозволило з використанням досить простої моделі матеріалу описати низку експериментальних даних для різних зразків за різних умов навантаження, у тому числі, циклічного температурного та силового. Встановлено конкретні залежності для механічних параметрів [5]. Показано, що межа роз-

ділу фаз переміщується з постійною для обраної температури швидкістю. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів описуються кривою, що огинає сімейство діаграм матеріалу, яке побудоване для певних законів зміни швидкості фронту деформацій.

1. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Evolution of phase transitions. A continuum theory. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. – 258 p.
2. *Shaw J.A., Kyriakides S.* Thermomechanical aspects of NiTi // J. Mech. Phys. Solids. – 1995. – **43**, No. 8. – P. 1243-1281.
3. *Shaw J.A., Kyriakides S.* On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy // Acta Materialia. – 1997. – **45**, No. 2. – P. 683-700.
4. *Шевченко Ю.Н., Стебляк П.О., Петров А.Д.* Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2014. – Вип. 22. – С. 250-264.
5. *Петров О.Д., Черняков Ю.А.* Термо-напружено-деформований стан стрижня з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень // Зб. наук. праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту. – 2015. – Вип. 1. – С. 26-36.

PHENOMENOLOGICAL MODEL OF THERMO-ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF SHAPE MEMORY ALLOYS

The present talk formulates a phenomenological model for describing the properties of shape memory at a specific point. The deformation at the point is represented as a sum of the elastic component, deformation jump in the phase transition, plastic deformation, which obeys the theory of flow with kinematic and translational hardening and deformation caused by temperature changes. It is assumed that the properties of the material depend on the temperature. This interpretation of the theory leads to an unstable stress-strain diagram. The description of the thermomechanical behavior of specimens of different shape, thus, requires the solution of the boundary-value problem taking into account the development of the transformation deformation front. In these problems, there is not only the ambient temperature taken into account, but also the heat released in a specimen during the phase transition. It is shown that for the chosen temperature on the phase interface moves with a constant speed.

ВИЗНАЧЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Леся Постолакі, Василь Чекурін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

v.chekuri@gmail.com; lesyapostolaki@gmail.com

Розглянуто пружне тіло у формі циліндра $\mathcal{V} = (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -b \leq z \leq b)$ (ρ, φ, z – циліндричні координати). У тілі діють осесиметричні залишкові напруження, бічна поверхня якого ненавантажена. Використовуючи концепцію вільних несумісних деформацій [2], повні деформації e_{ij} циліндра представлено у вигляді суми несумісних пружних e_{ij}^e та вільних \hat{e}_{ij} деформацій: $e_{ij} = e_{ij}^e + \hat{e}_{ij}$ ($ij \in \{\rho\rho, \varphi\varphi, zz, \rho z\}$). Обмежувалися випадком, коли компоненти вільних деформацій залежать лише від радіальної координати ρ .

Розв'язування задачі зведено до послідовності двох задач: обчислення залишкових напружень у нескінченному циліндрі (основний стан) і визначення додаткових напружень, зумовлених вільною поверхнею торців циліндра (збурений стан). Для розв'язування другої задачі застосовано варіаційний метод однорідних розв'язків [1], що дозволило звести її визначення збуреного стану до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язували методом редукції. Ефективність запропонованого підходу досліджено для неперервного та кусково-постійного розподілів несумісних залишкових деформацій.

1. *Chekurin V.F., Postolaki L.I.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // *Mathematical modeling and computing.* – 2015. – 2, No. 2. – P. 128-132.
2. *Mura T.* *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd edn. – Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands. – 1987. – 557 p.

DETERMINATION OF RESIDUAL STRESSES IN FINITE CYLINDER WITH THE USE OF VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS

The problem of determination of axisymmetric residual stresses in a finite cylinder is solved with the use of variational method of homogeneous solutions.

НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ШАРУ ЗА АЕРОДИНАМІЧНОГО НАГРІВАННЯ

Борис Процюк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

dept19@iapmm.lviv.ua

Дана робота, яка є продовженням досліджень започаткованих у [1, 2], стосується розвитку методів розв'язування нестационарних задач теплопровідності для термочутливих тіл з урахуванням теплового випромінювання. У ній проілюстровано спосіб розрахунку температурних полів типових елементів конструкцій, які перебувають в умовах аеродинамічного нагрівання.

Розглядається задача визначення одновимірного нестационарного температурного поля у шарі товщиною z_1 із температурнозалежними коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_T(t) = \lambda_0 \Lambda(t)$ і об'ємною теплоємністю $c_V(t) = c_0 C(t)$ за заданих на поверхнях $z = 0$, $z = z_1$ граничних умов, які враховують відповідно конвективний теплообмін (коефіцієнти тепловіддачі α^-, α^+) з оточуючим середовищем з температурами t_c^-, t_c^+ , теплові потоки густини q^-, q^+ , що підводяться до обмежувальних поверхонь, і власне теплове випромінювання з цих поверхонь з коефіцієнтом чорноти ε і сталою Стефана-Больцмана σ_0 . Початкова температура приймається нульовою.

Розв'язання задачі теплопровідності передбачає часткову її лінеаризацію за допомогою перетворення Кірхгофа $\theta = \int_0^t \Lambda(x) dx$ (обернене $t = T(\theta)$) та отримання інтегрального подання розв'язку задачі на змінну Кірхгофа

$$\theta(z, \tau) = T_L(z, \tau) - \int_0^\tau \left\{ \frac{\alpha^-}{\lambda_0} [T(\theta) - \theta_c^-] + \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda_0} [T(\theta) + 273]^4 \right\} \Bigg|_{\zeta=0} G(z, 0, \tau - \xi) d\xi -$$

$$- \int_0^\tau \left\{ \frac{\alpha^+}{\lambda_0} [T(\theta) - \theta_c^+] + \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda_0} [T(\theta) + 273]^4 \right\} \Bigg|_{\zeta=z_1} G(z, z_1, \tau - \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^{z_1} \left[1 - \frac{C(T(\theta))}{\Lambda(T(\theta))} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} G(z, \zeta, \tau - \xi) d\zeta d\xi, \quad (1)$$

де $T_L(z, Fo)$ і $G(z, \zeta, Fo)$ – аналітичний розв’язок і функція Гріна (у вигляді ряду за власними значеннями) відповідної лінійної задачі з коефіцієнтами теплопровідності λ_0 і температуропровідності $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$; $\theta_c^\mp = t_c^\mp + \frac{q^\mp}{\alpha^\mp}$.

У подальшому в останньому доданку (1) інтеграл по товщині заміняли сумою інтегралів від \bar{z}_{j-1} до \bar{z}_j ($0 = \bar{z}_0 < \bar{z}_1 < \dots < \bar{z}_N = z_1$), які, з урахуванням того, що на проміжках інтегрування приймали $w_l(z, \xi) \approx w_l(z_j^*, \xi)$, обчислювали аналітично. Тут $z_j^* = (\bar{z}_{j-1} + \bar{z}_j)/2$. Інтеграли по ξ , попередньо апроксимували підінтегральні функції лінійними сплайнами, обчислювали також аналітично. Ряди при $\tau = 0$ заміняли їх точними сумами. Невідомі $\theta(0, \tau_q)$, $\theta(z_1, \tau_q)$ і $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\zeta=z_j^*, \xi=\tau_q}$, де τ_q – рівномірно розташовані вузли

сплайна, знаходили із рекурентної системи нелінійних алгебричних рівнянь, отриманої методом колокацій. При формуванні системи рівнянь для визначення значень похідної скористались співвідношенням

$$\theta(z_j^*, \tau_q) = \left(\frac{1}{2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\zeta=z_j^*, \xi=\tau_q} + \sum_{k=1}^{q-1} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\zeta=z_j^*, \xi=\tau_k} \right) \Delta \tau, \quad \Delta \tau = \tau_q - \tau_{q-1}.$$

За відомої змінної Кірхгофа температурне поле знаходили на основі залежності $t = T(\theta)$.

Досліджували безрозмірні температурні поля з і без урахування теплового випромінювання для шару товщиною $z_1 = 22$ мм при теплофізичних характеристиках [3] за однакових параметрів у граничних умовах. Проведено порівняння з температурними полями підрахованими на основі розв’язків задач за сталих характеристик та задач з простою нелінійністю. При цьому отримали підтвердження того, що розподіли температур симетричні відносно поверхні $z = z_1/2$ і такі ж, як відповідні розподіли у шарі з теплоізолюваною поверхнею $z = z_1$, але товщиною у два рази меншою. Для знаходження останніх отримали за допомогою відповідної функції Гріна аналогічне до (1) подання, в якому відсутній інтеграл, що містить $\theta(z_1, \tau)$.

За таких же, як у попередніх задачах, теплофізичних характеристиках знайшли температурне поле, коли поверхня шару $z = z_1$ підтримується при нульовій температурі. При цьому використовували функцію Гріна відповідну розглядуваній задачі. В отриманому поданні типу (1) відсутній також третій доданок. Тут були дослідження ще залежно від товщини шару. Порівняльний аналіз проводили з температурним полем знайденим із задачі для півпростору (в тій же постановці, що й для шару) з використанням відповідної функції Гріна другої крайової нестационарної лінійної задачі теплопровідності.

Для часткового випадку, коли відсутнє теплове випромінення, порівнювали числові результати для півпростору отримані за запропонованою методикою і на основі відомого аналітичного розв'язку, який виражається через експоненціальні функції та інтеграли ймовірностей. При цьому температури на поверхні півпростору збіглися залежно від часу і кроку Δt з точністю до трьох-чотирьох знаків після коми.

Зауважимо, що в задачах для шару обчислення виконували для часового інтервалу, за межами якого температури відрізнялися не менш ніж трьома знаками. Причому, ці температури збіглися з такою ж точністю із температурами підрахованими на основі знайдених розв'язків відповідних стационарних задач.

1. *Процюк Б.В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63-69.
2. *Процюк Б.* Метод інтегральних рівнянь у нестационарних задачах теплопровідності термочутливих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вып. 10. – С. 96-105.
3. *Белик В.Д., Урюков Б.А., Фролов Г.В., Ткаченко Г.В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журнал. – 2008. – 81, № 6. – С. 1058-1062.

NON-STATIONARY PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION FOR A THERMOSENSITIVE LAYER WITH AERODYNAMIC HEATING

The method of determination of a one-dimensional non-stationary temperature field in a layer with temperature-dependent heat transfer and volumetric heat capacity coefficient for aerodynamic heating is proposed. The method involves use of the Kirchoff transformation and obtaining integral representation of the solution of the problem for the Kirchoff variable using the corresponding Green's function. The next step is to find the solution of the recurrent system of nonlinear algebraic equations obtained with the use of linear splines, for the values of the Kirchoff variable in the spline nodes on bounding surfaces and for the values of the Kirchoff variable derivative of time in the spline nodes on the inner surfaces of the layer. Considerable attention has been paid to substantiation of the reliability of the obtained numerical results.

**ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА, ЗУМОВЛЕНЕ
НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИМ ТЕПЛОВИМ ПОТОКОМ,
ЯКИЙ РУХАЄТЬСЯ ПО ЗОВНІШНІЙ ПОВЕРХНІ
УЗДОВЖ НАПРАВЛЯЮЧОЇ****Борис Процюк, Володимир Синюта***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;**Львівський національний університет ім. Івана Франка (Україна)*dept19@iapmm.lviv.ua; synyutavm@gmail.com

Дослідження температурних полів у двошарових ізотропних та ортотропних циліндрах, що нагріваються на зовнішній поверхні рухомими тепловими потоками, наведено у [1, 2]. Розглянуто, зокрема, розподіли інтенсивності теплового потоку за параболічним законом (рух по твірній) [1] та за нормальним законом (рух по твірній і по гвинтовій лінії) [2].

У даній роботі досліджено температурні поля у двошаровому ізотропно-му циліндрі, коли рух нормально розподіленого потоку по зовнішній поверхні відбувається уздовж направляючої за різних кутових швидкостей. Припускається, що через внутрішню поверхню здійснюється конвективний теплообмін з середовищем, температура якого, як і початкова температура циліндра, дорівнює нулю. Функцію, яка описує в циліндричній системі координат r , φ , z інтенсивність потоку, брали у вигляді

$$q(\varphi, z, \tau) = Q \exp\left(-k \left[R^2 \sin^2(\varphi - \omega\tau) + z^2 \right]\right) \cos(\varphi - \omega\tau) S(\cos(\varphi - \omega\tau)),$$

де Q – значення теплового потоку в центрі плями нагріву, k – коефіцієнт зосередженості теплового потоку, R – зовнішній радіус циліндра, ω – кутова швидкість, τ – час, $S(x)$ – функція Гевісайда.

Розв'язок задачі теплопровідності отримано, як частковий випадок з [2].

Аналіз підрахунків, які виконано для шести приведених значень кутової швидкості, зокрема, показав, що зміна температури уздовж кутової координати, як і треба було очікувати, має коливний характер. При малих кутових швидкостях характер зміни температури по товщині циліндра такий самий, як і у випадках руху по твірній та по гвинтовій лінії [2]. Квазістаціонарний режим настає перед початком другого оберту теплового потоку. Зі збільшенням кутової швидкості збільшується і кількість обертів необхідна для виходу

на квазістаціонарний режим. При цьому амплітуди коливань температури зменшуються. При великих кутових швидкостях амплітуди коливань стають малими і наближено можна вважати, що температура не змінюється зі зміною куткової координати φ . В цьому випадку отримуємо температурне поле, яке близьке до осесиметричного, зумовленого кільцевим нормально розподіленим потоком тепла, причому квазістаціонарний режим є близьким до осесиметричного стаціонарного. Відмітимо, що відповідне осесиметричне нестационарне температурне поле за дії кільцевого нормально розподіленого потоку тепла було визначено раніше в [3], а в [2] воно було отримане з неосесиметричного граничним переходом $\omega \rightarrow \infty$.

1. Ootao Y., Akai T., Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stress analysis of a nonhomogeneous hollow circular cylinder due to a moving heat source in the axial direction // J. Thermal Stresses. – 1995. – **18**. – P. 497-512.
2. Процюк Б.В., Синюта В.М. Нестационарні неосесиметричні температурні поля багатопарових ортотропних циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 221-228.
3. Protsiuk B., Syniuta V. Thermoelastic state of a multilayer cylinder due to a heat flow // Third International Congress on Thermal Stresses “THERMAL STRESSES '99”. – June 13-17, 1999. – Cracow, Poland. – P. 371-374.

TEMPERATURE FIELD OF A TWO-LAYER CYLINDER CAUSED BY NORMALLY DISTRIBUTED HEAT STREAM MOVING ON THE EXTERNAL SURFACE ALONG THE CYLINDER GUIDE

A three-dimensional non-stationary heat conduction problem for a two-layer cylinder heated by normally distributed heat stream moving on the external surface along the cylinder guide is considered. On the basis of the solution obtained through the Green's functions for the corresponding heat conductivity problem temperature fields for different values of angular velocity are investigated. In particular, it is established that at high angular velocity values the temperature field becomes close to the axisymmetric one.

МЕТОД РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

Віктор Ревенко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

victorrev@ukr.net

Однорідні або багатошарові пружні циліндричні тіла – поширені елементи будівельних та інженерних конструкцій. Для розрахунку їх напруженого стану використано загальний розв’язок рівнянь теорії пружності [1], в якому об’ємне розширення виражено через одну, а вектор елементарного обертання через дві незалежні гармонічні функції переміщень.

Розглянуто осесиметричний напружено-деформований стан циліндра Z_K , який має K шарів: $D_j = \{(r, \phi, z) \in ([R_{j-1}, R_j] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$, $j = \overline{1, K}$, $R_{j-1} < R_j$ з модулями Юнга E_j і коефіцієнтами Пуассона ν_j . Якщо $R_0 = 0$, то маємо суцільний, якщо $R_0 > 0$, то товстостінний циліндр. На торцях шарів циліндра задані нульові навантаження. Крайові умови на бічній поверхні суцільного багатошарового циліндра мають вигляд

$$\sigma_r(R_K, z) = \sigma_1(z), \quad \tau_{rz}(R_K, z) = \tau_1(z), \quad \tau_1(\pm h) = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } \sigma_1(z) = \sigma_g(z) - \sigma_0, \quad \sigma_0 = \int_0^1 \sigma_g(h\gamma) d\gamma, \quad \int_{-1}^1 \tau_1(h\gamma) d\gamma = 0, \quad \gamma = z/h.$$

Встановлено, якщо на циліндричних поверхнях з’єднання j -го і $j+1$ -го шарів циліндра задано умови ідеального механічного контакту шарів, то на поверхні контакту $r = R_j$ виконуються залежності

$$\frac{1 - \nu_{j+1}^2}{E_{j+1}} \sigma_\phi^{j+1} = (1 + \nu_{j+1}) \left[\frac{\nu_{j+1}}{E_{j+1}} - \frac{\nu_j}{E_j} \right] \sigma_r^j + \frac{1 - \nu_j \nu_{j+1}}{E_j} \sigma_\phi^j + \frac{\nu_{j+1} - \nu_j}{E_j} \sigma_z^j,$$

$$\frac{1 - \nu_{j+1}^2}{E_{j+1}} \sigma_z^{j+1} = (1 + \nu_{j+1}) \left[\frac{\nu_{j+1}}{E_{j+1}} - \frac{\nu_j}{E_j} \right] \sigma_r^j + \frac{1 - \nu_j \nu_{j+1}}{E_j} \sigma_z^j + \frac{\nu_{j+1} - \nu_j}{E_j} \sigma_\phi^j.$$

Використано подання напружень [1] і побудовано однорідні розв’язки

для шарів циліндра, які виражено через такі функції переміщень:

$$\Phi^J = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_k^J I_0(\beta_k r) \sin(\mu_k \gamma)\}, \quad \Psi^J = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\delta(\mu_k) a_k^J I_0(\beta_k r) \cos(\mu_k \gamma)\}. \quad (2)$$

Метод розрахунку багат шарового циліндра ґрунтується на апроксимації його напруженого стану скінченною сумою перших N однорідних розв'язків (2) і запропонованому способі зведення задоволення умов контакту шарів та крайових умов (1) до пошуку мінімуму квадратичного функціонала, який дорівнює узагальненій квадратичній формі

$$\sum_{m=1}^{K_1} \left\| \sum_{k=1}^M c_k A_k^m(\gamma) - P_m(\gamma) \right\|^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{k,j} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \quad (3)$$

де $\|f(\gamma)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(\gamma) d\gamma}$, $W_{k,j} = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{K_1} A_k^m(\gamma) A_j^m(\gamma) d\gamma$, $W_{k,j}^n = W_{j,k}^n$,

$K_1 = 4K - 2$ – кількість умов, $M = (2K - 1)(2N + 1)$ – кількість невідомих.

Показано, що введена узагальнена квадратична форма (3) дає змогу універсальним способом одночасно враховувати велику кількість умов, заданих на різних поверхнях як в напруженнях, так і в переміщеннях, а значення її мінімуму визначає збіжність і точність розв'язку.

Розглянуто локальні навантаження з чітко вираженим максимумом, прикладені до бічної поверхні циліндричних тіл. Проведені числові дослідження дозволили виявити якісні і кількісні особливості та закономірності розподілу компонент тензора напружень у однорідних та двошарових циліндрах.

1. *Revenko V.P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 7. – P. 730-741.*

INVESTIGATION OF STRESS STATE OF CYLINDRICAL BODIES USING GENERALIZED QUADRATIC FORM

A solution to the elasticity boundary-value problems for multilayer and homogeneous cylinders is obtained basing on an approximation of the stress state by a finite sum of eigenfunctions. The analytical-numerical algorithm has been developed in order to satisfy all the contact conditions (on the interfaces) and boundary conditions (on the surface) for a multilayer cylinder by making use of the generalized quadratic forms. The convergence and existence conditions for the numerical solutions to the boundary-value problems are established. The distribution of the stress-strain state of locally loaded cylindrical bodies according to their geometrical characteristics, location of the loading area, as well as the steepness and maximum value, are found.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ПОВЕДІНКИ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ПІД ДІЄЮ ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ

Андрій Сенік

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

andrij.sen@gmail.com

Побудовано математичну модель для довгого термочутливого циліндра, на бокову поверхню якого діє концентрований тепловий потік високої потужності. Враховано, що теплофізичні та фізико-механічні характеристики матеріалу є функціями температури. Першочергово будується модель розподілу температурного поля, в якості параметрів якого є теплофізичні та геометричні характеристики, а також параметри потоку енергії. Для визначення нестационарного температурного поля сформовано нелінійну задачу теплопровідності, розв'язок якої знаходиться після лінеаризації за допомогою змінної Кірхгофа з використанням методів інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа. Далі на основі відомого розподілу температурного поля, визначається розподіл напруженого стану в тілі.

Для побудови розв'язку задачі термопружності використано рекурентні послідовності, що визначають компоненти вектора переміщень та тензора напружень у вигляді

$$u_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{\alpha}^{(n)}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}; \quad \alpha, \beta = r, \phi, z.$$

Як результат, отримано послідовність крайових задач для знаходження з необхідною точністю переміщень і напружень у тілі. При цьому використано розклади функцій в ряди Фур'є-Бесселя та Діні. На підставі отриманих розв'язків задачі теплопровідності і термопружності проведено чисельні дослідження нестационарного температурного поля і квазістатичних температурних напружень у циліндрі, що нагрівається по боковій поверхні потоком тепла. Отримані результати можна використати для прогнозування зон термічного впливу в процесі обробки елементів поверхонь деталей машин та механізмів концентрованими потоками енергії.

ANALYSIS OF THE THERMAL BEHAVIOR OF A THERMOSENSITIVE CYLINDER SUBJECTED TO THE ENERGY FLUX

A mathematical model for a long thermosensitive cylinder is constructed, with a concentrated thermal flux of high power acting on its lateral surface. It is taken into account that the thermophysical and physical-mechanical characteristics of the material are assumed to be the functions of temperature.

**РЕАКЦІЯ НЕСКІНЧЕННОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ,
ЗЧЕПЛЕНОГО З ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ, НА ДІЮ РІВНОМІРНО
РОЗПОДІЛЕНОГО ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Ігор Скородинський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

skorodynski@ukr.net

Циклічні навантаження є досить розповсюдженими у природі, в техніці, будівництві та об'єктах інфраструктури. Тому актуальним є дослідження дії таких навантажень на непружні елементи конструкцій, коли мають місце такі явища як запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію та накопичення незворотних деформацій. Дана доповідь присвячена дослідженню реакції нескінченного в'язкопружного шару, зчепленого з жорсткою основою, на дію нормального рівномірно розподіленого циклічного навантаження.

Розглянемо нескінченний в'язкопружний шар на жорсткій основі, що знаходиться під дією нормального рівномірно розподіленого на ділянці $x \in [-a, a]$ циклічного навантаження виду

$$p(x, t) = p_0 H_-(a - |x|) \sum_{i=1}^N [H_+(t - t_i) - H_+(t - t_i - \tau_l)], \quad (1)$$

де p_0 – амплітуда; t_i – моменти прикладання навантаження ($i = \overline{1, N}$, $t_1 = 0$); N – кількість циклів; τ_l – час дії навантаження, а $H_-(x)$ та $H_+(t)$ – асиметричні функції Гевісайда. Матеріал шару описується моделлю Кельвіна–Фойгта. Постановку та розв'язок задачі про визначення вертикального переміщення $v(x, t)$ навантаженої поверхні шару в рамках узагальненої двопараметричної моделі та плоскої деформації можна знайти у статті [1].

Виведено формули для безрозмірного вертикального переміщення $\bar{v}(\bar{x}, \bar{t})$, зокрема в середині області навантаження. Для короткотривалого навантаження ($\tau_l \ll \min_{1 \leq i \leq N-1} \{t_{i+1} - t_i\}$) ці формули спрощуються, що значно прискорює розрахунки при незначній похибці.

У випадку періодичного на проміжку $[0, NT_c]$ (T_c – період) навантаження формула (1) набуває вигляду

$$p(x,t) = p_0 H_-(a - |x|) \sum_{i=1}^N \{ H_+[t - (i-1)T_c] - H_+[t - (i-1)T_c - \tau_i] \}. \quad (2)$$

Як і для зосередженої сили, досліджено часові залежності вертикального переміщення в точці $x=0$ для трьох матеріалів шару та для трьох значень приведеної товщини останнього. Встановлено, що при циклічному навантаженні величина вертикального переміщення залежить як від модуля пружності, так і від в'язкості матеріалу шару. У шарі з податливішого матеріалу розвиваються більші деформації. Крім цього, модуль вертикального переміщення є монотонно зростаючою функцією товщини шару. Максимальні абсолютні значення вертикального переміщення у кожному циклі досягаються в момент зняття навантаження, а відповідні мінімальні значення, що характеризують залишкові в'язкопружні деформації, – в кінці циклу.

Досліджено досягнення усталеного режиму деформування в'язкопружного шару на жорсткій основі при дії рівномірно розподіленого періодичного навантаження (2). Аналогічно до випадку зосередженої сили, встановлено існування границь послідовностей максимумів і мінімумів вертикального переміщення у кожному циклі. Швидкість встановлення усталеного режиму є монотонно зростаючою функцією податливості матеріалу шару. Товщина шару на швидкість досягнення усталеного режиму практично не впливає. Після встановлення усталеного режиму закон зміни в часі вертикального переміщення навантаженої поверхні шару наближається до періодичного.

Встановлено існування граничного значення залишкових в'язкопружних деформацій при $N \rightarrow \infty$. Після повного зняття зовнішнього навантаження залишкові деформації прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Таким чином, досліджено реакцію нескінченного в'язкопружного шару, зчепленого з жорсткою основою, на дію нормального рівномірно розподіленого циклічного навантаження та вивчено основні закономірності його деформування для різних матеріалів та товщин шару.

1. *Скородинский И.С., Максимук А.В.* Действие нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой, сцепленный с жестким основанием // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 6(52). – С. 15-24.

RESPONSE OF AN INFINITE VISCOELASTIC LAYER JOINED WITH A RIGID FOUNDATION ON THE ACTION OF UNIFORMLY DISTRIBUTED CYCLIC LOAD

The response of an infinite viscoelastic layer joined with a rigid foundation on the action of normal uniformly distributed cyclic load is investigated. The basic regularities of deformation for different materials and thicknesses of the layer including the steady-state regime and residual viscoelastic strains are studied.

УДК 620.22-419:621.3.011.2

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У ВУГЛЕЦЕВОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ, ВИКЛИКАНІ ПРОПУСКАННЯМ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

**Вадим Ставиченко, Світлана Пургіна, Анастасія Літвінова,
Павло Шестаков, Вадим Шевцов**

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут» (Україна)*

v.stavychenko@khai.edu; s.purhina@khai.edu; litvinova.nastia@gmail.com;
pashashestakov12@gmail.com; vadimshevtsov99@gmail.com

Полімерні композитні матеріали (КМ) на основі вуглецевих тканин різного плетіння широко застосовують у аерокосмічній галузі. За показниками питомої міцності та жорсткості вуглецеві композити значно перевищують метали, проте мають значно нижчу електропровідність, що необхідно враховувати при розробці елементів конструкцій під впливом прямих і непрямих ефектів від удару блискавки [1]. Існує низка способів підвищення електропровідності КМ і конструкцій з них, такі як використання вуглецевих волокон з підвищеною електропровідністю, додавання у композитну структуру spruomoprovідних шарів у вигляді металевих сіток, модифікація сполучного матеріалу з використанням spruomoprovідних наночастинок та інші [2, 3]. Застосування згаданих методів дозволяє створювати багатофункціональні КМ, що мають необхідне поєднання механічних та електричних характеристик.

На даний час співробітниками кафедри композитних конструкцій і авіаційного матеріалознавства національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського у рамках держбюджетної теми та міжнародного гранту ведуться роботи по створенню мультифункціональних КМ з підвищеною електропровідністю. Однією зі складових цієї роботи є моделювання поведінки таких матеріалів в умовах пропускання електричного струму та пов'язаних з ним термомеханічних ефектів. Наявність достовірних розрахункових методів дозволить ефективно вирішувати задачу створення мультифункціональних матеріалів та конструкцій з них.

Дану роботу присвячено моделювання термомеханічного напружено-деформованого стану (НДС) полімерних КМ на основі вуглецевих тканин з 2D і 3D плетінням з використанням комбінації методу скінченних елементів (МСЕ) та аналітичних залежностей.

Представницький елемент КМ моделюється як неодноріне тіло, що скла-

дається з вуглецевих ниток та полімерної матриці. Нитки моделюються як умовно однорідні тіла, при цьому їхні ефективні електричні, теплофізичні та механічні характеристики розраховуються за відомими аналітичними залежностями та емпіричними формулами. На основі запропонованої моделі визначаються ефективні характеристики КМ, а також температурне поле у представницькому елементі та мікроструктурні температурні напруження для визначення гранично допустимих величин сили електричного струму.

Для оцінки достовірності запропонованого методу моделювання, отримані розрахункові значення питомої електропровідності та механічних характеристик порівнювались з результатами експериментальних досліджень для вуглецевих тканин з саржевим плетінням та плетінням типу «ластик» з утком. Показано, що результати моделювання завжди дають дещо завишені у межах 10-20% значення питомої електропровідності та механічних властивостей, що можна пояснити пошкодженням вуглецевих волокон під час процесу плетіння тканини. В цілому результати порівняння показали, що розрахункові значення зазначених величин досить добре збігаються з результатами експерименту, що дає можливість застосовувати запроповану методику розрахунку на етапі визначення структури КМ із заданими механічними, електричними та теплофізичними характеристиками.

1. Chemartin L., Lalande P., Peyrou B., Chazottes A., Elias P.Q., Delalondre C., Cheron B.G., Lago F. Direct effects of lightning on aircraft structure: analysis of the thermal, electrical and mechanical constraints // Aerospace Lab. – 2012. – **12**. – P. 1-15.
2. Пургина С.М., Смовзюк Л.В., Ставиченко В.Г., Шестаков П.В., Шорінов А.В. Анализ проблемы создания и применения композитов с повышенной электропроводностью // Технологические системы. – 2017. – № 1. – С. 52-56.
3. Шорінов А.В., Пургина С.М., Ставиченко В.Г. Підвищення тепло та електропровідності композитних авіаційних конструкцій методом холодного газодинамічного напилювання // Технологические системы. – 2017. – № 2. – С. 11-14.

**TEMPERATURE STRESSES IN CARBON COMPOSITE MATERIALS
CAUSED BY ELECTRIC CURRENT TRANSMISSION**

This work is devoted to the study of temperature stresses in carbon fiber composite materials caused by the transmission of electric current. The problem is solved using a combination of the finite element method and analytic dependencies. The predicted results for electrical conductivity and mechanical properties were compared with the experimental results for some types of carbon fabrics. The developed calculation technique can become a basis for design of multifunctional composite materials with specified electrical, thermal and mechanical characteristics.

УДК 539.3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**Євген Сторожук, Володимир Максимюк, Іван Чернишенко***Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*stevan@ukr.net; desc@inmech.kiev.ua; prikl@inmech.kiev.ua

Циліндричні оболонки кругового і некругового поперечного перерізу, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в інженерній практиці, наприклад, при проектуванні фюзеляжів літаків і корпусів ракет.

Розглянемо нескінченно довгу тонку циліндричну оболонку некругового перерізу, яка знаходиться під дією тиску q і розподілених уздовж твірної поперечних сил Q , що не залежать від осьової координати x . Тоді всі шукані величини будуть залежати тільки від кута ϕ між нормаллю до серединної поверхні оболонки і малою віссю поперечного перерізу.

Вихідними при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) даного класу оболонок є рівняння теорії непологих оболонок Кірхгофа-Лява.

Автори доповіді розробили три підходи до розв'язання даної проблеми.

1. Аналітичний підхід. Отримано [4] точні розв'язки рівнянь рівноваги для таких видів циліндричних оболонок: відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки ($0 \leq \phi \leq \phi_k$), повздовжній край $\phi = \phi_k$ якої жорстко закріплений, а на краю $\phi = 0$ діє рівномірно розподілена поперечна сила Q ; відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки ($-\phi_k \leq \phi \leq \phi_k$) з жорстко або шарнірно закріпленими повздовжніми краями $\phi = \pm\phi_k$, навантаженої рівномірним тиском q або рівномірно розподіленою поперечною силою Q у вершині овалу $\phi = 0$; замкненої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки, яка знаходиться під дією рівномірного тиску q або двох діаметрально протилежних рівномірно розподілених поперечних сил Q .

2. Аналітично-чисельний підхід. Розв'язання системи рівнянь рівноваги зводиться до обчислення ряду інтегралів. Для більшості некругових поперечних перерізів первісні підінтегральних функцій не виражаються через елементарні функції. Тому автори розробили методику розв'язання задач статички для даного класу оболонок, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні та забезпечує високу точність результатів [3]. Наприклад, для

збігу 5 значущих цифр аналітично-чисельного розв'язку задачі для замкненої овальної циліндричної оболонки ($a/b = 1,5$) з аналітичним (точним) розв'язком цієї задачі необхідно розбити інтервал інтегрування на 800 частин. Відзначені вище інтеграли обчислюються з використанням формули трапецій.

3. *Чисельний підхід*. Відомо [1, 2], що при виконанні конкретних розрахунків для довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу з використанням традиційних варіантів варіаційно-різницевого методу (ВРМ) і методу скінченних елементів (МСЕ) спостерігається сповільнена збіжність результатів внаслідок так званого явища мембранного замикання. Тому для дослідження НДС некругової циліндричної оболонки автори розробили варіант ВРМ [1], в якому геометричні гіпотези Кірхгофа-Лява реалізовані методом множників Лагранжа і додатково варіюється мембранна деформація, що значно покращує збіжність числових результатів. Так, в традиційному варіанті для досягнення збіжності у трьох значущих цифрах для максимальних угинів потрібно було чверть напруженої покрити сіткою, що має 2561 вузлову точку. А для досягнення такої ж точності при використанні змішаного функціоналу, в якому додатково варіюється мембранна деформація, потрібен 41 вузол. Також запропоновано варіант МСЕ з обчисленням мембранної деформації за допомогою подвійної апроксимації [2], що на порядок збільшує швидкість збіжності числових результатів.

Отже, в роботі отримано аналітичні (точні) і аналітично-чисельні (практично точні) розв'язки задач статки для некругової циліндричної оболонки, які мають самостійне значення, а також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. Розроблено модифікації МСЕ і ВРМ, ефективність яких підтверджена шляхом розв'язання тестових задач.

1. *Абросов Ю.Ю., Максимюк В.А., Чернышенко И.С.* Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование длинной цилиндрической оболочки // Прикл. механика. – 2016. – **52**, № 5. – С. 106-111.
2. *Сторожук Е.А., Чернышенко И.С., Пиголь О.В.* Упругопластическое состояние цилиндрической оболочки эллиптического сечения, ослабленной круговым отверстием // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 6. – С. 49-56.
3. *Сторожук Е.А., Яцура А.В.* Аналитически-численное решение задач статки для некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 3. – С. 91-103.
4. *Сторожук Е.А., Яцура А.В.* Точные решения краевых задач для цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения // Прикл. механика. – 2016. – **52**, № 4. – С. 68-81.

METHODS FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN THE THEORY OF THIN NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

Analytical, numerical and analytical-numerical approaches to the modeling of deformation of long non-circular cylindrical shells are developed.

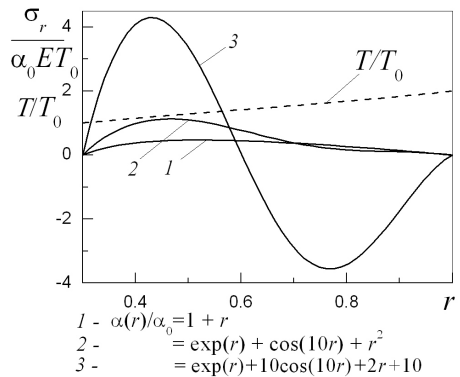
**ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО
СТАНУ ДОВГОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗІ ЗМІННИМИ
ЗА РАДІАЛЬНОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕПЛОФІЗИЧНИМИ
ТА ТЕРМОПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ****Юрій Токовий, Анатолій Чиж***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*tokovyy@gmail.com; chyzh_tolik@ukr.net

Моделювання та аналіз термопружної поведінки елементів конструкцій з урахуванням неоднорідності матеріалу є неодмінними складовими досліджень щодо їх проектування, забезпечення потрібних показників експлуатаційних характеристик, оптимізації ресурсних затрат та режимів функціонування. Водночас, урахування залежностей властивостей матеріалу від координати місця точки суттєво ускладнює аналіз, у порівнянні з однорідними матеріалами, та обмежує застосовність розвинутих методів дослідження термомеханічної поведінки деформівних твердих тіл. З цієї причини дослідники вдаються до певних модельних спрощень, які б давали можливість відносно просто розв'язувати відповідні задачі термомеханіки та, з іншого боку, дозволяли враховувати зміну у просторі деяких характеристик матеріалу. Один з домінуючих підходів такого плану полягає у задаванні залежності властивостей матеріалів у вигляді елементарних функцій просторових координат, які в рамках вибраної математичної моделі дають можливість отримати вивчені класи ключових диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Натомість такий підхід суттєво звужує застосовність отриманих результатів, які є адекватними лише для вибраного вузького класу залежностей властивостей матеріалу від координат.

У доповіді викладено методику побудови розв'язків осесиметричних задач термопружності для довгого порожнистого циліндра за змінного вздовж його твірної теплового навантаження. Коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалу є довільними функціями радіальної координати. Залежністю від координат модуля пружності та коефіцієнта Пуассона знехтувано. Такі припущення характерні при вивченні впливу на напружений стан виключно теплових факторів навантаження. Задачу про визначення температурного поля розв'язано з використанням методики зведення рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами до інтегрального рівняння другого роду з подальшим використанням аналітично-

числової методики розв'язування. Відповідні компоненти термонапружень знайдено за допомогою методу безпосереднього інтегрування [1] в явному аналітичному вигляді. Отриманий у такий спосіб розв'язок задачі термопружності є зручним для розрахунку та аналізу температурного поля та термонапружень у неоднорідному циліндрі, а також може слугувати у якості еталонного розв'язку для верифікації аналітичних, числово-аналітичних та числових методів розв'язування такого класу задач.

Проаналізовано розподіли температури та термонапружень у циліндрі за різних залежностей коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення від радіальної координати та різних способів температурного навантаження внутрішньої та зовнішньої бічних поверхонь. На рисунку показано розподіл температури T/T_0 , розрахованої у перерізі $z = 0$ циліндра з відношенням внутрішнього та зовнішнього радіусів 0.3 за наванта-



жень внутрішньої та зовнішньої бічних поверхонь відповідно $T_0 \exp(-z^2)$ та $2T_0 \exp(-z^2)$ за сталого коефіцієнта теплопровідності. Відповідні радіальні напруження у тому ж перерізі наведено кривими 1 – 3 для різних залежностей коефіцієнта лінійного теплового розширення від радіальної координати для циліндра з вільними від силового навантаження поверхнями.

1. Tokovyy Y., Ma C.-C. Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings // ASME J. Appl. Mech. – 2016. – **83**. – P. 1111007-1–7.

ANALYSIS OF AXISYMMETRIC THERMOSTRESSED STATE OF A LONG HOLLOW CYLINDER WITH THERMOPHYSICAL AND THERMOELASTIC PROPERTIES VARYING WITH THE RADIAL COORDINATE

A technique for solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a hollow cylinder is presented for the case when the coefficients of heat-conduction and linear thermal expansion are arbitrary functions of the radial coordinate. The corresponding heat-conduction equation with arbitrarily-variable coefficients has been reduced to an integral equation of second kind which then was solved by making use of an appropriate analytical-numerical technique. The relevant thermal stresses were constructed by means of the direct integration method in an explicit form. The obtained solution can be efficiently used for the analysis of the thermal- and stress- fields in an inhomogeneous cylinder as well as can serve as a benchmark solution for the verification of different solution techniques.

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВПРОСТОРІ З НЕОДНОРІДНИМ ПОКРИТТЯМ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВАННІ

Ігор Турчин, Ольга Турчин

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна);

Національний лісотехнічний університет України

ihorturchyn@gmail.com

В даній роботі розглядається півпростір із неоднорідним покриттям, що моделюється системою з $M - 1$ плоско-паралельних шарів із відмінними між собою та від півпростору теплофізичними властивостями. Вважається, що півпростір із покриттям починає нагріватись через граничну поверхню за рахунок теплообміну із зовнішнім середовищем, що має локально неоднорідну температуру.

Розв'язок відповідної початково-крайової задачі теплопровідності одержано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за просторовою змінною у вигляді

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

де $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ – температурне поле в півпросторі ($i = M$) та покриттях ($i = 1, 2, \dots, M - 1$), $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, а $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$ в кінцевому рахунку визначаються із рекурентних послідовностей.

Наводяться результати числового аналізу температурного поля та розподілу напружено-деформованого стану залежно від відносних товщин покриттів та співвідношень теплофізичних характеристик.

THE UNSTEADY TEMPERATURE DISTRIBUTION ANALYSIS IN THE HALF-SPACE WITH NONHOMOGENEOUS COATING UNDER LOCAL HEATING

The solution of initial-boundary thermal conductivity problem for half-space with non-homogeneous coating is obtained. The discuss of the possibilities and limits of applicability the results to the analysis of bodies with nanocoatings is presented.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Анастасія Філіпчук, Юрій Процеров, Наталя Вайсфельд

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова (Україна)

filipchuk.anastasiia@stud.onu.edu.ua; protserov@onu.edu.ua; vaysfeld@onu.edu.ua

Задача про рівновагу пружного циліндра скінченної довжини є однією з найстаріших серед задач пружності. Широкий огляд статей та ідей, присвячених цій темі, наведено в [1], де також зазначено, що деякі проблеми, пов'язані з оцінкою напруженого стану циліндра, досі не були розв'язані через їх складність. Одна з таких проблем розглядається в цій статті, де розв'язано тривимірну задачу для ізотропного пружного циліндра скінченної довжини, що знаходиться під дією власної ваги.

Новизна запропонованого методу полягає в застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до рівнянь рівноваги. Це дозволяє побудувати одновимірну крайову задачу в області перетворень. Отриману векторну крайову задачу розв'язано за допомогою методу матричних диференціальних обчислень. Вперше такий підхід було запропоновано і застосовано у [2,3]. Його використання зводить вихідну задачу до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язується методом ортогональних многочленів.

Пружний круговий циліндр $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-l \leq z \leq l$; r, φ, z – циліндрична система координат, закріплено по торцях $z = \pm l$. Бічна поверхня циліндра є вільною від навантажень. Циліндр деформується під дією власної ваги. Переміщення циліндра задовольняють рівняння рівноваги:

$$\Delta U_r - \frac{1}{r^2} U_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{x-1} \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{\gamma}{G} \cos \varphi,$$

$$\Delta U_\varphi - \frac{1}{r^2} U_\varphi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{2}{x-1} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\gamma}{G} \sin \varphi, \quad \Delta U_z + \frac{2}{x-1} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

де U_r, U_φ, U_z – переміщення точок циліндра, G – модуль зсуву, γ – питома вага, Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат, θ – об'ємне розширення, $x = 3 - 4\mu$, μ – коефіцієнт Пуассона. Проблема є симетричною щодо змінної z , тому достатньо розглянути область $0 \leq z \leq l$. З огляду на це, граничні умови записано таким чином:

$$\left. \frac{\partial U_r}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad U_z|_{z=0} = 0, \quad U_r|_{z=l} = 0, \quad U_\varphi|_{z=l} = 0, \quad U_z|_{z=l} = 0,$$

$$\sigma_r|_{r=a} = 2G \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{3-x}{2(x-1)} \theta \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_{r=a} = G \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} U_\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=a} = 0,$$

$$\tau_{z\varphi}|_{r=a} = G \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \Big|_{r=a} = 0.$$

Уведемо безрозмірні змінні $\rho = r/a$ і $\xi = z/l$ та подамо переміщення:

$$U(r, \varphi, z) = \tilde{U}(\rho, \varphi, \xi) = U(\rho, \xi) \cos \varphi, \quad V(r, \varphi, z) = \tilde{V}(\rho, \varphi, \xi) = V(\rho, \xi) \sin \varphi,$$

$$W(r, \varphi, z) = \tilde{W}(\rho, \varphi, \xi) = W(\rho, \xi) \cos \varphi.$$

Скінченне інтегральне перетворення Фур'є за змінною ξ зводить задачу до одновимірної крайової задачі в області перетворень:

$$L\bar{y}(\rho) = \bar{f}(\rho), \quad V_i[\rho] = \gamma_i, \gamma = 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

Тут L – відомий диференціальний матричний оператор порядку 3×3 ,

$$\bar{y} = \left(W_k^{(1)}, W_k^{(2)}, W_k^{(3)} \right)^T, \quad W_k^{(1)} = U_k + V_k, \quad W_k^{(2)} = U_k - V_k, \quad W_k^{(3)} = W_k, \quad k -$$

параметр Фур'є, $\bar{f} = \left(0, (-1)^k 2\gamma a^2 / (G\nu_k), (-1)^k a^2 (x+1)\chi \right)^T$, $\chi = \partial W / \partial \xi|_{\xi=1}$ – невідома функція, яку знаходимо з граничних умов, $D_\rho(f) = (\rho f') / \rho$.

Граничну векторну задачу (1) розв'язано за допомогою апарату матричного диференціального обчислювання. Компоненти вектора \bar{y} побудовано в явному вигляді. Застосування обернених перетворень Фур'є до цих компонент призводить до остаточних виразів переміщень.

1. *Meleshko V., Tokovyy Yu., Barber I.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Science. – 2011. – **176**, № 5. – P. 646-669.
2. *Popov G., Protserov Yu., Gonchar I.* Exact solution of some axisymmetric problems for elastic cylinders of finite length taking into account // Int. Applied Mech. – 2015. – **51**, № 4. – P. 391-402.
3. *Menshykov O., Menshykova M., Vaysfeld N.* Exact analytical solution for a pie-shaped wedge thick plate under oscillating load // Acta Mechanica. – 2017. – **228**, № 12. – P. 4435-4450.

THE STRESS STATE OF A FINITE ELASTIC CYLINDER UNDER ITS WEIGHT

The stress state of a finite circular elastic cylinder under its own proper weight is evaluated in this paper. The edges of the cylinder are fixed, while the lateral surface is free of loading. The finite Fourier integral transformations were applied to the equilibrium equations and boundary conditions. The apparatus of matrix differential calculations is used and the explicit solution of the vector boundary-value problem is constructed. The formulas obtained for the displacements have an unknown function which was found by solving the corresponding singular integral equation. The numerical results indicating the dependence of the cylinder stress state on its geometrical parameters and proper weight were derived.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КРУГОВОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПРИ ЗАДАНІЙ НА ПОВЕРХНІ РОЗЩІПЛЮЮЧІЙ СИЛІ

Іван Хома, Тетяна Прошенко, Оксана Стригіна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна);

Білоцерківський національний аграрний університет (Україна)

t.proshenco@gmail.com; oks9269@yandex.ua

Методом розвинення в ряди Фур'є за поліномами Лежандра побудовано систему рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропної пластини за змішаних умов на плоских гранях і однорідних умов для нормального переміщення і дотичних напружень. Наведено спосіб побудови загального аналітичного розв'язку такої системи і знайдено розв'язок задачі про напружений стан пластини з круговою циліндричною порожниною, на поверхні якої задано значення розщиплюючої сили (врівноваженої за товщиною пари сил, що працюють на розщеплення або стиск пластини у серединній площині).

Нехай пластину товщини $2h = \text{const}$ віднесено до декартової системи координат x_i , $i = 1, 2, 3$, причому x_1, x_2 розташовані на серединній площині S , що співпадає з площиною ізотропії, а $x_3 \in [-h, h]$. Пластина послаблена круговою циліндричною порожниною радіуса R , на поверхні $R \times [-h, h]$ якої задано значення розщиплюючої сили:

$$\sigma_{r3}(r, \vartheta, x_3) = -qx_3 / h, \quad q = \text{const},$$

а на плоских гранях $x_3 = \pm h$ виконуються умови ковзного закріплення

$$u_\alpha(r, \vartheta, \pm h) = 0, \quad \sigma_{3\alpha}(r, \vartheta, \pm h) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1)$$

Для розв'язання задачі скористаємося методом [1, 2]. Прийmemo, враховуючи (1), компоненти вектора переміщень u_j у вигляді

$$u_\alpha = \sum_{k=0}^N u_\alpha^{(k)}(x) P_k(\zeta), \quad \alpha = 1, 2, \quad u_3 = \sum_{k=0}^N u_3^{(k)}(x) [P_k(\zeta) - P_{k+2}(\zeta)],$$

а тензор напружень σ_{ij} подамо:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^N \sigma_{ij}^{(k)}(x) P_k(\zeta),$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$, $\zeta = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти (моменти) розвинення, $N = 2n$, $n = 0, 1, \dots$.

Для моментів розвинення, як функцій двох незалежних змінних, побудовано систему диференціальних рівнянь і знайдено її загальний аналітичний розв'язок, виражений через метагармонічні функції V_m і w_s , що є розв'язками рівнянь Гельмгольца. Зі співвідношень пружності знаходимо моменти компонент напружень. В полярній системі координат r, ϑ їх подано в комплексній формі таким чином, звідки отримуємо вирази для граничних умов на контурі кругового отвору на площині S . За заданого навантаження маємо осесиметричну задачу.

Визначивши з граничних умов значення метагармонічних функцій, знаходимо компоненти напружень. Виконано числові розрахунки напруженого стану пластини. В околі порожнини найбільше значення мають поперечні напруження σ_{33} . На рис. 1 наведено криву зміни σ_{33} в залежності від відношення модулів пружності E/E' , а крива на рис. 2 характеризує затухання σ_{33} при віддаленні від поверхні порожнини.

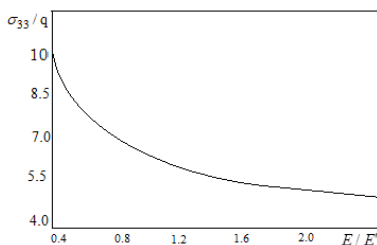


Рис. 1

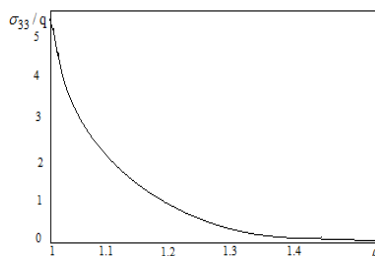


Рис. 2

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3-102.
2. *Khoma I.Yu.* Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. Math. Sci. – 2000. – **101**, № 6. – P. 3577-3584.

ANALYSIS OF THE STRESS STATE OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR CAVITY UNDER A SPLITTING FORCE ON THE SURFACE

Making use of a method allowing for the decomposition of unknown functions into Fourier series by the Legendre polynomials, a system of elastic equilibrium equations is constructed for a transversely-isotropic plate with initial stresses and mixed conditions on the plane boundaries. The normal displacement and the tangential stress on the boundary are supposed to be zeros. The proposed method allows for achieving a universal analytical solution of the mentioned equations.

**ДО ПРОБЛЕМИ ВПЛИВУ ВИДУ КРАЙОВИХ УМОВ НА
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН
ТРАНСТРОПНИХ ПЛАСТИН**

Василь Шваб'юк, Світлана Ротко, Ольга Ужегова

Луцький національний технічний університет (Україна)

v.shvabyuk@gmail.com

Тонкостінні стрижневі, пластинчасті чи оболончасті конструкції при їх експлуатації знаходяться під дією складної системи навантажень. Залежно від цього, для визначення напружено-деформованого стану (НДС) в елементах конструкцій застосовуються різні моделі розрахунку – від класичної теорії тонких пластин і оболонок Кірхгофа–Лява, неklasичних моделей різного рівня, до рівнянь просторової задачі теорії пружності. Існує клас задач, де необхідно використовувати неklasичні теорії згину, за допомогою яких можна розв'язати задачі, котрі неможливо розв'язати за допомогою рівнянь класичної теорії пластин. На сьогодні часто використовуються уточнені теорії пластин і оболонок вищого порядку, що враховують нелінійність переміщень та напружень (див. огляд [3]). Існуючі теорії різняться одна від одної способом задання переміщень та методами отримання рівнянь рівноваги і вимагають задоволення п'яти і більше крайових умов на краях пластин. Способи формування таких умов також можуть між собою різнитися і суттєво впливати на характер НДС.

Аби дослідити вплив цих умов, розглядається згин круглої пластини, жорстко защемленої на краю $r = a$. Крайові умови жорсткого защемлення, враховуючи осесиметричність задачі, можуть мати вигляд [3]:

$$a) u = 0, \gamma_r = 0, w = 0 \quad \text{або} \quad б) u = 0, \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0, \left. W \right|_{z=z_0} = 0, \quad (1)$$

де умова б) враховує нелінійність тангенціальних і нормальних переміщень. Тут u, w, γ_r – переміщення та узагальнений кут повороту серединної поверхні пластини; U, V – функції переміщень пластини; z_0 – віддаль від серединної поверхні пластини. С.А. Амбарцумяном [1], замість другої умови в а), використовується умова $U(a, z_0) = 0$.

Максимальні нормальні напруження у центрі плити та в області її защемлення можна обчислювати за формулами [3], відповідно:

$$\begin{aligned} \sigma_r^\circ(\pm h; 0) &= \pm \sigma_r^{kl}(0) \pm 3q \left[\eta(1+\nu) + 2m \right] / 32 - 0,5A'q; \\ \sigma_r(\pm h; a) &= \mp \sigma_r^{kl}(a) \pm 3q \left[\eta(1+\nu) + 2m \right] / 32 - 0,5A'q, \end{aligned} \quad (2)$$

де $A' = \nu''/(1-\nu)$; $5\eta = 16(\nu'' - 2G/G')/(1-\nu)$, $15m = 4[E/G' + \nu''(9-\nu)]/(1-\nu)$, $\sigma_r^{кл}(0) = 3(1+\nu)qa^2/(32h^2)$; $\sigma_r^{кл}(a) = 3qa^2(16h^2) -$ напруження, знайдені за класичною теорією у центрі плити (σ_r°) та на її краю (в області защемлення), відповідно. Другий і третій члени є *уточненням* до результату класичної теорії тонких пластинок, котре є *сталим* (у центрі плити та на її краю) і не залежить від товщини плити.

Таблиця. Вплив транстропії на значення напружень

h/a —		0,1	0,178	0,2	0,333
σ_r° / q , $z = \pm h$	Кл.теорія	$\pm 11,72$	$\pm 3,701$	$\pm 2,930$	$\pm 1,055$
	С.Амб-н	$\pm 11,69$	$\pm 3,670$	$\pm 2,900$	$\pm 1,025$
	Дана модель	$\frac{7,658}{-7,991}$	$\frac{-0,361}{0,028}$	$\frac{-1,134}{0,799}$	$\frac{-3,008}{2,674}$
σ_r / q , $z = \mp h$	Кл.теорія	$\pm 18,75$	$\pm 5,922$	$\pm 4,687$	$\pm 1,687$
	Дана модель	$\frac{22,48}{-22,81}$	$\frac{9,651}{-9,985}$	$\frac{8,416}{-8,750}$	$\frac{5,416}{-5,750}$

Числові дані, подані у таблиці, пораховано за формулами (2). Вони стосуються транстропного матеріалу ($E/E' = 2$, $G/G' = 5$, $\nu = \nu'' = 0,25$). Порівняння цих даних із даними класичної теорії приводить до висновку про обов'язковість урахування ефектів поперечного зсуву та обтиснення. За умов защемлення (2), коли $\eta \neq 0$, це може бути причиною значного зростання (у 1,5–2 рази) максимальних напружень в області защемлення для середніх товщин ($h/a \leq 0,2$), а для великих товщин ($h/a = 1/3$) навіть більше ніж у три рази (ост. 2 рядки). Разом з тим, у центрі плити такий вид закріплення веде до зниження рівня напружень σ_r° , порівняно з результатами тонких пластинок, або навіть до зміни їх знаку. За умови $\gamma_r = 0$ – параметр $\eta = 0$, а характер зміни напружень стає таким, який уже був відомий раніше [1,2].

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Лехницький С.Г. К теории анизотропных толстых плит // Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машстр. – 1959. – № 2. – С. 141-145.
3. Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. – 264 с.

ON THE PROBLEM OF INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE STRESS-STRAIN STATE OF TRANSTROPIC PLATES

The influence of boundary conditions type on the stress-strain state of a clamped circular plate is studied. Numerical and graphical results are presented for stress distribution along the plate thickness depending on boundary conditions type.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ЦИКЛІЧНОЇ ЗМІНИ ТЕМПЕРАТУРИ ДОВКІЛЛЯ

Віктор Шевчук, Олександр Гавриць

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

shevchuk@iapmm.lviv.ua; dept11@iapmm.lviv.ua

Одним із сучасних та широко застосовуваних в промисловості технологічних способів зміцнення металів, сплавів, деталей машин і механізмів (включаючи вироби з багатошаровими покриттями різноманітного функціонального призначення) є термічна обробка, в якій використовується циклічна багаторазова зміна температури. Зокрема, таким методом зміцнення є термоциклічна обробка за певної кількості циклів з періодами нагрівання та охолодження [3]. В даній роботі, з використанням узагальнених граничних умов теплообміну тіла із середовищем через тонке покриття [4] на основі інтегрального перетворення Лапласа із застосуванням теореми запізнення [2], отримано аналітичні співвідношення для дослідження температурного поля системи півпростір-багатошарове покриття за циклічної зміни з часом температури довкілля.

Розглядається процес конвективної взаємодії з довкіллям півпростору через n -шарове покриття товщиною $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$. Початок координати $z = 0$ розміщено на контактній поверхні покриття з основою, а її додатний відлік спрямовано вглиб півпростору. Процес термоцикловання розділено на K циклів, кожен з яких складається з двох періодів (нагрівання та охолодження) [1]. Тривалість k -го циклу становить $\tau_k - \tau_{k-1}$, а $\tau_{k-1,k}$ ($\tau_{k-1} < \tau_{k-1,k} < \tau_k$) – момент переключення (перехід від нагрівання системи до її охолодження відбувається миттєво).

Одновимірною крайовою задачею теплопровідності формулюється так [4]:

$$\frac{\partial t_{\Pi}(z, \tau)}{\partial \tau} = a_{\Pi} \frac{\partial^2 t_{\Pi}(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$t_{\Pi}|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$t_{\Pi} \rightarrow t_0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\lambda_{\Pi} \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_{\Pi}}{\partial z} + \mu (t_C(\tau) - t_{\Pi}) = \Omega \frac{\partial t_{\Pi}}{\partial \tau} \text{ при } z = 0, \quad (4)$$

де (4) – узагальнена гранична умова [4]; $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$, $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \rho_i \delta_i$ – приведені термоопір і теплоємність покриття;

$$t_C(\tau) = \sum_{k=1}^K \left[t_C^{(k,1)} S(\tau - \tau_{k-1}) + (t_C^{(k,2)} - t_C^{(k,1)}) S(\tau - \tau_{k-1,k}) \right] \times \\ \times [S(\tau - \tau_{k-1}) - S(\tau - \tau_k)]; \quad (5)$$

t , $a = \lambda / (\omega \rho)$, λ , ω , ρ – температура, температуропровідність, теплопровідність, питома теплоємність, густина; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і середовищем; $t_C(\tau)$ – кусково-стала функція часу температури середовища; $S(\tau)$ – функція Гевісайда; $t_C^{(k,1)}$, $t_C^{(k,2)}$ – температури середовищ першого та другого періодів k -го циклу. Індексами i , Π , C та k позначено величини, що відносяться до i -го шару покриття, півпростору, середовища та номеру циклу відповідно.

Отримано аналітичний розв'язок задачі, на підставі якого проведено розрахунок температурного поля системи півпростір-багат шарове покриття для різних тривалостей періодів циклу нагрівання-охолодження, проаналізовано вплив умов теплообміну (зміни коефіцієнта теплообміну) в одному циклі, проілюстровано багатоциклічний вплив довкілля на розподіл температури в системі. Такі аналітичні співвідношення є простими і зручними при теоретичному виборі раціональних режимів термообробки для надання потрібних експлуатаційних властивостей виробів з багат шаровими покриттями.

1. *Курсанов Ю.А.* Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухонагревателях. – Москва: Физматлит, 2007. – 240 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
3. *Тихонов А.С., Белов В.В., Леушин И.Г., Еременко В.И., Забелин С.Ф.* Термоциклическая обработка сталей, сплавов и композиционных материалов – Москва: Наука, 1984. – 186 с.
4. *Shevchuk V.A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // Ed. R.B. Hetnarski. Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht Heidelberg New York London: Springer, 2014. – 4. – P. 1942-1953.

INVESTIGATION OF TEMPERATURE FIELD FOR A HALF-SPACE WITH A MULTILAYER COATING UNDER CYCLIC BOUNDARY CONDITION

With the use of generalized boundary conditions and the Laplace integral transform, the analytical relations for investigation of temperature field of the multilayer coating/half-space assembly under convective thermal cycling with a piecewise constant time function of the environment temperature have been obtained.

ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КРИВОЛІНІЙНОЮ МЕЖЕЮ ПОДЛІУ МАТЕРІАЛІВ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ

Євген Ярема, Віктор Опанасович, Микола Слободян

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

evhenbro@gmail.com; slobkolia@gmail.com

Досліджена задача про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з пружною шайбою довільної форми та прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі тріщини,

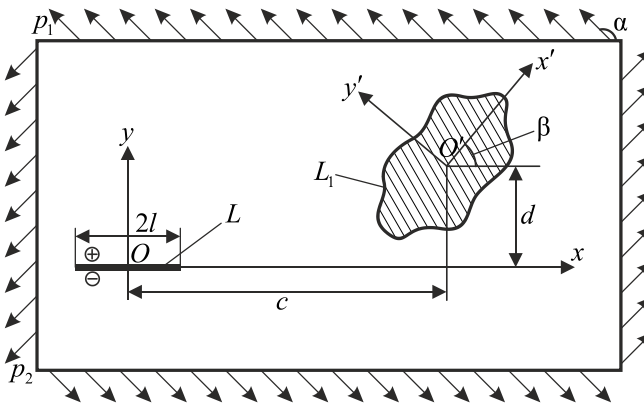


Рис. 1 Схема розміщення шайби та тріщини

направивши вісь Ox по ній. З точкою пружної шайби O' (c, d), пов'яжемо локальну систему координат $O'x'y'$, причому вісь $O'x'$ утворює кут β з віссю Ox . На нескінченності пластинка знаходиться під дією рівномірно розподілених зусиль p_1 і p_2 , причому зусилля p_1 утворює кут α з віссю Ox . Контур отвору позначимо через L_1 , контур тріщини – через L (див. рис. 1).

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L,$$

$$N_1 + iT_1 = N_2 + iT_2, \quad u_1 + iv_1 = u_2 + iv_2, \quad t \in L_1,$$

де σ_{yy}^{\pm} , σ_{xy}^{\pm} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат Oxy , N_j і T_j – відповідно нормальна та дотична компоненти навантаження, а u_j і v_j – компоненти переміщення на L_1 , ($j=1,2$); значками «+» та «-» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні точки площини до лінії, відповідно при $y \rightarrow \pm 0$, $i^2 = -1$.

У більшості наукових праць розв'язок задач такого типу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на отворі так і на тріщині. У даній роботі запропоновано підхід до розв'язування сформульованої задачі, який базується на використанні методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі [1], при цьому крайові умови на берегах прямолінійної тріщини вдалося задовольнити аналітично, а на межі шайби отримано сингулярне інтегральне рівняння:

$$A_1 g_1(t) + \int_{L_1} \left[g_1(u) K(u,t) du + \overline{g_1(u)} M(u,t) d\bar{u} \right] = \rho(t), \quad t \in L_1,$$

де $g_1(u)$ та $g_1(t)$ – шукані функції, а $K(u,t)$, $M(u,t)$, $\rho(t)$ та A_1 – ядра та відомі функції.

Сингулярне інтегральне рівняння розв'язувалось числово з використанням методу механічних квадратур [2]. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень за різних значень параметрів задачі та побудовано відповідні графічні залежності.

1. *Мухелішвілі Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

TWO-AXIAL STRETCHING OF PIECEWISE UNIFORM ISOTROPIC PLATE WITH CURVILINEAR BOUNDARY BETWEEN MATERIALS AND RECTILINEAR CRACK

This paper deals with the study of stress-strain state of the plate with elastic washer and rectilinear crack. The plate at infinity has a uniform field of efforts. Using methods of the theory of functions of a complex variable and Kolosova-Muskhelishvili complex potentials the solution of the problem is reduced to a singular integral equation on the washer. Boundary conditions on the edges of the rectilinear crack are satisfied analytically. We provide a numerical analysis of stress intensity factors presented graphically for different values of parameters of the problem.

PLANE THERMOELASTIC DEFORMATION OF A THREE-LAYER PLATE WITH ELASTIC LINKS BETWEEN THE LAYERS

Nina Antonenko

Zaporizhzhya National Technical University (Ukraine)

antonenkonina@i.ua

A plate formed by three homogeneous isotropic elastic layers is considered under the conditions of plane thermoelastic deformation. Each layer is characterized by thickness h_k , Lamé coefficients μ_k and λ_k , heat-conduction coefficient k_{Tk} , and coefficient of thermal expansion α_{Tk} ($k = \overline{1,3}$). Assume the elastic links to be acting between the layers [1] and the conditions of perfect thermal contact are satisfied on the interfaces. On the top and bottom boundaries of the plate, the stresses and the temperature are known. The objective is to determine the distribution of stresses, displacements, and temperature in the plate under the foregoing conditions.

We enumerate the layers from top to bottom beginning with 1. For each layer, we introduce a local Cartesian coordinate system $O_k x_k z_k$ with the origin located on the upper boundary of a layer so that the $O_k z_k$ -axes of all coordinate systems coincide with each other and are directed inwards the corresponding layer. The $O_k x_k$ -axes are parallel to the $O_1 x_1$ -axis and coincide with the boundaries of the corresponding layers.

The boundary conditions take the following form:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,1}(x,0) &= \sigma(x), \quad \tau_{xz,1}(x,0) = \tau(x), \quad T_1(x,0) = f(x), \\ \sigma_{z,3}(x,h_3) &= \tilde{\sigma}(x), \quad \tau_{xz,3}(x,h_3) = \tilde{\tau}(x), \quad T_3(x,h_3) = \tilde{f}(x).\end{aligned}$$

The interface conditions are as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,k+1}(x_k,0) &= \sigma_{z,k}(x_k,h_k), \quad w_{k+1}(x_k,0) = w_k(x_k,h_k) + r_k \sigma_{z,k}(x_k,h_k), \\ u_{k+1}(x_k,0) &= u_k(x_k,h_k) + m_k \tau_{xz,k}(x_k,h_k), \quad \tau_{xz,k+1}(x_k,0) = \tau_{xz,k}(x_k,h_k), \\ T_{k+1}(x_k,0) &= T_k(x_k,h_k), \quad k_{Tk+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x_k,0) = k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x_k,h_k), \quad k = 1,2,\end{aligned}$$

where $m_k \geq 0$ and $r_k \geq 0$ are the coefficients of tangential and normal elastic links, respectively.

To solve the problem, the one-dimensional integral Fourier transformation is

used. For each layer, we introduce six auxiliary functions:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{z,k}(\xi, 0), \beta_k = \mu_k p \bar{w}_k(\xi, 0), \gamma_k = \mu_k(-i\xi \bar{u}(\xi, 0)), \delta_k = \frac{-i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz,k}(\xi, 0),$$

$$\eta_k = \bar{T}_k(\xi, 0), \varepsilon_k = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}_k}{dz}(\xi, 0), k = \overline{1,3}.$$

where ξ is an integral transformation parameter, $p = |\xi|$, $i^2 = -1$.

The Fourier transforms of the displacements, stresses, and functions used to describe the temperature and heat flux at the points of a layer can be represented in the form of linear combinations of the auxiliary functions [2]. For our problem, three auxiliary functions can be found from boundary conditions. To find the rest of unknown auxiliary functions, the recurrent formulas are constructed. We have proved that the auxiliary functions are dependent:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_4 + K_k \eta_k + L_k \eta_4, \varepsilon_k = -D_k \eta_k + F_k \eta_4, \quad (1)$$

where A_k , B_k , K_k and L_k are compliance matrices (their components are called compliance functions), D_k , F_k – compliance functions of thermoelastic plate, $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t$, $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t$, $\bar{\alpha}_4 = (\bar{\sigma}(\xi), \bar{\tau}(\xi))^t$, $\eta_k = \bar{f}(\xi)$, $k = \overline{1,3}$. We constructed the recurrence relations for the compliance matrices and compliance functions of thermoelastic plate. Having determined the compliance matrices and functions, we can find all auxiliary functions from (1). Then we can substitute the determined auxiliary functions into the expressions for the transforms of stresses, displacements and temperature, and apply the inverse Fourier transformation to these expressions.

1. Антоненко Н.М. Плоска деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2013. – 23, № 1089. – С. 15-21.
2. Величко І.Г., Ткаченко І.Г. Плоска термомпружна деформація багатошарової основи // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – 1, № 6. – С. 154-161.

ПЛОСКА ТЕРМОПРУЖНА ДЕФОРМАЦІЯ ТРИШАРОВОЇ ПЛИТИ З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ МІЖ ШАРАМИ

Запропоновано спосіб розв'язання плоскої стаціонарної задачі термомпружності для тришарової плити з пружними зв'язками між шарами. Розв'язок задачі базується на методі функцій податливості з використанням одномірного інтегрального перетворення Фур'є. Побудовано рекурентні формули для розрахунку матриць податливості, які враховують вплив теплових навантажень та наявності пружних зв'язків між шарами.

**ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL EVALUATION
OF STRESSES IN ELASTIC ANNULI SUBJECTED TO THREE-POINT
LOADING ON THE PERIPHERY**

Yuriy Tokovyv, Yu-Hsi Huang, Chien-Yu Yen, Chien-Ching Ma

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;

National Taiwan University of Science and Technology (Taiwan, R.O.C.);

³National Taiwan University (Taiwan, R.O.C.)

tokovyv@gmail.com; yhhuang@mail.ntust.edu.tw; cma@ntu.edu.tw

The development of theoretical and experimental techniques for the evaluation of stresses in cylinders or disks subjected to external loadings over some parts of the circumference is a topical problem for both practical engineering (concerning, e.g., the compression of rollers and tubes, chain links in tension, etc.) and material science (e.g., determination of tensile strength and toughness, etc.). An important example of such problems refers to the case of diametric compression applied over the outer periphery of a cylinder or a disk [1]. There also exist a number of solution techniques for the analysis of plane problems for elastic plates subjected to systems of equidistant concentrated or locally-distributed forces [2]. However, there is lack of solutions for the dissimilar distances between the forces.

This talk addresses a plane-stress problem in the case, when a vertical local force P_0 is applied to the upper point of an annular plate which rests upon two flat and rigid supports (Fig. 1) with no friction. By changing the distance between the supports (angle θ), we can manage the distance between the two equivalent local forces emanating on the bottom part of the ring due to its reaction to the applied vertical force. The Fourier-series representations for the stress-tensor components are obtained and analyzed. It is shown that due to the absence of friction on the supporting platens, the emanated forces appear as $Q = 0$ and $P = k_0 P_0$, where

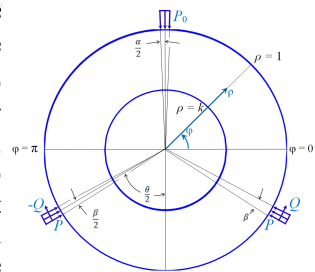


Fig. 1

$$k_0 = \frac{\sin(\alpha/2)}{2\sin(\beta/2)\cos(\theta/2)}.$$

A series of photoelastic experiments are conducted and compared with the theoretical prediction made on the basis of the solution constructed.

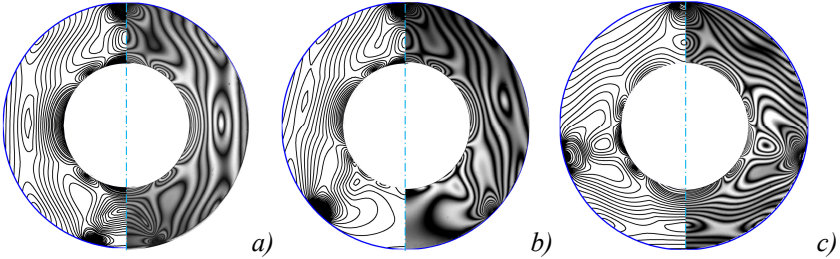


Fig. 2 Theoretical predictions (left half-rings) and experimental fringe patterns (right half-rings) for the agnle $\theta = \pi / 6$ (a), $\pi / 2$ (b), $5\pi / 6$ (c), when the inner radius is a half of the outer one

In the poplariscope, the interference fringes under load in the photoelastic experiment are represented as $N = (\sigma_1 - \sigma_2)H / f_\sigma$, where σ_1 and σ_2 are the in-plane principal stresses, N denotes the fringe order, H indicates thickness of the specimen, and f_σ is the material fringe constant, which is 7 kPa / fringe / m for the polycarbonate PSM-1 (used for the specimens examined). The comparison between the experimental measurements and theoretical prediction is demonstrated in Fig. 2, which presents the computed maximum shearing stress versus the online subtraction of the dark- and light-field regimes by making use of the image processing software MATLAB. We observe the perfect agreement between the experimental and theoretical results, although, a slight difference can be seen in the close vicinity of loaded parts of the periphery. This can be explained by the mismatch in the loading angles $\alpha = \beta$ (Fig. 1) in computation and the actual angle in the experiment. This effect, however, rapidly vanishes when moving away from the loaded boundary.

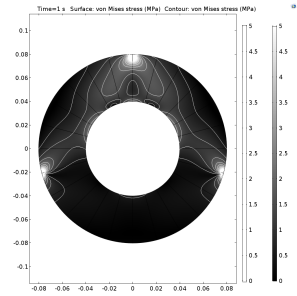


Fig. 3 The FE simulation of the case when the supporting platens rigidly fixed to the rim of the plate $\theta = 5\pi / 6$

Different cases of mixed-type boundary conditions at the contact with supporting platens are discussed. By making use of the finite element (FE) simulation, it was shown that, in contrast to the conditions of rigid clamping (Fig. 3), the boundary conditions of the sliding support provide the same result as the analytical solution with boundary conditions in terms of stresses.

1. Tokovyy Y.V., Hung K.-M., Ma C.-C. Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 342-354.
2. Hemsley J.A. Glass in engineering science. Vol. 2 Glass under load. – Chapeltown: Society of Glass Technology, 2016. – 757 p.

UDC 539.3

**EFFECT OF THE TIME-DEPENDENT PROFILE OF FRICTION POWER
ON THE TEMPERATURE AND THERMAL STRESSES
IN A PAD-DISC BRAKE SYSTEM**

Aleksander Yevtushenko, Michał Kuciej, Katarzyna Topczewska

*Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics
and Applied Computer Science, Bialystok University of Technology (Poland)*

a.yevtushenko@pb.edu.pl; m.kuciej@pb.edu.pl; k.topczewska@doktoranci.pb.edu.pl

The frictional heating process during single braking, with different time-dependent profiles of specific friction power was mathematically modeled. The analytical model was formulated in the form of a one-dimensional boundary-value heat conduction problem for a pad and disc brake, which were replaced by two homogeneous semi-spaces. By means of Duhamel's theorem [1], solutions were obtained for ten braking modes (each with different temporal profile of friction power, but with the same braking work at the same time of braking). Based on received transient temperature fields and Timoshenko model of thermal bending of a thick plate with unfixed edges [2], the distributions of quasi-static thermal stresses in this tribosystem were found analytically. A numerical analysis to compare results for different profiles of friction power was performed for a friction pair consists of a cast iron disc and a pad made of retinax. Obtained results show that time profile of the specific power of friction has a profound influence on evolution of the temperature and thermal stresses on the disc-pad contact surface, and also on their spatio-temporal distributions inside the elements of friction couple. There is a direct relation between the maximum value of the specific friction power and temperature. It was established, that frictional heating during some specific braking modes can cause the generation of the tensile stresses on the contact surface of a disc in a radial direction. The change of compressive stresses into tensile may indicate the initiation of the microcracks on friction surface.

1. *Necati Özışık M.*. Heat conduction. – New York: John Wiley & Sons, 1993. – 692 p.
2. *Hetnarski R.B., Eslami M.R.* Thermal stresses – advanced theory and applications. – New York: Springer, 2009. – 559 p.

MODELLING TEMPERATURE ON THE CONTACT SURFACE OF THE FRICTION ELEMENTS DURING OPTIMAL BRAKING MODE**Aleksander Yevtushenko, Michał Kuciej, Katarzyna Topczewska***Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics and Applied Computer Science, Białystok University of Technology (Poland)*a.yevtushenko@pb.edu.pl; m.kuciej@pb.edu.pl; k.topczewska@doktoranci.pb.edu.pl

Determination of the friction power and work characteristics during braking process is necessary for temperature and strength calculations of the frictional elements of the braking system. Optimal braking mode is characterized by friction power, which value increases from zero at the initial moment and leads to zero at the stop moment [2]. Such profiles of friction power are formed during braking with exponential increase of contact pressure [1].

In this work the comparative analysis of the temperature evolution on the disc-pad contact surface during optimal braking mode was performed for three different descriptions of temporal profile of specific friction power. These profiles were designated based on solution to the differential equation of motion with initial condition for exponential or linear rise of pressure and using approximate equations. Thermal contact problem of friction was formulated for two semi-spaces, which mimics the real friction elements of braking system. Exact solutions to this problem were obtained with account of determined temporal profiles of specific friction power. The results of performed numerical analysis of analytical solutions shows that superficial temperature found from approximation formulas has lower values than temperature obtained with the exponential pressure increase. These differences are higher for processes with long-lasting rise of the pressure to the nominal value. Increasing the time of nominal pressure achievement, the maximum value of surface temperature decreases linearly and the time of its attaining grows, and also the time of the whole process duration increase.

1. *Jewtuszenko O.* (ed). Analytical and numerical modelling of process of transient heat generation in friction components of brake systems. – Białystok: Pub. Tech. University of Białystok, 2014. – 251 p. [in Polish].
2. *Kuciej M.* Analytical models of transient frictional heating. – Białystok: Pub. Tech. University of Białystok, Białystok, 2012. – 235 p. [in Polish].

МЕХАНІКА НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ І НАНОМЕХАНІКА

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ КОАКСІАЛЬНИХ ТОВСТОСТІННИХ ТРУБ. СПРОЩЕНА МОДЕЛЬ

Костянтин Барахов, Сергій Куреннов

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ» (Україна)

kpbarakhov@gmail.com; kurennov.ss@gmail.com

Розв'язана осесиметрична задача про знаходження напружено-деформованого стану напускного клейового з'єднання двох коаксіальних товстостінних труб, які навантажені поздовжніми зусиллями. Розглянута задача є розвитком на осьову симетрію задачі про дослідження двовимірного напруженого стану з'єднання [1].

Аналітичний розв'язок побудовано за гіпотезою про відсутність переміщень у радіальному напрямку. Тобто при деформації елементи шарів мають переміщення тільки у поздовжньому напрямку, і залежать від радіальної та поздовжньої координати, а клейовий шар працює виключно на зсув. Задачу зведено до системи диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних відносно поздовжніх переміщень. Однорідні крайові умови на внутрішній та зовнішній поверхні з'єднання (а саме відсутність дотичних напружень) дозволяють застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок має вигляд розкладу переміщень в ряд за власними функціями. Власні функції не є ортогональними, тому крайові умови на торцях труб призводять до нескінченної системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Доведена можливість застосування до системи методу редукції.

Розглянуто кілька граничних випадків: з'єднання нескінченної довжини, з'єднання композитної труби з металічним фітінгом, який внаслідок високої жорсткості на зсув розглядається як стрижень, що працює на розтяг-стик.

1. Куреннов С.С. О распределении напряжений по толщине клевого соединения // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2016. – Вып. 4. – С. 80–89.

STRESSED STATE OF THE SEMI-FINISHED ADHESIVE. APPROXIMATE TWO-DIMENSIONAL MODEL

The axisymmetric problem of finding the stress-strain state of the lap joint gluing of two coaxial thick-walled pipes that are loaded by longitudinal forces is solved. The analytical solution is based on the hypothesis that there are no displacements in the radial direction. The solution has the form of an expansion of displacements in a series in eigenfunctions. Own functions are not orthogonal.

**ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ
ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ З НАНОВКЛЮЧЕННЯМ****Іванна Бутрак, Тетяна Слободенюк***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*butrak@ukr.net; kilnytska@i.ua

Вивчення хвильових полів у композитних матеріалах з ускладненими умовами контакту між складовими матриці [1] перенесено на дослідження сучасних інноваційних наноматеріалів. Здійснено гранично-інтегральне формулювання тривимірних задач хвильового навантаження пружної матриці з поодиноким об'ємним нановключенням довільної форми. Запропоноване формулювання включає побудову інтегральних подань параметрів пружно-динамічного поля як у матриці, так і нановключенні, у вигляді комбінацій потенціалів Гельмгольца у частотній області, та виведення граничних інтегральних рівнянь (ГІР) стосовно компонент динамічних переміщень і напружень на міжфазних поверхнях. Ці рівняння доповнюються неklasичними контактними умовами Гертіна-Мердока, які з механічної точки зору наділяють поверхню поділу матриці і нанорозмірного включення мембранними властивостями і поверхневим натягом. Важливою для числової симуляції особливістю запропонованих моделей методу граничних елементів є зменшення розмірності результуючої системи рівнянь через неявне врахування у ГІР умов неперервності міжфазних переміщень зі сторони матриці і нановключення. Тоді замкнутість системи ГІР досягається розглядом лише заданого диференціального зв'язку між компонентами переміщень і стрибків напружень на нанорозмірній поверхні поділу матеріалів.

Робота виконана за підтримки НАНУ-УНТЦ (проект № 6247).

1. Butrak I.O., Kil'nitskaya T.I., Mikhas'kiv V.V. The scattering of an harmonic elastic wave by a volume inclusion with a thin interlayer // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – 76, No 3. – P. 342-347.

**BOUNDARY INTEGRAL FORMULATION OF THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEM
OF ELASTIC WAVE PROPAGATION BY A NANOINCLUSION**

A three-dimensional problem of elastic wave propagation in matrix composite with a nano-inclusion is reduced to the boundary integral equations system relative to the dynamic displacement and stresses components on interfacial surface. Completeness of the system is achieved by the Gurtin-Murdoch contact conditions.

АНАЛІЗ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ З ТРІЩИНОЮ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПРЯМОГО ВИРІЗУВАННЯ

Кирил Васільєв

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С Підстригача*

dept19@iapmm.lviv.ua

Метод прямого вирізування полягає у моделюванні обмеженого тіла з тонкими неоднорідностями за допомогою тіла простішої геометричної форми, проте з додатковими тонкостінними об'єктами – тріщинами та абсолютно жорсткими включеннями великих, але скінченних лінійних розмірів. За допомогою таких додаткових неоднорідностей формуємо межі досліджуваного тіла. Крайові умови першого чи другого роду задаємо навантажуючи береги тріщин, чи задаючи переміщення берегів абсолютно жорстких включень відповідно. Завдяки цьому обмежене тіло з включеннями при заданих на його межах крайових умовах моделюється набагато простішою задачею зокрема для простору зі збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, для якого безпосередньо і розв'язується простіша система сингулярних інтегральних рівнянь збільшеного розміру.

Раніше метод прямого вирізування був успішно апробований на задачах поздовжнього зсуву ізотропних тіл, зокрема шаруватих структур [3], клина [2] та бруса [1] з тонкими дефектами. Тут на прикладі дослідження поздовжнього зсуву анізотропного півпростору зі симетрично навантаженою тріщиною вивчена можливість застосування запропонованого підходу до анізотропних тіл.

Розглядається анізотропний півпростір з вільною від навантаження межею і паралельною до неї симетрично навантаженою тріщиною. Згідно методу прямого вирізування задача зводиться до знаходження напружено-деформованого стану простору з двома тріщинами.

Для анізотропного середовища з пружними характеристиками матеріалу a_{ij} ($i, j = 4, 5$) напружений стан простору з двома паралельними до осі абсцис тріщинами L_j подамо у вигляді [4]

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \left[\left(g_p t_5^j(z) - \bar{g}_m t_5^j(\bar{z}) \right) + \frac{i}{a_{55}\alpha} \left(g_p t_6^j(z) + \bar{g}_m t_6^j(\bar{z}) \right) \right]. \quad (1)$$

Тут

$$t_r^j(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f_r^j(t) dt}{t - z^j} \quad (r = 5, 6; j = 1, 2), \quad g_p = \beta + i(\alpha + 1), \quad g_m = \beta + i(\alpha - 1),$$

$$z^j = x - x_{0j} + (\beta + i\alpha)(y - y_{0j}); \quad \alpha = \frac{\sqrt{a_{44}a_{55} - (a_{45})^2}}{a_{55}}, \quad \beta = \frac{a_{45}}{a_{55}};$$

f_r^j ($r = 5, 6$) – невідомі функції стрибків напружень і похідних від переміщень для першого ($j = 1$) і другого ($j = 2$) дефекта; x_{0j}, y_{0j} ($j = 1, 2$) – координати центрів тріщин. З використанням формули Сохоцького-Племелі та відомих значень напружень на берегах тріщин задача зводиться до розв’язування системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків. Додаткові умови рівноваги та однозначності переміщень при обході навколо кожного з дефектів дають змогу розв’язати результуючу систему, зокрема методом колокацій. Проаналізовано вплив відносних розмірів тріщин та відстані між ними на збіжність коефіцієнта інтенсивності напружень досліджуваної тріщини.

1. Васильєв К.В., Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Антиплоска деформація квадратного в плані тіла із внутрішньою тонкою неоднорідністю // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – **70**. – С.165-176.
2. Васильєв К.В., Сулим Г.Т. Застосування методу прямого вирізування до розв’язування задачі поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 117-126.
3. Васильєв К.В., Сулим Г.Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // Машинознавство. – 2006. – № 11-12. – С. 10-17.
4. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // J. Theor. And Appl. Mech. – 1999. – **37**, № 1. – P. 47-63.

ELASTIC EQUILIBRIUM ANALYSIS OF ANISOTROPIC HALF-SPACE WITH A CRACK AT LONGITUDINAL SHEAR USING THE DIRECT CUTTING-OUT METHOD

Developed earlier direct cutting-out method was extended to solve mode iii problems of anisotropic bodies with cracks. Idea of the method consists in forming shape of investigated body with thin defects by using the body of simpler geometry with exactly placed thin inhomogeneities and additional defects – cracks and absolutely rigid inclusions which model boundaries of the studied body. The verification of the developed approach was carried out on the problem of longitudinal shear of anisotropic half-space with a crack.

ВИМУШЕНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОРОЖНИСТОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ З ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ

Олександр Григоренко, Ігор Лоза, Лариса Васильєва

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

Національний транспортний університет (Україна);

Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського (Україна)

ayagrigorenko1991@gmail.com; lozaigor1956@gmail.com; lara@vasiliev.mk.ua

Розглянуто задачу про вимушені осесиметричні коливання порожнистої кулі з функціонально градієнтного п'єзокерамічного матеріалу. Матеріал кулі складається з двох компонент – сталі та п'єзокераміки. Його характеристики змінюються по товщині за законом: $P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p$; в цій формулі P_m – фізико-механічні характеристики сталі, P_p – фізико-механічні характеристики п'єзокераміки, а $V(r)$ – об'ємна частка п'єзокераміки і визначається формулою: $V(r) = \left(\frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2}\right)^n$, ($0 \leq n < 1000$). Внутрішня та зовнішня поверхні кулі вільні від механічних навантажень $\sigma_r(r, \theta, t)|_{r=R_0-h} = \tau_{rz}(r, \theta, t)|_{r=R_0-h} = 0$, а також вкриті тонкими електродами, розрізаними по координаті: $\left(R_0 \pm h, \frac{\pi}{2}\right)$. До електродів наведено змінний електростатичний потенціал $\pm V_0 e^{i\omega t}$ із зсувом по фазі між зовнішньою та внутрішньою поверхнями на $\frac{\pi}{2}$. Компоненти вектору розв'язку шукаємо у вигляді розвинення у ряди по поліномам Лежандра:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r, \tau_{r\theta}, \Phi, \\ u_r, u_\theta, D_r \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \lambda \sigma_r^k(r), \lambda \tau_{r\theta}^k(r) \frac{d}{d\theta}, h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \Phi^k(r), \\ hu_r^k(r), hu_\theta^k(r) \frac{d}{d\theta}, \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r^k(r) \end{array} \right\} P_k(\cos \theta) e^{i\omega t}.$$

На бічних поверхнях функцію електростатичного потенціалу шукаємо у вигляді:

$$\Phi^+(R_{0+h}, \theta) = -V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta); \quad \Phi^-(R_{0+h}, \theta) = +V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta),$$

$$\text{де } \alpha_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 H(y)P(y)dy.$$

Такий вибір вектора розв'язку дозволяє перейти від вихідної задачі у частинних похідних до крайової задачі зі змінними коефіцієнтами у звичайних диференціальних рівняннях $\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R}$ з крайовими умовами

$$\mathbf{B}_1\mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2\mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2; \text{ тут } \mathbf{C}_1^T = \{0, 0, -V_0, 0, 0, 0\}, \mathbf{C}_2^T = \{0, 0, +V_0, 0, 0, 0\}.$$

Для розв'язання отриманої крайової задачі застосовано стійкий метод дискретної ортогоналізації. Наведено результати чисельного аналізу даної задачі. Досліджено вплив фактору неоднорідності на динамічні та кінематичні характеристики вимушених коливань кулі.

FORCED AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF HOLLOW PIEZOCERAMIC SPHERE MADE OF FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL

The axisymmetric problem of forced vibrations of a hollow sphere made of functionally gradient piezoelectric material is solved. The properties of the material change continuously along a radial coordinate. The external surface of the sphere is free of tractions and coated by electrodes. These electrodes are cuted at the coordinate $\left(R_0 \pm h, \frac{\pi}{2}\right)$. Oscillating electrostatic potential is applied to electrodes: $\pm V_0 e^{i\omega t}$. After representation of the components of the mechanical and dielectric displacements, of the stress tensor and of the electrostatic potential in terms of spherical functions, the initially three-dimensional problem is reduced to a boundary-value problem expressed by ordinary differential equations. This problem based on a stable discrete-orthogonalization technique is solved. Moreover a numerical investigation is performed based on the algorithm used for solving the problem. In particular the influence of the inhomogeneous on the forms of vibrations of an inhomogeneous piezoceramic thick-walled sphere are considered.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У
НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ КЛИНОВИДНИХ
ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Андрій Громик

Подільський державний аграрно-технічний університет (Україна)

gapon74@gmail.com

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \right. \\ \left. \varphi \in (0; \varphi_0), \varphi_0 < 2\pi; z \in (0; +\infty) \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [2]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad (1) \\ z \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з відповідними початково-крайовими умовами, умовами спряження [1]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=R_k} = 0; j = 1, 2, k = \overline{1, n} \quad (2)$$

й одними з крайових умов на гранях клина

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}. \quad (6)$$

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто 4 канонічні випадки:

1. $R_0 = 0, R_{n+1} = +\infty$ (клиновидний півпростір)
2. $R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty$ (клиновидний півпростір з порожниною)
3. $R_0 = 0, R_{n+1} = R < +\infty$ (напівобмежений клиновидний суцільний циліндр)
4. $R_0 > 0, R_{n+1} = R < +\infty$ (напівобмежений клиновидний порожнистий циліндр)

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j = 0$ ($j = \overline{1, n+1}$) рівняння (1) є класичними тривимірними неоднорідним хвильовим рівняннями (рівняннями коливань) для ортогоного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0; \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0; \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k; \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k; \beta_{22}^k = 0$ (E_1, E_2 – модулі Юнга), то умови спряження (2) збігаються з умовами ідеального механічного контакту. Таким чином, розглянуті гіперболічні крайові задачі математичної фізики можна вважати узагальненими математичними моделями коливних процесів у напівобмежених за змінною z кусково-однорідних за радіальною змінною r клиновидних за кутвою змінною φ циліндрично-кругових середовищах.

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних крайових задач (математичних моделей) одержано методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень з використанням методу головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних клиновидних середовищах, які описуються циліндричною системою координат. Проведено аналіз одержаних розв'язків в залежності від типу крайових умов на гранях клина $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ (Діріхле-Діріхле; Діріхле-Неймана; Неймана-Діріхле; Неймана-Неймана).

1. *Конет І.М., Пилипюк Т.М.* Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка – Світ, 2017. – 84 с.
2. *Самойленко В.Г., Конет І.М.* Рівняння математичної фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 283 с.

MATHEMATICAL MODELING OSCILLATORY PROCESSES IN SEMI-CONFINED WEDGE-SHAPED PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICAL-CIRCULAR ENVIRONMENTS

By means of method integral transforms and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (matrix influence and Green's matrix) built an exact analytical solution of a generalized mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic initial-boundary value problems conjugation) in semi-confined wedge-shaped piecewise homogeneous cylindrical-circular environments.

УДК 539.3

**ВПЛИВ НАНОРОЗМІРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА МЕХАНІЧНІ
ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМИ МАТРИЦЯ-ВКЛЮЧЕННЯ
ДЛЯ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОГО ОБ'ЄМУ НАНОМАТЕРІАЛУ**

Кирило Дегтярьов, Олена Стрельнікова, Василь Гнітько

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

kdegt89@gmail.com; elena15@gmx.com; gnitkovi@gmail.com

У роботі досліджено поведінку репрезентативного обсягу матеріалу нанокомпозиту, визначені деформації та напруження по всьому досліджуваному об'єму для двох варіантів розрахунку. У першому варіанті розглядалася матриця у вигляді шестигранної призми, що повністю складається з однорідного матеріалу. У другому варіанті розрахунку розглядалася ця ж матриця з додаванням включення, у вигляді сфери витягнутої форми, матеріал якого має параметри, що значно перевищують параметри матеріалу, використовуваного в матриці. Проведено порівняння результатів двох розрахунків, що визначило основну мету роботи.

Результати розрахунку демонструють значну зміну властивостей нанокомпозиту, зміну напружено деформованого стану, відмінність числових результатів у порівнянні з базовою матрицею. В цілому більш міцне включення нанокомпозиту, під час навантаження розтягу, приймає на себе більшу частину навантаження і пручається значно сильніше, ніж однорідний матеріал. Описані ефекти призводять до зменшення числових значень таких параметрів, як максимальна пластичність, загальна деформація, еквівалентне за Мізесом напруження.

Дане дослідження проводилося за підтримкою Українського Науково Технічного Центру та Національної академії наук України у рамках проекту № 6247

**EFFECTS OF NANOSCALE INCLUSION ON MECHANICAL PROPOERTIES OF
REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENTS FOR MATRIX - INCLUSION COMPOSITES**

Purpose of this paper is to investigate influence of nanoscale inclusions on elastic behavior of representative volume elements under stress. Elastic deformations and stresses are calculated for system with stiff inclusion and without it.

**ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА
СТРУКТУНО-НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ
ЗА ІНТЕНСИВНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Богдан Дробенко, Олександр Бурик, Володимир Харченко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

КБ "Південне" ім. М.К. Янгеля (Україна)

drobenko@ukr.net; sashanettm@gmail.com; volod.kharchenko@meta.ua

При виготовленні сучасних конструкцій, машин і механізмів повстає складний багатоступінчатий процес математичного, чисельного і комп'ютерного моделювання механічної поведінки елементів конструкцій за умов їхнього виготовлення та експлуатації, створення відповідного фізичного прототипу, його тестування і, нарешті, промисловий випуск остаточного продукту. Комп'ютерне моделювання дає змогу провести весь процес у віртуальному просторі без фізичної побудови відповідної механічної системи. Результатом цього етапу є раціональний проект розглядуваної механічної системи. На цій основі виготовляють відповідний зразок, який проходить випробування. Після успішних випробувань починається серійний випуск продукції. Процес математичного, чисельного та комп'ютерного моделювання визначає весь цей процес з самого початку, а тому вимоги до нього з погляду адекватності використовуваних математичних моделей і методів, точності, достовірності і швидкості отримуваних результатів постійно зростають.

Елементи конструкцій в процесі виготовлення та під час експлуатації часто зазнають впливу інтенсивного комплексного навантаження, зокрема, термосилового. Тому виникає практична потреба в розробці ефективних методик дослідження термомеханічних процесів у твердих деформівних тілах за інтенсивного термосилового навантаження.

Розроблено орієнтовану на метод скінченних елементів методику визначення і дослідження параметрів термомеханічного стану твердих деформівних тіл складної геометричної форми та структури за дії термосилового навантаження з урахуванням термочутливості матеріалів і нелінійного характеру деформування. За основу прийнято просторово тривимірний підхід. Температурне поле в тілі описує нестационарне рівняння теплопровідності, а процеси деформування – співвідношення теорії неізотермічної термопружності. При розробці методики чисельного розв'язування сформульованих на цій основі задач нелінійної термомеханіки використано апроксимаційний апарат, який дає змогу враховувати складні залежності властивостей мате-

ріалів від наявних фізико-механічних процесів в широкому температурному діапазоні і проводити чисельне моделювання термомеханічних процесів у реальних елементах інженерних конструкцій складної форми і структури.

З використанням розробленого на цій основі програмного забезпечення отримано розв'язки важливих класів задач про визначення і дослідження термомеханічної поведінки типових елементів будівельних конструкцій під час пожежі і встановлено чинники, які впливають на вогнетривкість конструкцій.

Досліджено процеси деформування структурно-неоднорідного вкладиша критичного перерізу типового сопла, виготовленого з ортотропних композиційних матеріалів і титанового сплаву, за умов інтенсивного силового навантаження та високоградієнтного нерівномірного нагріву до надвисоких температур з урахуванням його геометричної форми та структури матеріалів. Встановлено, що використання композиційних матеріалів при виготовленні вкладиша забезпечує його експлуатаційну надійність за умов, за яких традиційні матеріали вже не здатні виконувати свої функції і зберігати форму. Визначено коефіцієнти запасу міцності вкладиша під час роботи двигуна на максимальній потужності. Результати досліджень і розроблене спеціалізоване програмне забезпечення для дослідження міцності деталей сопел ракетних двигунів передано в КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля для використання при проектуванні елементів сучасної ракетної та ракетно-космічної техніки.

Досліджено напружено-деформований стан захисних оболонок термоелектричних перетворювачів різних типорозмірів, які захищають чутливий елемент від інтенсивних силових навантажень і руйнівного впливу вимірювального середовища підвищеної температури. Встановлено коефіцієнти їх запасу. На цій основі виконано розрахунок захисних оболонок на циклічну міцність і отримано оцінку їхнього експлуатаційного ресурсу та можливої безпечної експлуатації. Розроблена методика і програмне забезпечення використані на НВО «Термоприлад» при оцінці міцності та експлуатаційного ресурсу захисних оболонок за умов експлуатації та гідравлічних випробувань.

Запропоновані методика, алгоритми та методологія створення програмного забезпечення можуть бути використані як ядро системи автоматизованих розрахунків.

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF STRUCTURE-INHOMOGENEOUS AND COMPLEX SHAPE SOLIDS SUBJECTED TO INTENSIVE TEMPERATURE AND FORCE LOADING

The efficient approach for computer simulation of deformation processes in solids under temperature and force loading is developed. The approach is based on 3D non-isothermal thermo-elastic-plasticity and finite element method. It enables to analyze the thermo-mechanical behavior of solids of complex structure and shape, which is illustrated in numerous examples of solving applied problems, in particular, researching of thermo-mechanical behavior of typical engineering structures during a fire, designing of nozzle blocks of rocket engines of solid fuel and thermowells.

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ ПРОСТОЇ ФОРМИ ТА ДЕЯКІ СПОСОБИ ЇХ РЕАЛІЗАЦІЇ

Богдан Калиняк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

b-kalynyak@litech.net

Сучасні технології дозволяють виготовляти матеріали з наперед заданими неоднорідними характеристиками. Багато сучасних матеріалів використовують або виготовляють в умовах великого перепаду температур, які спричиняють термонапруження. Важливе практичне завдання – отримання потрібного розподілу напружень чи переміщень у композитних матеріалах, зокрема, забезпечення їх відсутності, можна вирішувати визначенням відповідних зв'язків між температурними і силовими навантаженнями, масовими силами та характеристиками матеріалу. Відповідні ідеї щодо постановки таких задач виникли на основі праць Г. Мелана, Г. Паркуса та Я. Підстригача, в яких визначено температурні поля, що не призводять до напружень в однорідних тілах та сформульовано умови відсутності термонапружень в однорідних оболонках.

Розглянуто неоднорідні тіла простої форми (довгий кільцевий циліндр, порожниста куля, нескінчений шар) зі стаціонарним та нестаціонарним розподілом температури й заданими сталими навантаженнями на поверхнях. Характеристики матеріалу, температурне поле, напруження, переміщення вважаються залежними від радіальної координати. Класична задача незв'язаної термопружності зведена до інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду відносно одної зі складових тензора напружень, з яких отримано точний аналітичний вираз, який зв'яже температурне поле, фізико-механічні характеристики матеріалу, одну з компонент тензора напружень та силові навантаження. Зокрема, коли відсутні масові сили і силові навантаження, зв'язок між температурним полем та коефіцієнтом лінійного теплового розширення, який забезпечує відсутність напружень у порожнистій кулі або циліндрі, має вигляд

$$T = \frac{C}{\alpha(\rho)}, \text{ у шарі } - T = \frac{D_1 z + D_2}{\alpha(z)}, \text{ де } T - \text{ приріст температури відносно опорного значення (відсутні напруження та деформації), } \alpha(\rho) - \text{ коефіцієнт ліній-}$$

ного теплового розширення, C , D_1 , D_2 – довільні сталі або функції, залежні від часу, якщо температурне поле неусталене, ρ , z – радіальна і декартова координати. Ці вирази для температурного поля повинні бути розв'язком відповідної задачі теплопровідності. Із задачі теплопровідності встановлено зв'язок між механічними та теплофізичними характеристиками неоднорідного матеріалу та навантаженнями, що забезпечує заданий розподіл напружень.

Для випадку термомеханічних характеристик двоскладового функціонально-градієнтного матеріалу рамках, які описані моделлю простої суміші, відсутності масових сил та силових навантажень записані точні аналітичні вирази для температурних полів і відповідних концентрацій одного матеріалу в іншому через W -функції Лямберта, що забезпечують відсутність радіальних, а, отже і колових (безпосередньо слідує з рівняння рівноваги) напружень у циліндрі та кулі. Для нескінченного шару відповідна задача зведена до розв'язування трансцендентного рівняння відносно концентрації.

Отримано відповідні числові значення розподілу концентрацій складових матеріалу, які забезпечують відсутність термонапружень у тілах простої форми, виготовлених з реальних функціонально-градієнтних матеріалів в різних умовах теплообміну з навколишнім середовищем.

THE CONDITIONS OF ABSENCE OF THERMAL STRESSES IN INHOMOGENEOUS BODIES OF SIMPLE SHAPE AND SOME POSSIBILITIES OF ITS PRACTICAL REALIZATION

Using the model of uncoupled thermoelasticity problem in terms of stresses the conditions of absence of thermal stresses induced by thermal field, depending on one coordinate in inhomogeneous bodies of simple shape (hollow sphere, long hollow cylinder, infinite layer) have been obtained. For this purpose the noncoupled thermoelastic problem was reduced to one Fredholm type integral equation of second kind. The relation under temperature field and thermo-elastic characteristics of material was obtained from the mentioned above integral equation. This relation determines the form of solution of the corresponding heat transfer problem. Using the simple rule of mixture (Voigt model) for modelling thermo-elastic characteristics of two components functionally graded material the exact analytical expression for concentration of materials through W -Lambert functions providing zero stresses in hollow cylinder and hollow sphere were obtained. The material concentration in metal-ceramical materials inducing the zero stresses was calculated for different heat exchange conditions with the environment.

**ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ШАРУВАТИХ ТІЛ
З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ****Василь Карнаухов, Володимир Козлов, Тетяна Карнаухова***Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»*karn@inmech.kiev.ua

При вивченні параметричних коливань елементів конструкцій основними питаннями є побудова областей динамічної нестійкості та дослідження коливальних процесів в цих областях. Для розв'язання першого питання використовується лінеаризована теорія, а для розв'язання другого потрібно застосувати теорію коливань з врахуванням геометричної нелінійності. Як правило, параметричні коливання досліджуються на основі класичних теорій тонкостінних елементів з використанням гіпотез Кірхгофа-Лява та уточнених теорій типу С.П. Тимошенка.

В даній роботі представлена теорія коливань просторових в'язкопружних п'єзоелектричних тіл з врахуванням геометричної нелінійності. Використані найпростіші кінематичні співвідношення, які враховують квадрати кутів повороту [1-4]. Ця теорія є основою для побудови лінеаризованих моделей параметричних коливань просторових п'єзоелектричних тіл. Такі моделі використовуються для розрахунку областей динамічної нестійкості.

Розглядаються параметричні коливання шаруватих тривимірних тіл з п'єзоелектричного в'язкопружного матеріалу при дії на них гармонічного за часом механічного та електричного навантаження. При цьому основна увага зосереджена на дослідженні першої (головної) області динамічної нестійкості, яка має найбільше практичне значення. Для розрахунку цієї області спочатку розв'язується статична задача електромеханіки при електромеханічному навантаженні. Потім розв'язується узагальнена задача на власні значення з врахуванням попереднього деформування. Знаючи мінімальну власну частоту коливань тіла, форму коливань і критичне зусилля, яке відповідає цій формі, можна побудувати головну область динамічної нестійкості. Ці задачі розв'язуються методом скінчених елементів [1-4]. Для цього з застосуванням рівнянь Лагранжа подано варіаційне формулювання задач електромеханіки для тривимірних п'єзоелектричних тіл з врахуванням попереднього деформування. Розв'язок варіаційної задачі знаходиться методом скінчених еле-

ментів з використанням двадцятичотирьохвузлових шестигранних ізопараметричних елементів з квадратичною апроксимацією геометрії тіла, переміщень та електричного потенціалу в межах елемента.

Дається порівняння результатів розрахунків головної області динамічної нестійкості з використанням запропонованої методики і з застосуванням класичної теорії Кірхгофа-Лява для тонкостінних елементів. На основі цієї методики розв'язані конкретні задачі для призматичного тіла, шаруватого циліндра і порожнистого конуса. Шляхом аналізу числових результатів досліджено вплив геометричних параметрів, структурної неоднорідності, механічних та електричних граничних умов на головні області динамічної нестійкості.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2013. – 428 с. – (Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. Т. 3).
2. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2014. – 520 с. – (Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. Т. 4.).
3. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Січко В.М., Завгородній А.В. Тривимірні задачі про коливання і дисипативний розігрів тіл обертання з пасивних і п'єзоактивних в'язкопружних матеріалів. – Миколаїв: Іліон, 2017. – 126 с.
4. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЕРФОРОВАНИХ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ ПІД ДІЮ ВИСОКОШВИДКІСНОГО ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Василь Кожарін, Анатолій Тонконоженко,
Кирило Дегтярьов, Василь Гнітько**

*Державне конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля (Україна);
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України*

gnitkovi@gmail.com; elena15@gmx.com

Дана робота присвячена розробці методів та проведенню комп'ютерного аналізу працездатності та оптимізації механічних параметрів перфорованих оболонкових систем при високошвидкісних імпульсних впливах.

Розроблена комп'ютерна модель для аналізу працездатності та оптимізації конструктивних параметрів перфорованих оболонкових систем з різних матеріалів при високошвидкісних імпульсних впливах, проведені чисельні дослідження граничного стану і працездатності конструкцій перфорованих оболонкових систем з різних матеріалів при високошвидкісних імпульсних впливах. Проведена оптимізація конструктивних параметрів з метою збільшення часу працездатності для двох варіантів розрахункової схеми конструкції.

Розрахунки наочно продемонстрували, що одними з найбільш важливих параметрів конструкції є діаметр перфораційних отворів оболонки та відстань між даними отворами.

Руйнування досліджуваної конструкції відбулося в результаті виникнення і взаємного зрощення тріщин на контурах перфораційних отворів. В цей же час аналогічна оболонка, що не мала перфорації, продемонструвала високі міцнісні властивості.

Розроблена комп'ютерна модель та чисельний метод дали змогу провести віртуальне комп'ютерне дослідження замість кошовного натурального експерименту.

STRESS-STRAIN STATE OF PERFORATED SHELL STRUCTURES UNDER HIGH SPEED IMPULSE LOADING

The computer technology is developed for working ability analysis and optimization of mechanical parameters of perforated shell structures under high speed impulse loadings.

ВПЛИВ ПОВЕРХНІ НА РОЗПОДІЛ ГУСТИНИ МАСИ В ТВЕРДИХ ТІЛАХ

Петро Костробій, Богдан Маркович

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

petro.p.kostrobii@lpnu.ua; bohdan.m.markovych@lpnu.ua

Одним з важливих зовнішніх параметрів механіки деформівного твердого тіла (ДТТ) є локальна густина тіла $\rho(\mathbf{r})$. Для опису впливу поверхні на характеристики ДТТ $\rho(\mathbf{r})$ слід розраховувати в межах запропонованих моделей, однак це неможливо при використанні підходів механіки ДТТ.

Запропоновано модель ДТТ (дискретна модель квантово-механічного опису) і проведено розрахунок $\rho(\mathbf{r})$ за наявності поверхні поділу «тверде тіло – вакуум». Використовуючи результати праці [1], отримано загальний вираз для вільної енергії такої моделі: $F = F_0 + F_1(\mathbf{u}_n)$, де F_0 – вільна енергія твердого тіла з об'ємною елементарною коміркою [2], а $F_1(\mathbf{u}_n)$ – вклад до вільної енергії твердого тіла, який зумовлений малими деформаціями \mathbf{u}_n приповерхневих йонних шарів, $n \in N$. Мінімізацією виразу для вільної енергії отримано рівняння для \mathbf{u}_n та знайдено його розв'язок для випадку $\mathbf{u}_n = (0, 0, u_z(z))$ (вісь Oz перпендикулярна до плоскої поверхні поділу). Використовуючи відомі з механіки ДТТ зв'язки між \mathbf{u}_n та зміною об'єму [3], отримано аналітичний вираз для йонної густини $\rho(\mathbf{r})$ та проведено числові розрахунки для ряду простих металів.

1. *Ваврух М.В., Костробій П.П., Маркович Б.М.* Базисний підхід в теорії багатоелектронних систем. – Львів: Растр-7, 2017. – 510 с.
2. *Стасюк І.В., Пелещак Р.М.* Зв'язок між ступенню заповнення зони провідності і зміною параметра ґратки кристала при наявності точкових дефектів. – Львів: 1992. – 15 с., (Препр. / НАН України. Інститут фізики конденсованих систем; ІФКС–92–17У).
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Теория упругости. 4-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с. (Т. VII).

INFLUENCE OF SURFACE ON MASS DISTRIBUTION IN SOLID BODY

A model of the deformable solid body is proposed and the mass density of the solid body is calculated in the presence of a interface "solid body – vacuum".

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ**Сергей Куреннов, Юнна Щербакова***Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» (Украина)*kurennov.ss@gmail.com; y.shcherbakova@khai.edu

Решена задача о напряженно-деформированном состоянии полубесконечного ($x \geq 0$, $-\infty < y < \infty$) клеевого соединения двух пластин постоянной толщины. При построении модели использованы гипотезы клеевого соединения Фолькерсена (Volkersen): напряжения равномерно распределены по толщинам слоев, клеевой слой работает только на сдвиг, перемещения происходят только в плоскости соединения (изгиб отсутствует). Чтобы упростить постановку задач и получить аналитическое решение, введена гипотеза об отсутствии перемещений в направлении оси y .

Задача сведена к нахождению продольных перемещений обоих несущих слоев, которые связаны системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]. Краевые условия: на бесконечном удалении от оси симметрии ($0x$) и торца соединения ($0y$) перемещения равны нулю; на торце соединения заданы приложенные к несущим слоям продольные усилия. Краевые условия, и, соответственно, перемещения, полагаются четными относительно продольной оси соединения ($0x$), поскольку такая постановка задачи наиболее часто реализуется на практике.

Задача решена при помощи метода разделения переменных. Продольные перемещения представлены в виде интеграла Фурье. Решена модельная задача. Проведено параметрическое исследование напряжений в клее и изучено влияние на напряжения параметров соединения.

1. *Kurennov S.S. A simplified two-dimensional model of adhesive joints. Nonuniform load // Mechanics of Composite Materials. September – 2015, – 51, № 4. – P. 479-488.*

**STRESSED STATE OF THE SEMI-INFINITE ADHESIVE.
APPROXIMATE TWO-DIMENSIONAL MODEL**

Adhesive bonding is considered two semi-infinite plates with thickness of bearing strata. Longitudinal load applied along the edge of each plate. The bearing layers are deformed just in a plane connection, adhesive layer works only on shift, stresses are evenly distributed across the thickness of the layers. The problem is solved by the method of separation of variables, introducing an unknown function of Fourier.

ЦИЛІНДРИЧНІ ОБОЛОНКИ ПІД ВПЛИВОМ ЗМІННИХ У ЧАСІ ЛОКАЛЬНИХ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Олександр Максимук, Надія Гануліч

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

nadia.ganulich@gmail.com

Розв'язано осесиметричну задачу термопружності для довгої та короткої циліндричних оболонок з піддатливого зсувові матеріалу із ньютонівською тепловіддачею за дії змінних у часі локальних джерел тепла:

$$Q(x; \tau) = Q_0 \theta(x; a) \vartheta(\tau), \quad (1)$$

де x – віднесена до радіуса серединної поверхні оболонки осьова координата, $2a$ – ширина кільця нагріву оболонки, τ – безрозмірний параметр часу, $\theta(\xi)$ – функція Хевісайда, $\theta(x; a) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$, β_0^2 – коефіцієнт згасання джерел, Q_0 , C^* , C_0 , C_1 – константи, з допомогою яких можна регулювати потужність і густину теплових джерел у часі, а отже, температурні поля $T(x; \tau)$, прогини оболонки, зусилля та осьові моменти, які породжені цими джерелами.

Виділимо з (1) кілька важливих для застосувань режимів нагрівання оболонок:

I. $C^* = 1, C_0 = C_1 = 0$, $Q(x; \tau) = Q_0 \theta(x; a) \theta(\tau)$ – теплові джерела за усіх $\tau \geq 0$ діють із сталою потужністю $Q_0 = const$;

II. $C^* = 0, C_0 = 1, C_1 = 0$, $Q(x; \tau) = Q_0 \theta(x; a) e^{-\beta_0^2 \tau}$ – джерела вмикаються при $\tau = 0$ і з часом згасають;

III. $C^* = 1, C_0 = -1, C_1 = 0$, $Q(x; \tau) = Q_0 \theta(x; a) (1 - e^{-\beta_0^2 \tau})$ – джерела діють з моменту $\tau = 0$ із зростаючою потужністю від 0 до Q_0 ;

IV. $C^* = C_0 = 0, C_1 = 1$, $Q(x; \tau) = Q_0 \theta(x; a) \tau e^{-\beta_0^2 \tau}$ – джерела зростають від нуля до максимуму $Q_{\max} = Q_0 (\beta_0^2 e)^{-1}$, $\tau_{\max} = \beta_0^{-2}$ і згасають.

Оскільки функція густини теплових джерел (1) фінитна і парна, то застосувавши до рівняння теплопровідності [1] косинус-перетворення Фур'є по осьовій координаті, за відсутності температури у початковий момент часу і відповідно до розподілів джерел I – IV, отримуємо температурні поля у виг-

ляді лінійної комбінації семи невластних інтегралів першого роду [3]:

$$T_k(x; \tau) = \sum_{j=1}^7 c_{kj}(\tau) I_j(x; \tau), (k = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

$$I_2(x) = \int_0^{\infty} \sin(as) \cos(xs) (s^2 + \beta^2)^{-1} ds,$$

$$I_4(x; \tau) = \int_0^{\infty} e^{-(s^2 + \beta^2)\tau} \sin(as) \cos(xs) s^{-1} ds,$$

$$I_5(x; \tau) = \int_0^{\infty} e^{-(s^2 + \beta^2)\tau} \sin(as) \cos(xs) (s^2 + \beta^2)^{-1} ds,$$

де $c_{kj}(\tau)$ – цілком визначені функції часу, інтеграли $I_3(x)$ та $I_6(x; \tau)$ отримуються відповідно з $I_2(x)$ та $I_5(x; \tau)$ заміною у знаменниках підінтегральних дробів параметра β^2 на $\beta^2 - \beta_0^2$, а $I_7(x; \tau) = dI_6 / d(\beta_0^2)$.

За відомою температурою з рівняння [1] прогинів знаходимо їх вирази у вигляді аналогічної (2) лінійної комбінації інтегралів, якої тут не наводимо. Зазначимо лише, що для вказаних розподілів джерел тепла у випадку короткої оболонки розв'язки відповідних задач подано [2] рядами Фур'є.

За усіх розподілів джерел тепла як для довгої, так і для короткої оболонок, вказано значення часу, при яких температура і відповідні їй кільцеві зусилля та осьові моменти сягають найвищих рівнів. Вивчено також вплив фактора зсуву на розрахункові величини і здійснено порівняльний аналіз результатів дослідження для обох оболонок, у т.ч. в класичній постановці задач термопружності.

1. Максимук О.В., Гануліч Н.В. Термопружність циліндричної оболонки із низькою зсувною жорсткістю у локальному температурному полі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 3. – С. 26-34.
2. Гануліч Н.В. Циліндрична оболонка скінченної довжини із низькою зсувною жорсткістю за дії локальних джерел тепла // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 82-90.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

THE CYLINDRICAL SHELL INFLUENCED BY TIME-VARIANT LOCAL HEAT SOURCES

The problem of thermoelasticity for cylindrical shells with finite shear rigidity and Newton heat loss under the influence of time-variant local heat sources has been solved.

**ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУЛЮВАННЯ
ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ
НЕІДЕАЛІЗОВАНИХ СТРУКТУР**

Олег Мачуга, Олег Яхно

Національний лісотехнічний університет України;

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»

oleg_mach@ukr.net; oleg.yakhno@gmail.com

Енергетичний ресурс є визначальною характеристикою стану будь-якого матеріального об'єкту. Інші характеристики стану – розподіли напружень, деформацій, температур, напруження електромагнітних полів тощо є вторинними [2]. Дослідження механічної поведінки будь-якого матеріального об'єкту, зокрема побудова математичних моделей та розроблення методів розв'язування відповідних задач, пов'язується насамперед із аналізом процесу енергообміну у такому об'єкті, а згодом – із визначенням інших характеристик його стану.

Енергетичний підхід у задачах механіки базується на побудові функціоналу енергії досліджуваного об'єкта та визначення умов його стаціонарності у віртуальних кінематично можливих станах. Однак для об'єктів із істотною дисипацією механічної енергії, віртуальна рівновага внаслідок трансформації видів енергії, порушується; визначальними відношеннями стають варіаційні нерівності. Для формулювання таких нерівностей пропонується застосовувати складові енергетичного ресурсу – ексергію Ex та анергію An досліджуваного об'єкта [1]. За використання 1-го та 2-го начал термодинаміки, записаних стосовно енергетичних трансформацій у віртуальних процесах для об'єктів із дисипативними властивостями, варіаційна нерівність набуде [3] вигляду

$$\delta (Ex - An) \leq 0. \quad (1)$$

Нерівність (1) може використовуватись для дослідження особливостей незворотних механічних процесів у, зокрема, структурно неоднорідних об'єктах із неідеалізованими реологічними характеристиками та із урахуванням неідеалізованої взаємодії окремих компонент таких структур, параметри яких можуть змінюватись.

Для обґрунтування фізичного сенсу постановки задачі у вигляді варіаційної нерівності (1) слід звернутись до простору енергетичних станів [2], в якому точка \hat{I} визначає дійсний стан досліджуваного об'єкту (див. рис. 1, E – енергетичний стан, μ_i, k_i – вторинні характеристики стану). Віртуальне відхилення стану об'єкту від точки \hat{I} у випадку граничної рівності у нерів-

ності (1) визначає деяку поверхню Σ , яка є поверхнею стаціонарності й визначає стан досліджуваного об'єкта у випадку зворотних енергетичних трансформацій. Частина простору енергетичних станів (на рис. 1 – нижче поверхні Σ), в якій виконується варіаційна нерівність (1), визначає множину параметрів і характеристик стану, за яких розглядуваний об'єкт може перебувати в рівноважному стані у випадку незворотних процесів. Точки простору енергетичних станів, які знаходяться вище граничної поверхні, не задовольняють варіаційній нерівності (1), тому об'єкт не може перебувати в такому стані. Однак, якщо фактори зовнішнього впливу (граничні та початкові умови) спонукають об'єкт до перебування власне в такому стані, яке є кінематично неможливим, це призведе до зміни внутрішньої конфігурації структури об'єкту, наприклад – до збільшення області пластичних деформацій, до розширення розшарування між окремими складовими, до змінювання області турбулентних чи кавітаційних явищ тощо. Зупинка процесу деструкції відбувається в такій конфігурації, коли (1) знову перетворюється у нерівність.

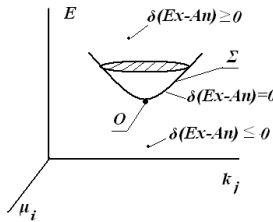


Рис. 1 Представлення стану об'єкта в просторі енергетичних станів

Запропонований підхід застосовано для дослідження широкого класу практично важливих проблем, зокрема: процесів колієтворення на ґрунтових дорогах, деструкції берегової лінії річковим потоком, зношення елементів конструкцій машин та устаткування, динаміки та міцності структуризованих елементів конструкцій тощо.

1. Баєр Г. Энергия, эксергия, анергия / Энергия и эксергия: под ред. В.М. Бродянского. – Москва: Мир, 1968. – С. 12-27.
2. Седов Л.И. Виды энергии и их трансформации // Прикладная математика и механика. – 1981. – 45, № 6. – С. 964-984.
3. Яхно О.М., Мачуга О.С. Варіаційне формулювання задач для структурно неоднорідних гідромеханічних систем // Промислова гідраліка і пневматика. – 2017. – № 2(56). – С. 26-33.

ENERGY APPROACH FOR THE FORMULATION AND SOLUTION OF THE MECHANICAL PROBLEMS FOR THE NON-INDIALIZED STRUCTURES

The formulation of problems for real structurally heterogeneous objects with dissipation of energy is considered. The variation inequalities and energy expansion for exergy and anergy are used.

**МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ПРОЦЕСІВ
У ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ РОЗЧИНАХ**

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Львівський національний університет імені І. Франка (Україна)

t.nahirnyj@gmail.com; k.tchervinka@gmail.com

Представлено модель континуального опису взаємозв'язаних термомехано-дифузійних процесів у локально неоднорідних тілах. Для узгодження актуального та відлікового станів підсистеми скелету у рівняння балансу маси введено джерела маси, які пов'язано з шорсткістю реальної поверхні тіла. Показано, що локально градієнтний підхід у термомеханіці [1], в рамках якого побудовано модель, враховує структурну неоднорідність матеріалу.

У вільному від зовнішнього силового навантаження тілі ненульовий напружено-деформований стан є спричинений структурною неоднорідністю матеріалу та геометричною неоднорідністю реальної поверхні тіла. Неоднорідність у розподілі полів у стаціонарному стані має приповерхневий характер у масивних тілах і притаманна усій області тіла у наноелементах [2].

Співвідношення моделі дозволяють описувати розмірні ефекти поверхневих напружень, міцності, поверхневого натягу тощо. Показано, що наявність домішки у тілі змінює характерний розмір, пов'язаний із структурною неоднорідністю матеріалу, не змінюючи якісно розподілу полів та характеру розмірних ефектів.

1. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.
2. *Nahirnyj T.S., Tchervinka K.A.* (2017) Continuum Modeling of Nanoelements. In: Fesenko O., Yatsenko L. (eds) Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications. NANO 2016. Springer Proceedings in Physics, vol. 195. Springer, Cham.

**MODELING OF INTERCONNECTED PROCESSES
IN LOCALLY NON-HOMOGENEOUS SOLID SOLUTIONS**

The equations of the model describing locally non-homogeneous solid solution are used to investigate the steady state of two-component body with account for structural non-homogeneity of material and roughness of body surface. The size effects of stresses, strength and surface tension are studied and admixture influence analyzed.

ВПЛИВ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ВТОМНЕ РУЙНУВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КІЛЬЦЕВИМИ ЗВАРНИМИ З'ЄДНАННЯМИ

Юрій Пороховський

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

yurii.v.porokhovskiy@lpnu.ua

Геометричні неоднорідності, особливо у вигляді гострокінцевих дефектів тріщиноподібного типу, можуть істотно впливати на міцність і довговічність металевих конструкцій. Тому однією з основних задач є виявлення і вимірювання таких дефектів без порушення цілісності конструкції, ідентифікація їх форм і розмірів та оцінка ресурсу безпечної роботи оболонкових машинобудівних конструкцій. Для гострокінцевих дефектів найбільш консервативною схематизацією є тріщини еліптичної форми, півеліптичні і наскрізні.

Розглянемо прямолінійну ділянку оболонки товщини h і зовнішнього радіуса R , що знаходиться під дією внутрішнього тиску p та залишкових напружень зі зварним з'єднанням із зовнішнім поверхневим дефектом у кільцевому монтажному шві, який моделюється поздовжньою поверхневою півеліптичною тріщиною з півосями a і c у круговому циліндрі.

Швидкість росту тріщини втоми під дією циклічного навантаження визначаємо, застосувавши рівняння Періса [1] з урахуванням ефективного розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень. Рівняння для визначення швидкості росту тріщини вглиб і в поздовжньому напрямку мають вигляд:

$$\frac{da}{dN} = B_{f1} \left[\Delta K_1 \left(0.608 + 0.734R - 0.340R^2 \right) \right]^{m'_1};$$

$$\frac{dc}{dN} = B_{f1} \left[\Delta K_1 \left(0.743 + 0.637R - 0.388R^2 \right) \right]^{m'_1}.$$

Тут N – кількість циклів навантаження. Характеристики циклічної тріщиностійкості для конкретного матеріалу трубної сталі та її зварного з'єднання визначаємо експериментально на основі випробувань, зокрема, для зразків з крайовою тріщиною у зварному шві. В результаті оброблення експериментальних даних за методичними вказівками [2] отримано, що $m'_1 = 2.12$, $B_{f1} = (21.8)^{-2.12} \cdot 10^{-7}$. Початкові умови задаємо розмірами вихідної тріщини: $a|_{N=0} = a_0$, $c|_{N=0} = c_0$.

Числовий аналіз проведено для ділянки труби компресорної станції, виготовленої зі сталі марки X-70 діаметром $D = 219$ мм і товщиною стінки $h = 7$ мм, яка знаходиться під дією пульсуючого внутрішнього тиску, максимальне значення якого $p_{\max} = 4.5$ МПа, початкові розміри тріщини у зварному шві вибирались рівними $a_0 = 1$ мм, $c_0 = 1.2a_0$.

Встановлено, що зі збільшенням відношення величини усереднених по поверхні тріщини кільцевих залишкових напружень до величини максимальних напружень, викликаних внутрішнім тиском, число циклів N , за яких досягається критична глибина тріщини зменшується і форма півеліптичної тріщини наближається до кругової. Показано, що коли тріщина знаходиться на певній відстані від шва, де залишковими напруженнями можна знехтувати, то з незначною похибкою можна прийняти, що відношення $c/a = \text{const}$.

1. *Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие. Т. 4. Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов / О.Н. Романив, С.Я. Ярема, Г.Н. Никифорчин и др. – Киев: Наук. думка, 1990. – 680 с.*
2. *Махненко В.И. Ресурс безопасной эксплуатации сварных соединений и узлов современных конструкций. – Киев: Наук. думка, 2006. – 618 с.*

INFLUENCE OF RESIDUAL STRESSES ON FATIGUE FRACTURE OF SHELL STRUCTURES WITH A RING WELDED JOINT

Geometric inhomogeneities, especially in the form of pointed crack-like type defects can influence essentially the strength and durability of metal structures. Therefore, detection and measurement of such defects without violation of the structures integrity, identification of their shape and sizes is one of the basic problems. The procedure of schematization of the detected defects by defects of canonic shape, which are convenient to describe in corresponding mathematical models, is important in identification of defects for subsequent utilization of its results to estimate the resource of secure operation of shell machine-building structures. For pointed defects the cracks of semi-elliptical and through cracks are the most conservative schematization.

For particular geometric sizes of the pipe with semi-elliptical crack we calculated the number of cycles N from initial state in the defect till such for which the condition of static strength is not satisfied.

Numerical analysis was carried out for the pipe part of compressor station made of steel X-70 with diameter $D = 219$ mm and wall thickness $h = 7$ mm under pulse internal pressure of maximal value $p_{\max} = 4.5$ MPa, and the sizes of initial crack in the welded joint were chosen as $a_0 = 1$ mm, $c_0 = 1.2a_0$.

It was determined that when the value of parameter increased ξ the number of cycles N , for which critical crack depth is reached, decreases. And, besides, it was determined that when the parameter value ξ increases the relation of semi-axes c/a decreases, and the shape of semi-elliptical crack approaches is circular one.

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕЧНИХ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ В НАНОКОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ

Катерина Савельєва, Ольга Дашко, Ярослав Симчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»*

katerina1971s@gmail.com

Предметом доповіді є числове дослідження, на основі отриманих в попередніх публікаціях [4] результатів теоретичних висновків щодо взаємодії горизонтально і вертикально поляризованих поперечних пружних плоских хвиль при їх поширенні в нанокompозитному матеріалі. Деформування матеріалу описується теоретично нелінійною моделлю Мурнагана [1-3]. Використане при цьому представлення пружного потенціалу дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружних середовищах [4]. Залежність вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної дає можливість подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі x . В рамках урахування квадратичної і кубічної нелінійностей у визначальних рівняннях, записуються нелінійні хвильові рівняння. На основі цих рівнянь розв'язано наступну задачу. На вході в середовище задається одна з поперечних (TH -та TV -) хвиль і виявляється генерування другої поперечної хвилі [4]. На основі отриманого розв'язку задачі у вигляді

$$u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t); \quad (2)$$

$$u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t)$$

проведений його числовий аналіз.

Числове дослідження проводилося за допомогою математичного пакету програм MAPLE 10.0. Для обчислень були використані значення ефективних сталих для чотирьох типів нанокompозитних матеріалів, відповідних моделі Зпано, з роботи [1]. Складовими зазначених нанокompозитів є: матриця, представлена в двох варіантах (N1– суміш смоли Епон-828 і полістиролу, з м'якою характеристикою нелінійності; N2– суміш смоли Епон-828 і скла-пірекс, з жорсткою характеристикою нелінійності), і наповнювач – вуглецеві нанотрубки двох різних типів (N1– зигзагоподібні вуглецеві нанотрубки; N2– хіральні вуглецеві нанотрубки). Характеристики та властивості матеріалів та їх

складових представлені і детально описані в книзі [1]. Обчислення та побудова відповідних графіків проводились для п'яти різних значень об'ємного вмісту складових нанокompatитів. Хвильові параметри були обрані однаковими для всіх розглянутих варіантів нанокompatиту.

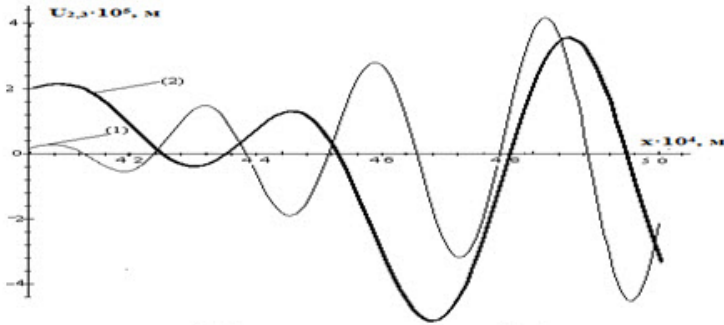


Рис. 1

На рис. 1 представлені фрагменти таких графіків, де можна бачити момент збільшення розмірів початково малої амплітуди горизонтально поляризованої хвилі і зменшення початкової амплітуди вертикально поляризованої хвилі. При одночасному поширенні поперечних хвиль різної поляризації в матеріалі відбувається спотворення їх профілів. Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації відбувається перепомповування енергії з потужної хвилі в слабку. В матеріалах зі слабкою нелінійністю зміни відбуваються помітно повільніше, ніж в матеріалах з сильною нелінійністю.

1. Гузь А.Н., Руцицький Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompatитов. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
2. Murnaghan F.D. Finite deformations in an Elastic. – New York: Wiley, 1951. – 140 p.
3. Руцицький Я.Я., Журнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, 1998. – 377 с.
4. Savel'eva E.V. interaction of transverse plane waves in nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, No. 6. – P. 664-669.

NUMERICAL INVESTIGATION OF TRANSVERSE PLANE WAVES INTERACTION IN NANOCOMPOSITES

The theoretical study of cubically nonlinear elastic plane harmonic waves interaction is carried out for the material, nonlinear properties of which are described by Murnaghan elastic potential. The interaction of transverse horizontal and transverse vertical harmonic waves is studied by means of perturbing method. Pumping of the energy between different types of transverse waves is described. Results of a numerical analysis for five types of nanocomposite materials are presented.

УДК 539.3

ТЕСТУВАННЯ СХЕМ МСЕ З ВИКОРИСТАННЯМ В-СПЛАЙНІВ ДЛЯ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН КІРХГОФА-ЛЯВА ТА С.П. ТИМОШЕНКА

Микола Хом'як, Ярослав Марко

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

KhomNick98@gmail.com

В-сплайни мають широке використання у програмах комп'ютерного проектування (CAD) для опису геометрії складних об'єктів та її збереження у стандартних форматах, що надалі можуть експортуватися в програми скінченно-елементного аналізу (FEA) [1]. Останнім часом спостерігаємо тренд щодо поєднання переваг МСЕ та апроксимації В-сплайнами, зокрема, використовують відкриті В-сплайни (open B-splines) [2]. або зважені розширені В-сплайни (web-splines) [3]. Однією з переваг є неперервна апроксимація похідної (для степеня В-сплайна більше 1) аналогічно до ермітових сплайнів. З іншого боку, класичне поняття "скінченний елемент" змінюється або не використовується (mesh free FEM). Подібно до інших схем апроксимації, В-сплайни як базисні функції мають компактний носій, але в межах декількох сусідніх відрізків розбиття (див. рис. 1).

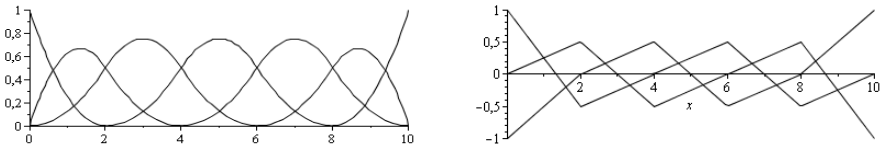


Рис. 1 Відкриті квадратичні В-сплайни (ліворуч) та їхні похідні (праворуч) для розбиття відрізка $[0; 10]$ на 5 "елементів"

Застосування В-сплайнів у теорії пластин і оболонок, особливо з шаруватих і композитних матеріалів, ще не набуло поширення. Для тестування схем МСЕ ми пропонуємо найпростіші 1D-задачі циліндричного згину шарнірно-опертої пластини постійним поперечним навантаженням q , для яких легко побудувати аналітичний розв'язок. Для класичної теорії тонких пластин Кірхгофа-Лява маємо варіаційну постановку, що еквівалентна бігармонічному рівнянню на прогин $w(x)$,

$$(A_2 w, w) - 2(F, w) = \int_0^L D \left(d^2 w / dx^2 \right)^2 dx - 2 \int_0^L q w dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

де $w \in H_{1,0} = \{w(x) \in C_{[0,L]}^1 \mid w(0) = w(L) = 0, w'(0) = w'(L) = 0\}$, а для податливих на зсув пластин в рамках теорії С.П. Тимошенка – варіаційну постановку для $\mathbf{u} = (\gamma, w) \in (H_{0,0} \otimes H_{0,1}) = \{w(x), \gamma(x) \in C_{[0,L]}^0 \mid w(0) = w(L) = 0, \gamma'(0) = \gamma'(L) = 0\}$:

$$(A_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2(F, \mathbf{u}) = \int_0^L D(d\gamma/dx)^2 + G(\gamma + dw/dx)^2 dx - 2 \int_0^L q w dx \rightarrow \min, \quad (2)$$

що еквівалентна системі двох рівнянь другого порядку відносно прогинів w і кутів повороту серединної поверхні γ [4]. Невідомі функції шукаємо як лінійну комбінацію В-сплайнів: $w(x) = \sum C_i^w B_i(x)$, $\gamma(x) = \sum C_i^\gamma B_i(x)$. Побудовано схеми МСЕ з використанням квадратичних В-сплайнів, що порівнювалися зі звичними лагранжевими апроксимаціями. Глобальні матриці та вектори навантаження отриманих систем рівнянь є накопиченням локальних вкладів в межах кроку розбиття $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \int (B_{i+k})(B_{i+l}) dx, \quad \mathbf{F}_i = \int (B_{i+k}) dx, \quad \mathbf{B}_i = \int (B'_{i+k})(B'_{i+l}) dx, \\ \mathbf{C}_i &= \int (B_{i+k})(B'_{i+l}) dx, \quad \mathbf{D}_i = \int (B''_{i+k})(B''_{i+l}) dx, \quad k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Ці інтеграли можна обчислити аналітично. Тестові набори коефіцієнтів C_i отримано для приведених пружних констант D і G , а також $q = 1$ (в силу лінійності задачі). Отримані результати пропонуються для верифікації програм МСЕ з використанням В-сплайнів. У подальшому планується побудувати розв'язки тестових задач для 2D-областей.

1. *Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y.* Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – Elsevier. – 2005. – **194** (39-41). – P. 4135-4195.
2. *Aggarwal B.* B-spline finite elements for elasticity problems / A thesis for the degree of master of science. – Texas A&M University, 2006. – 80 p.
3. *Höllig K.* Finite Element Methods with B-Splines. –Frontiers in Applied Mathematics 26, SIAM, Philadelphia, 2003. – 145 p.
4. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.

**TESTING OF THE B-SPLINE FEM SCHEMES
FOR KIRCHHOFF-LOVE AND S.P. TIMOSHENKO'S PLATES THEORIES**

Some 1D analytically solved problems are proposed for testing of the B-spline FEM schemes within the framework of Kirchhoff-Love or S.P. Timoshenko's plate theories. Common and distinguishes properties compared to conventional FEM are studied.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З НЕІДЕАЛЬНИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ГРАНИЦЯМИ ПОДІЛУ В УМОВАХ АНТИПЛОСКОГО ЗСУВУ

Володимир Чернобай

Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України

ChernobaiVS@nas.gov.ua

Міжфазні границі реальних структурно-неоднорідних матеріалів є недосконалими і вимагають розробки теоретичних моделей, які враховують вплив умов контакту на концентрацію напружень. Згідно [2] на міжфазній границі може бути сім фізично можливих умов контакту між матрицею та включенням, проте в умовах антиплаского зсуву існують лише такі випадки:

1. Ідеальний контакт;
2. Найбільш відомий у літературі випадок неідеального контакту, так званий «м'який» або «пружинний» контакт;
3. «Жорсткий» контакт, що узгоджується із теорією Гуртіна-Мердока [3], про поверхневі напруження, якими нехтують у класичній механіці, і які зростають, коли локальний радіус кривизни стає меншим за 100 нм.

В даній роботі, розглянуто випадки недосконалих умов 1-го та 2-го типу, представлених у (1) та (2) відповідно:

$$h_{1q} [[w]]_{L_q} = \sigma_n, \quad [[\sigma_n]]_{L_q} = 0 \quad (1)$$

$$[[w]]_{L_q} = 0; \quad [[\sigma_n]]_{L_q} = -\frac{\partial \sigma_t^s}{\partial t_q} \quad (2)$$

У якості геометричної моделі розглянуто площину, яка містить $N > 1$ еліптичних включень, контури яких не перетинаються. На границях виконуються умови (1) або (2). У термінах комплексних потенціалів [1], переміщення та напруження у включенні або матриці представимо у вигляді:

$$w = \frac{1}{2} [\phi(z) + \bar{\phi}(z)] = \text{Re}\phi(z), \quad \sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu \overline{\phi'(z)} \quad (3)$$

Згідно принципу суперпозиції загальний розв'язок крайової задачі для багатозв'язної області може бути представлений як сума загальних розв'язків для однозв'язних областей, перетином яких є багатозв'язна область. Тоді переміщення у матриці подамо наступним чином:

$$\phi^{(0)}(z) = \phi_{far} + \phi_s^{(q)}, \quad \phi_{far} = \phi^\infty + \sum_{p \neq q}^N \phi_s^{(p)} \quad (4)$$

Формули перерозкладу для подання еліптичних гармонік одного включення в термінах іншого набудуть вигляду [4]:

$$\upsilon_p^{-n} = \sum_m n_{nm}^{pq} \upsilon_q^{-m}, \quad (5)$$

Підставивши вирази для потенціалів, скориставшись ортогональністю гармонік Фур'є та опустивши деякі алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(q)} V_{nk}^{(1)} + \overline{A_n^{(q)}} V_{nk}^{(2)} + a_n^{(q)} v_{nk}^{(1)} + \overline{a_n^{(q)}} v_{nk}^{(2)} \right) = 0 \quad (6)$$

$$q = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots;$$

Ця система є однаковою для обох типів недосконалого контакту, з відповідними величинами V_{nk}^i, v_{nk}^i ($i = 1, 2$) для умов 1-го та 2-го типу.

1. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
2. *Benveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // *Mechanics of Materials*. – 2001. – **33**. – P. 309-323.
3. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // *International Journal of Solids and Structures*. – 1978. – **14**. – P. 431-440.
4. *Kushch V.I., Chernobai V.S., Mishuris G.S.* Longitudinal shear of elliptic nanofiber composite: local stress and effective stiffness // *International Journal of Engineering Science*. – 2014. – **84**. – P. 79-94.
5. *Luo J., Wang X.* On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2009. – **28**. – P. 926-934.

THE STRESS FIELD OF HETEROGENEOUS BODY WITH IMPERFECT ELLIPTICAL INTERFACES DUE TO ANTIPLANE SHEAR

The problem of the antiplane shear of an elastic body with a finite number of arbitrary elliptic inclusions is solved in the assumption of nonideal mechanical contact on the surfaces of phase separation. An analytical solution was obtained by the method of multipole developments using the technique of complex potentials. By developing the perturbations of the displacement field due to inclusions in a row in the system of elliptic harmonics, using the formulas for their redefinition and the full implementation of the contact conditions, the boundary value problem of the theory of elasticity is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The presented numerical results of the parametric analysis of the problem demonstrate the significant dependence of the stress concentration on the contact conditions on the separation surface, as well as on the size, shape and reciprocal placement of inclusions.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А	
Аветісян Ара	62
Акопян Ваграм	22
Аль-Абси Рушди	82
Андрейків Олександр	23
Андрійчук Роман	168
Антонченко Віталій	186
Асташкін Володимир	32, 92

Б	
Барахов Костянтин	224
Боднар Дмитро	25
Боженко Богдан	64, 66
Бойчук Юрій	151
Брухаль Мар'ян	132
Будз Степан	32, 92
Бурик Олександр	233
Бутрак Іванна	225

В	
Вайсфельд Наталя	208
Васильєва Лариса	228
Васильєв Кирил	226
Веремейчик Андрей	153
Вовк Оксана	155
Водка Олексій	68
Войтечек-Ляшак Катажина	114
Волчанські Томаш	69

Г	
Гаврись Олександр	214
Гаєвська Любова	99
Гануліч Надія	242
Гарматій Галина	157
Гарт Етері	28
Гачкевич Микола	71, 73
Гачкевич Олександр	75, 77, 79
Гембара Оксана	95
Гнітько Василь	232, 239
Голубева Елена	82
Голубець Тарас	84
Горбунович Ірина	86
Горошко Володимир	159

Григоренко Олександр	228
Грицина Ольга	88
Громик Андрій	230
Гудрамович Вадим	28
Гуменчук Орест	75

Г	
Гаск Максиміліан	90

Д	
Дацишин Олександра	30
Дашко Ольга	249
Дегтярьов Кирило	232, 239
Дмитришин Роман	25
Долінська Ірина	23
Доля Елена	125
Дробенко Богдан	32, 92, 233
Дубик Ярослав	186
Дудик Михайло	134, 161
Дяків Василь	127

Ж	
Жук Олександр	93
Жук Ярослав	93, 105, 162
Журавска Олександра	132

З	
Зашкільняк Іванна	114
Зеленський Анатолій	164

І	
Іваницький Ярослав	95
Івантишин Наталія	128
Івасишен Степан	34
Івасько Наталія	170
Івасько Роман	77
Ірза Євгеній	97, 99

К	
Кагадій Тетяна	166
Казарян Карен	71
Калиняк Богдан	157, 235
Кандада Степан	108
Карнаухов Василь	237

Карнаухова Тетяна	237
Кипнис Леонид	121
Киричок Іван	105
Киселев Михайл	101
Кіт Григорій	14, 168, 170
Клименко Дмитро	37
Кожарін Василь	239
Козакевич Тереза	69, 90
Козлов Володимир	237
Козярська Анна	73, 97
Колодій Юрій	172
Колодяжний Анастолій	103
Коляно Ярослав	173
Костеневич Олена	110
Костробій Петро	240
Крак Юрій	36
Круць Софія	105
Куреннов Сергей	241
Куреннов Сергій	224
Курпа Лідія	175, 177
Кушнір Роман	14, 179

Л

Лабібов Расим	106
Лавренюк Василь	183
Лавренюк Микола	183
Ліснічук Андрій	128
Літвінова Анастасія	201
Лоза Ігор	228

М

Максимук Олександр	242
Максимюк Володимир	203
Мариновіч Анджей	75
Марко Ярослав	251
Маркович Богдан	240
Марчук Михайло	37
Махненко Олег	108, 110
Махоркін Ігор	184
Мачуга Олег	244
Мединський Ігор	34
Мельник Наталія	62, 114
Метельські Анджей	64
Меднікова Маргарита	103
Михайлишин Віра	112
Можаровський Валентин	97

Моринь Стефан	64, 90
Мулицька Івона	69
Мусій Роман	62, 114

Н

Нагірний Тарас	116, 246
Незамай Борис	117

О

Олійник Андрій	117
Онишко Олексій	64, 66
Опанасович Віктор	216
Ориняк Ігор	186
Остос Олександр	162

П

Павлюк Ярослав	119
Пастернак Ярослав	39
Пеліх Володимир	41
Петров Олександр	188
Полищук Тагьяна	121
Попов Всеволод	43
Пороховський Юрій	247
Постолакі Леся	190
Процеров Юрій	208
Процок Борис	191, 194
Прощенко Тетяна	210
Пургіна Світлана	201

Р

Равська-Скотнічни Анна	99
Рагуліна Віра	119
Ревенко Віктор	196
Решітник Юлія	134
Рожок Лілія	123
Ротко Світлана	212

С

Савельєва Катерина	249
Сапужак Ярослав	95
Сасс Тарас	173
Свирид Оксана	173
Селиванов Михайл	121
Селіверстова Ірина	186
Сеник Андрій	198
Сеник Юлія	116

Сенченков Ігорь	125
Сеньків Леся	127
Силованюк Віктор	128
Симчук Ярослав	249
Синюга Володимир	194
Сіренко Володимир	37
Скальський Валентин	23
Скородинський Ігор	199
Слободенюк Тетяна	225
Слободян Микола	216
Сметанкіна Наталя	130
Соляр Тетяна	155
Ставиченко Вадим	201
Станік-Беслер Аніда	66, 77
Стеблянко Павло	188
Сторожук Євген	203
Стрельнікова Олена	232
Стригіна Оксана	210
Сулим Георгій	39

Т

Тайстра Юрій	41
Тарлаковський Дмитро	62
Терлецький Ростислав	132
Ткаченко Вікторія	175
Токовий Юрій	205
Тонконоженко Анатолій	239
Торський Адріан	66
Тріщ Богдан	71
Турчин Ігор	172, 207
Турчин Ольга	207

У

Ужегова Ольга	212
---------------------	-----

Ф

Феньків Володимир	134
Фернаті Павло	119
Філіпчук Анастасія	208
Фурман Віталій	135

Х

Харченко Володимир	37, 233
Хвисевич Віталій	153
Хома Василь	172
Хома Іван	210

Хом'як Леонід	135
Хом'як Микола	135, 251

Ч

Чекурін Василь	151, 190
Чепіль Ольга	95
Червінко Ольга	125
Червінка Костянтин	246
Чернищенко Іван	203
Чернобай Володимир	253
Черняков Юрій	106, 137
Черняков Юрій	188
Чиж Анатолій	205
Чопоров Сергій	139
Чорний Борис	73
Чорноиван Юрій	121
Чупик Ігор	79

Ш

Шаповалова Марія	141
Шарковський Олександр	45
Шваб'юк Василь	212
Шевцов Вадим	201
Шевчук Віктор	214
Шестаков Павло	201
Шинкаренко Георгій	73
Шматко Тетяна	175, 177
Шнейдер Владимир	137
Штойко Іван	142

Щ

Щербакова Юнна	241
----------------------	-----

Я

Ярема Євген	216
Яхно Олег	244

А

Antonenko Nina	218
Auzinger Winfried	46
Avetisyan Ara	47

Г

Ghazaryan Karen	144
-----------------------	-----

Н

Hashemi Mohammad	60
------------------------	----

Huang Yu-Hsi 220

K

Khachatryan Vazgen 47

Kuchminska Khrystyna 49

Kuciej Michał 222, 223

Kushch Volodymyr 51

M

Ma Chien-Ching 220

Mozharovsky Valentin 144

Mykhas'kiv Viktor 51

O

Ohanyan Sergey 144

P

Pidstrygach Victor 52

R

Rushchitsky Jeremiah 146

S

Sarkisyan Samvel 144

Sladek Jan 56

Sladek Vladimir 56

Strelnikova Elena 51

T

Tokovy Yurii 220

Topczewska Katarzyna 222, 223

W

Wünsche Michael 56

Y

Yen Chien-Yu 220

Yevtushenko Aleksander 222, 223

Z

Zhao Ya-Pu 58

Zhuk Yaroslav 60

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Наукові праці у трьох томах

Том 1

*Комп'ютерна верстка та технічне редагування
Романа Іваська*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060
тел.: +380 (32) 263-83-77, факс: +380 (32) 263-62-70

E-mail: confmech2018@gmail.com; confmath2018@gmail.com

Web: <http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>

