

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ
МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ**



**MODERN PROBLEMS
OF MECHANICS AND MATHEMATICS**

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Збірник наукових праць

*За загальною редакцією
академіка НАН України А.М. Самойленка
та академіка НАН України Р.М. Кушніра*

Том 2

Львів – 2018

УДК 539.3; 510(061)

Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 2. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpm2018

Збірник наукових праць складається з трьох томів. Перший та другий томи збірника містять наукові праці, присвячені проблемам математичного моделювання у механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки та термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл і наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проєктування елементів конструкцій і біомеханічних систем; міцності та втоми матеріалів. Третій том присвячено сучасним проблемам математики, зокрема, алгебри і топології, теорії функцій і функціонального аналізу, числових методів, диференціальних рівнянь і математичної фізики. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», яка проходила 22-25 травня 2018 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редакційна колегія:

Головний редактор: академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Кушнір*

Заступники: д.ф.-м.н., проф. *О.Р. Гачкевич*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *В.О. Пелих*, д.ф.-м.н., проф. *Г.Т. Сулим*

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н., ст.н.с. *В.С. Пакош*, к.ф.-м.н. *Н.М. Івасько*, к.ф.-м.н. *Н.С. Джалюк*

Члени редколегії: академіки НАН України: д.ф.-м.н., проф. *В.Т. Грінченко*, д.ф.-м.н., проф. *З.Т. Назарчук*, д.т.н., проф. *В.В. Панасюк*; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. *О.С. Андрейків*, д.т.н., проф. *В.С. Гудрамович*, д.ф.-м.н., проф. *Г.С. Кіт*; д.ф.-м.н., проф. *М.М. Войтович*, д.ф.-м.н., проф. *А.В. Загороднюк*, д.ф.-м.н., проф. *Я.О. Жук*, д.ф.-м.н., проф. *К.Б. Казарян*, д.ф.-м.н., проф. *П.І. Каленюк*, д.ф.-м.н., проф. *П.П. Костробій*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Я.І. Кунець*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Х.Й. Кучмінська*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Лобода*, д.ф.-м.н., проф. *Р.М. Мартиняк*, д.ф.-м.н., проф. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н., проф. *В.В. Михаськів*, д.т.н., проф. *В.В. Можаровський*, д.ф.-м.н., проф. *М.М. Николішин*, д.ф.-м.н., проф. *В.М. Петричкович*, д.ф.-м.н., проф. *В.Я. Підстригач*, д.ф.-м.н., проф. *В.Г. Попов*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Б.В. Процюк*, д.т.н., ст.н.с. *Я.Д. П'янило*, д.ф.-м.н., проф. *М.П. Саврук*, д.ф.-м.н., проф. *Я.Г. Савула*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *Ю.В. Токовий*, д.ф.-м.н., проф. *В.Ф. Чекурін*, д.ф.-м.н., ст.н.с. *А.В. Ясінський*

Рецензенти: *І.М. Дмитрах*, член-кореспондент НАН України, д.т.н., проф., *М.М. Зарічний*, д.ф.-м.н., проф., *Є.Я. Чапля*, д.ф.-м.н., проф.

Ухвалено до друку

Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

National Academy of Sciences of Ukraine
Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

Modern Problems of Mechanics and Mathematics

Collection of scientific papers

Edited by

*Academician of NAS of Ukraine A.M. Samoilenko
and Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir*

Volume 2

L'viv – 2018

UDC 539.3; 510(061)

Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vol. / Edited by A.M. Samoilenko, R.M. Kushnir [Electronic resource] // Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 2. – Access mode: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

The collection of proceedings contains three volumes. The first and second volumes deal, basically, with such problems: mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics; mechanics of non-homogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions; dynamic problems of non-homogeneous environments; optimization and design of elements of the constructions and biomechanics systems, strength and fatigue of materials. The third volume is devoted to modern problems of mathematics, partially, numerical methods, theory of functions and functional analysis, theory of functions and functional analysis, differential equations and mathematical physics, algebra, geometry and topology. They were the subject for discussion on International Conference «Modern Problems of Mechanics and Mathematics», held on May 22-25, 2018, L'viv.

The book may be useful to scientists, to those working for a doctor's degree, post-graduate students, masters and students of corresponding specialties.

Editorial board

Editor-in-chief: *R.M. Kushnir*

Vice-editors-in-chief: *O.R. Hachkevych, V.O. Pelykh, H.T. Sulym*

Senior secretaries: *V.S. Pakosh, N.M. Ivas'ko, N.S. Dzhaliuk*

International Editorial Board: *O.Ye. Andreikiv, V.F. Chekurin, K.B. Ghazaryan, V.S. Hudramovych, V.T. Hrinchenko, P.I. Kalenyuk, H.S. Kit, P.P. Kostrobiiy, Kh.Yo. Kuchmins'ka, Ya.I. Kunets, V.V. Loboda, M.V. Marchuk, R.M. Martynyak, V.V. Mozharovs'kyy, V.V. Mykhas'kiv, Z.T. Nazarchuk, M.M. Nykolyshyn, V.V. Panasyuk, V.M. Petrychkovych, V.Ya. Pidstryhach, V.H. Popov, B.V. Protsyuk, Ya.D. Pyanylo, M.P. Savruk, Ya.H. Savula, M.M. Voitovych, Yu.V. Tokovyy, A.V. Yasins'kyy, A.V. Zagorodnyuk, Ya.O. Zhuk*

Reviewers: *Ye.Ya. Chaplya, I.M. Dmytrakh, M.M. Zarichnyy*

Approved for publishing

by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ISBN 978-966-02-8502-6 (common, electronic edition)
ISBN 978-966-02-8504-0 (v. 2)

© Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ЗМІСТ

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ
ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Альфавіцька Соломія, Николишин Мирон, Опанасович Віктор, Слободян Микола, Білаш Оксана Сумісна дія згину з розтягом ізотропної пластини з наскрізною тріщиною за відсутності контакту її берегів з урахуванням пластичних зон та зміцнення матеріалу у її вершинах	13
Архипенко Костянтин, Кривий Олександр Міжфазна тріщина з зонами контакту в анізотропній неоднорідній площині	15
Бараненко Валерій, Волчок Денис Нечітке моделювання в задачах конструкцій із тріщиною.....	16
Бедзір Олександр, Попадюк Ігор, Шона Василь Контакт з тертям прорізної циліндричної оболонки та неоднорідного заповнювача	18
Білова Оксана, Щербина Ірина, Кагадій Тетяна Застосування асимптотичного методу в контактних задачах для тіл з циліндричною анізотропією	20
Богданов Вячеслав Проблеми руйнування композитів при навантаженні вздовж взаємодіючих тріщин	21
Богданова Ольга Дослідження руйнування ортотропних пружних та в'язкопружних пластин з періодичною системою колінеарних тріщин	23
Бутринський Ігор, Бутринський Дмитро Модель фрикційного ковзання індентора по границі термопружної півплощини.....	25
Дацишин Олександра, Марченко Григорій, Глазов Артем, Кравчук Оксана Про характеристичний кут поширення зсувних поверхневих тріщин в залізничних рейках.....	27
Демидов Олександр, Попов Всеволод Нестационарний закрут скінченного циліндра із зовнішньою кільцевою тріщиною	29
Дзюба Анатолій, Пацюк Анатолій, Левитіна Лариса Експериментальне дослідження розподілу напружень в околі вершини тріщини в оптично-активному матеріалі	31
Довбня Катерина, Врублевський Віктор Дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та тріщиною	33
Жбадинський Ігор, Лаушник Ігор Динамічні напруження у безмежній пружній матриці з дво-періодичним масивом тонких податливих еліптичних включень	35
Зеленяк Володимир, Коляса Любов Короткий огляд досліджень стаціонарного двовимірного термопружного стану кусково-однорідних тіл з тріщинами...	36

Камінський Анатолій, Селіванов Михайло, Черноіван Юрій Визначення критичного навантаження для тріщин змішаного режиму навантаження на основі моделі зони зчеплення.....	38
Кирилова Ольга, Попов Всеволод Взаємодія двох дефектів у нескінченному циліндрі довільного перерізу за гармонічних коливань	40
Козачок Олег Контакт тіл з хвилястим рельєфом з урахуванням рідинного містка і газу в міжповерхневих просвітах	42
Кравець Володимир Напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності	44
Кравчук Роман Дослідження впливу параметрів контактної взаємодії на результати чисельного моделювання процесу інструментованого індентування	47
Кривий Олександр, Морозов Юрій Теплоактивне міжфазне включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному тілі в умовах гладкого контакту	49
Кузь Ігор, Кузь Ольга Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з квадратним отвором і розрізом	51
Кундрат Андрій, Кундрат Микола Гранична рівновага ортотропного тіла з системою тонких стрічкових включень	53
Курташ Ірина, Шацький Іван Гранична рівновага пластини із тріщиноподібним дефектом, заповненим податливим матеріалом.....	55
Маковійчук Микола Взаємодія колінеарних тріщин у пластині на пружній основі за гину бімоментним навантаженням	56
Мартиненко Володимир Розв'язання контактної задачі в'язкопружності ортотропної оболонки за допомогою методу накладених сіток.....	57
Мартиняк Ростислав, Ткачук Микола Анатолійович, Слободян Богдан, Ткачук Микола Миколайович, Маланчук Наталія Локальне зношування тіл з регулярним рельєфом.....	59
Махоркін Микола, Николишин Мирон Гранична рівновага циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за змінного навантаження	61
Мірошніков Віталій Перша основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами	63
Мішарін Андрій, Попов Всеволод Напружений стан біля довільно орієнтовних тріщин на продовженні жорсткого включення при дії хвилі повздовжнього зсуву	65
Можаровский Валентин, Марьяна Наталья, Кузьменков Дмитрий Контактная задача о вдавливании жесткого цилиндра в вязкоупругое покрытие на ортотропном основании.....	67

Назаренко Володимир, Кіпніс Олександр Гранична рівновага кусково-однорідної площини з міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ	69
Николишин Тарас Ослаблена внутрішньою поздовжньою тріщиною пружно-пластична циліндрична оболонка в лінійному пружному середовищі	70
Николишин Мирон, Опанасович Віктор, Куротчин Леся, Слободян Микола Двовісний розтяг пружно-пластичної кусково-однорідної пластини з двома наскрізними міжфазними тріщинами	72
Онишкевич Володимир Плоска контактна задача для прямокутного штампа і пружної півплощини з урахуванням зносу	74
Онишко Любов, Кваснюк Олексій, Пономаренко Олександр, Біда Надія Коефіцієнти інтенсивності напружень для дволанкової ламаної тріщини в ортотропному тілі за антиплоскої деформації	76
Опанасович Віктор, Яцик Ігор Згин пластини Рейсснера зі системою тріщин з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів	79
Острик Володимир Про симетрію інверсії роз'язків крайових задач для пружного клина	81
Прокопишин Ігор, Стягар Андрій Методи декомпозиції області для задачі про неідеальний контакт масивних і тонких пружних тіл	83
Проценко Володимир, Українець Наталія Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною	85
Реут Віктор, Журавльова Зінаїда Плоска мішана задача теорії пружності для півсмуги з вертикальною тріщиною	87
Рудавська Ірина Круговий диск з внутрішньою радіальною тріщиною під дією типового модельного контактного навантаження	88
Сачук Юрій, Максимук Олександр Напружено-деформований стан в пружній півплощині при взаємодії контактних пар конструкційних матеріалів	90
Середницька Христина, Микитин Мар'яна Кругове розшарування між півпростором і жорсткою основою за дії розподілених по колу потоків тепла	92
Сибіль Юрій Про деяке уточнення математичної моделі задачі стаціонарної теплопровідності в області з тріщиною	94
Слободян Микола, Цуркан Мар'яна Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин	96
Сулим Георгій, Піскозуб Йосиф, Піскозуб Любов Інкрементальний підхід до розв'язування задач деформування тонких фізично нелінійних включень ...	98
Сяський Андрій, Шевцова Наталія, Дейнека Олег Міжфазна тріщина в ортотропній пластинці з підкріпленням контуром кругового отвору	100

Трофимчук Олександр, Гомілко Олександр, Савицький Олег Динамічна вертикальна реакція пористопружного насиченого рідиною шару з непроникною тильною гранню під непроникним штампом.....	102
Чорненський Андрій Періодична система еліптичних отворів у квазіортотропній площині та граничний перехід до двобічного параболічного вирізу	104
Kazberuk Andrzej, Savruk Mykhaylo, Chornenkyi Andrii A unified approach to determination of stress concentration near sharp and rounded notches in quasi-orthotropic plane	107
Mykhas'kiv Viktor, Stankevych Volodymyr, Kaplunov Julius, Prikazchikov Danila Mode-III dynamic stress intensity factor of penny-shaped crack in a coated elastic half-space	109
Оноприєнко Олег, Loboda V., Lapusta Y. A conductive crack and an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial.....	111

ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Бобилєв Дмитро Аналіз деформування ауксетичного піноматеріалу в межах анізотропної моделі методом скінченних елементів.....	113
Блін Євген Теорія та практика створення штучної гравітаційної взаємодії.....	115
Вайсфельд Наталія, Мысов Константин Динамическая задача кручения дважды усеченного конуса.....	120
Василько Галина, Турчин Ігор Плоска двовимірна динамічна задача теорії пружності для простору з циліндричною вкладкою	122
Вєтров Олег, Шевченко Володимир Напружено-деформований стан тонкої пластини під дією локального нестационарного навантаження.....	123
Григоренко Олександр, Борисенко Максим, Бойчук Олена Вільні коливання незамкнутої циліндричної оболонки з круговим гофрованим перерізом.....	124
Демешин Уляна Задача динаміки пружного стержня з дробовим зовнішнім опором.....	126
Дем'яненко Анатолій Динаміка пружних об'єктів з рухомих інерційним навантаженням – механічні, математичні моделі, їх особливості та методи дослідження	127
Дівеєв Богдан, Дорош Ігор, Черчик Геннадій Проектування динамічних гасників коливань для функціональних елементів автомобілів	130
Дубик Ярослав, Ориняк Ігор, Іщенко Олексій Рішення у поліномах задачі про вільні коливання циліндричної оболонки з довільними граничними умовами.....	132

Зусва Тетяна Дисипативний рух вихорів у конденсатах Бозе-Ейнштейна, що обертаються	134
Кендзера Олександр, Рушицький Ярема До теорії в'язкопружних сейсмічних хвиль, що поширюються в шаруватій земній товщі	136
Кононов Юрій, Василенко Валерія Про стійкість обертання дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною з урахуванням дисипативного та двох постійних моментів	139
Костробій Петро, Рижа Ірина Тонка структура коливної реакції окиснення чадного газу на поверхні металевого каталізатора	141
Кравчишин Оксана Дослідження нормального падіння пружних хвиль різної поляризації на плоский неоднорідно деформований шар	143
Кремез Віталій, Телима Сергій Деякі задачі фізико-хімічної гідродинаміки рідин в пористих середовищах при змінах їх властивостей внаслідок фазових перетворень	145
Кунець Ярослав, Рабош Роман, Максимів Юлія Дифракція SH-хвиль тонким неконтрастним п'єзокерамічним включенням у пружному півпросторі	147
Литвин Оксана, Попов Всеволод Напружений стан у пружному тілі з триланковим жорстким включенням при гармонічному хвильовому навантаженні	149
Малюга Володимир, Троценко Ярослав Пряме чисельне моделювання тривимірного потоку нестисливої в'язкої рідини в циліндричному каналі з двома послідовними стенозами	151
Матус Валерій, Кунець Ярослав, Міщенко Віктор, Пороховський Василь Метод нульового поля у задачах розсіяння пружних хвиль волокнами за неідеального контакту на міжфазних поверхнях	153
Мікуліч Олена, Шваб'юк Василь Розвиток методу граничних інтегральних рівнянь до дослідження динамічних задач у рамках континууму Коссера	155
Назарчук Зіновій, Войтко Мирон, Кулинич Ярослав, Куриляк Дозислав Резонансна взаємодія пружної SH-хвилі з тріщиною у пружному шарі	157
Перепічка Василь Задача про удар по пружному стрижні із зовнішнім сухим тертям на боковій поверхні за умови лінійного зростання притиску на торці	159
Соляр Тетяна, Максимович Олеся Регуляризація формули обернення перетворення Лапласа стосовно визначення концентрації динамічних напружень у пластинках з отворами	161
Стоцько Зіновій, Топільницький Володимир, Ребот Дарія, Кусий Ярослав Математичне представлення технологічних середовищ при вібраційному обробленні поверхонь виробів	163

Фесенко Ганна, Мойсеєнок Олексій Точний розв'язок динамічної задачі для пружного шару з циліндричним жорстким включенням	165
Чекурін Василь, Химко Ольга Задачі динаміки газу в довгому трубопроводі за локальної розгерметизації	167
Шопа Тетяна Дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин з отворами та включеннями.....	168
Butyter Ihor, Diveyev Bohdan Beam with magneto-reological core using refined layer-wise theory vibration suppression	169
Marchuk Mykhailo, Goriachko Taras, Pakosh Vira, Lesyk Oksana Amplitude-frequency characteristics of elongated panels with arbitrary generatrix for geometrically nonlinear vibrations	170
Mikhlin Yuri, Plakisy Katarina, Onizhuk Anton Resonance behaviour of the system with limited power supply having nonlinear absorbers	172
Velychkovych Andrii, Shatskyi Ivan, Shopa Vasyi, Dutkiewicz Maciej, Gołębiewska Irena Design, simulation and application of inertial dampers: from transmission lines to drill columns	174

**ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ
ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Гудрамович Вадим, Гарт Етері, Панченко Сергій Числове дослідження впливу смугових підкріплень прямокутних отворів на напружено-деформований стан пластини.....	175
Гудрамович Вадим, Пошивалов Володимир, Данієв Юрій, Резниченко Людмила Імовірнісні підходи при прогнозуванні ресурсу конструкцій на етапі проектування	177
Дзюба Анатолій, Сіренко Володимир Вагова оптимізація параметрів силового шпангоута та з'єднаного з ним пучка оболонок при несиметричному навантаженні.....	179
Дзюбик Андрій, Прокопишин Іван, Дзюбик Людмила, Зінько Ярослав Прогнозування міцності надземної ділянки магістрального трубопроводу	181
Кудін Олексій, Козлова Ольга, Кривохата Анастасія Аналіз стійкості тришарових анізотропних оболонок обертання з нелінійно-пружним заповнювачем.....	183
Лещук Олександр, Полотняк Сергій, Псярнецька Тетяна, Панасюк Тетяна, Нагорний Володимир Компю'терне проектування та оптимізація в технологіях термобаричної обробки матеріалів.....	185
Мартиненко Геннадій Проектування і оптимізація радіальних пасивних магнітних підшипників як опор ротора детандер-компресорного агрегату.....	186

Новіков Андрій, Ориняк Ігор Методика динамічного аналізу процесу проходження поршня в геометрично нелінійній постановці.....	188
Поліщук Олександр Потокові моделі мережевих систем.....	190
Поліщук Олександр Про серцевини систем мультиплексного типу	192
Сафронова Інга Алгоритм прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку і оптимального проектування конструкцій	194
Семененко Володимир, Крижановська Тетяна, Семененко Тетяна Моделювання динаміки і розрахунок міцності тіл, що проникають у воду з великою швидкістю	196
Скрицький Микола Методологія оптимізації геометрії лопатки для чисельних розрахунків на прикладі лопатки газотурбінного двигуна	198
Яджак Михайло Оптимізація інтерактивного оцінювання складних мережевих систем на підставі розпаралелювання обчислень	200
Ясінський Анатолій Керування стаціонарними температурними переміщеннями плоскодеформованого півпростору.....	202
Яскевець Захар, Ориняк Ігор Розрахунок напруженого стану підземних ділянок трубопроводів в зонах шахтних виробіток з врахуванням історії розвитку поздовжніх зміщень ґрунту.....	203
Bosiakov Sergei, Yurkevich Kirill, Alekseev Denis, Silberschmidt Vadim, Shpileuski Ihar Assessment of ultimate load on human femur after surgical resection: effect of mechanical properties anisotropy.....	205
Demydyuk Myroslav, Lytwyn Bogdan Mathematical modeling of human gait with electromechanical exoskeleton.....	207
Nyashin Yuriy The development of the international project "virtual physiological human", the role of biomechanics in the development of biomedicine	210

МІЦНІСТЬ І ВТОМА МАТЕРІАЛІВ

Віра Володимир, Кулик Володимир, Палюх Володимир Формування початкової пошкоджуваності та зон пластичності біля концентраторів напружень	211
Віра Володимир, Кулик Володимир, Палюх Володимир Спосіб визначення дисипації локальної енергії деформування за цикл навантаження	213
Герасимчук Олег, Кононученко Олег, Герасимчук Олена Оцінка втомної міцності за наявності гострого концентратора напружень	214
Дяків Василь, Чекурін Василь Методика статистичних випробувань листового скла на тривалу міцність за статичних навантажень розтягу	216

Дяків Василь, Чекурін Василь, Іваницький Ярослав, Мольков Юрій Тензометричні вимірювання деформації зразків за випробувань листового скла на тривалу міцність.....	218
Ісасв Микола, Григорова Тетяна, Забродін Павло, Шумілін Сергій, Гейдаров Вусал Вплив деформаційного зміцнення на нестійкість пластичної деформації металів при низьких температурах	219
Кравчук Андрей, Кондряков Евгений, Панасенко Александр, Харченко Валерий Исследование влияния ориентации концентратора относительно оси трубопровода на составляющие энергии разрушения и температуру вязко-хрупкого перехода образцов шарпи из стали 22к.....	221
Лапуста Юрій, Андрейків Олександр, Штаюра Наталія Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкцій з механічно малими тріщинами за дії силових і фізико-хімічних факторів	223
Ліснічук Андрій, Івантишин Наталія Міцність фібробетонів за стиску	225
Мармыш Денис Определение повреждаемости силовой системы методом Монте-Карло	228
Потопальська Ксенія, Ларін Олексій Оцінка залишкового ресурсу трубопроводів із зовнішнім корозійним дефектом при відмовах внаслідок втоми	230
Харченко Володимир, Клименко Дмитро Навантаженість стику відсіків ракети при експлуатації.....	232
Харченко Володимир, Сіренко Володимир Навантаженість кріпильних елементів стику циліндричних відсіків ракети з нерівномірною жорсткістю.....	233
Ясній Олег, Пастух Олег, Бревус Віталій, Дідич Ірина, Гречківський Степан Ефективність прогнозування довговічності елементів конструкцій методами машинного навчання.....	234
Ясній Петро, Лапуста Юрій, Гладьо Сергій, Шніцар Тетяна Моделювання МСЕ залишкових напружень в пластинах із зміцненими отворами.....	236
Otychenko Oksana, Bezimyanniy Yuriy, Kolesnykov Anatoliy, Uvarova Iryna Influence of magnetite on mechanical characteristics of hydroxyapatite bioceramics	238
Алфавітний покажчик	239

МЕХАНІКА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ, ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

УДК 539.3

СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З РОЗТЯГОМ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ВІДСУТНОСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЩЕННЯ МАТЕРІАЛУ У ЇЇ ВЕРШИНАХ

Соломія Альфавицька, Мирон Николишин, Віктор Опанасович,
Микола Слободян, Оксана Білаш

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна);

Національна академія сухопутних військ імені Петра Сагайдачного (Україна)

alfavitska_solomiya@i.ua

Досліджено комбінований згин з розтягом ізотропної пластини товщиною $2h$ за наявності наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки $2l$, береги якої не контактують.

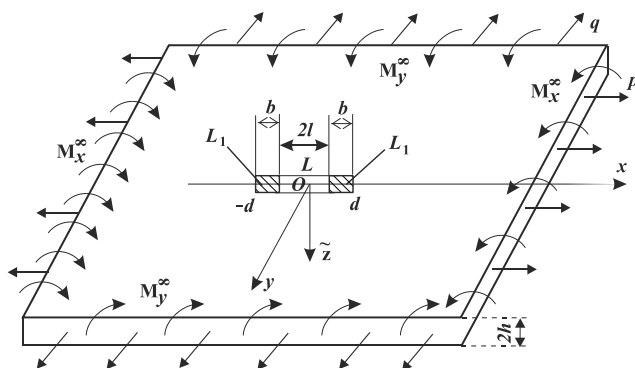


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$Ox\tilde{z}$ з початком у центрі тріщини, спрямувавши вісь Ox вздовж тріщин, а вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї. Згинальні моменти на нескінченності позначимо через M_x^∞ і M_y^∞ , а розподіленні зусилля – через p, q . Лінію дійсної осі, де розміщена тріщина, позначимо через L , пластичні зони – через L_1 , довжину пластичної зони – через b , а їх кінці – через $-d$ і d (див. рис.1). Крім того введемо позначення $LL = L \cup L_1$.

Для опису пластини будемо користуватися класичною теорією за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^\pm = \sigma_0 \sigma^*(x), M_y^\pm = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1,$$

$$\sigma_{yy}^\pm = 0, M_y^\pm = 0, \quad x \in L; \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, P_y^\pm = 0, \quad x \in LL,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – шукані величини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; значками “+” і “-” позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$;

$$\sigma^*(x) = \left((1 - m^*) / d - l \right) |x| + \left(m^* - (1 - m^*) l / d - l \right),$$

де σ_B і σ_Y – межі міцності та текучості матеріалу, $m^* = \sigma_B / \sigma_Y$.

За допомогою комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розв’язування задачі зведено до задач лінійного спряження та отримано їх аналітичні розв’язки в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, а для знаходження їх довжин використано умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару та пластичного шарніру. Числово визначено довжину пластичних зон та розходження берегів тріщини у її вершині, побудовано відповідні графічні залежності при різних параметрах задачі.

**COMPATIBLE ACTION OF BENDING AND TENSION OF ISOTROPIC PLANE,
WHICH CONTAINS THROUGH CRACK AND BANKS OF WHICH ARE NOT CONTACT,
TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC ZONES AND STRENGTHENING
OF THE MATERIAL IN ITS TIPS**

The problem of biaxial tension and bending of isotropic plate with through crack is solved, which is under active bending moment and force at the infinity. The banks of the plate aren't contact, but plastic zones are appeared in their tips, taking into account strengthening of the material, where the Trasca's plasticity of surface layer and plastic hinge are satisfied. The solution of the problem is obtained in the class of functions limited in the tips of the plastic zones by using complex potentials of plane problem and classical theory of bending plate. The formulas for calculating plastic zone length and crack banks opening in its tips are submitted. The numerical analysis is performed at different problem parameters.

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА З ЗОНАМИ КОНТАКТУ В АНІЗОТРОПНІЙ НЕОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Костянтин Архипенко, Олександр Кривий

Національний Університет «Одеська морська академія» (Україна)

k_arkhipenko@ukr.net; krivoy-odessa@ukr.net,

Задачу про міжфазну тріщину $L = \{x = 0, y \in [-l; l]\}$, розташовану на границі з'єднання двох різних анізотропних півплощин, із зонами контакту на кінцях тріщини $L \setminus L_0$, $L_0 = \{x = 0, y \in [-l_0; l_0]\}$ за допомогою сингулярних інтегральних співвідношень [1-3] зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^-(y) + \mathbf{C} \cdot \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mathbf{H}^-(t)}{t-y} dy = \mathbf{H}^+(y), \quad (1)$$

де $\mathbf{H}^\pm = \{H_j^\pm\}_{j=\overline{1,4}} = \{\varphi_j^\pm(y) \pm \varphi_j^\mp(y)\}_{j=\overline{1,4}}$, $\{\varphi_j^\pm(y)\}_{j=\overline{1,4}} = \{\sigma_x, \tau_{xy}, v'_y, u'_y\}_{x=\pm 0}$, матриці \mathbf{B}, \mathbf{C} залежать від пружних сталей анізотропних півплощин.

Розв'язання системи (1) дозволило визначити коефіцієнти інтенсивності на кінцях тріщини та довжини зон контакту.

1. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84-92.
2. Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 6. – С. 36-45.
3. Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. - 72, № 4. – С. 689-700.

INTERFACE CRACKS WITH CONTACT ZONES IN ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS PLANE

The problem about interface crack with contact zones in anisotropic inhomogeneous plane is reduced to the system of singular integral equations referring to the sums and the jumps of stresses and displacements. The solution of this system is obtained, the indices of singularities at the tops of the crack and the lengths of the contact zones are determined.

НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ТРІЩИНОЮ

Валерій Бараненко, Денис Волчок

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури (Україна)

baranenko1941@ukr.net; Denys.l.volchok@gmail.com

При постановках і розв'язаннях різноманітних задач проектування конструкцій, у тому числі оптимальних, поряд з детермінованими, викликає інтерес розглядання більш загального підходу, коли виникають інформаційні ситуації з певною ступінню невизначеності. Математичним апаратом для формулювання таких задач з можливістю появи невизначеності довгий час була теорія ймовірностей. Але сприйняття зовнішнього середовища з часом дещо змінилось і у деяких випадках адекватність цієї теорії викликає сумніви. Тому поступово набирає застосування новий математичний напрямок - теорія нечітких множин (ТНМ). Ця теорія завдяки математичним діям фаззифікації, нечіткого аналізу, дефаззифікації дає можливість аналізувати вплив нечіткої інформації на показники НДС та оптимізаційних задач.

1. Розглянуто елемент конструкції - смуга, що зазнає циклічного навантаження - осьового розтягнення $\sigma(t)$, яке задається у формі максимального і мінімального значень. Нехай на краю смуги існує крайова поперечна тріщина відкритого розриву з певною довжиною $a = l_0$. Під дією змінного навантаження $\sigma(t)$ відбувається сталий процес росту тріщини, який описується рівнянням Періса $da/dN = f(a, \sigma)$, де a - довжина тріщини, N - число циклів навантаження. Умова відмовлення, що визначає перехід конструкції в непрацездатність, має вид $a|_{N=N^k} = a_*$, де N^k - число циклів навантаження, за яке тріщина збільшить свою довжину від $a|_{N=0} = l_0$ до a_* . Величина a_* визначається за умови початку катастрофічного росту тріщини, тобто $K_{\max} = K_{IC}$, де K_{\max} - критерій Ірвіна - коефіцієнт напруги (КІН), позначений як $K_{\max} = 1.12\sigma_{\max}\sqrt{na}$. Величина a_* в цьому випадку визначається як $a_* = \left(K_{IC}/1.12\sqrt{\pi}\sigma_{\max}\right)^2$. Інтегрування рівняння Періса з урахуванням того, що $f(a, \sigma) = A(1.12(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})\sqrt{\pi a})$ дає шуканий аналітичний розв'язок $N_* = \frac{2}{\beta(2-n)} \left(\sqrt{a_*^{2-n}} - \sqrt{a_0^{2-n}}\right)$, де $\beta = A(1.12\sqrt{\pi}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}))^n$. У цих виразах

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

коефіцієнти n і A є емпіричні. Ставиться питання: як зміняться величини N_* і a_* , якщо початкова довжина тріщини дорівнює "приблизно \tilde{l}_0 " або "десь в інтервалі $l_{10} \leq \tilde{l}_0 \leq l_{20}$ " в якому величини l_{10} , l_{20} задаються апіорі. Застосування α -рівнів ТНМ дає можливість побудувати нечіткі множини для a_* і N_* (етап нечіткого моделювання). Наведено приклад знаходження нечітких значень a_*^f і N_*^f для випадку, коли \tilde{l}_0 задається функцією належності трикутного виду (етап фаззифікації). Якщо застосувати дефаззифікацію до нечітких a_*^f і N_*^f , можна отримати детерміновані a_*^{def} і N_*^{def} , які порівнюються з результатом розв'язання задачі при значенні l_0 . Як і очікувалось, в цьому випадку число циклів навантаження N_* зменшується.

2. Застосування ТНМ покажемо також на оптимізаційній задачі проектування ізотропної балки заданої довжини прямокутного перетину мінімального об'єму V при силовому навантаженні, еквівалентному згинальному моменту $M(x)$. Треба знайти такий розподіл перерізів, який задовольняє: обмеження на міцність ($K \leq K_{IC}$); геометричні обмеження та обмеження на жорсткість. Отримаємо таку задачу оптимального проектування конструкції:

$$\{h_i^{opt}\}_{i=1, M} = \arg \left\{ \min_{h_i \in \Omega} b \Delta x \sum_{i=1}^M h_i \left| \sum_{i=1}^M \frac{D_i}{h_i^3} \leq y_0; h_i \in \Omega \right. \right\},$$

$$\text{де } \Omega = \left\{ h_i : h_i \geq \bar{h}_i; \frac{6\gamma |M_i|}{bh_i^2} \sqrt{\pi l} \leq K_{IC} \right\}; D_i = \frac{12M_i \bar{M}_i \Delta x}{Eb}; \gamma = 1.12.$$

Розв'язання задачі виконується за методом динамічного програмування. На основі цього методу розроблена чисельно-аналітична рекурентна процедура знаходження оптимальних перерізів і відповідно значення оптимального об'єму балки. Нехай величина силового навантаження задається нечітким числом, тобто $M_i =$ "приблизно \tilde{M}_0 ". Для визначеності скористаємось функцією належності трикутного виду. Підхід α -рівнів і теорема узагальнення дозволяє визначити нечіткі множини $V_*^f(\alpha)$ і $h_*^f(\alpha)$. Подальше застосування до цих нечітких множин операції дефаззифікації дає змогу отримати детерміновані значення V_*^{def} і h_*^{def} .

FUZZY MODELING IN THE PROBLEMS OF CONSTRUCTIONS WITH A CRACK

The problem of fuzzy modeling is considered. Illustrating examples are a cyclically loaded strip with a crack and an optimization problem for an isotropic beam. Results are compared with the exact solution.

КОНТАКТ З ТЕРТЯМ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ТА НЕОДНОРІДНОГО ЗАПОВНЮВАЧА

Олександр Бездір, Ігор Попадюк, Василь Шопа

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

olbedzir@gmail.com; igorpopadyuk60@gmail.com; vasyl.shopa@gmail.com

Прорізні оболонкові пружні елементи є важливою складовою відомого класу віброзахисних пристроїв [2]. Моделювання роботи оболонкових пружних систем зводиться до постановки змішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонкостінних оболонок з деформівним заповнювачем. Загальні підходи до формулювання та розв'язування контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем при немотонному навантаженні представлено в монографії [1]. Метою даної роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи та її жорсткості у випадку використання неоднорідного заповнювача.

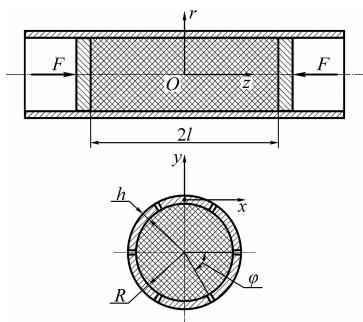


Рис. 1.

Розглянемо пружний циліндр радіуса R та довжини $2l$, який заповнює циліндричну оболонку товщиною h та довжиною $2L$ (рис. 1). На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження F . Тертям на торцях неоднорідних частин заповнювача нехтуємо. Для моделювання прорізної оболонки та заповнювача використовуємо рівняння, які представлені в монографії [3]. Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному

зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту з врахуванням зони відлипання:

$$\begin{aligned} [w] = w_o - w = 0, \quad \sigma(\zeta) < 0, \quad \zeta \in T', \quad T' = [-1, a] \cup [a, 1], \\ [w] > 0, \quad \sigma(\zeta) = 0, \quad \zeta \in T'', \quad T'' = (-a, a), \end{aligned}$$

де w_o – прогин панелі; w – радіальне переміщення заповнювача на поверхні контакту $[w]$ – стрибок радіальних переміщень на контактній поверхні; T', T'' – області проковзування та відлипання відповідно; a – невідома

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

безрозмірна координата точок їх розмежування. Закон тертя Кулона описує контактну взаємодію панелей та заповнювача в зоні проковзування

$$\tau(\zeta) = f\sigma(\zeta)\operatorname{sgn}\zeta, \quad \zeta \in T',$$

де f – коефіцієнт сухого тертя, де σ, τ – нормальне і дотичне контактні напруження; $\zeta = z/l$ – безрозмірна осьова координата.

На торцях заповнювача виконуються умови:

$$\sigma_{\zeta}(\pm 1) = -p \equiv -\frac{F}{\pi R^2}.$$

Контактну задачу зведено до інтегрального рівняння відносно функції розподілу контактних напружень між заповнювачем та оболонкою

$$\sigma(\zeta) + \int_{T'} K(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu(\zeta)}{1-\nu(\zeta)} P, \quad \zeta \in T',$$

де $K(\xi, \zeta) = -\frac{\nu(\zeta)}{1-\nu(\zeta)} l f \operatorname{sgn}\zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\zeta, \xi)$, $4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu(\zeta)} \frac{l^4 b}{R I_x} \frac{E(\zeta)}{E_0}$,

$b = 2R \sin(\varphi/2)$ – ширина панелі; $E_0 I_x = 0,5 E_0 h R^3 (\varphi + \sin(\varphi) - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi)$ – жорсткість панелі на згин; $\varphi = 2\pi/N$, N – кількість розрізів; $E_0, E(\zeta), \nu(\zeta)$ – модулі Юнга та коефіцієнт Пуасона матеріалів оболонки та заповнювача. Інтегральне рівняння розв'язано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів.

На основі числових розв'язків досліджено основні властивості пружної системи в залежності від геометричних, трибологічних та фізичних характеристик контактних тіл.

1. *Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шона В.М.* Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.
2. *Шона В.М., Величкович А.С., Величкович С.В., Шацький І.П., Попадюк І.Й., Шона Т.В.* Оболонкові пружини. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
3. *Шона В.М., Шацький І.П., Бедзір О.О., Величкович А.С.* Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.

A CONTACT IS WITH FRICTION OF SLOTTED CYLINDRICAL SHELL WITH A HETEROGENEOUS FILLER

The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system which consists of cylindrical slit shells, divided by deformable filler, is realized. Using one-di-mensional shell and filler models, the integral equation for finding the contact is con-structed. On the basis of numerical solutions the effect of mechanical, geometric and tribologic parameters of contacting pairs on nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated.

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ В КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТІЛ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ

Оксана Білова, Ірина Щербина, Тетяна Кагадій

Національна металургійна академія України

okbelova00@gmail.com

Впродовж довгого часу пошук підходів до розв'язання контактних задач для тіл з криволінійною анізотропією є актуальним, оскільки подібні задачі мають широке коло застосування. Анізотропія пружного середовища зазвичай приводить до значних труднощів при вирішенні крайових задач. Проте для широкого класу конструкцій характеристики анізотропії пружного середовища можуть бути використані як параметри асимптотичного інтегрування. Розв'язана задача про дію жорсткого штампу на ортотропну пластину (вигляду напівскінченного кільцевого сектора) з криволінійною анізотропією. Для розв'язання був застосований асимптотичний метод [1], що дозволив розщепити напружено-деформівний стан сектора на дві складові, що мають різні властивості. Крайова задача теорії пружності зводиться до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу, розв'язок вихідної задачі визначається як суперпозиція вказаних складових.

Отримано розподіл напружень у пластині та під штампом. Досліджено вплив відношення довжини штампу до довжини вільної межі пластини на розподіл нормальних напружень під штампом. Проведено порівняння отриманого розв'язку з відомим для напівсмуги. Досліджено характер особливості в околі кутових точок штампу. Отримання перших двох наближень дає хорошу апроксимацію точного розв'язку і вказує на характер особливості поблизу кутової точки штампу.

1. *Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – Киев-Донецк: Вища школа. – 1982. – 152 с.

APPLICATION OF AN ASYMPTOTIC METHOD TO CONTACT PROBLEMS BODIES WITH CYLINDRICAL ANISOTROPY

The problem on impression of a rigid stamp in an orthotropic plate (an aspect of semi-infinite ring sector) with curvilinear anisotropy is formulated and solved. The asymptotic method has been applied to a solution of a task, allowing to split the intense-deformed condition of sector on two components possessing various properties. The boundary value problem of the theory of elasticity is reduced to a sequential solution of tasks of a potential theory, and the solution of an initial task is defined as superposition of the specified components.

ПРОБЛЕМИ РУЙНУВАННЯ КОМПОЗИТИВ ПРИ НАВАНТАЖЕННІ ВЗДОВЖ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ТРІЩИН

Вячеслав Богданов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

bogdanov@nas.gov.ua

Технологічні процеси виготовлення композитних матеріалів часто обумовлюють виникнення в таких матеріалах полів початкових (залишкових) напружень та деформацій, які можуть суттєво впливати на параметри руйнування композитів, що містять тріщиноподібні дефекти. В ситуації, коли вказані початкові напруження діють вздовж поверхонь тріщин (а така ситуація є типовою для шаруватих та волокнистих композитів [1]), підходи класичної механіки руйнування виявляються непридатними для врахування впливу початкових напружень на параметри руйнування [2]. Іншою групою неklasичних проблем є руйнування композитів при стисканні вздовж тріщин, коли процес руйнування ініціюється локальною втратою стійкості матеріалу в околі тріщин. Тому для адекватного дослідження вказаних неklasичних проблем руйнування О.М.Гузєм був запропонований підхід, базований на співвідношеннях лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла [2].

В даній доповіді представлено новий комбінований метод обчислення параметрів руйнування композитів з тріщинами в умовах стискання вздовж площин тріщин [3]. Відповідно до цього методу зазначені параметри руйнування вираховуються як значення початкових (залишкових) стискаючих напружень, при досягненні яких спостерігається явище різкої «резонансоподібної» зміни параметрів напружено-деформованого стану, зокрема, значень коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контурів тріщин. Також продемонстровано застосування цього методу до дослідження просторових задач механіки руйнування композитів, що містять взаємодіючі дископодібні тріщини (зокрема, розглянуті випадки наявності в композиті двох паралельних співвісних тріщин, періодичної системи співвісних паралельних тріщин, а також приповерхневої тріщини).

Розглянуто декілька видів навантаження на берегах тріщин (нормальний відрив, радіальний зсув, кручення) та проаналізовано вплив механічних характеристик композитів та геометричних параметрів задач на значення критичних параметрів. Чисельні результати отримано для двох типів композитів, а саме, для шаруватого двокомпонентного композита з ізотропними шарами та композита зі стохастичним армуванням короткими еліпсоїдальними волокнами. На рис. 1 для приповерхневої тріщини наведено

залежність співвідношення КІН K_I/K_I^∞ (де K_I^∞ - КІН для тріщини нормального відриву в необмеженому тілі) від об'ємної концентрації одного з компонентів для різних значень параметра початкових напружень λ_1 ($\lambda_1 > 1$ відповідає початковим розтягуючим напруженням, $\lambda_1 < 1$ - початковим стискаючим напруженням, $\lambda_1 = 1$ відповідає випадку відсутності початкових напружень). Рис. 2 ілюструє залежність K_I/K_I^∞ від безрозмірної відстані $\beta = h/a$ між тріщиною та границею півпростору. Як бачимо, обидва рисунки демонструють суттєву залежність КІН від початкових напружень, механічних характеристик композиту та геометричних параметрів задачі.

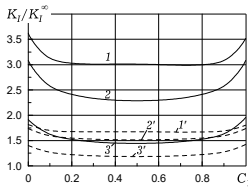


Рис. 1

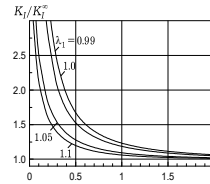


Рис. 2

1. Шульга Н.А., Томашевский В.Т. Технологические напряжения и деформации в материалах. – К.: "А.С.К", 1997. – 394 с.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наукова думка, 1983. – 296 с.
3. Богданов В.Л., Гузь А.Н., Назаренко В.М. Объединенный подход в неклассических проблемах механики разрушения. – Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2017. – 528 с.

PROBLEMS OF FRACTURE OF COMPOSITES LOADED ALONG INTERACTING CRACKS

Some problems on the fracture of composites containing interacting cracks under the action of forces directed along the cracks are discussed. Given are the descriptions of two non-classical failure mechanisms – the fracture of compressed bodies under the action of forces directed in parallel to the planes containing cracks and the fracture of composites with initial (residual) stress acting along cracks. We use a combined approach to investigate the abovementioned fracture mechanisms within the framework of linearized solid mechanics. Problems on an infinite body containing two parallel co-axial penny-shaped cracks and on a space with the periodical set of co-axial parallel circular cracks as well as those on a half-space with subsurface circular crack are solved. Several patterns of loading on the crack faces are considered. The effects of residual stresses on stress intensity factors are analyzed for some types of composite materials. Critical fracture parameters for composites with cracks compressed along the cracks are calculated using the approach mentioned.

ДОСЛІДЖЕННЯ РУЙНУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ТА В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПЛАСТИН З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН

Ольга Богданова

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

o.bogdanova@i.ua

Базуючись на модифікованій δ_c -моделі руйнування [1] розглядається тонка ортотропна пластинка з періодичною системою колінеарних тріщин довжини l , розташованими вздовж осі Ox , під дією однорідного розтягу $\sigma_y = p > 0$.

На підставі δ_c -критерію руйнування визначається поле граничних навантажень p_*

$$\sigma_y^0(p_*) \frac{\tilde{l}}{\arcsin(\tilde{l})} \int_1^{\tilde{l}/l} F(t, \rho_*) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2(\tilde{l})^2}} = 2\sigma_y^0(p_*^{(1)}) \ln \sec \frac{\pi p_*^{(1)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(1)})}, \quad (1)$$

$$\text{де } F(x, r) = \ln \frac{\left(1 + x \cos^2 r + \sqrt{1 - x^2 \cos^2 r} \sin r\right)(x-1)}{\left(1 - x \cos^2 r + \sqrt{1 - x^2 \cos^2 r} \sin r\right)(x+1)},$$

$\tilde{l} = \sin \frac{\pi l}{2D}$, $\rho_* = \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*)}$, $p_*^{(1)}$ – граничне навантаження у випадку пластини з

однією тріщиною, σ_y^0 – напруження в зоні передруйнування, яке визначається із системи двох рівнянь

$$\sigma_x^0 = \beta(\sigma_y^0 - p), \quad F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, C_i) = 0, \quad \beta = \sqrt{E_1/E_2}. \quad (2)$$

Навантаження $p_*^{(d)}$, при якому відбувається злиття зон передруйнування сусідніх тріщин визначається співвідношенням

$$\frac{D}{l} = \frac{\pi}{2 \arcsin(\cos \rho^{(d)})}, \quad \rho^{(d)} = \frac{\pi p_*^{(d)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(d)})}. \quad (3)$$

Таким чином, граничний стан пластини з періодичною системою колінеарних тріщин можна визначити сукупністю умов (1) і (3). Було побудовано

залежність критичного навантаження від безрозмірної відстані між тріщинами D/l , отриманими на основі співвідношень (1) та (3). Очевидно, що при довільній довжині тріщини та відстані між ними існує такий «критичний» рівень навантаження, коли відбувається часткове руйнування всього перетину уздовж лінії розташування тріщин. Це "критичне" навантаження тим вище, чим менше довжина тріщин.

Розглянуто також тонку ортотропну пластину з в'язкопружного матеріалу, ослаблену періодичною системою колінеарних тріщин, розташованих вздовж однієї осі ортотропії.

Для тіл з обмеженою повзучістю визначено "безпечні" навантаження p_S , для яких значення розкриття тріщини у вершині $\delta(l_0, t)$ не може досягти критичного значення δ_c за будь-який час, тому розвиток тріщини не відбудеться. Такі безпечні навантаження визначаються співвідношенням

$$\sigma_y^0(p_S) \frac{\tilde{l}}{\arcsin(\tilde{l})} \int_1^{\tilde{l}/l} F(\tau, \rho_S) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tilde{l})^2} = 2 \frac{T_0}{T_\infty} \sigma_y^0(p_*^{(1)}) \ln \sec \frac{\pi p_*^{(1)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(1)})}. \quad (4)$$

Отримано залежність безпечного навантаження p_S від безрозмірної відстані між тріщинами та реологічними параметрами матеріалу. Можна відзначити, що зміна реологічних параметрів матеріалу λ і γ суттєво впливає на область безпечного навантаження: зменшення λ або збільшення $|\gamma|$ при інших сталих характеристиках призводить до збільшення рівня безпечного навантаження, параметр α не впливає на рівень безпечного навантаження. Таким чином, шляхом зміни реологічних параметрів матеріалу можна досягти зменшення області навантаження, при якому відбувається розвиток тріщин.

1. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S., Bastun V.N. On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2011. – 34, 5. – С. 345-355.

STUDYING OF FRACTURE OF THE ORTHOTROPIC ELASTIC AND VISCO-ELASTIC PLATES WITH PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR CRACKS

On the basis of a modified δ_c -model of crack, the limiting state of an orthotropic plate made of a material satisfying the general strength condition and weakened by a system of collinear cracks is studied. The relations for the determination of crack model (the size of process zones, stresses in these zones, and the crack-tip opening displacements) are deduced. The influence of the degree of anisotropy and geometric parameters of the problem on the formation of the process zones and limiting state of the plate is revealed. The region of safe loading of an orthotropic viscoelastic plate with cracks is determined. The influence of the rheological parameters of the material on the region of safe loading is analyzed.

МОДЕЛЬ ФРИКЦІЙНОГО КОВЗАННЯ ІНДЕНТОРА ПО ГРАНИЦІ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Ігор Бутринський, Дмитро Бутринський

Національний університет "Львівська політехніка" (Україна)

bmech@polynet.lviv.ua

Складність побудови моделі фрикційної взаємодії в парах тертя зумовлена різномайттям, своєрідністю та істотною взаємопов'язаністю фізико-хімічних процесів що відбуваються в області контакту [6,3].

Розглядається модель фрикційної взаємодії при ковзанні з постійною швидкістю жорсткого гладкого випуклого штампку вздовж границі термопружної півплощини

Моделі і задачі фрикційної взаємодії, коли усі джерела тепла пропорційні до потужності сил опору і приймаються такими, що розташовані тільки на поверхні (лінії) контакту, розроблено та досліджено у багатьох роботах, зокрема у роботах [2,4,5,8,9]; у такій постановці задачі термопружності розглядаються як незв'язні а поле деформацій - як квазістатичне.

Дослідження хвильових процесів при фрикційній взаємодії, проведені у роботах [1,7,10], вказують також на важливість врахування у моделі додаткового механізму дисипації енергії за рахунок випромінювання хвиль із контактної зони у півплощину.

У запропонованій моделі, відштовхуючись від молекулярно-механічної теорії тертя [6], приймається, що теплоутворення відбувається: а) внаслідок адгезійної взаємодії - поверхневими джерелами тепла, розташованими на лінії контакту, потужність яких пропорційна інтенсивності дотичних напружень сил тертя і швидкості ковзання; б) внаслідок деформаційної взаємодії штампку і півплощини - джерелами тепла, розподіленими по об'ємі напівплощини, інтенсивність яких пропорційна до об'ємної деформації матеріалу.

Термонапружений стан півплощини моделюється за допомогою рівнянь теорії зв'язної лінійної термопружності з врахуванням інерційних (хвильових) властивостей.

Числовий розв'язок будується із застосуванням варіаційно-різницевого методу в формі методу скінченних елементів.

Запропонована модель враховує взаємовплив процесів нагрівання та деформування, дозволяє досліджувати взаємовплив адгезійної та деформаційної складових тертя та явища, пов'язані з дисипацією енергії внаслідок хвильових процесів. Модель допускає узагальнення для побудови складніших моделей фрикційної взаємодії, зокрема, з врахуванням фізичної

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями нелінійності, існуючої або набутої неоднорідності термомеханічних властивостей приповерхневого шару пружної півплощини.

1. Буфеев В.А. Волновые потери при трении // Изв. вузов. Физика. – 1972. - №5. - С.73-79.
2. Ворovich И.И., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // ПММ. – 1994. – 58, Вып. 3. - С.161-166.
3. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
4. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Паук В.И. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учетом теплообразования от трения // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 5. – С. 62-68.
5. Евтушенко А.А., Уханская О.М. Нестационарный фрикционный разогрев при скольжении упругих сжимаемых тел // ПММ. - 1992. – 56, Вып.1. - С.111-117.
6. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.:Машиностроение, 1977. – 526 с.
7. Крысов С.В., Орлов А.Л. О взаимосвязи волновых свойств тел и кинетической зависимости сил трения // Трение и износ. - 1991. – 12, № 4. - С. 610-616.
8. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения // ПММ. - 1982. – 46, Вып. 3. – С. 494-501.
9. Свириденко А.И., Чижики С.А., Петроковец М.И. Механика дискретного фрикционного контакта. - Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 272 с.
10. Adirovich E., Blokhinzev D. On the forces of dry friction // J.Phys. USSR. – 1943. – 7, № 1. - P. 29-36.

MODEL OF INDENTER FRICTIONAL SLIDING ON THERMOELASTIC HALF-PLANE BOUNDARY

The frictional interaction model when a rigid smooth convex punch is sliding with a constant speed on the boundary of elastic half plane is suggested. The surface and volume heat sources are emerging as a result of adhesive and deformation interaction. The half plane is described by the coupled thermoelasticity equation including inertial (wave) properties.

ПРО ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ КУТ ПОШИРЕННЯ ЗСУВНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН В ЗАЛІЗНИЧНИХ РЕЙКАХ

Олександра Дацишин, Григорій Марченко, Артем Глазов,
Оксана Кравчук

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

datsyshy@ipm.lviv.ua, mhp@ipm.lviv.ua, glazov00001@gmail.com; kroks@ipm.lviv.ua

Сучасні умови роботи залізничного транспорту характеризуються збільшенням силових впливів на залізничну колію, спричинених підвищенням швидкостей руху, вантажопідйомністю рухомого складу тощо. В результаті під час експлуатації технічної пари колесо-рейка поверхні кочення залізничних рейок часто пошкоджуються тріщиноподібними дефектами. При цьому, як показує інженерна практика, на початковій стадії свого розвитку поверхневі макротріщини у головці рейки здебільшого поширюються під типовим кутом 10° – 40° у напрямі переміщення рухомого складу. А питання про те, якою є природа цих тріщин і від чого залежить напрям їх поширення в рейках, і досі актуальні.

У рамках відомої модельної схеми Кіра-Брайанта [1] методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язали контактну задачу теорії пружності для півплощини з крайовою тріщиною за врахування загальних умов контактування її берегів (проковзування, защемлення, а також розкриття) під дією рухомого модельного навантаження (див. схему на рис.1) Складність розв'язання задачі полягає в тому, що межі ділянок контакту берегів невідомі і їх визначали з додаткових умов.

Досліджено залежності розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} , який контролює ріст тріщини за механізмом поперечного зсуву, від кута орієнтації тріщини β , а саме $\Delta K_{II}(\beta)$, для різних експлуатаційних параметрів, таких як коефіцієнт тертя f_s між колесом і рейкою, коефіцієнт тертя f_c між берегами тріщини, а також відносна довжина тріщини $\varepsilon = l/a$.

В результаті виявлено наявність двох локальних максимумів у залежностях $\Delta K_{II}(\beta)$ за кутів $\beta = \beta_1^*$ і $\beta = \beta_2^*$, які відповідають найсприятливішим орієнтаціям для росту зсувної тріщини, нахиленої відповідно або у напрямі, близькому до перпендикулярного (коли кут $\beta = \beta_1^* \leq \pi/2$), або ж у бік напрямку руху колеса (коли кут $\beta = \beta_2^* > \pi/2$ і тріщина полога), як це видно з рис. 1 на прикладі кривих для $f_c = 0,3$ і $\varepsilon = l/a = 0,5$.

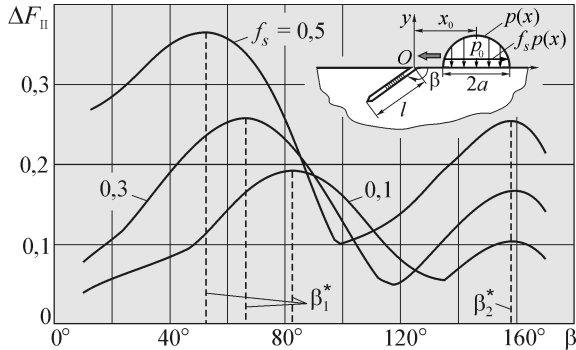


Рис. 1. Залежність нормованого розмаху КІН $\Delta F_{II} = \Delta K_{II} / (p_0 \sqrt{\pi a})$ від кута β орієнтації тріщини для різних коефіцієнтів тертя f_s між колесом і рейкою; $f_c = 0,3$; $\varepsilon = 0,5$.

Аналіз отриманих числових даних показав, що тріщини, орієнтовані під кутами $\beta = \beta_1^*$, в порівнянні з пологими ($\beta = \beta_2^*$) більше схильні переходити на поширення за розривним механізмом. Отже, напрям під кутом $\beta = \beta_2^*$ є сприятливішим для росту зсувної тріщини. І цей кут назвали характеристичним. Значення кута β_2^* , встановлені теоретично, добре узгоджуються з інженерними даними. Також записано умови для визначення характеристичного кута. Цей кут є базовим у формуванні поверхневих контактних пошкоджень, а саме пітингу, «нори», «рисок» і інколи відшарувань. Вивчення таких пошкоджень показує, що вони починаються власне із крайової тріщини, нахиленої під характеристичним кутом. І це є тріщини поперечного зсуву.

1. Keer L.M., Bryant M.D. A pitting model for rolling contact fatigue // Trans ASME: J Lubric Technol. – 1983. – 105, № 2. – P. 198-205.

ON THE CHARACTERISTIC ANGLE OF SHEAR SURFACE CRACK PROPAGATION IN RAILWAY RAILS

The contact problem of elasticity theory for a half-plane with an edge crack under the action of moving contact load has been solved by the method of singular integral equations. The dependence of the range of stress intensity factor K_{II} on crack angle orientation under different service conditions of the railway rails has been investigated. These data have been used to determine the characteristic angle of shear surface crack propagation in the rails. The conditions for determining this angle have been also put down.

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ІЗ ЗОВНІШНЬОЮ КІЛЬЦЕВОЮ ТРІЩИНОЮ

Олександр Демидов, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

alexandr.v.demidov@gmail.com; dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу з висотою a і радіусом r_0 (рис. 1). З циліндром пов'язана циліндрична система координат, центр якої співпадає з центром нижньої основи, яка вважається нерухомою. З верхньою основою зчеплена абсолютно жорстка накладка товщиною d і того ж радіусу, що і циліндр, яка знаходиться під дією крутного моменту $M(t)$. На висоті $z = c$ у середині циліндра паралельно його торцям міститься зовнішня кільцева тріщина, центр якої знаходиться на осі циліндра, і яка займає область $b \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

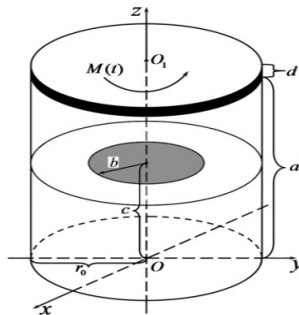


Рис. 1.

Бічна поверхня циліндра і поверхня тріщини вважаються вільними від напружень. За цих умов циліндр перебуває у стані осесиметричної деформації крутіння й відмінним від 0 буде тільки кутове переміщення $w(r, z, t)$, яке задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

з нульовими початковими умовами і наступними граничними умовами:

$$w(r, 0, t) = 0, \quad w(r, a, t) = \alpha(t)r, \quad \tau_{\varphi r}(r_0, z, t) = 0,$$

$$\tau_{\varphi z}(r, c, t) = 0, \quad b \leq r \leq r_0.$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

Тут $\alpha(t)$ - невідомий кут повороту накладки, який визначається з рівняння руху.

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосуємо підхід, який ґрунтується на різницевій апроксимації тільки похідних за часом і детально викладений у [3]. Скориставшись перетвореннями, аналогічними до викладених у [1], задачу звели до системи послідовно розв'язуваних однорідних початково-крайових задач відносно нових функцій.

Розв'язок цих задач розшукується методом інтегральних перетворень окремо для двох частин циліндра, розділених площиною розміщення тріщини. В результаті застосування цього методу отримане інтегральне подання для кутового переміщення, яке містить невідомі дотичні напруження у площині тріщини. Для їх знаходження потрібно скористатись умовою неперервності в цій площині кутового переміщення, з якої отримаємо інтегральне рівняння відносно невідомих напружень.

Для розв'язання інтегрального рівняння, його перетворюємо, за відомою методикою [2], до рівняння Фредгольма другого роду, наближений розв'язок якого шукаємо методом коллокацій.

В результаті отримано формули для розрахунку КІН у вузлах розбиття за часом. За допомогою цих формул проведено числове дослідження впливу різних видів навантаження, маси накладки та геометричних параметрів циліндра на значення КІН за часом.

1. Демидов О.В., Попов В.Г. Нестационарный закрут скінченного циліндра з круговою тріщиною // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 131-142.
2. Попов В.Г. Крутильні коливання скінченного пружного циліндра зі зовнішньою кільцевою тріщиною // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2011. – № 6. – С. 30-38.
3. Savruk M.P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Mater. Sci., Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers - 2003. – Vol. 39, № 4. – P. 465-471.

NONSTATIONARY TORSION OF THE FINITE CYLINDER WITH EXTERNAL RING-SHAPED CRACK

The axisymmetric dynamic problem of determining the stress state in the region of an external ring-shaped crack in a finite cylinder is solved. The source of the loading is the rigid circular plate, which is coupled with one of the cylinder ends and loaded by the torsional moment, which depends on time. The original problem is reduced to a system of homogeneous boundary value problems, which are solved successively. Their solution contains an unknown tangential stresses in the plane of a crack. The integral equation with respect to the unknown tangential stresses reduces to the Fredholm integral equation of the second kind. The found numerical solution of this equation gave the possibility to obtain the approximate formula for the SIF calculation.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ В ОПТИЧНО-АКТИВНОМУ МАТЕРІАЛІ

Анатолій Дзюба, Анатолій Пацюк, Лариса Левитіна

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара (Україна)

dzub@ua.fm

Розроблена методика утворення, дослідження поведінки і розвитку реальних тріщин в оптично-активному матеріалі. Отримані результати числового (методом скінченних елементів) та експериментального (оптичними методами) дослідження особливостей розподілу напружень в околі концентраторів напружень (отворів, вирізів та вершин реальних тріщин), отриманих з використанням розробленого авторами варіанту системного поєднання поляризаційно-оптичного методу, тіньового методу каустик та муарового методу у вигляді картин ізохром, картин каустик та муарових смуг.

Отримані та проаналізовані картини передруйнування (рис. 1), зародження і розвитку тріщин та особливості руйнування досліджуваного оптично-активного матеріалу. Обчислені значення відповідних коефіцієнтів концентрації напружень.

Для використовуваного в експериментах оптично-активного матеріалу (полікарбонату) отримано парадоксальний механічний ефект, коли максимальні напруження в розтягнутій пластині в зоні концентратора напружень у вигляді бокового прямокутного вирізу виявились на 10÷15% меншими, ніж за наявності такого ж вирізу з заокругленою вершиною. Поясненням такого ефекту є більший обсяг пластичної зони та менше утонення пластинчатого зразка, що виникають у випадку прямокутного вирізу, ніж у випадку пластинки з заокругленим вирізом такого ж розміру, оскільки при збільшенні навантаження пластична зона з'являється раніше в двох кругових точках прямокутного вирізу, а далі об'єднується в одну пластичну витягнуту горизонтально область, на відміну від випадку заокругленого вирізу, де одна пластична область виникає пізніше та розповсюджується в глибину матеріалу (рис. 2).

Отримані результати числового порівняльного скінченно-елементного нелінійного аналізу розподілу напружень в околі прямокутного та прямокутного з заокругленими вершинами вирізу в пластинчатому зразку якісно та кількісно (в межах використовуваних експериментальних методів) збігаються, що вказує на достатню достовірність отриманих результатів.

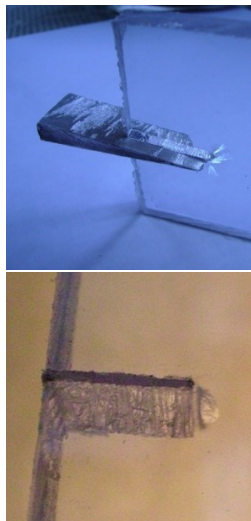


Рис. 1.

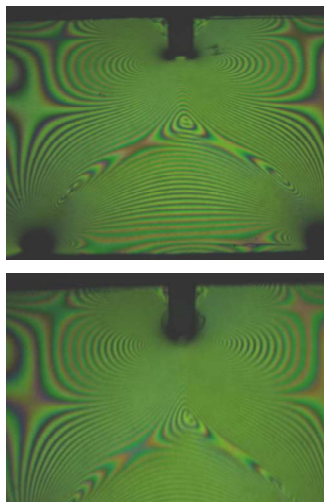


Рис. 2.

Досліджені процеси деформування пластинчатих зразків із оптично-активного матеріалу з круговими отворами різного діаметру при розтягненні. Отримані нові механічні ефекти у вигляді картин експериментального та числового (методом скінчених елементів) моделювання пружних та пластичних деформацій в зоні отвору, як концентратора напружень.

Розроблена методика дозволяє при збільшенні навантаження спостерігати появу зон пластичності матеріалу, процес передруйнування, зародження тріщин та їх розвиток у вигляді візуально видимих в експерименті та підтверджених результатами скінченно-елементного аналізу матових областей в поляризаційно-оптичному матеріалі (як аналогу ліній Людерса – Чернова), розвиток яких починається в місцях максимальних напружень на ребрах отвору.

EXPERIMENTAL RESEARCH OF THE CRACK-TIP OF STRESS DISTRIBUTION IN OPTICAL ACTIVE MATERIAL

The method of creation, research of behavior and development of real cracks in optically active material is developed.

The results of the numerical (finite element method) and experimental (optical methods) of the research of the stress distributions in the crack-tip of stress concentrators (openings, cutouts and vertices of real cracks) obtained using the author's proposed variant of the system combination of the polarization-optical method, the shadow method of caustic and moiré method in the form of pictures of isochromine, pictures of caustic and moiré stripes.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ТА ТРІЩИНОЮ

Катерина Довбня, Віктор Врублевський

Донецький національний університет імені Василя Стуса (Україна)

kmd.ukr@gmail.com; www.vrubel@gmail.com

Тонкостінні конструкції різноманітної конфігурації широко застосовуються в будівництві, машинобудуванні, авіа- та ракетобудуванні та інших галузях сучасної техніки. Для забезпечення безпеки експлуатації таких конструкцій велику роль відіграє дослідження напруженого стану навколо концентраторів напружень (тріщин, отворів та ін.).

В роботі розглядається тонка ортотропна пластина сталі товщини h , послаблена двома круговими отворами однакового радіуса R та наскрізною тріщиною довжиною $2l$, розташованою по центру пластини між отворами (рис. 1). Пластина знаходиться під дією симетричного розтягу вздовж осі Oy .

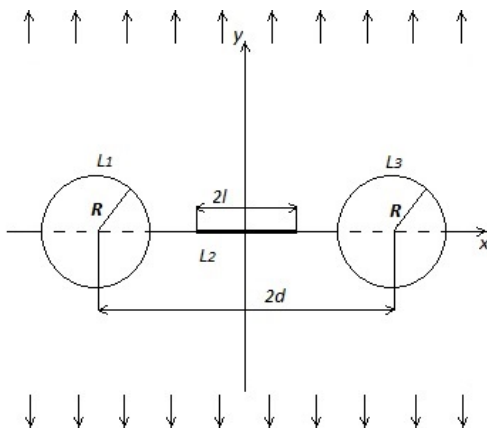


Рис. 1.

Вважається, що береги розрізу не контактують між собою у процесі деформування пластини, а контури отворів та розрізу вільні від навантаження. В такому випадку граничні умови на контурах L_m ($m = \overline{1,3}$) виглядають наступним чином:

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$$T_{n_m} = 0; S_{n\tau_m} = 0; M_{n_m} = 0; Q_{n_m} = 0,$$

де T_{n_m} , $S_{n\tau_m}$ – мембранні зусилля, M_{n_m} – згинний момент, Q_{n_m} – узагальнена перерізуюча сила.

Напружений стан в пластині внаслідок лінійності задачі подамо у вигляді суми напруженого стану в суцільній пластині, який вважатиметься відомим, та шуканого додаткового (збуреного) напруженого стану, який викликаний наявністю отворів та розрізу.

Вважається, що відстань між отворами, тріщиною та зовнішнім контуром велика у порівнянні з їх розмірами і збурений напружений стан практично не досягає зовнішнього контуру пластини. Це дозволяє замість нульових граничних умов на зовнішньому контурі задати спрощені умови зникнення збуреного напруженого стану при необмеженому віддаленні від L_m , а область, яку займає пластина, вважати нескінченною.

Для забезпечення єдиності розв'язку у випадку, коли L_m є криволінійним розрізом, виникає необхідність виконання додаткових умов на кінцях розрізу

$$\left[\vec{u} \right]_{L_m} \Big|_{s=\pm l_m}; \left[\theta_j \right]_{L_m} \Big|_{s=\pm l_m}, \quad (j=1,2)$$

де $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор переміщень; $[f]_{L_m} = f^+ - f^-$ (для отворів $f^- = 0$).

Одним із найбільш дієвих методів розв'язання таких задач є метод граничних інтегральних рівнянь. З використанням теорії узагальнених функцій та двовимірного інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до системи п'яти сингулярних інтегральних рівнянь з особливостями типу Коші та Гільберта. Для отримання чисельного розв'язку системи було використано спеціальні квадратурні формули для відповідних сингулярних інтегралів.

INVESTIGATION OF STRESS STATE IN ORTHOTROPIC PLATE WITH TWO CIRCULAR HOLES AND CRACK

In this paper a thin orthotropic plate with two circular holes and a crack between them is considered. Using the Generalized function theory and two-dimensional integral Fourier transformation the problem is reduced to the system of five singular integral equations with features of Cauchy and Hilbert types. For getting the numeric solution of the system were used the special quadrature formulas for corresponding singular equations.

ДИНАМІЧНІ НАПРУЖЕННЯ У БЕЗМЕЖНІЙ ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ З ДВО-ПЕРІОДИЧНИМ МАСИВОМ ТОНКИХ ПОДАТЛИВИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ігор Жбадинський, Ігор Лаушник

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

*Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного
транспорту ім. акад. В. Лазаряна (Україна)*

zbadynski.igor@gmail.com; laushnik@gmail.com

Існуючі у літературі результати тривимірного аналізу присутності у хвильовому полі розсіювачів у вигляді податливих включень стосуються розгляду одного або декількох включень кругової та еліптичної форми [1,2]. Вивчення динамічної взаємодії таких періодично структурованих неоднорідностей обмежено випадком дископодібних включень [3].

У роботі розв'язана задача про нормальне падіння гармонічної поздовжньої пружної хвилі на плоский масив періодичних тонких податливих еліптичних включень з прямокутною коміркою у тривимірній безмежній матриці. Її зведено до граничного інтегрального рівняння відносно стрибка переміщень в області розташування включення. Коректна регуляризація рівняння проводиться за допомогою методу відображень.

Робота виконана за підтримки НАНУ УНТЦ (проект № 6247).

1. *Mikhaskiv V.V., Butrak I.O., Laushnik I.P.* Interaction between a compliant disk-shaped inclusion and a crack upon incidence of an elastic wave // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2013. – **54**, № 3. – P. 465-471.
2. *Хай М.В., Михаськів В.В., Галего Р., Стасюк Б.М.,* Симетрична задача про усталену за часом взаємодію еліптичних тріщин у безмежному тілі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 2. – С. 112-118.
3. *Mikhas'kiv V.V., Zhabadynskiy I.Ya., Zhang Ch.* Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**, № 1. – P. 114-122.

DYNAMIC STRESSES IN AN INFINITE ELASTIC MATRIX WITH DOUBLY PERIODIC ARRAY OF THIN COMPLIANT ELLIPTICAL INCLUSIONS

The symmetric frequency-domain problem on the interaction effects in rectangular lattice system of thin compliant elliptical inclusions located in an infinite elastic matrix is numerically investigated by the boundary integral equation method. As the results the mode-I dynamic stress intensity factor in the inclusion vicinities are obtained and analysed.

КОРОТКИЙ ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ СТАЦІОНАРНОГО ДВОВИМІРНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ

Володимир Зеленьак, Любов Коляса

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

volodymyr.zelenyak@gmail.com; kolyasa.lubov@gmail.com

Елементи багатьох конструкцій під час експлуатації часто працюють в умовах нагрівання, що призводить до появи внутрішніх температурних напружень. Ці напруження у деяких випадках можуть спричинити утворення нових і ріст вже існуючих тріщин в тілі, тобто призвести до локального або повного руйнування конструкцій чи їх елементів. Тому важливе теоретичне та практичне значення має вивчення розподілу температурних напружень біля вершин тріщин у твердих тілах. Такі дослідження використовують для розрахунку міцності з позицій механіки руйнування, а їх реалізація значною мірою полегшується завдяки методу сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

Плоскі задачі термопружності для напівнескінченного та нескінченного тіла з включеннями і тріщинами. Методом СІР досліджували плоский термопружний стан у півпросторі, який нагрівається локально на частині його вільної поверхні тепловим потоком і містить включення та тріщини. На основі інтегральних рівнянь методом механічних квадратур [7] знайдено числові розв'язки плоских задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричним включенням еліптичного або кругового профілю та тріщиною [4, 6]. Із застосуванням апарату СІР побудовано також інтегральні рівняння теплопровідності та термопружності для таких задач, а саме: скінченна [8] та нескінченна [10] кусково-однорідна площина з криволінійними тріщинами, дві спаяні різнорідні півплощини з включеннями і тріщинами [9].

Плоскі задачі термопружності для трикомпонентних тіл з тріщинами. В цих задачах застосовано підхід, який дає змогу понизити порядок вихідної системи СІР за колової або прямолінійної лінії з'єднання неоднорідних матеріалів. Це дає можливість ефективніше знаходити їх числовий розв'язок, а також порівняно легко розглянути тріщини, які виходять на край кругового отвору. Таким підходом отримано числові розв'язки задач термопружності для нескінченної площини з двокомпонентним круговим включенням і тріщиною [1], двох спаяних різнорідних півплощин з еліптичним включенням і тріщиною [5], для тришарового кільця з крайовою тріщиною [3], для кругового диска з еліптичним включенням і тріщиною [2] за сталої рівномірної температури в усій кусково-однорідній області.

1. Зеленьяк В.М. Термопружна взаємодія двокомпонентного кругового включення і тріщини в пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 3. – С. 40-45.
2. Зеленьяк В.М. Термопружна взаємодія тріщини та включення у круговому диску // Фіз.-мат. модел. та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 109-116.
3. Зеленьяк В.М. Термопружна рівновага тришарового кругового порожнистого циліндра з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 2. – С. 98-103.
4. Зеленьяк В.М., Євтушенко О.О. Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності та термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикл. пробл. механіки та математики. – 2005. – Вип.3. – С. 140-146.
5. Зеленьяк В., Мартиняк Р., Слободян Б. Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною // Машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 13-17.
6. Матисяк С.Я., Зеленьяк В.М., Євтушенко О.О. Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 34-40.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
8. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 5. – С. 70-78.
9. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – **24**, № 2. – С. 23-28.
10. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82-88.

A BRIEF SURVEY OF INVESTIGATIONS OF STATIONARY TWO-DIMENSIONAL THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODIES WITH CRACKS

A survey of investigations on application of the singular integral equations method to solving two-dimensional problems of steady heat conductivity and thermoelasticity piecewise-homogeneous bodies with cracks is presented.

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ТРІЩИН ЗМІШАНОГО РЕЖИМУ НАВАНТАЖЕННЯ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ

Анатолій Камінський, Михайло Селіванов, Юрій Черноіван

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

fract@inmech.kiev.ua

Модель зони зчеплення (МЗЗ), вперше запропонована Баренблатом для опису процесу руйнування внаслідок зародження та поширення тріщини [1], успішно використовується при аналізі стану граничної рівноваги тріснутих нелінійно пружних та в'язкопружних тіл. Зона зчеплення моделює частково зруйновану ділянку біля фронту тріщини. Залежність зчеплення від відриву на продовженні тріщини представляється нелінійним співвідношенням – законом зчеплення-відриву (ЗЗВ), в той час як матеріал поза зоною зчеплення вважається лінійно пружним. Для застосування МЗЗ для тріщини нормального відриву при рівномірному ЗЗВ потрібні два параметри: енергія руйнування, ϕ_I (граничне значення роботи зчеплення) і міцність зчеплення, σ (максимальна інтенсивність зчеплення). При змішаному режимі руйнування набір параметрів тріщиностійкості доповнюється аналогічними параметрами для тріщини зсуву (ϕ_{II} , τ). Параметри ЗЗВ слід визначати за допомогою стандартизованих випробувань.

У розглянутій постановці невідомим вважається розподіл зчеплення-координата, що визначає напружено-деформівний стан в околі тріщини, а також геометричні параметри – координати вершин зон зчеплення, розташування яких надає змогу задовольнити умову скінченності напружень у тілі. У випадку змішаного режиму ця зона називається складеною зоною зчеплення (multiple cohesive zone [2]).

При дослідженні докритичного стану тріщини змішаного режиму руйнування за умов незначної інтенсивності зсувного поля в околі її вершин розглянуто задачу з граничними умовами (рис. 1).

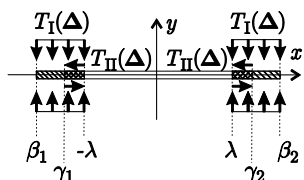


Рис. 1.

$$\sigma^\pm(x) = -\bar{\sigma}(x) + T_I[\Delta(x)], \quad x \in (\beta_1, \beta_2);$$

$$\tau^\pm(x) = -\bar{\tau}(x) + T_{II}[\Delta(x)], \quad x \in (\gamma_1, \gamma_2);$$

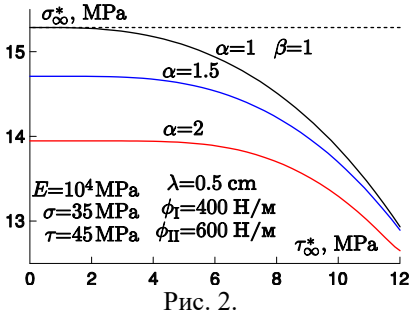
$$\Delta'_I(\beta_{1,2}) = 0, \quad \Delta'_I(\gamma_{1,2}) = 0;$$

$$\Delta_{II}(\gamma_{1,2}) = 0, \quad x \in (\beta_1, \beta_2) \setminus (\gamma_1, \gamma_2); T_{I,II}(\Delta) = 0,$$

$$\Delta \notin \Xi = \{\Delta = (\Delta_I, \Delta_{II}) : 0 \leq \Delta_I \leq \Delta_I^*, 0 \leq \Delta_{II} \leq \Delta_{II}^*\},$$

$\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ – напруження на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини, $\Delta_{I,II}^*$ – граничні значення нормального та зсувного розкриття, що визначаються параметрами ЗЗВ.

При дослідженні критичного стану у визначальну систему додається рівняння $\max\{\bar{\Delta}_{I,II}(\pm\lambda)\} = 1$. Задачу розв'язано шляхом заміни у граничних



умовах зчеплення різницею подовженого на від'ємний відрив модифікованого зчеплення та додаткового напруження, яке наперед невідоме і знаходиться за допомогою методів дослідження контактної взаємодії берегів тріщини [3]. Розв'язок системи інтегральних рівнянь і нерівностей побудовано квадратурно-колокаційним методом за допомогою ітеративної процедури, на кожному кроці якої розв'язується нелінійна система рівнянь, яка легко лінеаризується.

В числовому прикладі на рис. 2 використано степеневий ЗЗВ з потенціалом

$$\Psi(\bar{\Delta}) = \phi_2 - [\phi_2 - (1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha)\phi_1](1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta, \quad \bar{\Delta}_I = \bar{\Delta}_I / \bar{\Delta}_I^*, \quad \bar{\Delta}_{II} = \bar{\Delta}_{II} / \bar{\Delta}_{II}^*.$$

Пунктирна крива відповідає потенціалу $\Psi(\bar{\Delta}) = \sigma \bar{\Delta}_I + \tau \bar{\Delta}_{II}$. Кожна точка кривих визначена за допомогою ітеративної зазначеної процедури.

Таким чином, запропоновано нові числово-аналітичні методи розв'язання задач механіки тріщин з використанням МЗЗ з нерівномірним ЗЗВ. Методи враховують умову скінченності напружень в тілі. Отримано нові розв'язки для граничних рівнів нормального та зсувного навантажень в залежності від параметрів форми потенціального закону зчеплення-відриву для змішаного режиму руйнування. Встановлено, що параметри форми несуттєво впливають на рівень граничного навантаження.

1. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Adv. Appl. Mech. – 1962. – 7. – P. 55-129.
2. Hui C.Y., Ruina A., Long R., Jagota A. Cohesive zone models and fracture // J. Adhesion. – 2011. – 87. – P. 1-52.
3. Lauterbach B., Gross D. Crack growth in brittle solids under compression // Mech. Mater. – 1998. – 29. – P. 81-92.

DETERMINATION OF THE CRITICAL LOADS FOR A MIXED MODE CRACK USING COHESIVE ZONE MODEL

Critical state of a plate with a cohesive crack is analyzed using singular integral equations. The derivative of crack opening displacement is determined as a shape function that meets basic modeling conditions. The shape function is found by satisfying the boundary conditions containing traction-separation relationships (TSR). It is assumed by the problem statement that the crack faces close smoothly. This is accounted for numerically by modified boundary conditions. Results are given for tensile cracks and mixed-mode cracks. In the later case, a multiple cohesive zone model is used.

ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ДЕФЕКТІВ У НЕСКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ ЗА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Ольга Кирилова, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається нескінченний пружний циліндр з твірними, паралельними осі Oz , у якому містяться два тунельних непересічних дефекти, що у площині xOy не виходять за межі перерізу. Контуром перерізу циліндричного тіла площиною xOy є обмежена довільна замкнена гладка крива $r(\varphi) = r_0\psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. У циліндрі відбуваються коливання поздовжнього зсуву, зумовлені дією на бічну поверхню гармонічного за часом самозрівноваженого навантаження $GP(\varphi)e^{-i\omega t}$ (далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, усюди опущений і розглядаються тільки амплітудні значення). За таких умов тіло перебуває в умовах антиплоскої деформації і єдина відмінна від нуля z -компонента вектора переміщення задовольняє рівнянню Гельмгольца:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega}{c_2}; c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1)$$

За умови навантаження на поверхні циліндричного тіла виконується рівність щодо зсувних напружень:

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2)$$

Розглядаються випадки взаємодії між собою двох тріщин та двох включень, а також двох різних дефектів: тріщини та включення. Крайові умови на дефектах формулюються у системі $x_i O_i y_i$, $i = 1, 2$, що пов'язані безпосередньо з ними. Нехай $w_k(x_k, y_k)$ – z -компонента вектора переміщень при переході від полярних координат до локальних декартових. Поверхні дефектів вважаються вільними від навантажень, тоді відповідні крайові умови у випадку тріщин будуть:

$$\tau_{zy_i}(x_i, 0) = G \frac{\partial w_i(x_i, 0)}{\partial y_i} = 0, \quad |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

Також на поверхнях тріщин мають розриви переміщення $w_i(x_i, y_i)$ з невідомими стрибками:

$$\langle w_i \rangle = w_i(x_i, +0) - w_i(x_i, -0) = \chi_i(x_i), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

У випадку включень за повного зчеплення виконуються рівності:

$$w_i(x_i, \pm 0) = d_i, \quad |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

На поверхнях включень мають розриви дотичні напруження $\tau_{zy_k}^k$ зі стрибками

$$\langle \tau_{zy_k}^k \rangle = G(\tau_{zy_i}(x_i, +0) - \tau_{zy_i}(x_i, -0)) = \chi_i(x_i), \quad |x_i| < a_i. \quad (6)$$

Отже, аналіз поведінки тіла зводиться до розв'язання диференціального рівняння (1) з крайовими умовами (2)-(6) в залежності від типу дефекту.

Для розв'язання задачі використано підхід, що дозволяє окремо задовольняти умови на поверхнях дефектів (3), (5) і на межі циліндра (2). Він полягає в поданні переміщення у вигляді суми розривних розв'язків (1), побудованих для відповідних дефектів, і деяких невідомих функцій, які теж є розв'язками рівняння (1) та за рахунок яких задовольняються умови на поверхні циліндра (2). Ці функції розшукуються у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівнянь Гельмгольца, що утворюють повні замкнені системи функцій в будь-якій замкненій області. В результаті задача зводиться до розв'язання сукупності систем інтегро-диференціальних рівнянь на дефектах, що відрізняються лише правими частинами. Наближені розв'язки цих систем отримано методом механічних квадратур. Після цього невідомі коефіцієнти лінійної комбінації визначаються з граничних умов на поверхні циліндра (2).

Отримано наближені формули для розрахунку КІН, за допомогою яких досліджено вплив на їх значення частоти коливаль, розташування і взаємодії дефектів в ньому, а також проведено числове дослідження резонансних явищ.

INTERACTION OF TWO DEFECTS IN INFINITY STATE CYLINDER OF ARBITRARY CROSS-SECTION UNDER HARMONIC OSCILLATIONS

The dynamic stress state in an infinity cylinder of arbitrary cross-section with a two other defect is determinated. The proposed method of solution enables to separately satisfy the boundary conditions on the defects, and then on the boundary of the cylinder. This significantly simplifies the numerical implementation. Approximate formulas for calculating the SIF are obtained and the influence of frequency oscillations and location of the defects on their values are investigated.

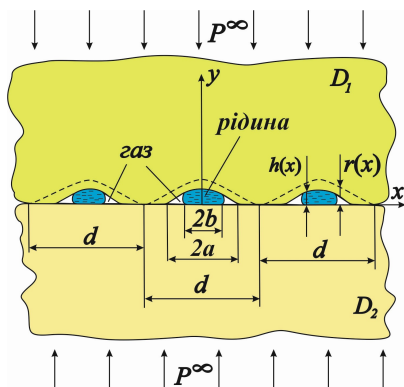
КОНТАКТ ТІЛ З ХВИЛЯСТИМ РЕЛЬЄФОМ З УРАХУВАННЯМ РІДИННОГО МІСТКА І ГАЗУ В МІЖПОВЕРХНЕВИХ ПРОСВІТАХ

Олег Козачок

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

OlegKozachok@ukr.net

Розглянемо безфрикційний контакт за умов плоскої деформації двох пружних півнескінченних неоднакових тіл D_1 і D_2 . Поверхня одного з тіл є плоскою, а іншого – хвилястою, що описується функцією $r(x) = A \cos^2(\pi x/d)$, $x \in [-\infty, \infty]$. Амплітуда хвилястої поверхні A є значно менша від періоду d ($A \ll d$).



Тіла вступають у контакт під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень P^∞ . Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх контакт є неповним і між ними виникають міжповерхневі просвіти ширини $2a$ (рис.). У центральних частинах просвітів знаходиться міжповерхневий місток з нестисливою рідиною, яка не змочує поверхні, а на

краях – газ під сталим тиском ($P_1 = const$). Об'єм нестисливої рідини V_0 , що припадає на одиницю довжини просвіту у поздовжньому напрямі, є сталою величиною ($V_0 = const$). Перепад тисків у рідині і газі описується формулою Лапласа $P_2 - P_1 = 2\sigma/h(b)$, де σ – поверхневий натяг рідини, $h(b)$ – висота просвіту на межі рідини і газу.

Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [1], задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно функції $h'(x)$, яке після заміни змінних $\xi = tg \frac{\pi x}{d}$, $\eta = tg \frac{\pi t}{d}$, $\alpha = tg \frac{\pi a}{d}$, $\beta = tg \frac{\pi b}{d}$ переходить в СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK(P^{\infty} - P(\xi))}{2(1 + \xi^2)} + \frac{A\pi(\xi^2 - 1)}{(1 + \xi^2)^2}, \quad |\xi| \leq \alpha,$$

де
$$P(\xi) = \begin{cases} P_1, & \beta \leq |\xi| < \alpha, \\ P_1 + 2\sigma/h(\beta), & |\xi| \leq \beta, \end{cases} \quad K = (1 + \kappa_1)/2G_1 + (1 + \kappa_2)/2G_2;$$

$\kappa_n = 3 - 4\nu_n$; G_n , ν_n – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла D_n ($n = 1, 2$).

Зазначимо, що СІР відносно похідної від висоти просівів $h'(\xi)$ містить такі невідомі параметри: півширину просівів α , півширину рідинного містка β та висоту просіву $h(\beta)$ на межі рідини і газу.

Похідна від висоти просіву в точках змикання повинна задовольняти умову $h'(-\alpha) = h'(\alpha) = 0$, яка забезпечує обмеженість контактних напружень.

З умови збереження кількості рідини в просівах з урахуванням її нестисливості та з умови існування обмеженого розв'язку СІР отримано систему двох трансцендентних рівнянь для визначення ширини просіву та ширини ділянки дії рідини. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цієї системи рівнянь і СІР з використанням методу послідовних наближень та досліджено залежності форми просівів, ширини ділянки дії рідини, контактного зближення тіл та контактного тиску від прикладеного навантаження, об'єму і поверхневого натягу рідини.

1. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // *Mater. Sci.* – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804-813.

CONTACT OF BODIES WITH WAVY RELIEF TAKING INTO ACCOUNT LIQUID BRIDGE AND GAS IN INTERFACE GAPS

The model of elastic contact between two semi-infinite elastic bodies, one of which has a wavy surface, for the case when there are an incompressible liquid, not wetting the surfaces of the bodies, at the central region of each interface gap and a gas under constant pressure at the edges of each gap is proposed. The difference between a gas pressure and a liquid pressure is described by the Laplace formula. The non-linear problem of elasticity is reduced to a singular integral equation with Cauchy kernel for a height of the gaps. For calculating a length of the gaps and a length of zones of liquid action, two transcendent equations are obtained.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛОЩИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ОТВОРІВ З КРАЙОВИМИ ТРІЩИНАМИ АБО СМУГАМИ ПЛАСТИЧНОСТІ

Володимир Кравець

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vlad@ipm.lviv.ua

Розглянуто пружну та пружно-пластичну (в рамках моделі смуг пластичності) задачі для ізотропної площини з періодичною системою близько розташованих криволінійних отворів із двома крайовими прямолінійними тріщинами або смугами пластичності при їх вершинах (I тип деформування). Граничним переходом (з наближенням отворів між собою) отримано розв'язки відповідних задач для напівнескінчених двобічних закруглених вирізів, з вершин яких виходять тріщини або смуги пластичності. Досліджено вплив форми отвору та радіуса закруглення його вершин на коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для крайових тріщин та довжини смуг пластичності і розкриття у вершинах отворів.

Напружено-деформований стан площини з отворами та тріщинами визначаємо за допомогою комплексних потенціалів напружень з використанням методу сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [1, 2, 4]. Для розтягу на нескінченності напруженнями $\sigma_y^\infty = p$ площини з періодичною вздовж осі Ox системою отворів та крайових тріщин (див. схему на рис. 1 для одного періоду) пружна задача зводиться до визначення збуреного (на явними отворами та тріщинами) напруженого стану площини за крайових умов

$$N(t) + iT(t) = p(t) = p_*(t) - p(1 + \overline{dt}/dt)/2, \quad t \in L = \bigcup_{n=1}^4 L_n, \quad (1)$$

де контур отвору подано як об'єднання розімкнених Ox -симетричних контурів $(L_2 \cup L_4)$, N і T – нормальна і дотична компоненти напружень, $p_*(t) = N_*(t) + iT_*(t)$ – задані самозрівноважені напруження на контурі L .

Крайову задачу зведено до системи чотирьох СІР відносно функцій

$$g'_n(t_n) = \frac{2G}{i(1 + \kappa)} \frac{d}{dt_n} \left\{ [u(t_n) + iv(t_n)]^+ - [u(t_n) + iv(t_n)]^- \right\}, \quad t_n \in L_n, \quad n = \overline{1,4}, \quad (2)$$

де u, v – компоненти переміщень точок $t_n \in L_n$, $\kappa = 3 - 4\mu$, $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ для плоскої деформації та узагальненого плоского напруженого стану площини, μ – коефіцієнт Пуассона. Врахувавши симетричність задачі відносно

осей Ox , Oy , отримано два інтегральні рівняння (на одній крайовій тріщині та чверті контуру отвору), які розв'язано методом квадратур [4].

Обчислено відносні КІН K_I/K_{Ipc} у вершинах A, B крайових прямолінійних тріщин L_1 і L_3 за вільних ($p_*(t) = 0$) контурів L_n , $n = \overline{1,4}$ для двох розмірів еліптичних отворів ($a/c = \{1; 10\}$), низки значень відносних довжин тріщин l/c за зміни радіуса кривини отвору $\rho = b^2/a$ у вершинах E, C (рис. 1). Тут $K_{Ipc} = p\sqrt{2d \tan(\pi(a+l)/(2d))}$ – КІН для періодичних тріщин довжини $2(l+a)$ під дією внутрішнього тиску p , $d = a + c$ – півширина смуги періодів. Суттєвий вплив форми отвору (параметра ρ/c) спостерігаємо для $\rho/c > 0.01$ та відносно коротких тріщин ($l/c = \{0.1; 0.2\}$). Для близьких тріщин ($l/c \rightarrow 1$) зміна форми отворів майже не впливає на значення КІН.

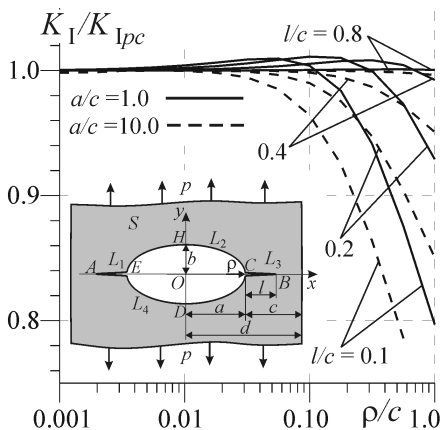


Рис. 1.

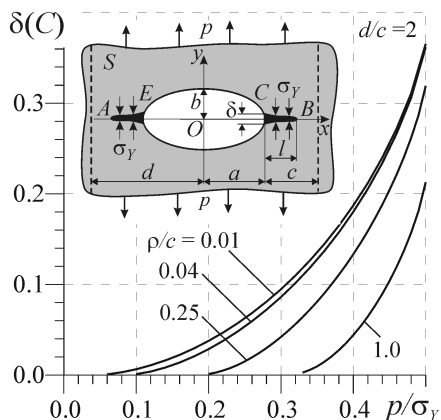


Рис. 2.

Аналогічним підходом розв'язано пружно-пластичну задачу для площини з періодичною системою отворів та тонких смуг пластичності, що виходять з країв отворів. Крайові умови задачі беремо у вигляді (1), де $p_*(t) = \{\sigma_Y, t \in L_1, L_3; 0, t \in L_2, L_4\}$, σ_Y – границя текучості матеріалу площини [2-4]. Невідомі довжини смуг пластичності l шукаємо на основі δ_k -моделі [3] з умов $K_I(A) = K_I(B) = 0$. Визначено відносне розкриття берегів тріщин L_1, L_3 у вершинах E, C $\delta(C) = 2G\{\psi^+(C) - \psi^-(C)\}/(a(1 + \kappa)\sigma_Y)$ (рис. 2) для еліптичних отворів ($a/c = 1$, $b/c = \{1; 0.5; 0.2; 0.1\}$, $d/c = 2$) з ростом навантаження p/σ_Y . Зі зменшенням радіуса кривини отвору у вершинах E, C ($\rho = b^2/a$) розкриття зростає і наближається до відомих значень для системи періодичних тріщин зі смугами пластичності [3].

1. *Кравець В.С.* Напружений стан плоского клиноподібного зразка з крайовою тріщиною за одновісного розтягу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 5. – С. 31-41.
2. *Кравець В.С.* Напружено-деформований стан півплощини з внутрішніми приповерхневими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 40-49.
3. *Панасюк В.В.* Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів. – Київ: Наук. думка, 1991. – 416 с.
4. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Springer, 2017. – 516 p.

STRESS-STRAIN STATE OF THE PLANE WITH A PERIODIC SYSTEM OF HOLES WITH EDGE CRACKS OR PLASTICITY BANDS

The elastic and elastic-plastic (in the model of plasticity bands) problems for an isotropic plane with a periodic system of closely spaced curvilinear holes with two edge rectilinear cracks or plasticity bands at their vertices (I type of deformation) are considered. The limit transition yields solutions to the corresponding problems for semi-infinite bilateral rounded notches, from which vertices a cracks or plasticity bands get out. The influence of the shape of the hole and the curvature radius of their vertices on the stress intensity factors for edge cracks and the lengths of plasticity bands and opening displacement at the vertices of holes are investigated.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ НА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІНСТРУМЕНТОВАНОГО ІНДЕНТУВАННЯ

Кравчук Роман

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

kravchuk.r@ipp.kiev.ua

Метод інструментованого індентування широко використовується для визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів. На сьогодні існує багато підходів, в яких механічні властивості визначають шляхом обробки результатів, отриманих при інструментованому індентуванні матеріалу з використанням чисельного моделювання [1]. Однією з проблем такого моделювання є коректне врахування умов контактної взаємодії [2]. В межах даної роботи було проведено комплекс досліджень щодо впливу розміру скінченного елемента, коефіцієнту тертя, а також методу обчислення контактних напружень на результати чисельного моделювання процесу інструментованого індентування. Зокрема розглядалися такі методи: (1) розширений метод множників Лагранжа; (2) метод штрафних функцій; (3) комбінований метод множників Лагранжа та штрафних функцій; (4) чистий метод множників Лагранжа.

Для визначення чутливості моделі до розміру скінченного елемента проводилися розрахунки з такими розмірами елементів як 0,08 мм; 0,04 мм; 0,02 мм; 0,01 мм. Встановлено, що розподіл напружень в зоні контакту для елементів розміру 0,02 мм та 0,01 мм добре узгоджуються (рис. 1а), тому подальше зменшення розміру елемента не проводилось. Розподіли еквівалентних напружень по Мізесу (рис. 1б), отриманих за допомогою чотирьох методів обчислення контактних напружень мають достатню збіжність, проте характер розподілу за методами (1), (3) та (4) містить значні флуктуації. Також при використанні методів (3) та (4) спостерігаються локальні екстремуми в центрі відбитку. При дослідженні впливу методу визначення контактних напружень на діаграму індентування було встановлено, що криві індентування добре узгоджуються і розбіжність становить менше 0,5% (рис. 2а). Також було оцінено вплив коефіцієнта тертя в діапазоні 0,09-0,38 на діаграми індентування (рис. 2б). Розбіжність при цьому не перевищувала 1,7%.

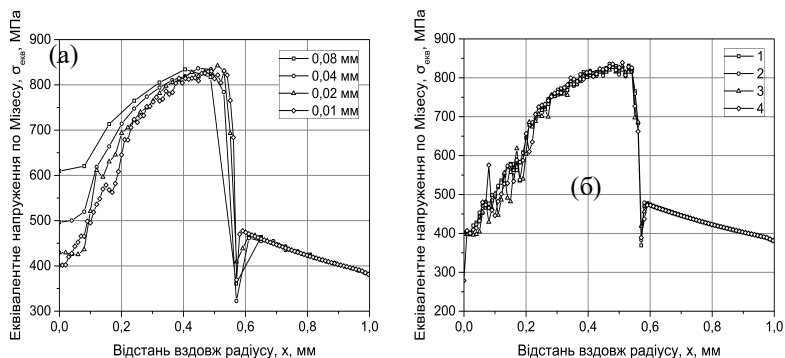


Рис. 1. Розподіл еквівалентних напружень по Мізесу $\sigma_{\text{екв}}$ на поверхні зразка, отриманих з використанням різних розмірів скінченного елемента (а) та обчислених за допомогою методів (1), (2), (3), (4) (б).

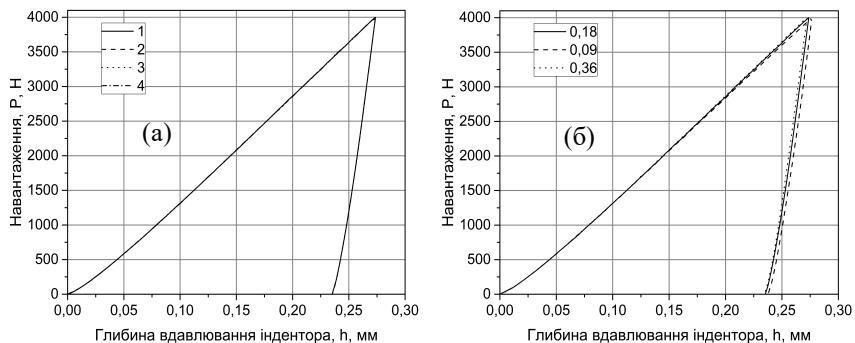


Рис. 2. Діаграми індуентування, побудовані за допомогою методів (1), (2), (3) та (4) (а); діаграми індуентування, побудовані за допомогою методу (2) для різних коефіцієнтів тертя 0,09; 0,18; 0,36.

1. Каток О.А., Лензион С.В., Харченко В.В. Численное моделирование процесса непрерывного индентирования // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2007. – Вып. 29. – С. 167-173.
2. Taylor R.L. Finite Element Solution of Contact Problems: From 1974 to 2004 // Adv. in Comput. Mech., Celebrating the 60th Birthday of Tom Hughes. – 2004.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ НА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІНСТРУМЕНТОВАНОГО ІНДУЕНТУВАННЯ

In the framework of this work, the integrated study on the influence of the finite element size, the coefficient of friction, as well as the method of calculating the contact stresses on the results of instrumented indentation simulation was carried out.

ТЕПЛОАКТИВНЕ МІЖФАЗНЕ ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ В УМОВАХ ГЛАДКОГО КОНТАКТУ

Олександр Кривий, Юрій Морозов

Одеська національна морська академія, (Україна);

Одеський національний політехнічний університет (Україна)

krivoy-odessa@ukr.net; morozovyu@gmail.com

Розглянуто задачу про абсолютно жорстке включення, що займає область Ω у площині $z=0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів. На включенні задано тепловий потік q_0 , та прикладено довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування граней включення після деформації описують функції

$$\begin{aligned} \zeta_6^\pm &= \zeta_6^0 + \vartheta_0^\pm(x_1, x_2), \quad \zeta_k^\pm = \zeta_k^0, \quad k = 4, 5, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \zeta_4^0 &= \delta_1 - \varphi_3 x_3, \quad \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_3 x_1, \quad \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_2 x_2 + \varphi_1 x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\{\zeta_k^\pm\}_{k=1}^8 = \{\sigma_3(\mathbf{x}), \sigma_4(\mathbf{x}), \sigma_5(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\}|_{x_3=\pm 0},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_k\}_{k=1}^6 = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}, \quad \mathbf{u} = \{u_k\}_{k=1}^3 = \{u, v, w\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Грані включення знаходяться в умовах гладкого контакту з півпросторами. У цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень перетворюються в нуль: $\chi_k^\pm(x_1, x_2) = 0$, $k = 2, 3$, а стрибки і суми нормальних зміщень визначаються так

$$\begin{aligned} \chi_4^\pm(x_1, x_2) &= (1 \pm 1)\zeta_4^0, \quad \chi_5^\pm(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_5^0, \\ \chi_6^\pm(x_1, x_2) &= \vartheta^\pm(x_1, x_2) + (1 \pm 1)\zeta_6^0, \quad \vartheta^\pm = \vartheta_0^\pm \pm \vartheta_0^-, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \chi_k^\pm &= \langle \chi_k(x_1, x_2) \rangle^\pm = \zeta_k(x_1, x_2, +0) \pm \zeta_k(x_1, x_2, -0), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи умови $\chi_k^-(x_1, x_2) = 0, k = \overline{1, 6}, (x_1, x_2) \notin \Omega$,

$\lambda_3^+ \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, +0) = \lambda_3^- \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, -0), \quad \zeta_7(x_1, x_2, +0) = \zeta_7(x_1, x_2, -0)$, які відображають факт з'єднання півпросторів поза включеннями, та результати праць [1-3], задачу відносно невідомих стрибків нормальних напружень і дотичних зміщень зведено до системи двовимірних СІР:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{21}\chi_1^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + q_{23}\chi_4^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + \chi_5^- [q_{23}\partial_2^2 \frac{1}{r_0} + \tilde{q}_{12}\partial_1^2 \frac{1}{r_0}]\} dtd\tau = g_1, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{21}\chi_1^- \partial_1 \frac{1}{r_0} + \chi_4^- [q_{23}\partial_1^2 \frac{1}{r_0} + \tilde{q}_{12}\partial_2^2 \frac{1}{r_0}] + q_{23}\chi_5^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0}\} dtd\tau = g_2, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{41}\chi_1^- \frac{1}{r_0} + q_{43}[\chi_4^- \partial_1 \frac{1}{r_0} + \chi_5^- \partial_2 \frac{1}{r_0}]\} dtd\tau = g_3, \\ q_{66}\chi_8^-(\mathbf{x}) - \frac{q_{65}}{2\pi} \iint_{\Omega} \chi_7^- \frac{1}{r_0^3} dtd\tau = q_0, r_0 = \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$g_1 = -q_{24}\partial_j \chi_6^- - q_{25} \iint_{\Omega} \chi_7^- \partial_j \frac{1}{r_0} dtd\tau, j = 1, 2, g_3 = \chi_6^+ - q_{44}\chi_6^- - \iint_{\Omega} \chi_7^- \frac{q_{45}}{r_0} dtd\tau$$

Для визначення невідомих $\delta_3, \varphi_1, \varphi_3$ використано умови рівноваги:

$$\iint_{\Omega} \chi_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = P_3, \quad k = 1, 2, 3, \quad \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \chi_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язки цих систем одержані у явному вигляді [1,2], що дало можливість визначити поле напружень та зміщень в околі включень під довільним навантаженням. Одержано залежності поступальних і кутових зміщень включень від рівнодійних температурних та силових навантажень, головних моментів та пружних властивостей півпросторів.

1. *Кривий О.Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 23-35.
2. *Кривий О.Ф.* Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space // *Materials Science.* – 2014. – Iss.2, vol.3. – P.245-253.
3. *Кривой А.Ф., Морозов Ю.А.* Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами // *Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Математ. і мех.* –2012. –**17**, вип. 3(15). – С. 107-119.

HEAT-ACTIVE INTERPHASE INCLUSION IN A PIECEWISE-HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC BODY UNDER CONDITIONS OF SMOOTH CONTACT

An exact solution of the thermoelasticity problem for interphase circular inclusion is constructed, which is in conditions of smooth contact with different transversely isotropic half-spaces. The dependences of the translational displacements of the inclusion on the temperature, the resultant load, the main moment, and the thermomechanical characteristics of transversely isotropic materials are obtained.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ І РОЗРІЗОМ

Ігор Кузь, Ольга Кузь

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна);

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

ihorkuz24@gmail.com; olyakuzon@gmail.com

За допомогою варіаційно-різницевого методу розв'язано низку задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластини, виготовленої з матеріалу з лінійним зміцненням, наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовується в літакобудуванні, з квадратним отвором та розрізом.

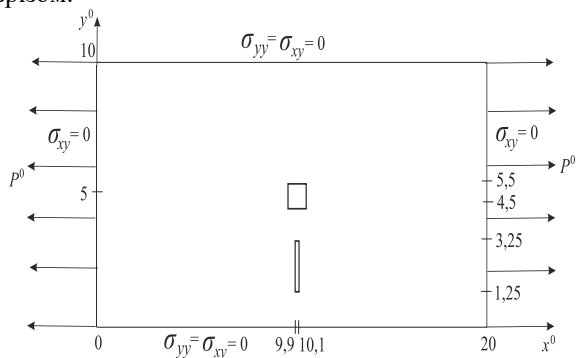


Рис. 1. Пластина з квадратним отвором та розрізом та крайовими умовами на зовнішній межі.

На рис. 1 зображено геометрію пластини з крайовими умовами. Тут введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – сторона квадратного отвору. Квадратний отвір та розріз є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0$, $\sigma_{n\tau} = 0$). До правого та лівого країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $\sigma_{xx}^0 = P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

З'ясовано розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним отвором та розрізом, попередньо навантаженого збільшеним навантаженням P^0 (рис. 2). На рис. 2 зона 1 побу-

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

дована при $P^0 = 0,37$; зона 2 – при $P^0 = 0,46$; зона 3 – при $P^0 = 0,49$; зона 4 – при $P^0 = 0,56$; зона 5 – при $P^0 = 0,59$. Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження при $P^0 = 0,28$ біля верхнього та нижнього країв розрізу, і лише пізніше при $P^0 = 0,49$ – біля нижніх кутів отвору.

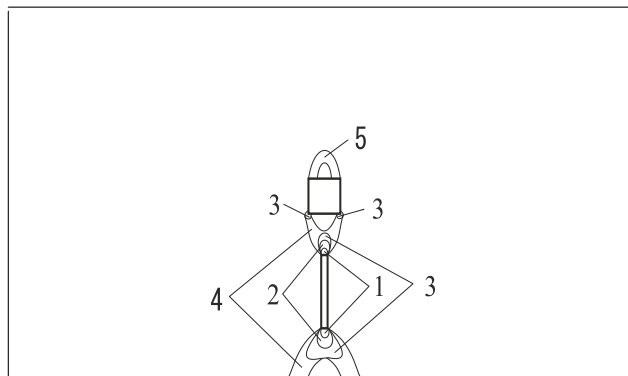


Рис. 2. Діаграма областей розвитку зон інтенсивності тензора залишкових деформацій у пластині з квадратним отвором та розрізом.

При $P^0 = 0,59$ у пластині з квадратним отвором та розрізом біля верхнього та нижнього країв розрізу досягається межа міцності. На рис. 2 також видно наявність характерних смуг максимальних залишкових деформацій (можливі лінії ковзання) під кутом 45° до напрямку розтягу, які розвиваються як від нижнього краю розрізу до нижнього краю пластини, так і від верхнього краю розрізу до нижніх кутів отвору (зони 4), а також від верхніх кутів отвору (зона 5).

STRESS-STRAIN STATE OF ELASTIC-PLASTIC PLATES WITH SQUARE HOLE AND CUT

A variety of problems concerning one-axis stretching of elastic-plastic plates with the square hole and the cut is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed, the remaining deformations after unloading and the limit loads are obtained.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ОРТОТРОПНОГО ТІЛА З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ СТРІЧКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Андрій Кундрат, Микола Кундрат

Національний університет водного господарства та природокористування (Україна)

mykola.kundrat@nuwm.edu.ua

Конструювання композиційних матеріалів з високою питомою міцністю та в'язкістю руйнування досягається армуванням матриці високоміцними та жорсткими включеннями у вигляді волокон чи стрічок. Аналітичні розв'язки плоских задач для лінійного включення з зонами передруйнування, що моделюються локалізованими тонкими прошарками матеріалу (поверхнями зсуву), отримано у працях [1, 2]. Завдяки удосконаленому формулюванню крайових умов вдалося позбутися необхідності використання в описі напруженого стану особливості напружень та отримати їх механічно коректні обмежені значення в усіх точках композиції і, як наслідок, підвищення фізичної адекватності моделі. Пропонована праця розвиває закладені можливості ефективного дослідження таких задач для періодичної системи включень за врахування анізотропії матеріалу матриці.

Необмежена ортотропна пластина в умовах плоскої задачі з періодичною системою тонких включень уздовж відрізків $[-a + 2nh, a + 2nh]$ осі абсцис розтягується заданими напруженнями на нескінченності ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). За суто пружним розв'язком задачі найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців включення, де насамперед і слід чекати появи зон передруйнування. Крім того, аналіз плоского напруженого стану свідчить, що максимальні дотичні напруження τ_{\max} спостерігаються в околах кінців включення уздовж його межі з пластиною. Тому приймаємо, що саме тут і зароджуються зони передруйнування, просуваючись від краю кожного включення до його центральної частини уздовж межі з пластиною і складаються з двох ділянок: малої області розпушення $L_1 \approx b \leq |x - 2nh| \leq a$ та ділянки пластичного деформування $L_2 \approx c \leq |x - 2nh| \leq b$ ($c \leq b \leq a$). При цьому на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до граничного значення τ_s^* , а на ділянках пластичного деформування вони сталі. На ділянках $|x - 2nh| \leq c$ в середній області включень зберігається ідеальний механічний контакт.

Величину τ_s^* можна трактувати по різному: як теоретичну зсувну міцність межі поділу або як її технічну зсувну міцність з урахуванням структурних недосконалостей, чи за пластичного деформування – як зсувний поріг пластичності.

Як виявилось з розв'язку задачі, околиці вершин включення є місцями найбільш інтенсивного локального деформування. При досягненні в них максимальними переміщеннями $u(a)$ певної межі δ_{2c} настає можливість втрати зв'язку між включенням та матрицею. Таке розшарування визначаємо як процес розриву ослаблених перед тим зв'язків, а його умовою, аналогічно відомій δ_c -моделі, приймається рівність $u(a) = \delta_{2c}$. З іншого боку, дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення матриці з включенням спричиняють у поперечному перерізі останнього появу осьового зусилля, яке за перевищення границі міцності включення P_{ut} може його розірвати.

Таким чином, розрахункова модель локальної міцності тіла з включеннями описується крім пружних сталих закону Гука ще трьома характеристиками: адгезійною зсувною міцністю контактної межі матриця-включення – τ_s^* , граничним значенням переміщень δ_{2c} та міцністю включення на розрив P_{ut} . І за фіксованої довжини включення або розривається або відшаровується від матриці залежно від того, яка із критеріальних умов ($u(a) = \delta_{2c}$ чи $P_{\max} = P_{ut}$) досягається раніше. Найменше значення навантаження, при досягненні якого реалізується хоча б одна з прийнятих критеріальних умов, називаємо граничним навантаженням. Отримано аналітичний розв'язок задачі та виконано його числовий аналіз.

1. *Кундрат Н.М.* Локальное разрушение в композиции с жестким линейным включением // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1998. – 4, № 4. – С. 115-127.
2. *Sulym H.T., Kundrat M.M.* Limiting Equilibrium and Fracture in an Orthotropic Body Containing a Thin Rigid Inclusion // Materials Science. – 2006. – 42, № 2. – P. 220-232.

LIMITING EQUILIBRIUM IN AN ORTHOTROPIC BODY CONTAINING A SYSTEM THIN INCLUSIONS

Limiting equilibrium and local fracture of the composition with a system thin line inclusions in conditions of plane problem is research by a given tension on infinity. Localized zones of prefracture (weaken contact) are developed along the plate-inclusion boundary from its ends to central part. Analytical decision of the problem by means of complex potentials is received. Influence of load on development of prefracture zones, sharing contact stresses, axial forces in inclusion, character of fracture in composition is research.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ ІЗ ТРІЩИНОПОДІБНИМ ДЕФЕКТОМ, ЗАПОВНЕНИМ ПОДАТЛИВИМ МАТЕРІАЛОМ

Ірина Курташ, Іван Шацький

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ira.k@meta.ua; ipshtsky@gmail.com

Доповідь стосується проблеми міцності тонкостінних конструкцій з ін'єктованими дефектами [1]. В рамках класичної двовимірної теорії пластин розглянуто задачу про пружну та граничну рівновагу пластини, послабленої вузькою прямолінійною наскрізною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку. Сформульовано крайову задачу для пари бігармонічних рівнянь з ускладненими крайовими умовами на розрізі. Побудовано аналітичний розв'язок сингулярних інтегродиференціальних рівнянь задачі для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного комбінованого навантаження. Особлива увага приділяється питанню граничної рівноваги композиції. Розглянуто два механізми руйнування: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Побудовано діаграми граничного стану пластини із заповненою щілиною за умов двопараметричних навантажень [2, 3]. Ключовими параметрами, які визначають успіх відновлення утримувальної здатності пластини з тріщиною для заданої траєкторії навантаження, є відносна жорсткість та відносна міцність включення.

1. *Marukha V.I., Panasyuk V.V., Sylovanyuk V.P.* Injection technologies for the repair of damaged concrete structures. – New York: Springer, 2014. – 230 p.
2. *Шацький І.П., Курташ І.С.* Гранична рівновага пластини із заповненою щілиною під дією розтягу та згину // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – 22, № 2. – С. 85-93.
3. *Шацький І.П., Курташ І.С.* Задача згину пластини із заповненою щілиною // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки – 2017. – № 2. – С. 317-322.

LIMITING EQUILIBRIUM OF PLATE WITH CRACK-LIKE DEFECT FILLED WITH A DUCTILE MATHERIAL

The problem of the elastic and limiting state of a plate weakened by narrow rectilinear through slit filled with low-modulus material is considered within framework the classical two-dimensional plate's theory.

ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНІ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗА ЗГИНУ БІМОМЕНТНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Микола Маковійчук

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

makoviy@ua.fm

Розглядається нескінченна ізотропна пластина, послаблена двома наскрізними колінеарними тріщинами однакової довжини та підкріплена пружною основою Вінклера. До берегів тріщин прикладено самозрівноважені рівномірно розподілені згинні моменти, причому напрямок дії навантаження на одній тріщині є протилежним до напрямку дії на іншій. Решта поверхонь пластины, включаючи безмежно віддалені точки, вільні від навантаження. Досліджується вплив контакту берегів тріщин на напружено-деформований стан пластины залежно від параметра жорсткості основи та від взаємного розташування дефектів.

Задачі сформульовано у двовимірній постановці без урахування та з урахуванням закриття тріщин на основі моделі контакту вздовж лінії [1] і зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. Числовий розв'язок задачі побудовано методом квадратур. За знайденими функціями стрибків переміщень та кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів та розподіл контактної реакції вздовж розрізів. Перевіркою умови одностороннього контакту встановлено межі коректності поставленої задачі, коли контакт відбувається по всій довжині тріщин. Для фіксованих значень параметра жорсткості основи побудовано графічні залежності отриманих результатів від параметра відносної віддалі між тріщинами.

1. *Шацький І.П.* Згин пластины, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49-51.

INTERACTION OF COLLINEAR CRACKS IN THE PLATE ON ELASTIC FOUNDATION UNDER BENDING BIMOMENT LOAD

The problem about contact interaction of edges of collinear cracks in plate on elastic foundation under bending bimoment load is considered in two-dimensional statement. Force and moment intensity factors in the cracks tips and distribution of reaction in the lines of contact are calculated. The influence of the elastic foundation rigidity and cracks closure on the limit equilibrium of plate is investigated.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ НАКЛАДЕНИХ СІТОК

Володимир Мартиненко

Національний Технічний Університет
«Харківський Політехнічний Інститут» (Україна)

martynenko.volodymyr@gmail.com

Анізотропна в'язкопружність оболонок, виготовлених з полімерних армованих композитів, обумовлена поєднанням в'язкопружних властивостей матриці [3] та спрямованим позиціонуванням пружних волокон [1].

Запропонований автором метод накладених сіток (МНС) дозволяє моделювати анізотропію в'язкопружних властивостей матеріалів за допомогою стандартних засобів програмних комплексів скінченно-елементного аналізу [4]. Зокрема, була продемонстрована його збіжність для розв'язування двовимірних задач, а також для контактних задач ізотропної в'язкопружності тонких оболонок.

Тут МНС був застосований до розв'язування задачі про контакт склопластикової анізотропної в'язкопружної тонкої оболонки з пружною основою, розрахункова модель якої показана на рис. 1, а, а скінченноелементна модель – на рис. 1, б.

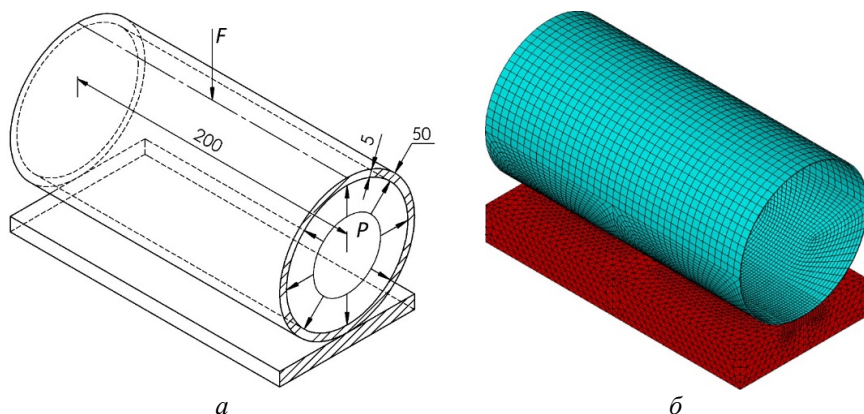


Рис. 1. – Моделі контактної задачі анізотропної в'язкопружності:
а – розрахункова модель, мм; б – скінченноелементна модель.

Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску, сили тяжіння, а також вертикального навантаження. Оболонка була зафіксована в осьовому напрямку і від обертання навколо осьового напрямку на кінцях, що імітує відкинута частина.

Задача була розв'язана в програмному комплексі скінченноелементного аналізу ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 17.2 [2]. Для зниження розмірності задачі були застосовані дві умови симетрії відносно вертикальних координатних площин. В процесі розв'язування задачі були використані результати про якісні та кількісні характеристики анізотропної в'язкопружності полімерного армованого композиційного матеріалу [5].

Встановлено, що при врахуванні ефекту анізотропії в'язкопружних властивостей склопластику вертикальні переміщення оболонки в місці прикладення вертикального навантаження зменшуються на 20%. При цьому рівень максимальних еквівалентних за Мізесом напружень збільшується на 15% при збереженні сумарного рівня похибок скінченноелементної дискретизації та МНС менше 1%, а час на розв'язання задачі збільшується на 37% у порівнянні із аналогічною контактною задачею ізотропної в'язкопружності, розв'язаною за допомогою стандартних засобів програмного комплексу ANSYS® Mechanical.

Таким чином, метод накладених сіток реалізований у застосуванні до контактної задачі в'язкопружності анізотропної оболонки, що підтверджує його застосовність при вирішенні реальних інженерних проблем.

1. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
2. ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 17.2, Help System, Structural Analysis Guide, ANSYS, Inc.
3. Ferry J.D. Viscoelastic Properties of Polymers. – John Wiley & Sons, 1980. – 641 p.
4. Martynenko V.G. An Original Technique for Modeling of Anisotropic Viscoelasticity of Orthotropic Materials in Finite Element Codes Applied to the Mechanics of Plates and Shells // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2017. – 21, № 2. – P. 389-413.
5. Martynenko V.G., Lvov G.I. Numerical prediction of temperature dependent anisotropic viscoelastic properties of fiber reinforced composite // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2017. – 36, № 24. – P. 1790-1801.

SOLVING A VISCOELASTICITY CONTACT PROBLEM OF AN ORTHOTROPIC SHELL USING THE METHOD OF SUPERIMPOSED MESHES

The work presents an application of the proposed method of superimposed meshes for solving a viscoelasticity contact problem of an orthotropic shell with an elastic base. The error estimation shows that its level does not exceed the value of 1%, which is below the permissible one of an engineering accuracy, whereas the solution time increased by 37%. The level of displacements and maximum equivalent Von Mises stresses changed significantly, which proves the need of accounting anisotropic viscoelastic properties when solving problems of contact mechanics of thin shells.

ЛОКАЛЬНЕ ЗНОШУВАННЯ ТІЛ З РЕГУЛЯРНИМ РЕЛЬЄФОМ

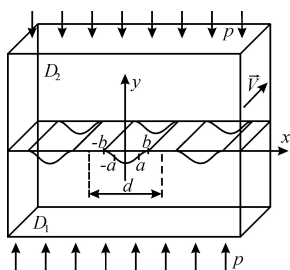
Ростислав Мартиняк, Микола Анатолійович Ткачук, Богдан Слободян,
Микола Миколайович Ткачук, Наталія Маланчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстрича НАН України;*

Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут" (Україна)

labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто взаємодію двох ізотропних пружних тіл (півпросторів) D_1 та D_2 з однакових матеріалів, одне з яких (D_2) має регулярний рельєф у вигляді пологих виступів однакової форми $r(x)$, розташованих з періодом d вздовж



смуг ширини $2b$. Тіла взаємно притискаються під дією рівномірно розподіленого навантаження, за якого відбувається повний контакт спряжених поверхонь. Одне з тіл нерухоме, а інше рухається зі швидкістю V в напрямі твірної виступів. На поверхні контакту виникають сили тертя τ , підпорядковані закону Амонтона: $\tau = fP$, де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування виступів на основі моделі фрикційно-втомного руйнування, за якого стирання розпочнеться на тих ділянках, де сила тертя перевищує порогове значення τ_0 . Вважаємо, що в початковий момент часу $t = 0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується під кожним виступом лише на деякій ділянці ширини $2a$ ($a < b$). Періодично розташовані ділянки локального зношування розширюватимуться з часом внаслідок зменшення виступів.

Швидкість зношування описуватимемо законом

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = AV (fP(x,t) - \tau_0), \quad x \in L(t),$$

де $h(x,t)$ – товщина спрацьованого матеріалу, $L(t) = [-a(t), a(t)]$, A – стала.

Використовуючи модифікований метод функцій міжконтактних зазорів, сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Гільберта відносно функції $h(x,t)$:

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - \frac{2AfV}{dK} \int_{L(t)} h'_s(s,t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds = AfVR(x), \quad x \in L(t).$$

Тут $R(x) = \frac{2}{dK} \int_{-b}^b r'(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds + p - \frac{\tau_0}{f}$, $K = \frac{4(1-\nu)}{G}$, ν та G – коефіцієнт

Пуассона та модуль зсуву матеріалу тіл.

Функція $h(x,t)$ задовольняє умови

$$h(x,0) = 0; \quad h(\pm a(t),t) = 0, \quad h'_x(\pm a(t),t) = 0, \quad t > 0.$$

Після припрацювання поверхонь (при $t \rightarrow \infty$) контактний тиск на всій ділянці $L(\infty)$ стає рівним τ_0/f і зношування припиняється (тобто $\partial h(x,t)/\partial t = 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Для виступів, форма яких задана функцією

$$r(x) = -r_0 \left(1 - \operatorname{tg}^2(\pi x/d) / \operatorname{tg}^2(\pi b/d) \right)^{3/2}, \quad r_0 \ll b,$$

визначено зношення виступів після припрацювання поверхонь

$$h(x,\infty) = \frac{r_0}{\operatorname{tg}^3(\pi b/d)} \left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi a_\infty}{d}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right)^{3/2} - \left(\frac{2\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) + 1}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) + 1} - \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) + 1} + \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}} \right| \right) \left(p - \frac{\tau_0}{f} \right) \frac{Kd}{4\pi}$$

та контактний тиск на поверхнях спряження.

Отримано рівняння для знаходження розміру ділянки a_∞ , де відбулося припрацювання поверхонь:

$$\frac{3\pi r_0}{d \operatorname{tg}(\pi b/d)} \left(\frac{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d)}{\operatorname{tg}^2(\pi b/d)} - 1 \right) - \frac{K(p - \tau_0/f)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi a_\infty/d) + 1}} = 0.$$

LOCAL WEAR OF SOLIDS WITH REGULAR RELIEF

The contact interaction of two moving solids, one of which has a regular surface texture in the form of periodically arranged grooves, is considered. The materials of the solids are supposed to be identical. The formulation of the corresponding plane contact problem is based on the friction fatigue fracture model, according to which the wear initiates when the friction force reaches some critical value. The region of the wear initiation is found. The profile of the surfaces and contact pressure after running-in are investigated.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОВЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ЗМІННОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Микола Махоркін, Мирон Николишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

mahorkin@ukr.net

Завдання, котрі розробка сучасної техніки ставить перед дослідниками зумовлюють актуальність вивчення поведінки напружено-деформованого стану оболонок в околі концентраторів напружень. Такі дослідження здійснюються для сталого навантаження і практично відсутні у випадку, коли воно змінюється з часом.

Тут за методикою викладеною в [1] розв'язано задачу про граничну рівновагу замкненої безмежної циліндричної оболонки з наскрізним повздовжнім розрізом, довжиною $2l$, до берегів якого прикладене навантаження, що змінюється експоненціально.

Вирази для поля вільних від напружень деформацій вздовж розрізу, за вказаних умов, подано у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1}[v(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1}[u(\alpha, \tau)]\delta(\alpha), \\ \kappa_{\beta\beta}^0 &= \kappa_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-1}\{[\theta_{\beta}(\alpha, \tau)]\delta(\beta) - R^{-2}[w(\alpha, \tau)]\partial_{\beta}\delta(\beta)\}, & (1) \\ \kappa_{\alpha\beta}^0 &= \kappa_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-2}\partial_{\alpha}[w(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 &= \kappa_{\alpha\alpha}^0 = 0, \end{aligned}$$

де ε_{ij}^* , κ_{ij}^* ($i, j = \alpha, \beta$) – не залежать від часу і мають вигляд поданих в [1, 2]; $[u(\alpha)]$, $[v(\alpha)]$, $[w(\alpha)]$, $[\theta_{\beta}(\alpha)]$ – стрибки переміщень та кутів повороту [1]; τ – час; γ – деякий сталий коефіцієнт розмірності $[c^{-1}]$, а систему рівнянь рівноваги в переміщеннях згідно з [1] отримано у такому вигляді [2] –

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_{\tau}^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k=1, 2, 3), \quad (2)$$

де L_{km} ($m=1, 2, 3$) – оператори, вигляд яких подано у [2]; $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = w$; q_i^{0*} – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за виразами поданими [2]; $c_{\tau}^2 = E\rho^{-1}(1 - \nu^2)^2$.

Розв'язок системи (2) аналогічно [1] подано так:

$$f(\alpha, \tau) = f^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 \left(L_{jf}^* \varphi_j + P_{jf}^* \psi_j \right) e^{\gamma\tau} \quad (f = \{u, v, w\}). \quad (3)$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

Тут $L_{kl}^* = L_{kl} + L_{kl}^{**}$, $P_{kl}^* = P_{kl} + P_{kl}^{**}$ ($l = u, v, w$), де L_{kl} , P_{kl} – оператори тотожні поданим у [1], а L_{kl}^{**} , P_{kl}^{**} – оператори, які враховують залежність навантаження від часу [2].

Ключові функції φ_j , ψ_j описуються виразами аналогічними поданим у [1], де у випадку $\gamma \in R$, фундаментальний розв'язок має вигляд [2] –

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 e^{-a_j n |z|} (q_{jn} p_{jn}^+)^{-1} [(b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} z + (a_{jn} C_{in} - b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |z|],$$

якщо корені характеристичного рівняння [2]

$$y^8 - A_1 y^6 + A_2 y^4 - A_3 y^2 + A_0 = 0,$$

мають вигляд $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$, $\lambda_{5,6,7,8} = \pm(b_{2n} \pm ia_{2n})$ та

$$\Phi_n(z) = [A_{1n} \cos b_{1n} z + B_{1n} \sin b_{1n} |z|] e^{-a_{1n} |z|} + A_{2n} e^{-a_{2n} |z|} + B_{2n} e^{-b_{2n} |z|},$$

якщо вони мають вигляд $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$, $\lambda_{5,6} = \pm ib_{2n}$, $\lambda_{7,8} = \pm ia_{2n}$;

Виконавши дії аналогічні здійсненим у [1], отримано, систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибків функцій переміщень та кутів повороту. Їх ядра мають вигляд [2]

$$K_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^* + K_{ij}^{**},$$

де K_{ij}^0 – сингулярна частина; $K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$ – регулярна частина, у якій складова K_{ij}^{**} враховує залежність навантаження від часу [2]. Використовуючи отримані рівняння здійснено числові дослідження коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів поблизу кінців тріщини.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. Makhorkin M.I., Nykolychyn M.M. Construction of integral equations describing limit equilibrium of cylindrical shell with a longitudinal crack under time-varying load // Econtechmod. – 2016. – V. 5. – No. 3 – P. 141-146.

THE PROBLEM ON THE STRESSED STATE OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK UNDER TIME-VARYING LOAD

An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading, in time according to exponential law, has been considered. A system of singular integral equations has been constructed. The solutions of these equations have been used for study of the stress state near the crack tips.

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ПІВПРОСТОРІ З ДЕКІЛЬКОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ

Віталій Мірошніков

Харківський національний університет будівництва та архітектури (Україна)

mivi30166@gmail.com

В роботі представлено аналітико – чисельне розв’язання першої основної просторової задачі теорії пружності (на межах задані напруження) для декількох паралельних кругових циліндричних порожнин в пружному півпросторі. Як приклад подано докладний числовий аналіз напружено-деформівного стану півпростору з двома порожнинами і вивчено взаємний вплив порожнин та межі півпростору.

Постановка задачі. Пружний однорідний півпростір $z < h$ має N кругових циліндричних паралельних порожнин, непересічних між собою і межею півпростору. Межа півпростору розташована на відстані $y=h$. Рівняння межі півпростору S_d : $y=h$, поверхні циліндрів S_p : $\rho_p=R_p$. На межах порожнин і на межі півпростору задані напруження, які будемо вважати швидко спадними до нуля по координатах z і x на далеких відстанях від початку координат.

Потрібно розв’язати рівняння рівноваги Ламе за умов, що на межах циліндричних порожнин задано напруження $\vec{f}_p(\phi_p, z)$, $p=1, 2, \dots, N$; (ρ_p, ϕ_p, z) – система локальних циліндричних координат, а на межі півпростору задано напруження $\vec{f}_d(x, z)$.

Розв’язання задачі шукаємо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) d\mu d\lambda + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) d\lambda, \quad (1)$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$ і $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ базисні розв’язки рівняння Ламе, а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

При розв’язанні задачі скористаємось узагальненим методом Фур’є [1-4] та використаємо формули переходу в базисних розв’язках між локальними циліндричними системами координат, пов’язаними з циліндрами, а також

формули переходу від декартової системи координат, пов'язаною з півпростором, до циліндричної системи координат, пов'язаної з кожним циліндром, та навпаки – від локальної циліндричної системи координат до декартової системи координат півпростору.

Результати. Для двох паралельних циліндричних порожнин у півпросторі знайдено напружений стан. Отримано результати при навантаженні на межу півпростору у вигляді $\sigma_x^{(d)} = \sigma_z^{(d)} = 0$;

$$\sigma_y^{(d)} = -\left(10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2\right) \cdot \left(10^{-4} \cdot (x^2 + 10^2)^2\right), \text{ на межах циліндрів у вигляді}$$

$\sigma_\rho^{(p)} = \sigma_\rho^{(q)} = 0$; $\tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(q)} = 0$; $\tau_{\rho z}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$ при різних значеннях геометричних параметрів задачі.

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів і півпростору дають можливість стверджувати, що її рішення може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції.

1. *Николаев А.Г., Проценко В.С.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости // *Х.: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*, 2011. – 344 с.
2. *Николаев А.Г., ЩербакOVA А.Ю., Юхно А.И.* Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболаидальным включением // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*. – *Х.: НАКУ*, 2006. – Вып. 2(45). – С. 47-51.
3. *Николаев А.Г., Орлов Е.М.* Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. – *Д.: Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара*, 2012. – Вып.20. – С. 253-259.
4. *Проценко В.С., Українець Н.А.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью // *Вісник Запорізького національного університету* – 2015. – Вып. 2. – С. 193-202.

THE FIRST FUNDAMENTAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A HALF-SPACE WITH SEVERAL PARALLEL CIRCULAR CYLINDRICAL VELOCITIES

The three-dimensional problem of the theory of elasticity is calculated, when a voltage is specified in the elastic half-space at the boundaries of parallel cylindrical cavities and on the boundary of the half-space. The solution is obtained by the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates associated with cylinders and Cartesian coordinates connected with the half-space. Infinite systems of linear algebraic equations, to which the problem is reduced, are solved by the truncation method. As a result, displacements and stresses in the elastic body were found. Numerical results are given for the case of a half-space and two cylinders.

**НАПРУЖНИЙ СТАН БІЛЯ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ТРІЩИН НА
ПРОДОВЖЕННІ ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ДІЇ ХВИЛІ
ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

Андрій Мішарін, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

as.mishandr@gmail.com; dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається необмежене ізотропне пружне тіло, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації. В тілі міститься наскрізний дефект у вигляді абсолютно жорсткого включення, від кінців якого під довільним кутом виходять тріщини. З дефектом взаємодіє плоска гармонічна хвиля повздовжнього зсуву, яка викликає переміщення

$$w_0(x, y) = A_0 e^{ik_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad k_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де ω – частота коливань, ρ і G – густина і модуль зсуву тіла. За таких умов єдина відмінна від нуля z – компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца. Граничні умови на тріщинах сформульовані виходячи з того, що їх поверхні вважаються незавантаженими, а на включенні з умов ідеального зчеплення.

Розв'язок задачі розшукується у вигляді суперпозиції розривних розв'язків рівняння Гельмгольца, побудованих відповідно для тріщин і включення. Після цього внаслідок реалізації граничних умов отримаємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків напружень і переміщень на дефекті:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_l(\tau))' \left[\frac{1 + (-1)^l \tau}{(\tau - \zeta)(1 + (-1)^l \zeta)} + R_1(\tau - \zeta) - R_1(\zeta) \right] d\tau + \\ & + \frac{\gamma_l^2 \kappa_0^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) [\ln |\tau - \zeta| + R_2(\tau - \zeta)] d\tau + \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) [g_l(\tau, \zeta) + R_3(\tau, \zeta)] d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{3-l}(\tau))' R_4(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3-l}(\tau) R_5(\tau, \zeta) d\tau = f_l(\zeta), \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[\frac{-1}{\tau - \zeta} + F_1(\tau - \zeta) \right] d\tau + \sum_{l=1}^2 \frac{\sin \beta_l}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_l(\tau))' g_{l+2}(\tau, \zeta) d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) F_{l+1}(\tau, \zeta) d\tau = f(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1, \quad (2)$$

де

$$g_l(x, y) = g_l^0(1 - (-1)^l x, 1 + (-1)^l y), \quad g_l^0(x, y) = \frac{(-1)^{l+1} x \gamma \sin \beta_l}{p_l(x, y)},$$

$$g_{l+2}(x, y) = g_{l+2}^0(1 + (-1)^l x, 1 - (-1)^l y), \quad g_{l+2}^0(x, y) = \frac{(-1)^l x}{p_l(y, x)}, \quad l = 1, 2$$

$$p_l(x, y) = \gamma^2 x^2 + 2\gamma \gamma_l x y \cos \beta_l + \gamma_l^2 y^2,$$

β_1, β_2 виражаються через кути між включенням і тріщинами.

Як бачимо сингулярна складова системи (2) містить нерухомі особливості при $\tau = \pm 1, \zeta = \pm 1$. Це визначає наступний вигляд для невідомих функцій

$$(\varphi_l(\tau))' = (1 + (-1)^l \tau)^{\delta_l} (1 - (-1)^l \tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_l(\tau), \quad \varphi(\tau) = (1 + \tau)^{\delta_1} (1 - \tau)^{\delta_2} \psi(\tau), \quad l = 1, 2$$

де степеневі показники знаходяться за формулами

$$\delta_l = -\frac{\pi + 2\beta_l}{2(\pi + \beta_l)}, \quad 0 < \beta_l < \pi, \quad l = 1, 2.$$

Далі невідомі функції $\psi_l(\tau), \psi(\tau)$ наближаються інтерполяційними многочленами. Така апроксимація дає можливість отримати для сингулярних інтегралів спеціальні квадратурні формули і застосувати до (2) метод колокації. Отримано формули для розрахунку КІН для тріщин і досліджено вплив на їх значення кутів між включенням і тріщинами та частоти падаючої хвилі.

THE STRESS STATE NEAR ARBITRARILY ORIENTED CRACKS ON THE CONTINUATION OF THE INCLUSION UNDER THE ACTION OF SH-WAVE

The problem about determining of the dynamic stress intensity factor (SIF) for the cracks that are located at an angle from the ends of the inclusion is solved. The defects are under the action of longitudinal sh-wave. The initial problem is reduced to solving the system of singular integral-differential equations with fixed singularities. For the numerical solution of the system the method is developed. It takes into account the real asymptotic of the unknown functions and uses the special quadrature formulas for singular integrals.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОКРЫТИЕ НА ОРТОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

Валентин Можаровский, Наталья Марьина, Дмитрий Кузьменков

*Гомельский государственный университет
им. Ф.Скорины (Республика Беларусь)*

mozh@gsu.by; na_rogacheva@mail.ru; d_kuzm@tut.by

Постановка контактной задачи. Рассматривается статическая контактная задача о вдавливании силой F жесткого штампа в упругое однородное вязкоупругое покрытие, находящееся на основании из волокнистого композиционного материала (рис. 1). Необходимо определить изменения давления в зоне контакта при изменяющемся модуле упругости изотропного покрытия для дискретных временных моментов.

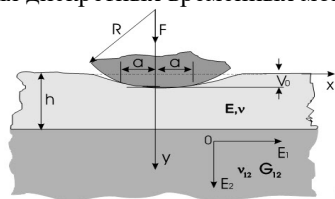


Рис. 1. – Контактная задача.

Предполагается выполнение допущений для случая плоской деформации. Метод решения строится с помощью подхода, основанного на суперпозиции решений для “точечных сил” (так называемый метод функций Грина). Задача состоит в том, чтобы по заданным механическим характеристикам упругого покрытия (E, ν) и композиционного основания ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$), нормальной линейной силе F , радиусу индентора R , толщине покрытия h определить давление в зоне контакта $p(x, t)$. Для штампа цилиндрической формы уравнение его контура $f(x)$ принимается в виде параболы $f(x) = x^2/2R$.

Метод решения базировался на методе граничных элементов, при котором зона контакта разбивается на n -интервалов, считая, что давление постоянно на каждом интервале. Получаем систему n -линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_j, j = \overline{1, n}$ для каждого момента времени t .

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}(t) p_j = \frac{a(t)}{2R} (1 - x_i^2), |x_i| < 1, i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Основные результаты. Применяя алгебру вязкоупругих операторов и считая, что модуль упругости покрытия изменяется во времени, исследуем влияние упругих характеристик покрытия на распределение контактного давления в слоистой системе изотропное вязкоупругое покрытие – ортотропное основание в зависимости от относительного значения модуля упругости покрытия, т.е. отношения $k = E/E_y$. Когда модуль упругости основания E_y в направлении оси Oy меньше в несколько раз модуля упругости покрытия, то характер распределения получаемых эпюр давления значительно отличается от “герцевского” и имеет полиэкстремальный характер (рис.2). В этом случае точки максимального давления смещаются из центра площадки контакта к границам. Отметим случай, при котором под штампом цилиндрической формы давление принимает почти постоянно-распределенный вид. Каждому модулю упругости покрытия соответствует свое распределение давления рис.2, где показано изменение профилей давления при различных значениях $k, R/a = 5, a/h = 2$.

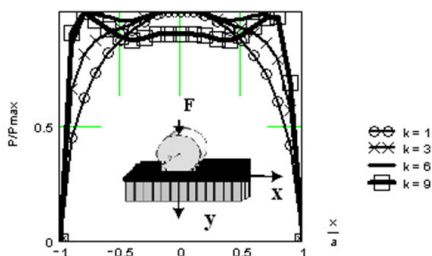


Рис. 2. Распределение давления.

Исследуется более детально распределение давления при различных способах расположения волокон и различных коэффициентах трения. Проанализирован случай, при котором возникает именно “негерцевский” характер распределения давлений.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ – ГКН Арм, грант T17APM-034.

1. Можаровский В.В., Рогачева Н.А. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором // *Материалы, технологии, инструменты.* – 2000. – 5, № 2. – С. 5-10.

THE CONTACT PROBLEM OF INDENTING A RIGID CYLINDER INTO A VISCOELASTIC COATING ON AN ORTHOTROPIC BASE

We consider a static contact problem on the pressing of a rigid stamp by the force F into an elastic homogeneous viscoelastic coating located on the basis of a fibrous composite material.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З МІЖФАЗНИМИ ЗСУВНИМИ ТРІЩИНАМИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Володимир Назаренко, Олександр Кіпніс

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

a.l.kipnis@gmail.com

В умовах плоскої деформації, в рамках статичної симетричної задачі досліджена пружна рівновага кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, за наявності міжфазних зсувних тріщин, які зародилася у кутувій точці цієї межі. Вважається, що тертя між берегами тріщин відсутнє. На нескінченності асимптотика поля напружень співпадає з асимптотикою поля напружень біля кутувій точки у відповідній задачі без тріщин.

З використанням методу Вінера – Гопфа [1] у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Меліна [2] побудовано точний розв'язок задачі. Одержано формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці міжфазної зсувної тріщини. Виходячи з силового критерія руйнування одержано рівняння для визначення руйнуючого навантаження.

Аналізуючи формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень, керуючись критерієм стійкості рівноваги тріщин, встановлено той факт, що у разі зародження міжфазних зсувних тріщин у кутувій точці ізотропних лінійно-пружних середовищ, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла, їх рівновага є нестійкою. Після досягнення стану граничної рівноваги настане динамічний режим розвитку тріщин.

1. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: : Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

LIMIT EQUILIBRIUM OF PIECE-HOMOGENEOUS PLANE WITH INTERFACIAL SHEAR CRACKS AT THE CORNER POINT OF THE MEDIA-SEPARATING BOUNDARY

The static symmetric problem of the theory of elasticity for piece-homogeneous isotropic plane with the interface of media in the form of the sides of angle which contains an interfacial shear cracks at the corner point is considered. Using the Wiener – Hopf method and the apparatus of Mallin's integral transform, the stress intensity factor at the end of the crack was determined and the character of the equilibrium of the crack was studied.

**ОСЛАБЛЕНА ВНУТРІШНЬОЮ ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ
ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА
В ЛІНІЙНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

Тарас Николишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

Лінійним називають середовище, вплив якого на оболонку, що деформується, зводиться до додаткового навантаження на неї із трьох складових, одна з яких направлена по нормалі до серединної поверхні оболонки, а дві інші – по дотичних до координатних ліній. Величини складових пропорціональні відповідним компонентам переміщень серединної поверхні оболонки [1].

Нехай у такому середовищі знаходиться пружна замкнута циліндрична оболонка, ослаблена поздовжньою тріщиною завдовжки $2l_0 = 2a_0R$. Обмежимося розглядом симетричного відносно лінії тріщини навантаження. Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до δ_c -моделі, зону пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – невідомими зусиллями та моментами. Напружений стан в оболонці без тріщини (основний) вважаємо відомим. Визначення збуреного напруженого стану, викликаного тріщиною, зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь у переміщеннях:

$$L_{ij}u_j = q_i(\varepsilon_{22}^0, \kappa_{22}^0) - \frac{R^2}{B}k_i u_i \quad (i, j = \overline{1,3}). \quad (1)$$

Тут $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ – компоненти переміщень серединної поверхні оболонки, k_i – коефіцієнти опору пружного середовища переміщенням оболонки, оператори L_{ij} , q_i та функціонали ε_{22}^0 , κ_{22}^0 описані в [2].

Розв'язавши систему (1) операторним методом, визначимо компоненти переміщень серединної поверхні оболонки:

$$u_i = R \left(L_{2i}^{(1)} \varphi_2 + P_{2i}^{(1)} \psi_2 \right), \quad (2)$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

де $L_{2u_i}^{(1)}$, $P_{2u_i}^{(1)}$ – диференціальні оператори не вище четвертого порядку, а функції φ_2 , ψ_2 визначаємо з рівнянь

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0, \quad D\psi_2 = \kappa_{22}^0. \quad (3)$$

Тут D – диференціальний оператор восьмого порядку.

Побудувавши 2π -періодичний розв'язок рівнянь (3) знаходимо зусилля та моменти в оболонці, викликані невідомою густиною стрибків переміщень $[v]$ та кута повороту $[\theta_2]$ на лінії тріщини. Якщо до значень зусиль та моментів збуреного напруженого стану додати зусилля та моменти в оболонці без тріщини і вимагати, щоб сумарні величини задовольняли умови вільних берегів тріщини, то для визначення похідних від функцій $[v]$, $[\theta_2]$ отримаємо систему нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь СІР.

Розв'язок системи СІР будували числово з допомогою методу механічних квадратур. Числовий аналіз розкриття фронту тріщини та розмірів зон пластичних деформацій визначали для оболонки, що знаходиться під внутрішнім тиском за таких значень параметрів: $2h = 3$ см, $R = 150$ см, $\nu = 0,3$, $\eta_i = 0,01$ та $\eta_i = 0,1$. Показано, що із збільшенням реакції пружного середовища розкриття тріщини та розмір пластичних зон зменшується. Найбільше впливає на розкриття фронту тріщини та розмір пластичних зон, а значить, на напружений стан оболонки в околі тріщини, нормальна складова реакції пружного середовища. Тобто справедлива гіпотеза Вінклера.

1. Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. – М.: Стройиздат, 1969. – 326 с.
2. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.

ELASTICO-PLASTIC CYLINDRICAL SHELL, WEAKENED BY INTERNAL LONGITUDINAL CRACK, IN A LINEAR ELASTIC MEDIUM

A problem on limit equilibrium of elastico-plastic cylindrical shell, weakened by internal crack, the shell being in elastic medium, is reduced to a system of nonlinear singular integral equations. The influence of elastic medium on the crack opening and the size of plastic zones near it are studied.

ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА НАСКРІЗНИМИ МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ

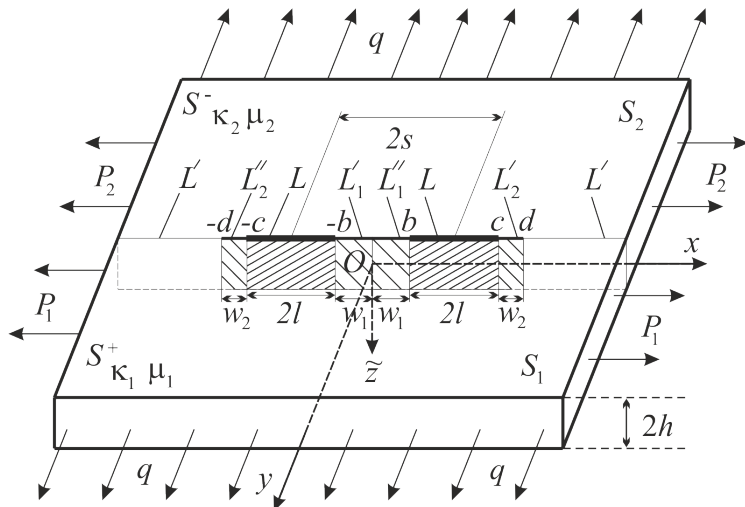
**Мирон Николишин, Віктор Опанасович, Леся Куротчин,
Микола Слободян**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Львівський національний університет імені Івана Франка (України)

MyronNykolyshyn@gmail.com; klesi@i.ua; slobkolia@gmail.com

У роботі досліджена задача про двохвісний розтяг зусиллями на безмежності q , P_j кусково-однорідної ізотропної пластини з двома наскрізними тріщинами завдовжки $2l$, розміщеними на прямолінійній межі



поділу матеріалів, береги яких вільні від зовнішнього навантаження. На продовженні тріщин наявні пластичні зони (рис. 1), які розвиваються вузькою смугою по всій товщині пластини і зливаються між тріщинами. Згідно з формулюванням задачі маємо такі краєві умови:

$$(\sigma_{yy} - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^-, x \in L' \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \begin{cases} \sigma_{01}, x \in L_1 = L_1' \cup L_1'', \\ 0, x \in L, \\ \sigma_{02}, x \in L_2 = L_2' \cup L_2'', \end{cases} \quad \tau_{xy}^{\pm} = \begin{cases} -\tau_{01}, x \in L_1'', \\ \tau_{02}, x \in L_2', \\ 0, x \in L, \\ \tau_{01}, x \in L_1', \\ -\tau_{02}, x \in L_2'', \end{cases} \quad (2)$$

де σ_{yy}, τ_{xy} - компоненти тензора напружень, u, v - компоненти вектора переміщення, σ_{0i}, τ_{0i} - невідомі нормальні і дотичні напруження в зонах пластичності, $y \rightarrow \pm 0$.

За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі, за аналогією з [1], задачу зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких знайдено в класі функцій, обмежених у вершинах зовнішніх пластичних зон. Наведено залежності для знаходження довжин пластичних зон, розкриття берегів тріщин у їх вершинах, міжфазних нормальних і дотичних напружень.

1. Николишин М.М., Опанасович В.К., Куротчин Л.Р., Слободян М.С. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2014. – № 6. – С. 67-72.

THE BIAxIAL EXTENSION OF ELASTICO-PLASTIC PICEWISE HOMOGENEOUS PLATE WITH TWO THROWS INTERFACE CRACKS

The work studies the biaxial extension of picewise-homogeneous isotropic plate with two throw equal cracks on the linear interface of materials at the presents of plastic zones near their tips. We consider that loading, geometric and mechanic parametris are sach that plastic zpnes between the cracks touch. The problem is solved by means of the methods of the theory of complex varsable and complex potentials Kolosov-Muskhelishvili in the class of functions limited at the tips of plastic zones. The dependences are presented of calculation of the lengths of plastic zones opening of the cracks edges at their tips and sresses on the real exesis.

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО ШТАМПА І ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З УРАХУВАННЯМ ЗНОСУ

Володимир Онишкевич

Національний лісотехнічний університет України

onyshkevych@ntu.edu.ua

Уперше задачі з урахуванням зносу було розглянуто в [3, 4], а математичні моделі зношування було наведено в [1].

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Температурними ефектами, які неминуче виникають [5], нехтуємо.

Нехай до моменту часу $\tau = 0$ під втиснутим силою P у пружну півплощину штампом тиск стаціонарно розподілявся, змінюючи мікронерівності поверхні. З моменту часу $\tau = 0$ штамп рухається з постійною швидкістю V_0 і відбувається зношування півплощини. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена.

Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial x = 0, \quad \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial y = 0,$$

де $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$, u і v – компоненти вектора переміщень, λ і μ – коефіцієнти Ламе, за таких крайових умов:

$$y = 0: \quad v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a,$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a; \quad \tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty.$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом, a – півширина штампа, H_b – твердість за Брінелем матеріала півплощини, τ – час. Процес зношування визначається параметрами $k_1, k_2, 0 \leq \alpha \leq 1$ [2].

Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парні інтегральні рівняння, що призводять до системи нелінійних алгебричних рівнянь. При значеннях параметрів $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ система перетворюється у лінійну, ці крайні випадки є найбільш цікавими, оскільки дають можливість обчислити найменше і найбільше стирання. При $0 < \alpha < 1$ розв'язок задачі буде

знаходиться між розв'язками вказаних задач. В цьому випадку використано метод простої ітерації.

Обчислення проведено за таких параметрів (система SI): матеріал півплощини – алюміній ($H_b = 11.3$, $\lambda = 5.6 \times 10^{10}$, $\mu = 2.6 \times 10^{10}$), $V_0 = 0.25$, $a = 0.25$, $f(x) = \text{const} = 0.01$, $k_1 = 10^{-10}$, $k_2 = 10^{-11}$. Отримано еволюцію контактних напружень, зношування і стирання в часі. Зокрема, у випадку $\alpha = 1$ зі збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про інтенсивніше зношування матеріалу. Отримано співпадіння частинних випадків $\alpha = 0$, $\tau = 0$ з відомими [3].

Відзначимо, що на отриманий розв'язок слід накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = k\sigma_y$, де k – коефіцієнт тертя, а σ_y визначається за формулою розвинення в ряд Фур'є.

1. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // ДАН СССР. – 1983. – 271. № 4. – С. 827-831.
2. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Применение наследственно-старееющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. – 1989. – 10. № 6. – С. 981-987.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа // ПММ. – 1976. – 40. № 6. – С. 981-989.
4. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения. – М.: Наука. – 1971. – С. 130-140.
5. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фізико-математичної науки. – 2017. – № 3. – С. 165-168.

PLANE CONTACT PROBLEM FOR RECTANGULAR PUNCH AND ELASTIC HALF-PLANE WITH DUE ACCOUNT OF WEAR

The plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load. The solution of elastic problem is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraical equations for unknown coefficients. The evolution of contact stresses, wear and abrasion in the time are given.

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ДВОЛАНКОВОЇ ЛАМАНОЇ ТРІЩИНИ В ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Любов Онишко, Олексій Кваснюк, Олександр Пономаренко,
Надія Біда

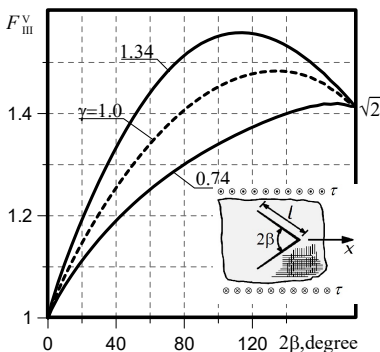
Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;

Львівський національний аграрний університет (України)

oni@ipm.lviv.ua

Під час розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) задач анізотропної теорії пружності для негладких криволінійних тріщин при врахуванні особливостей у кутових точках виникають математичні труднощі, які спонукають до використання наближених методів їх розв'язування. Розроблений наближений єдиний підхід до розв'язування плоских задач теорії пружності та механіки руйнування ізотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами [4] нижче поширено на антиплоску задачу про поздовжній зсув на нескінченності ортотропної площини з дволанковою ламаною тріщиною.

Розглянемо ортотропну площину зі згладженою ламаною тріщиною, контур якої складається з двох прямолінійних відрізків, з'єднаних дугою кола радіуса ρ . Центр кола лежить на осі Ox в точці $x = l(\cos\beta - \varepsilon)/\sin\beta$, де $\varepsilon = \rho/l$ – відносний радіус кривини ($2l$ довжина ламаної тріщини), а вершини тріщини розташовані симетрично відносно осі Ox (схема на рисунку). На нескінченності тіло знаходиться під дією зсуву напруженнями τ , береги гладкої криволінійної тріщини вільні від зусиль.



Розв'язок задачі виразимо через аналітичну функцію $\Phi_3(z_3)$ змінної $z_3 = x + i\gamma_3 y$ ($i\gamma_3$ – уявний корінь характеристичного рівняння [1,2,5]), яку шукатимемо в інтегральній формі [4]

$$\Phi_3(z_3) = \tau + \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\gamma'(t_3) dt_3}{t_3 - z_3}, \quad (1)$$

де L_3 є контур у площині z_3 , що

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

Рисунок

відповідає контуру ламаної тріщини L у площині $z = x + iy$.

Невідому густину $\gamma'(t_3)$ знайдемо з інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_3} K(t_3, t'_3) \gamma'(t_3) dt_3 = -\tau(t'_3), \quad t'_3 \in L_3, \quad (2)$$

де

$$K(t_3, t'_3) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t_3 - t'_3} \frac{dt'_3}{ds'} \right], \quad \tau(t'_3) = -\tau \operatorname{Re} \left[\frac{dt'_3}{ds'} \right], \quad (3)$$

$$t_3 = [(1 - i\mu_3)t + (1 + i\mu_3)\bar{t}] / 2, \quad t_3 \in L_3, t \in L.$$

Рівняння (1) має єдиний розв'язок за додаткової умови однозначності переміщень за обходу контуру L :

$$\int_{L_3} \gamma'(t_3) dt_3 = 0.$$

Розв'язавши інтегральне рівняння (2) методом механічних квадратур [4], визначимо дотичні напруження $\tau_{sz}(0)$ у вершині згладженої ламаної тріщини L за використання комплексного потенціалу (1)

$$\tau_{sz}(0) = \tilde{K}_{III}^V R_{III}(\beta) (2\pi\rho)^{-\lambda_{III}}. \quad (4)$$

Тут s - дугова абсциса точки $t \in L$, λ_{III} - порядок особливості поля напружень у вершині клина, $R_{III}(\beta)$ - коефіцієнт впливу закруглення кутового вирізу на напруження на контурі L , який також залежить від форми контуру та пружних сталей ортотропного матеріалу, \tilde{K}_{III}^V - коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у кутовій вершині тріщини, який визначається за допомогою граничного переходу [4]

$$\tilde{K}_{III}^V = \left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{sz}(0) \right] \right\} / R_{III}(\beta).$$

Числові результати для КІН у вершинах згладженої ламаної тріщини та дотичні напруження у закругленій кутовій вершині отримано для малих відносних радіусів кривини ε . Коли параметр $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо ламану тріщину. Знайдені безрозмірні КІН у вершинах тріщини $F_{III}^{\pm} = K_{III}^{\pm} / \tau\sqrt{\pi l}$ та в кутовій точці $F_{III}^V = \tilde{K}_{III}^V / \tau(2\pi l)^{\lambda_{III}}$ для різних кутів розхилу тріщини 2β (рисунок). Обчислення проведені для склопластика 27-63С ($G_{13} = 6500$ МПа, $G_{23} = 3100$ МПа) [3] для ізотропного матеріалу ($\gamma_3 = 1$) та для двох орієнтацій вирізів: вздовж ($\gamma_3 = \sqrt{G_{13}/G_{23}} = 1,34$) або поперек волокон

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

($\gamma_3 = \sqrt{G_{23}/G_{13}} = 0,74$). Для кута $\beta = 0^\circ$ (ламана тріщина переходить у вироджену горизонтальну прямолінійну тріщину довжини l) відносний КІН $F_{III}^V = 1$, а при $\beta = \pi/2$ отримаємо прямолінійну тріщину довжини $2l$ без особливості ($\lambda_{III} = 0$), що призводить до такого значення величини $F_{III}^V = \sqrt{2}$.

1. *Лехницький С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
2. *Саврук М.П., Казберук А., Онишко Л.Й.* Вплив анізотропії матеріалу на розподіл напружень біля параболічного вирізу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – № 6. – С. 24-33.
3. *Серенсен С.В., Зайцев Г.П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
4. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Springer, 2017. – 516 p.
5. *Ting T.C.T.* Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 587 p.

STRESS INTENSITY FACTOR FOR A DOUBLE-LINK KINKED CRACK IN ORTHOTROPIC BODY UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

Using the singular integral equation method and the unified approach for problem of stress concentration at the sharp and rounded V-shaped notches the problem about longitudinal shear on the infinity of orthotropic plane with a double-link kinked crack.

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА ЗІ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Віктор Опанасович, Ігор Яцик

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

kafmech@franko.lviv.ua; ihoryatsyk85@gmail.com

Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ зі системою наскрізних прямолінійних тріщин завдовжки $2l_k$ ($k = \overline{1, N}$) рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності (рис. 1). Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини тріщин з постійною зоною ширини h_1 , що прилягає до верхньої основи пластини. До деформування пластини береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини. Введемо локальну систему координат

$O_k x_k y_k$ з початком у точці $O_k(x_k^0, y_k^0)$, що співпадає з геометричним центром k -ї тріщини, і осями $O_k x_k$ та $O_k y_k$, відповідно паралельною та перпендикулярною до лінії k -о дефекту. Відрізок дійсної осі $O_k x_k$, для якого $|x_k| \leq l_k$, позначимо через L_k , а розподілені згинальні моменти на нескінченності – через M_x^∞ , M_y^∞ та H_{xy}^∞ .

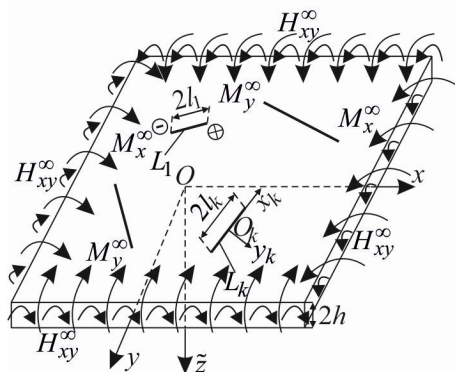


Рис. 1. Схема навантаження та розміщення тріщин у пластині.

на дві: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

На берегах k -ої тріщини будемо вимагати виконання таких крайових умов:

$$\sigma_{y_k y_k}^+ = \sigma_{y_k y_k}^- = -N_k / (2h), \quad \sigma_{x_k y_k}^+ = \sigma_{x_k y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N},$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$$M_{y_k}^{\pm} = M_k, \quad Q_{y_k}^{\pm} = 0, \quad H_{x_k y_k}^{\pm} = 0, \quad M_k = (1 - \gamma/3) h N_k, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N},$$

$$\partial_x [v_{p_k}] - 0,5 \{1 + (1 - \gamma)^2\} h \partial_{x_k} [\varphi_{y_k}] = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N},$$

де $\sigma_{x_k y_k}$, $\sigma_{y_k y_k}$ та v_{p_k} – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь $O_k y_k$ у плоскій задачі; φ_{y_k} – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [2]; M_{y_k} – згинальний момент; Q_{y_k} і $H_{x_k y_k}$ – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_{x_k} = \partial/\partial x_k$, $[f] = f^+ - f^-$; $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту; символами «+» і «-» позначені відповідно граничні значення функції за прямування точки площини до берегів тріщин при $y_k \rightarrow \pm 0$.

На основі методів теорії функції комплексної змінної, комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини [1] отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно усередненого за товщиною пластини кута повороту нормалі до серединної площини пластини, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати для однієї, двох і періодичної системи співвісних тріщин, коли контакт відбувається вздовж лінії на одній з основ пластини. Здійснено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності згинальних і крутних моментів, а також поперечних сил для однієї, двох, трьох і періодичної системи співвісних тріщин.

1. Мазурак Л.П., Бережницький Л.Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1990. – 256 с.
2. Тимошенко С.П., Войновски-Кригер. Пластини и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING SYSTEM OF CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF THEIR FACES

In the paper stressedly-deformed state of the boundless isotropic plate with a straight through-the-thickness cracks system is investigated which faces are free of the external loading. The plate is under the loading by the evenly distributed bending moments on the infinity. It is assumed that the cracks faces are in the smooth contact on all cracks length on a two-dimensional region on overhead basis of plate. The numerical analysis of the problem solution is conducted.

ПРО СИМЕТРІЮ ІНВЕРСІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРУЖНОГО КЛИНА

Володимир Острик

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)

v.i.ostryk@gmail.com

Симетрія розв'язків плоских задач теорії пружності відносно одної або обох осей декартової системи координат, тобто дзеркальна симетрія, є очевидною і не потребує додаткових обґрунтувань. Якщо геометрія задачі та задане навантаження симетричні відносно певної осі, то і розв'язок задачі є симетричним відносно цієї осі.

Інверсія з початком у точці O відносно точки A , як відомо, є таке перетворення, коли кожна точка M променю OA відображується в точку M' , що лежить на цьому промені, таку, що $|OM| \cdot |OM'| = |OA|^2$. Якщо певна функція, задана у точках променя, не змінюється при перетворенні інверсії, то таку функцію називаємо симетричною. Якщо при цьому знак функції змінюється на протилежний, то функцію називаємо антисиметричною.

На відміну від дзеркальної симетрії, симетрія при перетворенні інверсії у задачах теорії пружності є цілком не очевидною, і її виявлення у розв'язках основних крайових задач для пружного клина є предметом даної доповіді. Очевидним є тільки той факт, що симетрію інверсії мають розв'язки задач для пружного клина у випадку антиплоскої деформації тому, що гармонічна функція при перетворенні інверсії залишається гармонічною. Це означає, що при перетворенні інверсії крайова задача антиплоскої деформації для клина переходить в аналогічну задачу для клина, а у разі симетричних крайових умов – саму в себе.

Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна отримано розв'язки основних задач плоскої деформації для пружного клина. Показано, що у разі крайових умов, симетричних при перетворенні інверсії, окремі компоненти розв'язків також мають симетрію інверсії.

У першій крайовій задачі для пружного клина (задачі I – I) у разі, коли на гранях клина дотичні напруження відсутні, а нормальні напруження, помножені на радіальну координату, симетричні при перетворенні інверсії, нормальні колові напруження, помножені на радіальну координату, є також симетричними на кожному із променів всередині клина, які виходять із його вершини, а нормальні переміщення симетричні тільки на гранях клина. Аналогічна властивість розв'язку першої крайової задачі для клина має місце для дотичних напружень всередині клина і радіальних переміщень на гранях клина

у разі відсутності нормальних напружень і симетричності дотичних напружень, помножених на радіальну координату, на гранях клина. Крім того, для нестисливого матеріалу нормальні та радіальні переміщення відповідно виявляються симетричними всередині клина. Такого ж типу симетрії мають розв'язки задач I – III і III – III, коли на одній або обох гранях клина задано умови гладкого контакту з симетричними за інверсією нормальними переміщеннями. У задачах I – II, II – III, коли одна із граней клина жорстко закріплена, аналогічні властивості симетрії справедливі тільки на незакріпленій грані клина, а для нестисливого матеріалу – і всередині клина.

Як приклад розглянуто задачу Фламана про дію зосередженої нормальної сили на пружну півплощину, в якій окрім дзеркальної симетрії відносно лінії дії сили розв'язок має безліч симетрій інверсії з початком у довільній точці O межі півплощини. При цьому нормальні колові напруження, помножені на радіальну координату, є симетричними на кожному із променів з початком у точці O , а нормальні переміщення симетричні на двох протилежних променях, що складають межу півплощини.

У випадках, коли клин є півплощиною або площиною з півнескінченим розрізом, для розв'язків задачі I – I можливі й інші типи симетрії інверсії відносно напружень і радіальних похідних від переміщень, помножених на цілу степінь радіальної координати. Відповідними прикладами можуть служити задачі про вдавлювання одного або двох штампів з прямолінійною основою в пружну півплощину. Для задачі I – III такі типи симетрії розв'язків для радіальної похідної від заданих на одній грані клина нормальних переміщень і нормальних переміщень на іншій грані клина мають місце у випадках, коли клин складається із одного або трьох квадрантів.

Властивості симетрії інверсії розв'язків отримані для основних крайових задач, коли кожна з крайових умов формулюється на всій грані клина. Для власне змішаних крайових задач, коли на різних ділянках однієї або обох граней клина ставляться різні умови, наявність симетрії інверсії у крайових умовах не обов'язково веде до симетрії інверсії розв'язку. Розглянуто три власне змішані задачі: задача про вдавлювання штампа в грань клина із закріпленою іншою гранню, задача про розклинювання клина жорсткою пластинкою вдовж крайової тріщини та задача про симетричний контакт двох штампів з пружним клином. Зведенням цих задач до інтегральних рівнянь показано, що розв'язки перших двох задач мають часткову симетрію інверсії, таку як і в основних задачах I – II, I – III відповідно, а розв'язок третьої задачі не має такої симетрії, не зважаючи на симетрію крайових умов.

ON THE INVERSION SYMMETRY OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ELASTIC WEDGE

Using the Mellin integral transformation, solutions of two-dimensional basic problems for an elastic wedge are obtained. It is shown that in the case of boundary conditions, symmetric with respect to the inversion transformation, separate components of solutions of plane strain problems and solutions of antiplane strain problems for the wedge also have the inversion symmetry.

МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО НЕІДЕАЛЬНИЙ КОНТАКТ МАСИВНИХ І ТОНКИХ ПРУЖНИХ ТІЛ

Ігор Прокопишин, Андрій Стягар

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна);

Університет м. Л'Акваїлі (Італія)

ihor84@gmail.com; astyahar@gmail.com

Розглянуто задачу про неідеальну контактну взаємодію кількох масивних пружних тіл і тонких пружних включень. Напружено деформований стан масивних тіл описують рівняння лінійної теорії пружності, а тонких – рівняння теорії пластин Тимошенка. На спільних межах тіл та включень виконуються умови одностороннього контакту без тертя або неідеального механічного контакту за наявності поверхневих нелінійних вінклерівських шарів. На основі результатів робіт [1, 2] запропоновано слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі та встановлено умови існування і єдиності його розв'язку.

Для розв'язування отриманого варіаційного рівняння розроблено ряд паралельних ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна. Ці методи зводять вихідну нелінійну контактну задачу для системи масивних тіл і тонких включень до паралельного розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних рівнянь теорії пружності та теорії пластин Тимошенка для окремих тіл і включень з крайовими умовами Робіна на зонах можливого контакту. Доведено теореми про збіжність запропонованих алгоритмів.

Здійснено програмну реалізацію цих алгоритмів із застосуванням до розв'язування задач теорії пружності у масивних тілах методу скінченних елементів (МСЕ) з лінійними і квадратичними трикутними елементами, а до задач теорії пластин Тимошенка – МСЕ з одновимірними бульбашковими базисними функціями високого порядку.

Числові дослідження проведено для плоскої задачі про неідеальний контакт двох масивних пружних тіл та тонкого пружного включення. Між верхнім масивним тілом та тонким включенням виконуються умови одностороннього механічного контакту, а нижнє масивне тіло з'єднане з включенням через нелінійний вінклерівський прошарок. Вивчено залежність швидкості збіжності методів декомпозиції області від зміни модулів пружності масивних тіл і тонкого включення. Проаналізовано контактні напруження. Здійснено

порівняння числових результатів, отриманих з використанням теорії пластин Тимошенка для тонкого включення, та результатів, отриманих на основі просторової теорії.

1. *Dyyak I., Savula Ya., Styahar A.* Numerical investigation of a plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition // Journal of numerical and applied mathematics. – 2012. – **109**. – P. 23-33.
2. *Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A.* Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – **98**. – P. 739-748.

DOMAIN DECOMPOSITION METHODS FOR THE PROBLEM OF IMPERFECT CONTACT BETWEEN MASSIVE AND THIN ELASTIC BODIES

We consider an imperfect contact problem for several massive elastic bodies and thin inclusions. Inside the massive bodies linear elasticity theory is assumed to hold. The stress and strain state of thin inclusions is described using the equations of Timoshenko shell theory. We obtain a weak formulation of this problem in the form of nonlinear variational equation in Hilbert space. To solve this equation, we propose several parallel iterative domain decomposition algorithms of Robin–Robin type and prove their convergence. The software based on the proposed algorithms is developed for the numerical solution of plane contact problems using FEM approximations on linear and quadratic triangular elements for massive bodies and one-dimensional FEM with high-order bubble functions for thin inclusions. The numerical analysis is performed for the problem of unilateral contact interaction between a massive body and a thin inclusion, which is connected with the other massive body through a nonlinear Winkler layer. The influence of elasticity moduli on the convergence rate of domain decomposition algorithms and the contact stress distributions are investigated.

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПІВПРОСТОРУ З НЕСКІНЧЕННОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Володимир Проценко, Наталія Українець

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ» (Україна)

nattalja2004@gmail.com

У статті [1] за допомогою узагальненого методу Фур'є (УМФ) була розглянута друга основна задача теорії пружності для пружного півпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною, що розташована паралельно його границі, аналіз напружено-деформованого стану пружного тіла наведено у роботі [2]. У статті [3] отримано розв'язок мішаної задачі теорії пружності для цієї ж просторової області за умови, що на границі півпростору задані напруження, а на поверхні порожнини – переміщення, а також наведено обґрунтування УМФ для розв'язання цієї задачі. В даній роботі проведено докладний аналіз напружено-деформованого стану пружного півпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною для мішаної задачі теорії пружності із вказаними граничними умовами.

Розглянемо просторову область Ω , що заповнена однорідним ізотропним середовищем та обмежена площиною S_1 та циліндричною поверхнею S_2 . Введемо однаково орієнтовані декартову $\{x, y, z\}$ і циліндричну $\{\rho, \varphi, z\}$ системи координат з центром у точці O , яка знаходиться на відстані h від поверхні S_1 , та віссю Oz , яка спрямована уздовж осі циліндра радіуса a . Вважаючи, що вісь Oz перпендикулярна до поверхні S_1 , рівняння граничних поверхонь S_1 та S_2 запишемо у вигляді $y = h$ та $\rho = a$ відповідно, а область Ω визначимо системою нерівностей $\{y < h, \rho > a, a < h\}$.

Розглянемо мішану задачу теорії пружності для однорідного рівняння Ламе в області Ω з крайовими умовами: $F\bar{u}|_{S_1} = F\bar{u}_{01}(x, z)$, $\bar{u}|_{S_2} = \bar{u}_{02}(\varphi, z)$, де \bar{u} , $F\bar{u}$ - вектори пружних переміщень та напружень. Згідно з УМФ, для граничних поверхонь S_1 та S_2 вводяться системи базисних розв'язків однорідного рівняння Ламе для півпростору та циліндра. Розв'язок крайової задачі може бути представлений у вигляді суперпозиції зовнішніх базисних розв'язків для циліндра та внутрішніх базисних розв'язків для півпростору з невідомими інтегральними щільностями.

УМФ передбачає використання формул перерозкладання (теорем

додавання) відповідних базисних розв'язків, щоб задовольнити крайові умови задачі на граничних поверхнях області Ω . В результаті задача зводиться до трьох нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, оператор яких за умови неперетинання граничних поверхонь S_1 та S_2 є цілком неперервним у просторі l_2 , а праві частини систем належать l_2 . Це дає можливість розв'язувати ці системи методом редукції.

Чисельні розрахунки проводились для конкретних функцій $F\bar{u}_{01}(x, z)$, $\bar{u}_{02}(\varphi, z)$ і різних значень коефіцієнта Пуассона та геометричних параметрів задачі. Аналіз показує, що вагомий вклад в розподіл напружень вносить нормальна компонента σ_r . Для деякого φ нормальні напруження σ_r набувають найбільших значень на циліндричній поверхні S_2 та зростають в точках будь-якого циліндра $\rho = const$, коли значення φ наближаються до $\pi/2$. Також компонента σ_r значно збільшується при зближенні граничних поверхонь, тобто при $\varepsilon \rightarrow 1$. Для $\varphi \in [0, \pi]$ напруження σ_r є стискуючими, а для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ - розтягуючими. Максимальні стискуючі напруження виникають при $\varphi = \pi/2$. Розглянута задача представляє практичний інтерес у зв'язку з проблемами геотехнічної інженерії та геомеханіки [4].

1. Проценко В.С., Попова Н.А. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 52-58.
2. Попова Н.А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью // Вісник Харк. унів-ту. Сер. Матем., прикл. матем. і механіка. – 2004. – № 645. – С. 102-107.
3. Protsenko V.S., Ukraynets N.A. Justification of the Generalized Fourier method for the mixed problem of elasticity theory in the half-space with the cylindrical cavity // Вісн. Запоріж. нац. унів-ту: Зб. наук. праць. Фіз.-мат. науки. – 2016. – № 2. – С. 213-221.
4. Hai-Sui Yu. Cavity expansion methods in geomechanics // Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. – 385 с.

AN ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE HALF-SPACE WITH THE INFINITE CYLINDRICAL CAVITY

The mixed problem of the elasticity theory for the elastic half-space with the infinite circle cylindrical cavity parallel to the boundary of the half-space is considered. The stress-strain state of this multiply connected elastic body is analyzed. The results of numerical calculations are discussed. These investigations are of practical interest in connection with problems of geotechnical engineering and geomechanics.

ПЛОСКА МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Віктор Реут, Зінаїда Журавльова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова (Україна)

reut@onu.edu.ua; z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглядається пружна півсмуга $0 < x < a, 0 < y < \infty$, усередині якої розташована поздовжня тріщина $b_0 < y < b_1, x = C$. Півсмуга знаходиться під впливом механічного навантаження, що діє по середині короткого торця. Бічні грані півсмуги знаходяться в умовах зчеплення.

Вихідну задачу зведено до одновимірної векторної крайової розривної задачі за допомогою застосування півнескінченного \sin -, \cos -перетворення Фур'є. Розв'язок одновимірної задачі отримано за допомогою апаратів матричного диференціального числення, матричної функції Гріна [1] та застосування матричного інтегрального перетворення за узагальненою схемою. Розв'язання задачі зведено до системи інтегро-диференціальних рівнянь, яку розв'язано за допомогою методу ортогональних поліномів [2].

Досліджено динаміку зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень при зміні довжини та положення вертикальної тріщини.

1. *Vaisfel'd, N.D., Zhuravlova Z.Yu.* Two-dimensional mixed problem of thermoelasticity for a semistrip // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2018. – **228**, № 2. – P. 105-121. DOI 10.1007/s10958-017-3609-8.
2. *Понов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезв, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

THE PLANE MIXED PROBLEM OF ELASTICITY FOR A SEMI-STRIP WITH A LONGITUDINAL CRACK

The elastic semi-infinite strip with a longitudinal crack is considered. The initial problem is reduced to the one-dimensional vector problem with the help of semi-infinite \sin -, \cos - Fourier transformation. The solution of the vector boundary-value problem is constructed with the help of matrix differential calculation, Green's matrix-function and application of matrix integral transformation by the generalized scheme. The solution of the problem is reduced to the solving of the system of singular integral equations. The stress intensity factors are investigated.

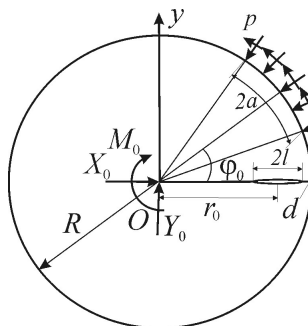
КРУГОВИЙ ДИСК З ВНУТРІШНЬОЮ РАДІАЛЬНОЮ ТРИЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ ТИПОВОГО МОДЕЛЬНОГО КОНТАКТНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ірина Рудавська

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

irynasyd@gmail.com

Основною робочою частиною багатьох машин і механізмів є пари кочення: колісні пари, маховики, шарикові і роликові підшипники, валки вальцювальних станів, різні зубчасті зчеплення та ін. Їх ресурс вичерпується, найчастіше, в результаті зародження і розвитку тріщин [1]. Тому для прогнозування міцності та довговічності деталей машин і елементів конструкцій є важливими задачі про визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у круговому диску, яким моделюють тіло кочення, послабленому тріщинами під дією контактного навантаження.



Розглядаємо пружний ізотропний круговий диск радіуса R , обмежений контуром L_0 (рис. 1), з центром у початку основної системи координат xOy , як одне із тіл пари кочення. Диск послаблений внутрішньою радіальною прямолінійною тріщиною довжиною $2l$. Контактний тиск від дії контртіла моделюємо рівномірно розподіленими зусиллями

$$p(\varphi) = p_1(1 + i \cdot f), \quad (1)$$

Рис. 1. Загальна геометрична схема задачі.

де f – коефіцієнт тертя проковзування, p_1 – нормальна складова зусиль.

У центрі диска прикладені зрівноважуючі сили X_0 , Y_0 та момент M_0 . Комплексні потенціали для такого навантаження визначаємо на основі [2].

Дану задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння [3], яке розв'язали чисельно методом механічних квадратур.

Отримано залежності нормованих КІН $F^\pm = K / (p_1 \sqrt{\pi R})$ (знак „-“, – для лівої вершини тріщини, „+” – для правої) від кута φ_0 , що визначає розташування середини ділянки контакту (рис.1), при відносній довжині тріщини $2l/R=0,4$, її віддалі від центра диска $r_0/R=0,3$ та коефіцієнта тертя $f=0,3$. Установлено також F_{10} – нормовані КІН мішаного типу – у напрямку

початкового поширення тріщини, де колові напруження мають максимальні значення (за σ_0 -критерієм). Зауважимо, що схему модельного навантаження та діапазон зміни параметрів f , r_0/R , $2l/R$ для обчислень вибрали, орієнтуючись на експлуатаційні параметри залізничного колеса в системі колесо-рейка.

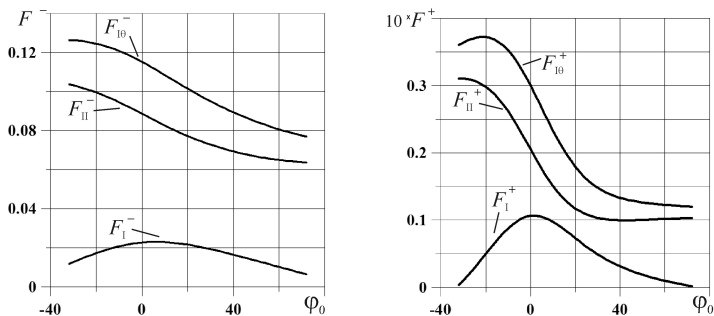


Рис. 2.

Отримані числові дані свідчать (рис.2), що КІН зростають із наближенням вершини тріщини до центру диска. Отже, для лівої вершини тріщини КІН більші, ніж для правої. Як бачимо F_{II}^{\pm} значно більші, ніж F_I^{\pm} . Максимальні F_I^- одержуємо для $\phi_0=6^\circ$, що характерно для вибраного навантаження (вплив зсувного напруження). Максимальні значення F_{10}^{\pm} отримаємо при $\phi_0 < 0$, зокрема F_{10}^- – при $\phi_0=-32^\circ$, а F_{10}^+ – при $\phi_0=-22^\circ$. КІН F_I^{\pm} є додатніми у великому діапазоні значень кута ϕ_0 , тобто тоді тріщина є розкритою і можливе її поширення за механізмом нормального розриву.

1. Инструкция по осмотру, освидетельствованию, ремонту и формированию вагонных колесных пар. ЦВ/3429. - М.: Транспорт, 1977. – С. 87.
2. Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. - Киев: Наук. думка, 1975. - 196 с.
3. Саврук М.П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів (за заг. ред. В.В. Панасюка). – 14. – Львів: СПОЛОМ, 2012. – 384 с.

DISC WITH INTERNAL RADIAL CRACK UNDER A TYPICAL MODEL CONTACT LOAD

An internal radial crack in disc under a typical contact load is considered. The stress intensity factors dependence on the load location is presented at the paper. The results show that the crack can grow by opening fracture mode.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН В ПРУЖНІЙ ПІВПЛОЩИНІ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ КОНТАКТНИХ ПАР КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Юрій Сачук, Олександр Максимук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки (Україна);

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

sachykyra@gmail.com

Визначення напруженого стану в середині півплощини при взаємодії жорстких штампів та пружних тіл для різних фізико-механічних параметрах є важливим науковим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів споруд. Цю проблему вирішують за відомого контактного тиску [3] та напружень в середині півплощини [2, 3], із подальшим використанням постулату теорії максимальних дотичних напружень Треска-Сен-Венана, який відображає той факт, що пластична текучість матеріалу є результатом плину (течіння) матеріалу в площинах дії максимальних дотичних напружень [3]. Згідно з [1] приймається, що перехід тіла з пружного стану в пластичний відбувається, якщо максимальне дотичне напруження досягає граничного значення для даного матеріалу:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{\sigma_T}{2} \quad (1)$$

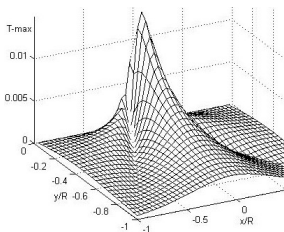


Рис. 1.

У роботі досліджено напружено-деформований стан півплощини при взаємодії її з жорсткими штампами різної форми (параболічної, циліндричної, еліптичної та гіперболічної) для різних конструкційних пар матеріалів. Для прикладу на рис. 1 наведено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E^*}$

для штампа циліндричної форми при $a/R = 0.1$. Бачимо, що максимальне значення $\max_{\text{max}} \bar{\tau} = 0.0139$ досягається в середині півплощини у точці

$$\left(\frac{x}{R} = 0; \frac{y}{R} = 0.08 \right).$$

Вважаючи, що матеріал після переходу в пластичний стан описується рівняннями ідеальної пластичності з константою межі текучості k , значення

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

$\tau = k$ визначає початок межі зони текучості, а лінії рівня для рис. 1 дозволяють встановити їх величину і місце знаходження.

Згідно з [2] маємо, $\bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*} = \frac{\sigma_T}{2E_*}$, де E_* – приведений модуль пружності.

Дослідження проведені для таких пар матеріалів: перша пара – титан (BT1-1)-алюмінієвий сплав (B96); друга пара – титан (BT1-1)-латунь (Л68).

На рис. 2 та рис. 3 зображено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max}$ визначено величину та пластичну зону при $k \approx 0,0075$ для першої пари та при $k \approx 0,0046$ для другої пари за однакової області контакту.

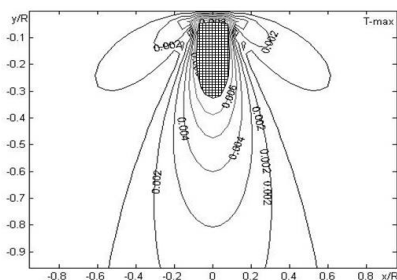


Рис. 2.

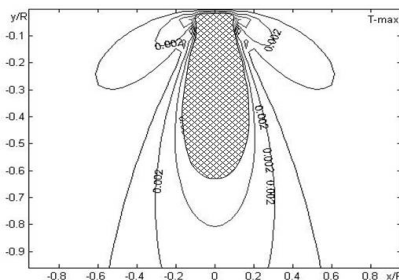


Рис. 3.

Бачимо, що для другої пари межа текучості є значно більшою.

Також наведено результати числових розрахунків меж зон текучості для різних форм штампів, для різних пар матеріалів, для різних зон контакту.

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Анализ напряжено-деформированного stanu у тілі під дією різних за формою жорстких штампів // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 162-167.

STRESS-DEFORMED STATE IN ELASTIC CIVIL EQUIPMENT WITH INTERACTION OF CONTACT PLATES OF CONSTRUCTION MATERIALS

The boundaries of the beginning of the zones of conductivity within the elastic half-plane on the basis of the theory of maximum tangential stresses for structural pairs of materials are investigated.

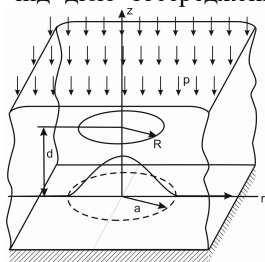
КРУГОВЕ РОЗШАРУВАННЯ МІЖ ПІВПРОСТОРОМ І ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ ЗА ДІЇ РОЗПОДІЛЕНИХ ПО КОЛУ СТОКІВ ТЕПЛА

Христина Середницька, Мар'яна Микитин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстрича НАН України*

labmtd@iapmm.lviv.ua

Під час взаємодії тіл з узгодженими поверхнями термічні чинники можуть зумовлювати локальне порушення їх контакту, яке істотно впливає на контактну міцність, герметичність і провідність спряжених тіл. Утворення міжконтактних зазорів, зумовлене локальною недосконалістю теплового контакту, вивчено у праці [1]. Досліджено термомеханічне розшарування тіл під дією зосереджених стоків тепла [2, 3]. Тут вивчено розшарування між пружним півпростором і жорсткою основою за дії колового стоку тепла.



Розглянемо контакт пружного теплопровідного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи під прикладеним на безмежності тиском p . В півпросторі на відстані d від поверхні контакту вздовж кола радіуса R діє стік тепла сталої інтенсивності ω . Вважаємо, що контакт тіл безфрикційний і односторонній. У праці [3] виявлено, що у разі відстані

d , меншої за певну критичну відстань $d_{cr} \approx 1,1R$, при збільшенні інтенсивності стоку тепла виникає кільцеве розшарування між тілами, коли ж $d > d_{cr}$ – може виникати кругове розшарування. Тут вивчено локальне розшарування по круглій області наперед невідомого радіуса a (рисунок) за припущення, що поверхня утвореного зазору теплоізолювана.

Замкнутий аналітичний розв'язок сформульованої задачі побудовано, використовуючи методику [3], що базується на інтегральному перетворенні Ганкеля, зведенні задачі до інтегрального рівняння Абеля та застосуванні формули його обернення. Зокрема, визначено форму зазору $u_z(r)$ і контактний тиск ззовні зазору $P_z(r)$:

$$u_z(r) = \int_r^a \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a, \quad (1)$$

$$P_z(r) = p - \omega \mu \frac{R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda(1-\nu)} F(r) + \frac{\mu}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^a \frac{t\varphi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \right), \quad r > a.$$

$$\text{Тут } \varphi(r) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\nu}{\mu} pr - \omega \frac{R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda} \int_0^r \frac{tF(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \right),$$

$$F(r) = \frac{2}{\sqrt{(r+R)^2 + d^2}} \left[K(m) + \frac{d^2}{(r-R)^2 + d^2} E(m) \right], \quad m = 4rR / \left((r+R)^2 + d^2 \right);$$

$K(m)$, $E(m)$ – повні еліптичні інтеграли I і II роду; ν , λ , α – коефіцієнти Пуассона, теплопровідності і теплового розширення, μ – модуль зсуву.

Радіус зазору визначено з умови плавного змикання його берегів.

На основі формул (1) проаналізовано залежності форми і радіуса зазору та контактного тиску від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Виявлено, що радіус зазору нелінійно залежить від інтенсивності стоку і зростає з її збільшенням. Контактний тиск при віддаленні від зазору спадає до значення прикладеного на безмежності тиску p , причому тим швидше, чим більша інтенсивність стоку тепла.

1. Криштафович А.А. Мартиняк Р.М. О расслоении анизотропных полупространств при наличии контактного термического сопротивления // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 2. – С. 54-58.
2. Мартиняк Р., Криштафович А., Мачишин І. Односторонній контакт тіл з узгодженими поверхнями за дії джерел і стоків тепла // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 55. – С. 169-173.
3. Монастирський Б.Є., Микитин М.М. Осесиметрична задача про відшарування пружного півпростору від жорсткої основи за дії точкового джерела охолодження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 2. – С. 84-93.
4. Микитин М.М. Середницька Х.І., Монастирський Б.Є., Мартиняк Р.М. Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 55-62.

THE CIRCULAR DELAMINATION BETWEEN HALF SPACE AND RIGID BASE UNDER THE ACTION OF THE HEAT SINKS DISTRIBUTED ALONG A CIRCLE

A contact problem for an elastic half-space and a rigid basis, taking into account the circular delamination under the action of heat sinks distributed uniformly along a circle is considered. Expressions for gap height and contact pressure are defined. The dependence of the radius of the gap on the intensity of the heat sinks is established. Numerical analysis of the change in the shape of the gap from the intensity of the heat sinks for different distances from the sinks to the half-space surface is carried out.

ПРО ДЕЯКЕ УТОЧНЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ТРІЩИНОЮ

Юрій Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

sybil.yuri@gmail.com

Нехай $\Omega = R^3 \setminus \bar{S}$, де S - диск одиничного радіуса в площині $x_1 O x_2$. $\bar{S} = S \cup \Gamma$, Γ - коло одиничного радіуса з центром в початку координат. Математичною моделлю стаціонарної задачі теплопровідності в області Ω з плоскою теплоактивною тріщиною (або тонким включенням) S є наступна задача (задача D). Потрібно знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$, яка задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, граничну умову Діріхле $\gamma_0^\pm u(x) = g(x)$, $x \in S$, $g \in H^{1/2}(S)$, та умову на нескінченності $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Оскільки природньо припустити, що теплові потоки в околі Γ є обмежені, то на функцію u накладемо додаткову умову:

$$|\nabla u(x)| < +\infty, \quad x \in B, \quad (1)$$

де B - довільна область така, що $\bar{S} \in B$.

Нехай $Q(x, y) = 1/4\pi|x - y|$. Як відомо [1], розв'язок задачі D існує і з необхідністю має вигляд $u(x) = \int_S Q(x, y)\tau(y)ds_y$, а сама задача D еквівалентна

інтегральному рівнянню першого роду

$$K\tau \equiv \int_S Q(x, y)\tau(y)ds_y = g(x). \quad (2)$$

Якщо функція g є достатньо гладка, то розв'язок τ рівняння (2) є теж відповідної гладкості, але може мати інтегровану особливість в околі Γ .

Справедливі наступні твердження [2].

Теорема 1. Умова (1) виконується тоді і лише тоді, коли $\tau(y) = 0$, $y \in \Gamma$.

Розглянемо частковий випадок задачі D з умовою (1), коли функція $g(x)$ є осесиметричною, тобто $g(x) = g(r)$ в циліндричній системі координат (r, z, ϕ) . При цьому вважаємо, що $g \in C^1[0, 1]$.

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

Теорема 2. Якщо $f \in C^1[0,1]$, то розв'язок осесиметричної задачі D з умовою (1) існує тоді і лише тоді, коли функція $g(r)$ має вигляд $g(r) = f(r) + c_g$, де $f \in C^1[0,1]$ – довільна функція, а константа c_g визначена наступним чином

$$c_g = -\int_0^1 (r^2 f'(r) + r f(r))(1-r^2)^{-1/2} dr.$$

Як приклад, зазначимо, що для функції $f(r) = r$ константа $c_g = -\frac{\pi}{2}$,

тобто $g(r) = r - \frac{\pi}{2}$. Для $f(r) = r^2$ маємо $c_g = -2$, а $g(r) = r^2 - 2$ і т.д.

Числовий експеримент стосовно наближеного розв'язування рівняння (2), виконаний з використанням методу колокації та кусково-постійної апроксимації невідомої густини $\tau(r)$, підтвердив принципову відмінність у поведінці в околі точки $r=1$ отриманих наближених розв'язків для різних класів правих частин $g(r)$ рівняння (2), зокрема асимптотичну поведінку $\tau(r)$ як $(1-r^2)^{-1/2}$ або $(1-r^2)^{1/2}$ в околі Γ .

Аналогічно розглянуто задачу з теплоізолюваною тріщиною (задача Неймана) та відповідні задачі у двовимірному випадку.

1. Сибіль Ю., Остудін Б., Романенко А. Розв'язність задачі Діріхле для рівняння Пуассона в просторі зі щілинами та еквівалентне інтегральне рівняння // Вісник ЛНУ, сер. Прикладна математика та інформатика. – 2003. – Випуск 6. – С. 90-97.
2. Сибіль Ю.М. Осесиметрична задача теплопровідності в необмеженій області з дископодібною тріщиною // Вісник ЛНУ, сер. Прикладна математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 148-154.

ON SOME SPECIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF STATIONARY HEAT PROBLEM IN DOMAIN WITH CRACK

We consider Dirichlet problem for Laplace equation in unbounded domain with disk. In order to take to attention special physical contents of the modelling process we pose some additional condition on searching solution in neighbourhood of the edge of disk. In case of axis symmetry we obtain necessary and sufficient conditions for existence of unique solutions of initial boundary value problem and corresponding integral equation.

РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА ДВОМА РАДІАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПОБЛИЗУ ЇХ ВЕРШИН

Микола Слободян, Мар'яна Цуркан

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

slobkolia@gmail.com; maryana.matulka@gmail.com

Досліджено задачу про двосторонній розтяг безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з круговим отвором радіуса R та двома радіальними прямолінійними тріщинами завдовжки $2l_j$ ($j=1,2$). Межа кругового отвору та береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження. Вважається, що під дією рівномірно розподіленого розтягувального навантаження на нескінченності P_1 і P_2 (див. рис. 1) біля вершин тріщин утворилися пластичні зони завдовжки $w_1^{(j)}$ і $w_2^{(j)}$ ($j=1,2$).

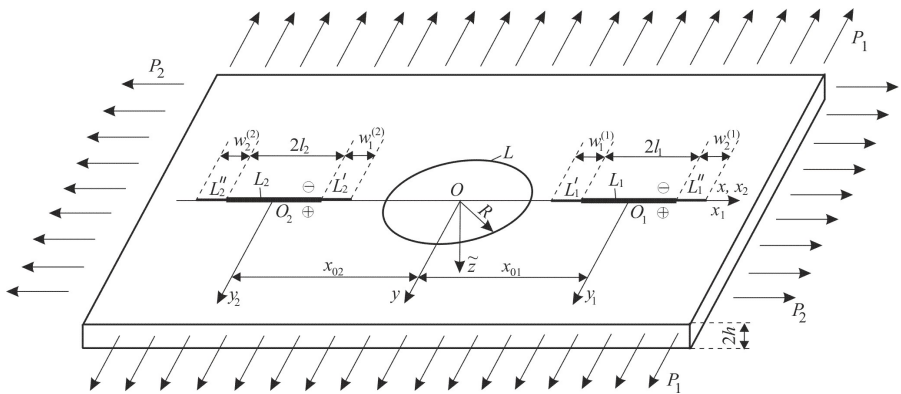


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення отвору і тріщин.

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ з початком у центрі кругового отвору, спрямувавши вісь Ox вздовж тріщини, а вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї, та полярну систему координат з центром у точці O та полярною віссю Ox , а в центрі тріщин виберемо декартову систему координат $O_jx_jy_j$ ($j=1,2$). Межу кругового отвору

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

позначимо через L , лінії, де розміщені тріщини, – L_1 і L_2 , пластичні зони – L'_1 , L''_1 , L'_2 , L''_2 , відстань між центром отвору та центрами тріщин – x_{0j} ; $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$, $\tilde{L}_2 = L_2 \cup L'_2 \cup L''_2$.

Розв'язок задачі будемо шукати за таких крайових умов:

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, t \in L;$$

$$\sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in \tilde{L}_j; \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in L_j;$$

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_{0j}^{(1)}, x_1 \in L'_j; \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_{0j}^{(2)}, x_1 \in L''_j, j = 1, 2,$$

де $\sigma_{x_1 y_1}$, $\sigma_{y_1 y_1}$, σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень відповідно у декартовій та полярній системах координат; $\sigma_{0j}^{(1)}$ і $\sigma_{0j}^{(2)}$ – невідомі нормальні напруження у пластичних зонах, для яких виконуються умови пластичності Мізеса [1].

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі розв'язок сформульованої задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано інтегральне рівняння на берегах тріщини та в пластичних зонах, а крайові умови на межі кругового отвору вдалося задовольнити аналітично. Проведено числовий аналіз довжин пластичних зон при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

1. Кушнір Р.М., Николішин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.

TENSION PLATE WITH A CIRCULAR HOLE AND TWO RADIAL CRACKS CONSIDERING PLASTIC ZONES NEAR THEIR VERTICES

In the paper was researched the problem of biaxial tension of the infinite isotropic plate with a circular hole and two radial cracks. The shores of the cracks are free of external load. The vectors of the applied to the plate evenly distributed tensile load are perpendicular and parallel to the cracks. When solving the problem, it was assumed that under the evenly distributed tensile load at infinity, rectilinear plastic zones were formed at the vertices of the cracks. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials Kolosov-Muskhelishvili constructed linear conjugation problems. The obtained linear conjugation problems are solved analytically and a system of singular integral equations with respect to jumps of displacements on the shores of the cracks and in plastic zones is obtained. This system of singular integral equations, using the method of mechanical quadrature's, is reduced to a system of algebraic equations, which is numerically solved by the Gaussian method. A numerical analysis of the problem was carried out and graphic dependences of the length of plastic zones were constructed under various geometric parameters of the problem and different values of the uniformly distributed stress expansion at infinity. In some cases, the obtained results coincided with the known results obtained in the scientific works by other authors.

ІНКРЕМЕНТАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКИХ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Георгій Сулим, Йосиф Піскозуб, Любов Піскозуб

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна);

Українська академія друкарства

sulym@franko.lviv.ua; piskozub@pancha.lviv.ua

Реальні матеріали переважно мають неідеальну будову, містять вади мікро та макроструктури у вигляді прошарків чужорідних середовищ, частинок вогнетривів, зон окисненого металу, тензодавачі, підкріплення, зварювальні та клейові з'єднання, заповнені деяким матеріалом тріщини, тощо. Спільним у всіх вищезгаданих задачах є наявність в загальному випадку тонкого об'єкту (прошарку, включення, тріщини, плівки, неідеальності виду проковзування, шорсткості тощо) у зоні контакту тіл, що взаємодіють [1-3]. Причому властивості цього об'єкту можуть бути вибрані у найширшому спектрі: від термоізолюваної порожнини (тріщини) до теплоактивного в'язкопружного чи в'язкопластичного прошарку, наділеного певними реологічними властивостями.

У цій публікації запропонована раніше [5-7] методика дослідження впливу фрикційного контакту (антиплоска задача) на деформування тіла з налягаючою тріщиною поширюється на випадок фізично нелінійного міжфазного тонкого включення. Описано загальний підхід до побудови моделей тонких дефектів довільної фізичної природи. Зокрема, пружно-пластичного включення, рідинного стисливого та нестисливого прошарку, в'язкопружного та в'язкопластичного включення. Здійснено порівняльний аналіз моделей. Побудовано модель тонкого включення з нелінійними та анізотропними механічними властивостями загального вигляду. З її використанням методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та методу функцій стрибка побудована ССІР із змінними коефіцієнтами-функціями, яка дає можливість описати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження (монотонний чи ні) та його вплив на НДС у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу [1, 4].

Складність побудови точних розв'язків таких задач проілюстрована на прикладі задачі поздовжнього зсуву біматеріалу з тонким нелінійним включенням на межі поділу матеріалів матриці. Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій із застосуванням методу функцій стрибка [24], і зведено до системи СІР із змінними коефіцієнтами.

Запропоновано збіжний ітераційний аналітико-числовий метод розв'язування такої системи для різних варіантів нелінійного деформування [1, 4, 8], зокрема закону Рамберга-Осгуда. Розвинуто інкрементальну методіку розрахунку напружено-деформованого стану тіла при багатокроковому (в т.ч. циклічному) навантажуванні. Здійснено числові розрахунки для різних значень параметрів нелінійності пружних характеристик матеріалу включення. Проаналізовано їх вплив на напружено-деформований стан матриці за навантаження зсувом на безмежності та збалансованою системою зосереджених сил.

1. Пискозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 24. – С. 74-85.
2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. – 716 с.
3. Сулим Г.Т., Пискозуб Й.З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. С. 110-125.
4. Сулим Г.Т., Пискозуб Й.З. Антиплоска деформація біматеріалу з фізично нелінійним міжфазним тонким включенням // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 319-327.
5. Сулим Г.Т., Пискозуб Й.З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – 53, № 5. – С. 24-30.
6. Sulym H., Piskozub J., Piskozub L., Pasternak Ya. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. I. Single loading // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – 9, No 2. – P. 115-121.
7. Sulym H., Piskozub J., Piskozub L., Pasternak Ya. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2015. – 54, No 2. – P. 529-539.
8. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // J. of the Mechanics and Physic of Solids. – 1968. – 16. – P. 1-12.

THE INCREMENTAL APPROACH FOR SOLVING DEFORMATION OF THIN INTERFACIAL PHYSICALLY NONLINEAR INCLUSION

The incremental approach for solving the anti-plane problem for the bimaterial with thin physically nonlinear inclusion located on the materials interface is discussed. The method is based on the analytically solution of the anti-plane problem for a semi-homogeneous matrix with the interface discontinuity, exposed to the quasi-statically load. The basis of proposed technique is the idea of consideration at every step of loading previous step stresses and displacements as the residual. Evolution of the plastic deformation zones in the inclusion is considered at different stages of loading. Stress intensity factors are calculated for the several loadings.

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА В ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПІДКРІПЛЕНИМ КОНТУРОМ КРУГОВОГО ОТВОРУ

Андрій Сяський, Наталія Шевцова, Олег Дейнека

Рівненський державний гуманітарний університет (Україна);

Національний університет водного господарства та природокористування (Україна)

AndriySyasky@gmail.com; Shevtsova_nv@ukr.net; Dejneka_7@ukr.net

Пропонується розв'язок задачі про підсилення контуру кругового отвору радіусом $\rho_0 = 1$ в нескінченній ортотропній пластинці пружним кільцем сталого прямокутного поперечного перерізу $2h_0 \times 2\eta$ за наявності симетричного міжфазного розрізу (тріщини), береги якого не контактують.

Підкріплена пластинка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, створеного зусиллями p і q , що діють в головних напрямках ортотропії. Спільна серединна площина пластинки і кільця віднесена до полярної системи відліку (ρ, λ) з полюсом в центрі отвору.

Моделюючи кільце замкненим пружним стрижнем, поверхня сполучення якого з пластинкою не співпадає з його серединною поверхнею, математичну модель задачі побудовано у вигляді

$$\left[c_1 T_\rho(\lambda) + \frac{c_2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(T_\rho(t) - S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) dt - \frac{c_3}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_\lambda^0 \right] = \\ = \frac{2E_x h}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{1-\eta}{\omega_0} (1-\eta) L_b(\lambda) \right]; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad (1)$$

$$\left[c_1 S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{c_3}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(T_\rho(t) - S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) dt + \frac{c_4}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V_0 \right] = \\ = \frac{2E_x h}{E_0 F_0} \int_{-\alpha_0}^{\lambda} \left[N(t) + \frac{1-\eta}{\omega_0} L_b(t) \right] dt; \quad f_1(\lambda) + i f_2(\lambda) = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} \left(T_\rho(t) + i S_{\rho\lambda}(t) \right) e^{it} dt;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[N(\lambda) + \frac{1-\eta}{\omega_0} L_b(\lambda) \right] d\lambda = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{(1-\eta)^2}{\omega_0} - 1 \right) \cos \lambda L_b(\lambda) - 2\mu(1+\nu) \sin \lambda Q(\lambda) \right] d\lambda = 0;$$

$$N(\lambda) = -N_0 \cos \lambda + f_1(\lambda) \cos \lambda + f_2(\lambda) \sin \lambda;$$

$$Q(\lambda) = -N_0 \sin \lambda + f_1(\lambda) \sin \lambda - f_2(\lambda) \cos \lambda;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 - (1-\eta)(N(\lambda) - N_0) - \int_{-\alpha_0}^{\lambda} S_{\rho\lambda}(t) dt; \quad \lambda \in [-\pi; \pi],$$

де T_p , $S_{\rho\lambda}$ – контактні зусилля на межі сполучення пластинки і кільця; N , Q , L_b – поздовжня і поперечна сили та згинальний момент, що діють в перерізах кільця і віднесені до його осі. Решта позначень наведені в [1, 2].

Співвідношення (1) визначають повну систему рівнянь для визначення функцій T_p , $S_{\rho\lambda}$, f_1 , f_2 та початкових параметрів N_0 , L_b^0 в статично невизначеному кільці при $\lambda = -\pi$.

У процесі розв'язання задачі встановлено, що функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ обмежені та неперервні на проміжку $[-\alpha_0; \alpha_0]$, а на його кінцях дорівнюють нулю. Контактні зусилля на кінцях проміжку мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція.

Наближений розв'язок побудовано методом механічних квадратур і колокації [2].

1. Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24-30.
2. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Контактна взаємодія розімкнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 17-24.

THE INTERFACIAL CRACK IN THE ORTHOTROPIC PLATE WITH REINFORCED CONTOUR OF CIRCULAR HOLE

The mathematical model of the problem of strengthening of the contour of circular hole in an infinite orthotropic plate with a thin elastic ring of constant cross-section in the presence of an interfacial section is constructed. The effect of orthotropy of the plate material and the type of external loading of the stress state of the plate and the ring was investigated by the method of mechanical quadrature and collocation.

ДИНАМІЧНА ВЕРТИКАЛЬНА РЕАКЦІЯ ПОРИСТОПРУЖНОГО НАСИЧЕНОГО РІДИНОЮ ШАРУ З НЕПРОНИКНОЮ ТИЛЬНОЮ ГРАННЮ ПІД НЕПРОНИКНИМ ШТАМПМ

Олександр Трофимчук, Олександр Гомілко, Олег Савицький

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

itelua@kv.ukrtel.net; osavitsky@ukr.net

Розповсюдженням елементом конструкцій (фундаменти, укоси водосховищ, цементобетонні автодороги та ін.) є плити на ґрунтовій основі. При сейсмічних та техногенних динамічних діях на систему плита-ґрунт необхідно оцінювати амплітудно-частотні характеристики для зміщень і реакцій, контактні тиски для оцінки міцності системи плита-основа, враховуючи жорсткість та загасання у вигляді комплексних модулів (імпеданс, передаточні функції) для заданих розмірів та фізико-механічних властивостей елементів системи, розподілу навантажень та контактних умов. Для будівельних споруд в режимі нормальної експлуатації такі модулі визначаються згідно з нормативною методикою для динамічної пружної моделі ґрунтового середовища без врахування частоти впливу. Вертикальні коливання даної системи при коливаннях на водонасиченій основі можуть суттєво змінюватись з частотою внаслідок зміни порового тиску на підшову плити та взаємодії твердої та рідинної фаз у ґрунтовому матеріалі, а для шаруватої основи – внаслідок ускладнення хвильових процесів. Оцінка динамічної поведінки такої системи можлива на основі розв'язку динамічних контактних задач для штампа на шаруватій пористопружній насиченій рідиною основі (модель М. Біо). Результати та аналіз попередніх досліджень представлено в монографіях [1-3]. Параметри даної моделі двофазного середовища враховують щільність матеріалів фаз, пружні характеристики фаз та середовища, осереднену пористість твердого скелету, в'язкість порової рідини, фільтраційні характеристики середовища, форму пор. Особливими фізичними явищами є розповсюдження двох поздовжніх хвиль, загасання коливань від різниці швидкостей пористої пружної твердої та в'язкої рідинної фаз, а також інерційної взаємодії фаз. Застосування рівнянь М. Біо для аналізу хвильових процесів у ґрунтовому середовищі з помірною інтенсивністю фільтрації в'язкої рідини в системі взаємопов'язаних пор пружного пористого скелету представлено в роботі [3]. Контактні задачі розглядаються в [1-3] стосовно вимушених гармонічних коливань штампів з плоскою проникною та непроникною для порової рідини підшовою на насиченій рідиною ґрунтовій основі. Інтегральними перетвореннями з диференційних рівнянь моделі М. Біо

та контактних умов отримано інтегральні рівняння, для розв'язку яких використовується метод ортогональних поліномів. Для штампа з непроникною підшвою розглянуто закономірності розподілу контактних тисків як від твердого скелету, так і від порової рідини. Теоретичний аналіз ядер інтегральних рівнянь у [3] показав, що перше (логарифмічне ядро) відповідає розподілу ефективних контактних напружень з кореневою особливістю по краях, а друге особливостей не має. Представлення невідомих ефективних напружень та порового тиску при вертикальних коливаннях штампа у вигляді нескінченних рядів підібрано у інтегрально-диференційній формі на основі спектральних співвідношень для ортогональних поліномів Чебишова. Отримано нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (коефіцієнти систем - інтеграли від складних функцій) для визначення методом редукції коефіцієнтів рядів для визначення тисків, реакцій фаз та переміщень штампів.

На основі числових розрахунків реакції основи при вимушених гармонічних коливаннях з одиничною амплітудою переміщень безмасових штампів (імпедансу) проводиться аналіз впливу основних характеристик моделі основи, розміру підшви. Результати для півпростору свідчать про значну (до зміни знаку) дійсної частини імпедансу (жорсткості) в певному діапазоні частот сейсмічного діапазону внаслідок врахування порового тиску, а для шаруватої основи - демонструють складну залежність жорсткості та загасання від частоти коливань.

1. Гомилко А.М., Савицький О.А., Трофимчук А.Н. Методи суперпозиції, собственных функций и ортогональных многочленов в граничных задачах теории упругости и акустики. – К. : Наук. думка, 2016. – 416 с. <http://itgip.org/wp-content/uploads/2013/11/GST-2016+a5-19-01-2017end-titul.pdf>
2. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицький О.А. Колебания и волны в слоистых средах. – К. : Наук. думка, 1990. – 224 с.
3. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицький О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К. : Наук. думка, 2003. – 230 с.

DYNAMIC VERTICAL REACTION OF A POROUS-ELASTIC FLUID-SATURATED LAYER WITH AN IMPENETRABLE REAR FACE UNDER AN IMPENETRABLE STAMP

An estimation of the dynamic behaviour of a rigid plate on soil base on the basis of the solution of dynamic contact problems for an impermeable stamp on a layered porous-elastic fluid-saturated base (Biot's model) is considered. The mixed boundary value problems for Biot's differential equations are reduced to a system of integral equations. Method of orthogonal polynomials for numerical solution applied. Influencing of the base mechanical parameters and design scheme geometry values on impedance frequency function is studied.

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ЕЛІПТИЧНИХ ОТВОРІВ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ДО ДВОБІЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ВИРІЗУ

Андрій Чоренький

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України (Україна)

a.b.chornenkyi@gmail.com

Розглянемо періодичну систему еліптичних отворів у пружній квазіортотропній площині [1–3], що розтягується на нескінченності напруженнями $\sigma_y^\infty = p$ в напрямі, перпендикулярному до лінії центрів отворів, контури яких вільні від навантаження. Півосі еліпса позначено через l і b . Координатні осі Ox і Oy декартової системи координат Oxy вибрано вздовж головних осей ортотропії. Введемо безрозмірний параметр $\tilde{\gamma} = 2l/d$, який визначає відношення більшої осі еліпса до ширини смуги періодів d . Тоді відносну віддаль між отворами характеризує параметр $(1 - \tilde{\gamma}) = 2a/d$, де a – віддаль між вершинами сусідніх контурів (рис. 1).

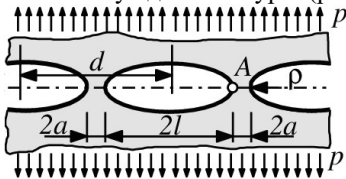


Рис.1. Періодична система еліптичних отворів у квазіортотропній площині.

Радіус кривини у вершині A отвору позначимо через ρ . Відношення радіуса кривини до віддалі між контурами визначає параметр

$$\chi = \rho/a = \varepsilon \tilde{\gamma} / (1 - \tilde{\gamma}),$$

де $\varepsilon = \rho/\ell$ – відносний радіус кривини у вершині отвору.

Числові результати для коефіцієнта концентрації напружень (ККН) отримано методом сингулярних інтегральних рівнянь [1] для геометричних параметрів $0,001 \leq \chi \leq 1$ і $0,001 \leq 2a/d < 1$ за різних значень параметра ортотропії γ (для плоского напруженого стану $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$, E_x , E_y – модулі пружності вздовж осей Ox і Oy). На рис. 2 наведено залежність функції $(1 - \tilde{\gamma})\sigma_A/p$ від відносної віддалі між отворами $2a/d$ лише для значення параметра $\chi = 0,1$. Тут σ_A – нормальні напруження у вершинах еліптичних отворів.

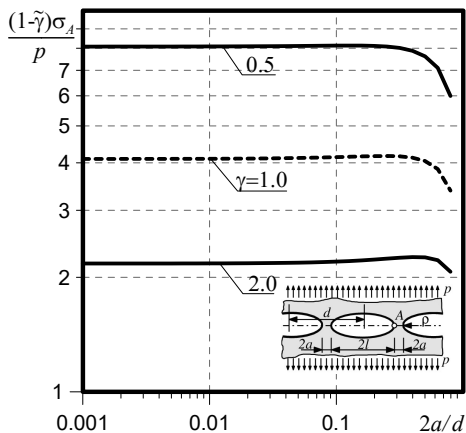


Рис. 2. Залежність функції $(1-\tilde{\gamma})\sigma_A/p$ у вершинах еліптичних отворів у розтягненій пружній площині від параметра $2a/d$, коли параметр $\chi = 0,1$.

квазіортотропній площині [1]:

$$k_t = \frac{\sigma_n}{P/2a} = \lim_{\tilde{\gamma} \rightarrow 1} (1-\tilde{\gamma}) \frac{\sigma_A}{p},$$

де σ_n – нормальне напруження у вершині вирізу.

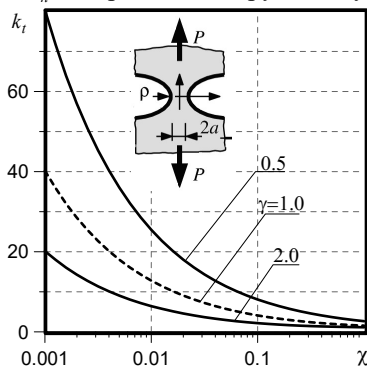


Рис. 3. Залежність ККН k_t у вершині двобічного параболічного вирізу від параметра χ .

Отримавши ККН для періодичної системи еліптичних отворів у пружній площині, що розтягується на нескінченності напруженнями p , для малих відносних радіусів закруглення вершин ($\varepsilon \rightarrow 0$) та малих відносних віддалей між сусідніми отворами ($\tilde{\gamma} \rightarrow 1$) можна зробити граничний перехід від періодичної системи отворів до схеми двобічного симетричного параболічного вирізу в площині, яка на нескінченності розтягується силами $P = pd$ (d – ширина смуги періодів). Таким шляхом знайдено ККН у вершинах двобічного параболічного вирізу в

коли напрям розтягу квазіортотропної площини збігається з напрямом осі більшого ($\gamma < 1$) / меншого ($\gamma > 1$) модуля пружності, ККН k_t у вершині параболічного вирізу більший/менший, ніж в ізотропному випадку ($\gamma = 1$) (рис. 3). Подібним чином можна отримати ККН у закруглених вершинах двобічних U- та V-подібних вирізів у квазіортотропній площині.

1. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.

2. *Kazberuk A., Savruk M.P., Chornenkyi A.B.* Stress concentration around an elliptic hole or a parabolic notch in quasi-orthotropic plane // *Materials Science.* – 2016. – **52**, – P. 295-304.
3. *Kazberuk A., Savruk M.P., Chornenkyi A.B.* Stress distribution at sharp and rounded V-notches in quasi-orthotropic plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **85**. – P. 134-143.

**PERIODIC SYSTEM OF ELLIPTICAL HOLES IN QUASI-ORTHOTROPIC PLANE AND
LIMIT PASSAGE TO THE BILATERAL PARABOLIC NOTCH**

Given paper presents solution to elasticity theory problem for quasi-orthotropic plane weakened by a periodic row of elliptical holes. The limit transition from periodic system of holes to bilateral symmetrical parabolic notch in a quasi-orthotropic plane under tension at infinity is performed.

A UNIFIED APPROACH TO DETERMINATION OF STRESS CONCENTRATION NEAR SHARP AND ROUNDED NOTCHES IN QUASI-ORTHOTROPIC PLANE

Andrzej Kazberuk, Mykhaylo Savruk, Andrii Chornenkyi

*Faculty of Mechanical Engineering, Bialystok University of Technology (Poland);
Karpenko Physico-Mechanical Institute, Ukrainian National Academy of Sciences*

a.kazberuk@pb.edu.pl; savruk@ipm.lviv.ua; a.b.chornenkyi@gmail.com

Degenerate orthotropic material in which the shear modulus expressed by other characteristics so that the characteristic equation has multiple roots is called quasi-orthotropic [1-4]. A unified approach to the estimation of stress concentration at the sharp and rounded notches consists in determining stress distribution near sharp tip on the basis of a numerical solution for rounded stress concentrator using limit transition when the radius of curvature approaches zero. In isotropic case, this approach has been widely used [1]. Its generalization on the plane problems of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic region is illustrated by determination of the stress intensity factor at the vertices of the rhombic hole in a quasi-orthotropic plane.

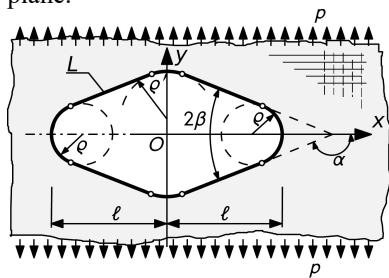


Fig. 1. Rhombic hole with rounded vertices in quasi-orthotropic plane.

Let us consider an elastic quasi-orthotropic plane weakened by the rhombic hole with rounded vertices. Coordinate axes Ox and Oy are selected along principal axes of material's orthotropy. Suppose that hole edge (the smooth contour L) is free of applied stresses. Tensile stresses $\sigma_y^\infty = p$ are given at infinity. Rounding radii of tips in rhombic hole by circular arcs are designated as ρ i ρ' , and projection of the hole onto axis Ox is designated $2l$ (fig. 1).

Stress concentration factors in rounded vertexes of rhombic hole in quasi-orthotropic plane are computed using singular integral equation method [1] for different values of orthotropy parameter γ (for plane stress state $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$, E_x, E_y – modules of elasticity along the axes Ox and Oy). Stress intensity factors

in the sharp vertexes of the hole are obtained using a limit transition at rhombic tip rounding radius approaching zero $\rho \rightarrow 0$ [1]:

$$\tilde{K}_I^V = \frac{1}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2\pi\rho)^{\lambda_1} \sigma_s(0)].$$

Here σ_s is a normal stress in rounded vertex of rhombic hole, R_I is a stress rounding factor, λ_1 is stress singularity exponents at sharp vertex of the hole [1]:

$$\lambda_1 = 1,247 \cos \beta_1(\alpha) - 1,312 \cos^2 \beta_1(\alpha) + 0,8532 \cos^3 \beta_1(\alpha) - 0,2882 \cos^4 \beta_1(\alpha),$$

where $\beta_1(\alpha) = \pi + \arctg(\gamma \tg \alpha)$, $\alpha = \pi - \beta$.

Dimensionless stress intensity factor in the vertexes of rhombic hole on axis Ox $\tilde{F}_I^V = \tilde{K}_I^V / (p(\pi l)^{\lambda_1})$ with respect to the angle 2β for different values of orthotropy parameter γ is given on fig. 2. For an isotropic material ($\gamma = 1$) obtained results well agree with known [1].

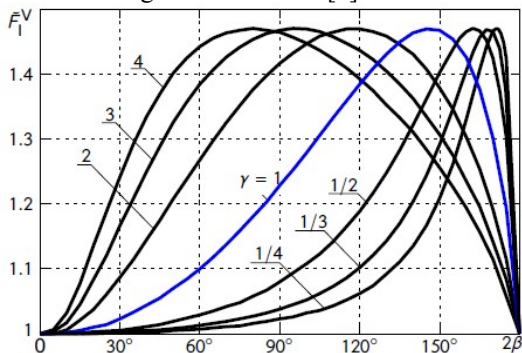


Fig. 2. Dimensionless stress intensity factor \tilde{F}_I^V in the tip of rhombic hole with respect to the hole tip angle 2β .

A unified approach to determination of stress concentration near sharp and rounded notches in quasi-orthotropic plane is illustrated on the example of a rhombic hole. Numerical values of a stress intensity factors in sharp vertexes of rhombic hole in stretched quasi-orthotropic plane are received.

1. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
2. *Hasebe N., Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – 50. – P. 209-2016.
3. *Kazberuk A., Savruk M.P., Chornenkyi A.B.* Stress distribution at sharp and rounded V-notches in quasi-orthotropic plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **85**. – P. 134-143.
4. *Savruk M.P., Kazberuk A., Chornenkyi A.B.* Integral equations of plane elasticity problem for a multiply connected quasi-orthotropic body // *Materials Science.* – 2016. – **52**, № 4. – P. 472-484

**MODE-III DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTOR
OF PENNY-SHAPED CRACK IN A COATED ELASTIC HALF-SPACE**

**Viktor Mykhas'kiv, Volodymyr Stankevych,
Julius Kaplunov, Danila Prikazchikov**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;

Ivan Franko National University of Lviv (Ukraine);

School of Computing and Mathematics, Keele University (United Kingdom)

mykhaskiv@gmail.com; tex@iapmm.lviv.ua;
j.kaplunov@keele.ac.uk; d.prikazchikov@keele.ac.uk

Thin-film/coating technologies are widely used in a number of engineering applications in order to achieve strengthening effects. An important mathematical problem arises from consideration of sub-interface cracks as objects of stress intensification for a coated structure, especially for time-harmonic loading conditions. Then, the interaction between the coating and the crack is influenced not only by the material properties of the substrate, but also by the frequency.

Let us consider a three-dimensional elastic half-space, coated by an elastic layer of thickness h , in ideal contact with the half-space, with the upper surface of the layer being traction-free. A penny-shaped crack S of radius a is embedded in a half-space and located parallelly to its surface S_0 at the distance d from the plane $x_3 = 0$. For simplicity, we restrict ourselves to analysis of twisting time-harmonic loading of the crack faces. Then, the boundary conditions related to the tangential stresses in the crack domain S are written as

$$\sigma_{j3}(\mathbf{x}) = (-1)^{j+1} x_{3-j} N_0 / a, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1)$$

where N_0 is a given constant amplitude of the loading.

Effective boundary conditions, modelling the presence of the coating, relating the stress and displacement components, are imposed on the surface S_0 of the half-space. These conditions are justified asymptotically in the long-wave limit. After neglecting the dilatation terms, we have (see [1]):

$$\sigma_{3j}(\mathbf{x}) = -h\mu_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_{20}^2 \right) u_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2)$$

Here and hereafter μ_0 and μ , k_{20} and k_2 are the shear moduli and the transverse elastic wavenumbers of coating layer and half-space, respectively.

As a result of identical satisfaction of boundary conditions (2), the initial frequency-domain problem is reduced to the following boundary integral equations related to the tangential displacement jumps Δu_j ($j = 1, 2$) across the crack faces:

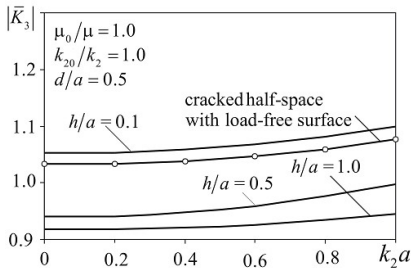
$$\iint_S \Delta u_j(\mathbf{y}) [L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y = \frac{(-1)^{j+1} x_{3-j} N_0}{\mu a}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

where the kernel L is the same as for a crack in an infinite elastic solid [2], with the Green's function G , describing the crack-coating interaction, written as:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^\infty \tau R(\tau) \frac{h\mu_0(\tau^2 - k_{20}^2) + \mu R(\tau)}{h\mu_0(\tau^2 - k_{20}^2) - \mu R(\tau)} \exp[-2dR(\tau)] J_0(\tau|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\tau, \quad (4)$$

where $R(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_2^2}$, and $J_0(r)$ is the Bessel function of order zero.

After applying proper regularization schemes [2, 3], integral equations (3) are solved numerically by their collocating at nodal points of boundary element mesh introduced in the crack domain S . Then mode-III dynamic stress intensity factor K_3 is obtained from the well-known relation [3].



Under idealized situation with $\mu_0 = \mu$, $k_{20} = k_2$, the coating layer of small thickness plays the role of amplification object for the crack. Opposite shielding effect takes place for the coating of relatively large thickness (see Figure). A more delicate frequency effect could emerge if dynamic crack opening causes surface waves in the structure [1].

1. Kaplunov J., Prikazhnikov D.A. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // Advances in Applied Mechanics. – 2017. – **50**. – P. 1-109.
2. Mykhas'kiv V., Zhabdynskiy I., Zhang Ch. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2010. – **26**, No. 12. – P. 1934-1946.
3. Stankevych V.Z. Stress intensity near a crack in the composition of a half space and a layer under harmonic loading // Materials Science. – 2008. – **44**, No. 2. – P. 175-182.

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ДЛЯ КРУГОВОЇ ТРІЩИНИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ З ПОКРИТТЯМ

Методом граничних інтегральних рівнянь у поєднанні з методом функцій Гріна досліджено вплив покриття пружного півпростору на напруження в околі підповерхневої кругової тріщини за крутих гармонічних навантажень.

**A CONDUCTIVE CRACK AND AN ELECTRODE AT
THE INTERFACE OF A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL**

Oleg Onopriienko, V. Loboda, Y. Lapusta

Dnipropetrovsk National University (Ukraine);

*Université Clermont Auvergne, SIGMA Clermont (ex- IFMA, French Institute of Advanced
Mechanics), Institut Pascal, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand, France*

loboda@dnu.dp.ua

Consider an electrically conductive crack $c \leq x_1 \leq a$ at the interface $x_2 = 0$ of two semi-infinite spaces. The remaining bonded part of the interface includes electroded zone $a < x_1 < b$ and electrode free $x_1 \notin (c, b)$ parts of the interface. The considered bimaterial compound is loaded at infinity by out of plane mechanical load and electric field parallel to the crack faces. Such situation can take place e.g. for thin film electrode $c < x_1 < b$, situated at the interface $x_2 = 0$, which delaminates at the interval $c \leq x_1 \leq a$ ($a < b$) and remains intact at $a < x_1 < b$. The last interval we'll call "contact" zone because the electrode's faces do not shift here with respect to each other.

Because the electrode is very thin we assume that it is mechanically "soft", i.e. it does not influence the mechanical characteristic of the materials. Then the boundary conditions at the interface are of the form

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)} = 0 \quad \text{for } c < x_1 < a, \\ E_1^{(1)} = E_1^{(2)} = 0, \quad \langle \varepsilon_{31} \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad \text{for } a < x_1 < b, \\ \langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_{31} \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0 \quad \text{for } x_1 \notin (c, b), \end{aligned}$$

where the upper indexes (1) and (2) are related to the upper and lower semi-infinite spaces, respectively. We also assume that a vector $\mathbf{P}^\infty = [\sigma_{23}^\infty, E_1^\infty]^T$ is prescribed at infinity.

With the use of the presentations of electromechanical quantities [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = t_1 [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)], \\ \langle D_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u_3'(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) \end{aligned}$$

Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями

via sectionally-analytic function $F_1(z)$ the following combined Dirichlet-Riemann boundary value problem

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \text{ for } c < x_1 < a, \text{ Im } F_1^\pm(x_1) = 0 \text{ for } a < x_1 < b.$$

is formulated. The conditions at infinity have the following form

$$F_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_{23} - i\tilde{E}_1.$$

The solution of the formulated problem is written in an analytic form for any position of the point “ a ” separating the delaminated parts of the electrode and the “contact” zone fitted to its intact parts. Analytical expressions for stress, electric field and their intensity factors as well as for the crack faces displacement jump are given in a closed form and are illustrated in graph form. The stress and electric field intensity factors are presented in figures and in the tables. The dependence of stress and electrical intensity factors on the magnitude of the electric field at infinity is also shown for certain values of external mechanical loading and intact electrode zone length. In particular, the values of the applied electric field inducing zero mechanical or electric intensity factors are distinguished.

Acknowledgements

This work has been carried out within the framework of the Transversal Program of the Pascal Institute (UMR CNRS 6602), Division "Materials and Multiscale Modeling", of the Excellence Laboratory LabEx IMobS3 (ANR-10-LABX-16-01) (supported by the French program investissement d'avenir and managed by the National Research Agency (ANR), the European Commission (Auvergne FEDER funds) and the Region Auvergne), and, also, of the project CAP 20-25, Axis 2, Theme Usine du Futur, which is gratefully acknowledged.

1. *Lapusta Y., Onopriienko O., Loboda V.* An interface crack with partially electrically conductive crack faces under antiplane mechanical and in-plane electric loadings // *Mech. Res. Commun.* – 2017. – **81**. – P. 38-43.

ДИНАМІКА НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

УДК 539.3

АНАЛІЗ ДЕФОРМУВАННЯ АУКСЕТИЧНОГО ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ В МЕЖАХ АНІЗОТРОПНОЇ МОДЕЛІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Дмитро Бобилєв

*Державний вищий навчальний заклад
«Криворізький державний педагогічний університет» (Україна)*

dmytrobobyliiev@gmail.com

Ауксетики (від грец. Αύξητικός) – матеріали, що мають від’ємні значення коефіцієнта Пуассона. Термін введений професором Кеном Евансом (Ken Evans) з Ексетерського університету [3].

При розтягуванні матеріали-ауксетики стають товстішими в напрямку, перпендикулярному прикладеній силі. Це відбувається через шарнірно-подібну структуру ауксетика, яка деформується при розтягуванні. Така властивість може обумовлюватися властивостями окремих молекул або визначатися структурними особливостями матеріалу на макроскопічному рівні. Від матеріалів цього типу очікують хороші механічні властивості, такі як значне поглинання механічної енергії і високий опір руйнуванню.

Вченим відомі матеріали з подібними властивостями вже близько 100 років, але в даний час їм приділяють підвищену увагу. Один з перших синтетичних ауксетиків був описаний в 1987 році в статті під назвою «Foam structures with a Negative Poisson’s Ratio» («Пінні структури з від’ємним коефіцієнтом Пуассона») [5]. Композити з від’ємним коефіцієнтом Пуассона були передбачені ще в 1985 році [1, 4]. В роботі [2] отримано зв’язок пружних властивостей ряду ауксетиків з характеристиками їх мікроструктури.

В даній роботі досліджена аномалія пружності, властива ауксетичним пористим матеріалам з увігнутою формою осередків, при якій коефіцієнт Пуассона приймає від’ємні значення. З метою аналізу деформування ауксетиків виділена структурна одиниця, що моделюється пружними стрижнями. Для оцінки коефіцієнта Пуассона розрахунок параметрів одноосного розтягу виконувався на підставі розрахунку поперечних і поздовжніх переміщень прямокутного фрагмента пористого матеріалу методом скінченних елементів. Досліджено залежність коефіцієнта Пуассона від напрямку навантаження і параметрів стержнів, як армуючої фази. Встановлено,

що модель демонструє від'ємний коефіцієнт Пуассона в певних напрямках, тобто є анізотропною.

Дискретизація структури проводилася за допомогою стрижневих скінченних елементів. При розтягуванні моделі в горизонтальному напрямку нижня грань закріплювалася шарнірно для забезпечення нульових вертикальних зсувів. Для реалізації кінематичного навантаження всіх точок правої бічної грані задавалися однакові горизонтальні переміщення u , а точкам лівої грані – аналогічні переміщення в протилежному напрямку, рівні $-u$.

1. *Almgren R.F.* An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio $=-1$ // *J. Elasticity.* – 1985. – № 15. – P. 427-430.
2. *Berinskii I.E.* Elastic networks to model auxetic properties of cellular materials // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2016. – № 115-116. – P. 481-488.
3. *Evans K.E.* Auxetic polymers: a new range of materials // *Endeavour. New series.* – 1991. – **15**, № 4. – P. 170-74.
4. *Колпаков А.Г.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов // *Прикладная математика и механика* – 1985. – № 6. – С. 969-977.
5. *Lakes R.S.* Foam structures with a negative Poisson's ratio // *Science.* – 1987. – **235**, № 4792. – P. 1038-1040.

ANALYSIS OF DEFORMATION OF AUXETIC POROUS MATERIAL IN THE AREAS OF ANISOTROPIC MODEL BY FINAL ELEMENTS METHOD

In work, an anomaly of elasticity characterized by auxetic porous materials with a concave form of cells, in which the Poisson's ratio takes negative values, is investigated. In order to analyze the deformation of auxetics, a structural unit is selected, which is modeled by elastic rods. To estimate Poisson's ratio, the calculation of uniaxial tensile parameters was performed on the basis of the calculation of transverse and longitudinal displacements of the rectangular fragment of the porous material by the finite element method. The dependence of the Poisson's ratio on the direction of loading and the parameters of the rods as the reinforcing phase is investigated. It is established that the model demonstrates a negative Poisson's ratio in certain directions, that is, it is anisotropic.

ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Євген Блін

blinyevgeniy53@gmail.com

«Ньютон замислився над питанням, чому яблуко падає до низу?

Краще б він задумався, чому яблуна росте вгору?»

В. Шаубергер – дослідник, який будував літаючу тарілку для Гітлера.

Ця стаття є анотацією (коротким викладенням) роботи, яка розкриває головну невирішену проблему сучасної науки – фізичний процес утворення гравітації. Основна робота має об'єм 22000 КБ і містить в собі 87 графічних зображень і фотографій, які пояснюють сутність фізичного процесу і доводять справедливність розробленої теорії.

Сучасна фізика не розглядає фізичний процес народження гравітації, начебто вона з'являється сама собою у «чарівний» спосіб. Цей процес є утаємниченим в силу філософської зацикленості суспільства на догмах навіяних атеїзмом. Під його впливом в науці сформувався матеріалістичний спосіб мислення, в якому матерії приписуються властивості, якими вона не володіє – енергією володіє не матерія, а простір (фізичний вакуум) між елементарними частками матерії. Сутність гравітації є настільки простою, що зрозуміти її здатна кожна людина. На побутовому рівні гравітація це – дуже просто; для цього достатньо просто дихати. В процесі вдиху працює фізичний процес гравітаційного тяжіння. А видих відбувається в процесі гравітаційного відштовхування. Не може бути видиху, доки не відбувся вдих. Так само в техніці. Проте матеріалістична аеродинаміка стверджує: (цитата із вступу до теорії створення піднімальної сили): *«...малые возмущения (жидкости авт.), раз возникнув, должны затухать со временем. Если же напротив, неизбежно возникающие в потоке жидкости сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, то движение неустойчиво и фактически существовать не может»* [1]. Згідно цитати в природі не може існувати прискорене пересування повітря. Це твердження спростовують побутовий пілосос та авіаційний двигун. Під час їх роботи у повітряному середовищі утворюються два протилежних за своєю фізичною сутністю потоки. Перед двигуном під силою гравітаційного тяжіння утворюється прискорений всмоктуваний потік повітря. За двигуном під силою гравітаційного відштовхування утворюється сповільнений (згасаючий) вихідний від двигуна потік. Обидва потоки рівноправно існують, проте теоретики фізики винесли вирок саме прискореному потоку. Згасаючий потік може існу-

вати, а наростаючі явища (тобто прискорені) існувати не можуть. За цією цитацією розпочинається вища математика, але всі математичні формули теорії створення піднімальної сили не розповсюджуються на прискорений потік повітря перед двигуном. Дослідження процесів, які відбуваються при всмоктуванні здатне призвести до отримання результатів, які відкривають нові можливості для розвитку науки і техніки.

Проведений автором експеримент по створенню статичної піднімальної сили (сила, яка забезпечує вертикальний зліт) за рахунок використання енергії всмоктуваного потоку призвів до збільшення ККД використання двигуна на 22,4 %. Експеримент під водою забезпечив збільшення швидкості пересування підводного апарату на 11%. В основі експериментів був покладений постулат, що в процесі всмоктування енергією володіють не молекули матерії, а фізичний вакуум між ними. Тож головна мета роботи була спрямована на доведення того, що енергетичним джерелом сили гравітаційного тяжіння є фізичний вакуум між елементарними частками матерії, а не сама матерія.

Процес створення гравітаційної взаємодії аналогічний процесам, які розглядає термодинаміка, коли відбувається ущільнення або розрідження повітря. Так само слід говорити про енергетичне ущільнення, або розрідження фізичного вакууму – матерія лише реалізує фізичні властивості фізичного вакууму. В ході прискореного руху твердого тіла (будь якого розміру) скрізь фізичний вакуум на лобовій і тильній його половиних відбуваються два процеси:

1. На лобових поверхнях елементарних часток може з'явитися сила гравітаційного відштовхування. Сучасні технології в основному використовують саме цей вид енергії. Він народжує тепло, світло і інші види випромінювання. Технології цього типу народжують електричне поле. В авіації ця сила виникає на лобовій і нижній поверхнях крила.

2. Сила гравітаційного тяжіння виникає на тильній поверхні тіла. Фізичні процеси цього типу призводять до охолодження простору і породжують поля магнітного типу. Цей процес відбувається в холодильнику. В авіації сила гравітаційного тяжіння виникає над верхньою тильною частиною крила.

Народження гравітації відбувається на рівні ядерної фізики. В основу теорії покладена авторська гіпотеза про те, що нейтронний кварк є елементарною часткою матерії, яка володіє зворотною п'єзоелектричною властивістю. Під дією електрону, який обертається навколо ядра, нейтронний кварк пульсує і породжує вібрацію елементарних часток в атомному ядрі. Вібрація, в свою чергу, викликає обурення фізичного вакууму навколо ядра і призводить до утворення гравітаційних променів. Але гравітація виникає не лише на рівні елементарних часток. Пересування твердого тіла будь якого розміру призводить до виникнення гравітації. Наприклад, явище, яке сучасна наука називає «силами інерції», розглядається як результат утворення гравітаційної взаємодії. В критичних випадках виникає кавітація, коли в оточуючому просторі навколо рухомого тіла виникає вакуумне утворення –

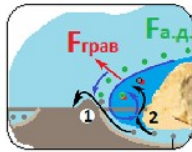
каверна (або проміжні процеси, зумовлені зменшенням щільності оточуючого середовища). Утворення сили гравітаційного тяжіння розглядається у повітряному, водному та вакуумному середовищах. Властивості фізичного вакууму наочно проявляться під водою. Примітивний спосіб пересування сучасних транспортних засобів призводить до виникнення кавітації. При цьому народжується сила гравітаційного тяжіння, яка під водою призводить до кавітаційної руйнації металу. Вакуумне утворення за тілом, що рухається (каверна і кавітаційна булька) стають головним об'єктом дослідження.

Проте в природі існує протилежний спосіб пересування. Меч-риба утворює розріджений стан води перед собою, не доводячи простір до появи кавітації. Сила розрідженої води всмоктує рибу вперед, що робить її найшвидшою істотою на планеті. В роботі розглядається спосіб її пересування.

Аби з'ясувати властивості збуреного фізичного вакууму (каверни) в роботі розглядаються фізичні процеси, з якими зіштовхнулося людство в процесі дослідження Місяця, комет і планет Сонячної системи. Більшість кратерів на космічних тілах утворились під впливом сонячного вітру в ході абразивно – кавітаційного процесу. Падіння метеоритів до появи цих кратерів не має жодного відношення. Але більш важливим є кавітаційний процес, який призводить до пересування каміння, яке іноді спостерігають на Землі, а на Місяці це – звичайне явище (див. фотомонтаж 1)



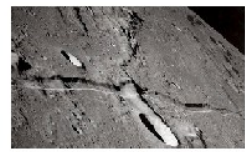
Фот. 1а



Фіг. 1б



Фот. 1в



Фот. 1г

Фотомонтаж 1. Однакові кратер, навал пилу і слід за каменем і на Землі і на Місяці свідчать про ідентичний характер фізичного процесу. Відсутність повітря на Місяці доводить, що енергетичним джерелом виникнення тяглової сили є енергія фізичного вакууму, а не вітру. Гідродинаміка помиляється, коли приписує створення піднімальної сили властивостям повітря, або води. Енергією володіє простір між елементарними частками матерій, а не сама матерія.

Фот. 1а. Камінь, який повзе по поверхні Землі. Перед ним утворився кратер та навал пилу.

Фіг. 1б. Схема пояснює утворення тяглової сили і утворення кратеру. Синім кольором виділена турбулентна зона перед каменем (аналог каверни; каверни за пилінками означені червоним кольором). Закручені у вихор частки пилу суттєво збільшують силу гравітаційного тяжіння $F_{грав}$, яка призводить камінь до руху.

Фот. 1в. Подібне пересування каменю по поверхні Місяця. Тут у вихор за каменем закручується сонячний вітер. Довжина кратеру свідчить про розмір каверни, яка всмоктує сонячний вітер, закручуючи його у вихор з

прискоренням $G = 3.500.000.000 \text{ м/сек}^2$, що в 2,2·мільярда разів перевищує прискорення вільного падіння g на Місяці.

Фот. 1г. Сила гравітаційного тяжіння змушує навіть скали переповзати через гірський хребет.

В розділі, присвяченому проблемам астрофізики цей процес роз'яснює:

- яка сила розкручує планети навколо Сонця і навколо власної осі обертання;
- абразивно-кавітаційний процес утворення кратерів;
- «аномальні» особливості руху по орбіті і утворення магнітних полів Меркурію, Венери, Землі, Марсу та Урану;
- утаємничені для сучасної науки явища народження світла і інших «аномальних» явищ на малих планетах і кометах.

З перевищенням прискорення гравітаційної взаємодії $G \approx 5720g$, з яким може рухатися рідина на Землі відбувається розрив оточуючого простору — виникає кавітація. Фізичний вакуум самостійно відновлює цілісність зруйнованого простору. При цьому Людству добре відомі найменше та найбільше за розміром вакуумне утворення, яке відтворює цілісність простору це – кавітаційна булька та тор, який утворюється під час термоядерного вибуху. Аналіз фотозйомки термоядерного вибуху приводить до висновку, що в процесі імплузії (схлопування термоядерного вибуху і кавітаційної бульки) змінюється плин часу в зворотному напрямку. Цей факт дає підстави для створення «шапки невидимки» або здійснення мандрівки у часі у минуле.

Викладені принципи обумовлюють конструкцію «літаючої тарілки». Її зовнішні поверхні покриваються п'єзокристаличними елементами, які періодично пульсують, створюючи хвилю твердої матерії, що біжить по поверхнях літаючої тарілки. Принципова відмінність від традиційної акустики полягає в тому, що пульсація п'єзоелементів відбувається з надзвуковою швидкістю. Виникає фізичне явище, котре в теорії названо «поляризацією повітря» – молекули повітря вишиковуються в гравітаційні ланцюжки. Аналогічний (але менш ефективний) процес виникає над верхньою поверхнею авіаційного крила. За рахунок протилежного спіну (обертання молекул повітря навколо власного центру мас) над верхньою поверхнею «тарілки» виникає сила гравітаційного тяжіння, а під нижньою поверхнею виникає сила гравітаційного відштовхування. Подібний ефект досягнуто в конверторі Годіна-Рощина [2].

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Б.М. Теоретическая физика. Т 4. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 137 с.
2. Роцин В.В., Годин С.М. <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/38004>

PHYSICS FOR A FLYING SAUCER. THEORY AND PRACTICE OF CREATION OF ARTIFICIAL GRAVITATION

This study focuses on physical essence of gravitation and the ways of its creation on the level of elementary particles and macroscopic bodies. This work examines the genesis of

gravitational interaction in air, water and vacuum on the examples of natural phenomena and technical solutions. Physicists cannot reach a consensus. Traditional physics argues that matter is the carrier of energy. But nuclear physics has put forward an assumption, that physical vacuum is the carrier of energy. However, neither traditional, nor alternative theories disclose a physical process of genesis of gravitation interaction. A bird and an airplane overcome gravity, but neither aerodynamics nor physics explain how the force of gravitational attraction pulls the wing up. That is, returning to Newton, we need to answer a question why an apple falls downward, but an apple-tree grows upwards? Gravitation arises in the process of accelerated movement of material bodies through physical vacuum. On the macroscopic level gravitation attraction arises in the course of creation of ascensional power above the upper surface of the wing. Visible perturbation of space arises above an underwater wing: a cavity appears behind a moving wing. A similar process occurs in outer space. Therefore, a cavern, as a source of gravitational energy, becomes the main object of investigation. The theory is confirmed by a series of experiments. Static ascensional power arises in air using the energy of the intake flow (coefficient of efficiency increases by 23%). The speed of movement of underwater model increases by 11%.

This study analyzes natural phenomena and technical achievements that have no theoretical justification, cause disputes and seem to be mysterious. Physical principles of flight of UFO and the action of a universal magnet are described.

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ ДВАЖДЫ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Наталья Вайсфельд, Константин Мысов

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова (Украина)

vaysfeld@onu.edu.ua; kmysov2309@gmail.com

Рассматривается упругий дважды усеченный конус, описываемый в сферической системе координат соотношениями $a < r < b$, $-\psi \leq \theta \leq \psi$, $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Верхний торец $r = b, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$ закреплен

$$w(b, \theta, \varphi, t) = 0, \quad w(r, \theta, \varphi, t) = u_\varphi(r, \theta, \varphi, t). \quad (1)$$

На нижнем торце $r = a, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$ напряжения отсутствуют

$$\tau_{\theta\varphi}(a, \theta, \varphi, t) = 0. \quad (2)$$

На конической поверхности тела $a \leq r \leq b, \theta = \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$ задана крутящая нагрузка

$$\frac{1}{G} \tau_{r\varphi}(r, \psi, \varphi, t) = A(r, \varphi, t). \quad (3)$$

Требуется найти поле смещений и напряжений, удовлетворяющее краевым условиям (1-3) и уравнению кручения

$$(r^2 w'(r, \theta, t))' + \frac{(\sin \theta w^\bullet(r, \theta, t))^\bullet}{\sin \theta} - \frac{w(r, \theta, t)}{\sin^2 \theta} = \frac{r^2}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где штрих над символом обозначает производную по первой переменной, точка над символом – производную по второй переменной. Начальные условия предполагаются нулевыми.

Для решения задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральное преобразование Г.Я. Попова по угловой координате θ [1] с формулами прямого

$$w_{sk}(r) = \int_0^\psi \sin \theta P_{\nu_k}^1(\cos \theta) w_s(r, \theta) d\theta \quad (5)$$

и обратного преобразований

$$w_s(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) w_{sk}(r)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}, \quad (6)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, $P_{\nu_k}^1(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, ν_k – корни трансцендентного уравнения

$$\left. \frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\psi} - \text{ctg} \psi P_{\nu_k}^1(\cos \psi) = 0. \quad (7)$$

В результате интегральных преобразований в пространстве трансформант получена одномерная краевая задача

$$\begin{aligned} (r^2 w'_{sk})' - \nu_k(\nu_k + 1)w_{sk} - \frac{r^2}{c^2} s^2 w_{sk} &= -r A_s(r) \sin \psi P_{\nu_k}^1(\cos \psi), \\ w_{sk}(a) &= 0, \\ (w'_{sk}(r) - r^{-1} w_{sk}(r)) \Big|_{r=b} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для указанной задачи была построена функция Грина $G_{sk}(r, \xi)$, с помощью которой решение задачи (8) было записано в виде

$$w_{sk}(r) = -\sin \psi P_{\nu_k}^1(\cos \psi) \int_a^b A_s(\xi) \xi G_{sk}(r, \xi) d\xi. \quad (9)$$

К выражению (9) было применено обратное преобразование (6). Таким образом, в пространстве трансформант Лапласа построено точное решение исходной задачи (1-4). Дальнейшее решение детализировано для случая установившихся колебаний.

1. Попов Г.Я. Новые интегральные преобразования с применением к некоторым краевым задачам математической физики // Изд-во Укр. мат. журн. – 2002. – С. 1642-1652.

DYNAMIC TORSION PROBLEM FOR A TWICE TRUNCATED CONE

In this paper the dynamic torsion problem of the twice truncated cone was solved. It was done by the using G.Ya. Popov's integral transformation and construction of Green's function for a one dimensional problem.

УДК 539.3

ПЛОСКА ДВОВИМІРНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ВКЛАДКОЮ

Галина Василько, Ігор Турчин

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

ihorturchyn@gmail.com

Розглядається пружне безмежне середовище із круговим циліндром, виготовленим з іншого матеріалу. Джерелом нестаціонарних процесів в такому тілі є нормальне самозрівноважене навантаження внутрішньої поверхні кільця, локально розподілене за кутовою координатою (рис. 1).

Вважається, що до моменту прикладання навантаження напруження і деформації в середовищі з вкладкою були відсутні, а впродовж всього періоду деформування на межі поділу матеріалів середовища і вкладки виконуються умови ідеального механічного контакту.

Розв'язок вихідної динамічної задачі одержано в явному вигляді із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та скінченного перетворення Фур'є за кутовою змінною. Наводяться результати розрахунку перхідного напружено-деформованого стану, залежно від інтенсивності навантаження, відносної товщини вкладки та співвідношень пружних характеристик вкладки та основи.

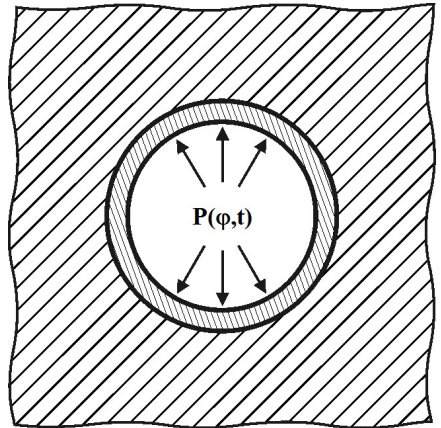


Рис. 1. Схема задачі.

THE PLANE TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEMS OF ELASTICITY FOR SPACES WITH CYLINDRICAL TAB

Using the Laguerre polynomials method and Fourier integral transformations we solve the dynamic problem for a space with a cylindrical tab. The results of calculation of the transient stress-strain state, depending on the intensity of the load, the relative thickness of the tabs and the ratios of the elastic properties tabs and foundations are presented.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОЇ ПЛАСТИНИ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Олег Ветров, Володимир Шевченко

Донецький національний університет імені Василя Стуса (Україна)

o.vietrov@donnu.edu.ua

Розглядається модель нескінченної тонкої пластини, виготовленої з анізотропного матеріалу. Досліджується пружно-деформований стан тонкостінного об'єкту, що перебуває під дією нестационарного локального навантаження складної форми.

Дослідження проводиться методом фундаментальних розв'язків динамічних рівнянь теорії тонких пластин і є логічним продовженням раніше опублікованих робіт авторів [1-3].

Побудова відповідних фундаментальних розв'язків здійснюється за допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є (за геометричними координатами) та Лапласа (за часом), у поєднанні з методикою обчислення невластних інтегралів від спеціальних функцій, розробленою Марічевим О.І. [4]. Отримані співвідношення перевіряються на коректність шляхом зведення їх до раніше відомих результатів.

Робота виконана в рамках програми фундаментальних досліджень МОН України (номер реєстрації 0116U002522).

1. *Ветров О.С., Шевченко В.П., Русаков В.Ф.* Динамика тонких оболочек с учетом демпфирования под действием локальных нагрузок // Вісник Запорізького національного університету. – 2015 – № 2. – С. 28-36.
2. *Ветров О.С.* Динамическое деформирование пологих ортотропных оболочек под действием локальных нагрузок // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 89-96.
3. *Vetrov O.S., Shevchenko V.P.* Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **183**, № 2. – P. 231-240.
4. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). – Минск: Наука и техника, 1978. – 312 с.

STRESS-STRAIN STATE OF THE THIN PLATE UNDER THE ACTION OF LOCAL DYNAMIK LOAD

Formulas of fundamental solutions thin plates dynamics equations are obtained. Stress-strain state of the anisotropic plate under the action of local loads loading was investigated.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕЗАМКНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З КРУГОВИМ ГОФРОВАНИМ ПЕРЕРІЗОМ

Олександр Григоренко, Максим Борисенко, Олена Бойчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського (Україна)

ayagrigorenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com

При проектуванні деталей машин та елементів конструкцій необхідно враховувати частоти і форми вільних коливань конструкції, оскільки при співпаданні частоти зовнішньої сили з частотою вільних коливань спостерігається руйнівне явище резонансу. Циліндричні оболонки широко використовуються у різних галузях промисловості оскільки мають високу міцність та стійкість при відносно невеликій масі. Підвищення міцнісних характеристик із збереженням маси можна здійснювати за рахунок зміни геометричних параметрів таких як товщина стінки оболонки [1] або форми поперечного перерізу [2]. Одним із способів зміни поперечного перерізу є гофрування. Визначенню частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок з гофрованим поперечним перерізом методом сплайн-колокації присвячені роботи [3, 4, 6].

Метою даного повідомлення є визначення частот і форм вільних коливань пружної ізотропної незамкненої циліндричної оболонки кругового гофрованого поперечного перерізу сталої товщини з жорстко закріпленними торцями на основі методу скінчених елементів; встановлення залежності частоти вільних коливань від густини гофрування.

Для розрахунків застосовано програму для інженерного аналізу методом скінчених елементів – FEMAP з розв'язувачем NX Nastran [5]. Обраний програмний засіб дає можливість користувачу оцінити поведінку комп'ютерної моделі конструкції в реальних умовах експлуатації, дати оцінку її несучої здатності без значних затрат часу та коштів.

В якості ізотропного матеріалу обиралась сталь (модуль Юнга $E = 214 \text{ Аї } \text{а}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820 \text{ еї } / \text{і}^3$). Параметричні рівняння серединної поверхні оболонки:

$$x(\varphi) = (R + r \cos(k\varphi)) \cos \varphi ;$$

$$y(\varphi) = (R + r \cos(k\varphi)) \sin \varphi ,$$

де R – радіус базового кола, r – амплітуда гофр, k – густина гофрування.

Висота, товщина стінки оболонки та радіус базового кола такі ж як для циліндричної оболонки із значенням ексцентриситету $\varepsilon = 0$ [2].

В результаті розрахунків: розв'язано тестову задачу, отримані результати відрізняються на не значну величину від результатів [4]; отримано частоти і форми вільних коливань дослідженої оболонки з різною густиною гофрування із збереженням маси оболонки; встановлено залежність частот вільних коливань від кількості гофр. Зміна форми поперечного перерізу за рахунок гофрування дає можливість керувати спектром частот вільних коливань для виведення оболонки з резонансного режиму, що є актуальною проблемою і потребує подальшого дослідження.

1. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Математика. Механіка». – 2014. – 32, № 2. – С. 32-37.
2. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки». – 2015. – 2. – С. 23-28.
3. Пузырев С.В. Исследование свободных колебаний гофрированных цилиндрических оболочек // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – 1, № 47. – С. 106-113.
4. Пузырев С.В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением // Збірник наукових праць Національного університету кораблебудування. – 2013. – № 1. – С. 47-53.
5. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.
6. Семенюк Н.П., Бабич И.Ю., Жукова Н.Б. Свободные колебания гофрированных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 2013. – 41, № 1. – С. 58-67.

FREE VIBRATIONS OF AN UNCLOSED CYLINDRICAL SHELL WITH A CIRCULAR CORRUGATED CROSS-SECTION

Frequencies and shapes of free vibrations of elastic isotropic unclosed cylindrical shell with a circular corrugated cross-section of a constant thickness and with a rigidly fixed face ends are calculated. A program for finite element analysis FEMAP with NX Nastran solving is used for calculations. It is established that the change in the shape of the cross-section due to corrugation makes it possible to control the spectrum of free vibration frequencies to withdraw the shell from the resonance regime.

ЗАДАЧА ДИНАМІКИ ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ З ДРОБОВИМ ЗОВНІШНІМ ОПОРОМ

Уляна Демешин

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

demeshun28@rambler.ru

Досліджується нестационарна взаємодія півбезмежного пружного стержня з недеформівною основою через тонкий прошарок, реологічні властивості якого описуються дробовою похідною від переміщення за часом. Початково-крайова задача для гіперболічного рівняння в безрозмірних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b D_t^\alpha u, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = p(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Тут u – осьове переміщення стержня, b – безрозмірна дробова в'язкість прошарку, D_t^α – похідна Капуто за часом ($0 \leq \alpha \leq 1$) [1].

Аналітичний розв'язок задачі (1)-(3) побудовано методом інтегрального перетворення Лапласа. Зокрема, для ударного навантаження у вигляді сходинки Гевісайда $p(t) = p_0 H(t)$ знайдено нестационарний відгук динамічної системи (динамічне переміщення торця стержня):

$$u(0, t) = t \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)_n \frac{(bt^{2-\alpha})^n}{\Gamma(2 + (2-\alpha)n)\Gamma(n+1)}.$$

1. Podlubny I. Fractional differential equations. – San Diego: Academic Press, 1999. – 368 p.

THE PROBLEM OF DYNAMICS OF AN ELASTIC ROD WITH FRACTIONAL EXTERNAL RESISTANCE

The problem of the dynamics of semi-infinite elastic rod with the fractional resistance on the lateral surface under action of shock load has been investigated.

ДИНАМІКА ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ – МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЇХ ОСОБЛИВОСТІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Анатолій Дем'яненко

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет (Україна)

anatdem@ukr.net

Пам'яті професора Горошко О.О.

З дня виникнення проблеми дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, приводом до чого було руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року, минуло 170 років. За цей період розглянуто і досліджено багато задач з урахуванням впливу рухомих навантажень різних за природою і характером дії на самі різноманітні конструкції, системи і споруди. У динамічному ХХ-ХХІ сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи в свою чергу появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач в рамках певних аналогій можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підймальних машин [2, 3]. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різні варіанти постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [4, 8]. Найбільш складним з точки зору дослідження є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції так і сили інерції рухомого навантаження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху таких об'єктів зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot q(x, t) \quad (1)$$

з відповідними крайовими та початковими умовами, де при сталій швидкості руху

$$q(x,t) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по-перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q(x,t)$, який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить, як від інтенсивності $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x,y,t)$, причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x,y,t)$, швидкості кутової деформації $w_{\omega}(x,y,t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x,y,t)$ тобто в такого роду системах силова дія не є заздалегідь визначеною а обумовлена поточним деформованим станом системи і є слідкуюча за ним. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора (2) зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу, причому швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50-80 м/с, газів 200 – 250 м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60% від загальної кількості відмов [5]. Задачі динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та суттєву значимість для практики, складають самостійний напрямок у будівельній механіці МТДТ. У зв'язку з неможливістю прямого застосування методу Фур'є до цих задач у загальному випадку зроблені спроби його модифікації та узагальнення [9]. Саме в розвиток цього напрямку професор Горошко О.О. започаткував метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О.О. Горошко [1]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки [2-4], загальний розв'язок диференціального рівняння руху (1) отримуємо у вигляді суми двох рядів

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n a_n \varphi_n(x) \cos(\omega_n t + \beta_n) + \sum a_n \psi_n(x) \sin(\omega_n t + \beta_n)$$

один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної а, саме, інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному

застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження або інших чинників системи [2-3]. Згодом розвиток таких методів з практичної площини перейшов у чисто фізико-математичну та набув узагальнень у працях школи Каленюка П.І. [6, 7], які знаходять і, без сумніву, знайдуть своє подальше застосування. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню цього класу задач динаміки пружних систем методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології, чого не було раніше, не кажучи вже про часи G.W. Housner, Я.Г. Пановко та інших. В доповіді наведено результати досліджень методом двохвильового подання руху деяких задач динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження.

1. *Горошко О.А.* Собственные и сопровождающие колебания в системах с подвижными инерционными нагрузками // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – 1970. – Т. 3. – С. 215-220.
2. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – К: Наукова думка, 1973. – С. 32-40.
3. *Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П.* Двухвильові процеси в механічних системах. – К.: Либідь, 1991. – С. 83-94.
4. *Дем'яненко А.Г.* Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – 74, № 2. – С. 12-22.
5. *Доценко П.Д.* Динамика трубопроводных систем. – Харьков: Основа, 1998. – С. 10-15.
6. *Каленюк П.І., Скоробогатко В.Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. – К., 1977. – 122 с.
7. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. – 292с.
8. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – С. 277-294.
9. *Housner G.W.* Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics // Trans ASME. – 1952. – Vol.19, № 2, P. 205-209.

DYNAMICS OF ELASTIC OBJECTS UNDER MOVABLE LOADING - MECHANICAL, MATHEMATICAL MODELS, FEATURES AND METHOD FOR RESEARCH

This paper describes some features of the mathematical models for the elastic elements with movable load. In these systems two forms of own oscillations - the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. The accompanying component is caused by the mobile inertia load and they are not trivial only when this factor exists.

**ПРОЕКТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ГАСНИКІВ КОЛИВАНЬ ДЛЯ
ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ АВТОМОБІЛІВ****Богдан Дівесєв, Ігор Дорош, Геннадій Черчик***Національний університет “Львівська політехніка” (Україна);**ПП «Дора» (Україна);**Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України*divboglviiv@yahoo.com

Демпфування коливань будівель і споруд, машин і приладів, їх окремих конструкцій і елементів є важливою науково-технічною проблемою в багатьох областях техніки – промислового і цивільного будівництві, суднобудуванні, авіабудуванні, транспортному і енергетичному машинобудуванні. Зниження амплітуд коливань дозволяє значно підвищити втомну міцність, надійність і довговічність конструкцій, поліпшити технічні умови їх експлуатації. У зв'язку з цим розробка ефективних засобів і методів віброзахисту є однією з істотних проблем динаміки споруд і машин.

Однією з важливих проблем проектування сучасних транспортних засобів, зокрема колісних машин є амортизація функціональних елементів (ФЕ) при збереженні оптимальних техніко-економічних показників. Прикладами таких ФЕ є штанга штангового обприскувача, стріла підйомника пожежної машини, зброя змонтована на автомобілі, різні прилади, встановлені на автомобілях і таке інше. Ефективним способом віброзахисту таких елементів, поряд з системою амортизації, є застосування динамічних гасників коливань (ДГК), приєднаних безпосередньо до ФЕ. Первинною задачею в цьому напрямку є необхідність удосконалення аналітичного методу розрахунку дії динамічних навантажень з метою наближення теоретичних результатів до експериментальних даних та досягнення раціонального і ефективного проектування систем амортизації ФЕ. Об'єктом досліджень прийнято колісну машину з ФЕ та ДГК. Була сформована комп'ютерна програма випробувань моделі цієї машини на низці полігонних рельєфів, що відповідають реальним умовам експлуатації. Для отримання оптимальних проектів у множині конструктивних параметрів застосовувалися алгоритми генетичної оптимізації у поєднанні з конденсованими малопараметричними схемами. Оптимізація ДГК для недемпфованої одномасової основної системи при дії гармонійного збудження належить до стандартних задач. Детальний розгляд методів розрахунку ДГК добре відомі [1, 2]. Більшість практичних застосувань ДГК базуються на недостатньо повних математичних моделях

складних конструкцій. У даній роботі застосовано варіант динамічної конденсації: зменшення порядку вирішуючої системи рівнянь динамічної рівноваги шляхом апріорного врахування формозміни елементів [3, 4]. Ці конденсовані моделі дозволяють оперувати конструктивними параметрами, що безпосередньо впливають на якість функціонування агрегату та його міцність. Наведено конкретні приклади оптимізації системи ДГК для ФЕ. На основі теоретико-експериментальних досліджень розроблено низку нових ДГК з покращеними функціональними та ресурсними даними. Результати цих досліджень дозволили оформити ряд патентів та в багатьох випадках надати рекомендації для виробників такого роду техніки.

На основі отриманих розрахункових схем розглянуто також проектування ДГК для висотних споруд [5], обертових машин та керованих ДГК. Виявлено ряд особливостей таких проєктів, не відображений у відомих джерелах.

1. Вибрации в технике. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. –М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
3. Cherchyk H., Diveyev B., Martyn V., and Sava R. Parameters identification of particle vibration absorber for rotating machines. // Proceeding of 21th International Congress on Sound and Vibration (ICSV-21), 2014, Beijing, China. – (CD-ROM).
4. Diveyev B. Impact and particle buffered vibration absorbers optimization and design // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science. –1, № 2. – 2016. – P. 35-50.
5. Diveyev B. Semi-active vibration absorbers for the high-rise objects // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science (in print).

DESIGN OF THE DYNAMIC VIBRATION ABSORBERS SYSTEM FOR THE CAR FUNCTIONAL ELEMENTS

The paper deals with the methods of calculation of vibration processes in wheel machines. Mathematical model for the functional elements vibration level decreasing by means of dynamic vibration absorbers is proposed.

РОЗВ'ЯЗОК У ПОЛІНОМАХ ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Ярослав Дубик, Ігор Ориняк, Олексій Іщенко

ТОВ «ІПП-Центр» (Україна);

ІПМці ім.Г.С.Писаренка НАН України;

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського» (Україна)

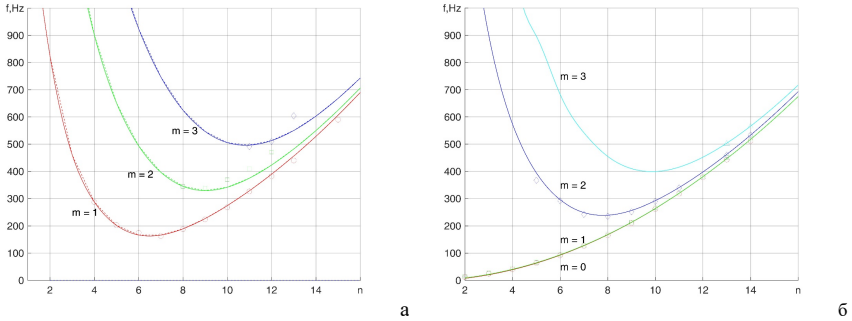
dubykir@gmail.com; igor_orinyak@yahoo.com; i_94@ukr.net

Циліндричні оболонки є найбільш дослідженим типом оболонок, для яких є велика кількість експериментальних даних і отримано безліч аналітичних розв'язків. Разом з тим бурхливий розвиток універсальних комп'ютерних комплексів на основі методу скінченних елементів (МСЕ) ставить під сумнів необхідність подальших аналітичних досліджень. Складність полягає в тому, що розв'язки, отримані МСЕ, складно аналізувати, а відомі аналітичні залежності не відрізняються простотою обчислень [1, 2]. Слід зазначити, що наявність аналітичних розв'язків для оцінки власних частот циліндричної оболонки є актуальною з інженерної точки зору, оскільки дозволяє: 1) швидко розв'язування задач динамічного аналізу оболонок; 2) тестування і аналіз задач, розв'язаних за допомогою МСЕ.

У даній роботі отримані з використанням методу початкових параметрів та методу розкладу у ряди формули для пошуку власних частот коливань циліндричної оболонки на основі теорії Доннела-Муштарі. Перевагою цих формул є зручність використання та легкість програмування.

Рух циліндричної оболонки описується диференційним рівнянням 8-го степеня, або системою з 8-ми рівнянь відносно головних змінних: осьового переміщення $u(x, \varphi, t)$, дотичного переміщення $v(x, \varphi, t)$, радіального переміщення $w(x, \varphi, t)$, кута повороту $\gamma_x(x, \varphi, t)$, осьової сили $N_x(x, \varphi, t)$, дотичної сили $L(x, \varphi, t)$, поперечної сили $Q_x(x, \varphi, t)$ та згинного моменту $M_x(x, \varphi, t)$. Далі припускали, що наші змінні розкладаються у ряди по коловій координаті φ за $\sin(n\varphi)$ та $\cos(n\varphi)$, де n – хвильове число у коловому напрямку. Підставляючи залежність від часу t як $\sin(\omega t)$, де ω – шукана власна частота, отримуємо систему звичайних диференційних рівнянь, яку можливо розв'язати у звичайних поліномах. Загальна структура розв'язку доволі громіздка, але її можливо отримати у явному вигляді, наприклад для x^0 – це одинична матриця.

На рисунку представлено порівняння нашого розв'язку з експериментальними [3] та літературними [4] даними. Відзначимо хорошу збіжність з розв'язком Soedel, який був запропонований у роботі [4], та відповідність експериментальним даним.



Власні частоти опертої (а) $l=610\text{мм}$ та з вільним кінцями(б) $l=638\text{мм}$ циліндричної оболонки: $R=242,3\text{мм}$, $h=0,648\text{мм}$, $E=68,9\text{ГПа}$, $\rho=2714,5\text{кг/м}^3$, $\mu=0,315$; експериментальні данні [4]: (○) $m=1$; (□) $m=2$; (◇) $m=3$; — наш розв'язок ; формула Soedel[5].

Висновок. Отримані залежності дають змогу розрахувати власні частоти та форми коливань циліндричних оболонок з високою точністю, вони добре узгоджуються з іншими аналітичними розв'язками, але є більш зручними у використанні.

1. *Xing Y., Liu B., Xu T.* Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2013. – Vol. 75. – P. 178-188.
2. *Qu Y., Hua H., Meng G.A* domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // *Composite Structures.* – 2013. – **95**, № 307. – P. 321.
3. *John E.C.N., Sewall L.* An experimental and analytical vibration study of thin cylindrical shells with and without longitudinal stiffeners // *NASA technical note.* – Vol. NASA – 56 p.
4. *Wang C., Lai J.C.S.* Prediction of natural frequencies of finite length circular cylindrical shells // *Applied acoustics.* – 2000. – Vol. 59, No 4. – P. 385-400.

EXACT SOLUTION FORMULAS FOR FREE VIBRATION OF CYLINDRICAL SHELL WITH ALL BOUNDARY CONDITIONS

The article is written as a primary method to exact formula for finding the natural frequencies of free vibration of cylindrical shell based on the Donell-Mushtari theory. A comparison with the literature data and shows that the obtained dependence well describes the experimental results.

ДИСИПАТИВНИЙ РУХ ВИХОРИВ У КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНА, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

Тетяна Зуєва

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України

zueva@ilt.kharkov.ua

Квантовані вихорі у конденсатах Бозе-Ейнштейна, що обертаються, протягом багатьох років залишаються улюбленим об'єктом дослідження як експериментаторів, так і теоретиків. Сучасні технології дозволяють за допомогою пари лазерів генерувати вихорі у будь-якій точці конденсату, тоді при вимкненні лазера є можливість спостерігати вільний рух вихорів. Зручно було б мати систему рівнянь, що описують цей рух.

Для анізотропної магнітної пастки, коли притискує поле у напрямку z набагато перевищує поле у перпендикулярному напрямку ($\omega_z \gg \omega_r$), конденсат набуває вигляду майже плаского диску, і задача перетворюється на двовимірну. У двовимірній ситуації систему рівнянь для руху вихорів можна отримати явно. У безрозмірних змінних дисипативне рівняння Гроса-Пітаєвського для хвильової функції ψ записується як [1, 3]

$$(i - \gamma) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi - \frac{1}{\varepsilon^2} \psi (\mu - \rho^2 - g^2 |\psi|^2) + i(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) \cdot \nabla \psi.$$

де γ – параметр дисипації, g^2 – параметр взаємодії атомів, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ – вектор кутової швидкості, $\vec{\rho} = (x, y)$ – двовимірний радіус-вектор. Хімічний потенціал μ забезпечує збереження норми хвильової функції. Параметр $\varepsilon = \omega_r / (2\omega_z)$, і для плаского диску $\varepsilon \ll 1$. Припускаємо, що у конденсаті є n вихорів з квантованою циркуляцією n_j з координатами $\vec{\xi}_j(t) = (\eta_j(t), \zeta_j(t))$, $j = 1, 2, \dots, n$, що є функціями часу.

Для отримання рівнянь руху вихорів був використаний метод зрощування асимптотичних розкладів, запропонований у роботі [2]. Для цього було побудовано два асимптотичних розв'язки в різних просторових масштабах і зіставлено їх головні члени у деякій спільній області поблизу вихоря. Для ідеальних моделей без дисипації система рівнянь була отримана автором раніше [1]. Дисипація дає додаткові члени в ці рівняння:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_j - \Omega \zeta_j = -2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\zeta_j - \zeta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} + \frac{2n_j}{\mu - \xi_j^2} \zeta_j \left(\omega_j - \frac{1}{2} \right) - n_j \gamma \dot{\zeta}_j \left(\omega_j + \frac{1}{2} \right), \\ \dot{\zeta}_j + \Omega \eta_j = 2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\eta_j - \eta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} - \frac{2n_j}{\mu - \xi_j^2} \eta_j \left(\omega_j - \frac{1}{2} \right) + n_j \gamma \dot{\eta}_j \left(\omega_j + \frac{1}{2} \right). \end{cases}$$

Перший доданок є вплив на рух j -го вихора інших $(n-1)$ вихорів; другий є вплив неоднорідності конденсата і третій зумовлений дисипацією. Параметр ω_j залежить від координат j -го вихора. Міняючи j від 1 до n , отримуємо систему рівнянь, що описує рух всього ансамблю вихорів.

Якщо задати початкові позиції усіх вихорів, можна отримати траєкторії їх руху. На рисунку наведені приклади траєкторій у деяких окремих випадках.

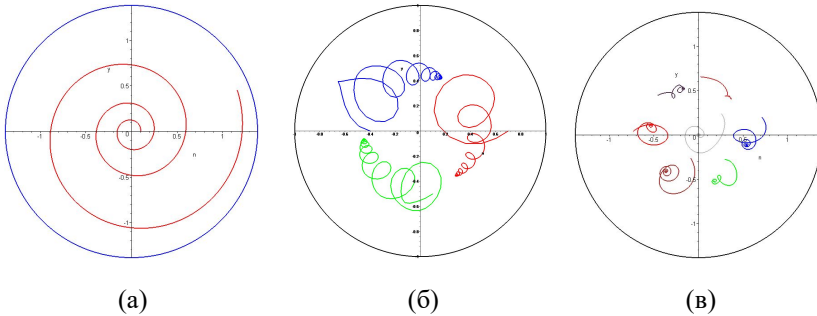


Рис. (а) – випадок без обертання, один вихор рухається у напрямку границі і анигілює; (б) – за наявності обертання три вихора рухаються у точки рівноваги; (в) – для семи вихорів реалізується ситуація з центральним вихорем.

1. Зуєва Т.И. Уравнения движения вихрей в конденсатах Бозе-Эйнштейна: влияние вращения и неоднородности плотности // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 7-24.
2. Rubinstein B.J., Pismen L.M. Vortex motion in the spatially inhomogeneous conservative Ginzburg-Landau model // Physica D. – 1994. – **78**, № 1-2. – P. 1-10.
3. Tsubota M., Kasamatsu K., Ueda M. Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate // Physical Review A. – 2002. – **65**, № 2. – 023603.

DISSIPATIVE VORTEX MOTION IN THE ROTATING BOSE-EINSTEIN CONDENSATE

The vortex motion equations in frame of the Gross-Pitaevskii theory for the Bose-Einstein condensate are obtained. We take into account not only the rotation of the whole condensate but also dissipative processes which lead the vortices to the equilibrium positions. Some examples of vortex trajectories for different outer parameters are shown.

**ДО ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНИХ СЕЙСМІЧНИХ ХВИЛЬ,
ЩО ПОШИРЮЮТЬСЯ В ШАРУВАТІЙ ЗЕМНІЙ ТОВЩІ****Олександр Кендзера, Ярема Рушицький***Інститут геофізики ім. С.І. Суботіна НАН України;**Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*kendzera@igph.kiev.ua; rushch@inmech.kiev.ua

Наука про хвилі в матеріалах виділяє сейсмічні хвилі в окремий розділ, що спричинено трьома основними особливостями цих хвиль: 1) середовище, у якому поширюються сейсмічні хвилі, є товщею Землі; 2) сейсмічні хвилі є хвилями з малими значеннями частоти; 3) джерелом виникнення сейсмічних хвиль є землетруси, виверження вулканів, рух магми в Землі, великі природні зсуви ґрунту чи великі антропогенні (спричинені людською діяльністю) вибухи. Середовище поширення сейсмічних хвиль звичайно вважається здатним до деформування (матеріалом) і для його моделювання застосовуються різні моделі деформування матеріалів, серед яких найчастіше вибирають модель пружного деформування. Тому в аналізі сейсмічних хвиль важливо знати фізичні характеристики різних компонентів земної товщі – ґрунтів, гірських порід та інших. В моделі пружного деформування це означає знання густини і пружних постійних. Історично аналіз сейсмічних хвиль проводився в рамках теорії пружності, яка оперує з такими видами пружних хвиль як об'ємні хвилі, плоскі хвилі, поверхневі хвилі. Найчастіше приймається, що джерело сейсмічних хвиль є локалізованим і генерує сферичні хвилі. Однак, коли предмет вивчення сейсмічних хвиль є досить віддаленим від джерела, то хвилі вважають плоскими. Тому плоскі хвилі займають значну частину науки про сейсмічні хвилі.

Ця доповідь присвячена теоретичному аналізу поширення плоскої горизонтально поляризованої гармонічної хвилі (SH-хвилі) зі скельного ґрунту через ґрунтові шари до поверхні Землі. Такий аналіз дає в результаті формули для обчислення коливань поверхні Землі і необхідних коефіцієнтів відбиття та проходження хвиль через границі між елементами системи «скельний масив – ґрунтові шари – атмосфера». Знання коливання поверхні Землі внаслідок приходу сейсмічної SH-хвилі є необхідним компонентом сейсмічного мікрорайонування будівельних майданчиків. Тому важливість теоретичного обґрунтування для даних про коливання поверхні Землі є очевидною [1-8]. Отримані результати можна вважати певним продовженням класичних робіт проф. Саваренського в області пружних сейсмічних хвиль і проф. Степанишина в області в'язкопружних сейсмічних хвиль.

В даному дослідженні застосовано прямий метод механіки в дослідженні проходження і відбиття зсувної хвилі при її проходження через скінченну кількість ґрунтових шарів з відмінними товщинами і реологічними властивостями. Реологічні властивості ґрунтових шарів описано стандартною реологічною моделлю. Отримані явні формули для обчислення хвильового числа і коефіцієнта затухання гармонічної SH-хвилі в рамках стандартної моделі. Затухання хвилі вивчено за двома варіантами: затухання за просторовою координатою і затухання з часом. У варіанті 1 хвилю, яка падає на ґрунтовий шар під кутом θ_G і затухає по товщині шару за експоненціальним законом з коефіцієнтом затухання γ_G , представлено у вигляді $u_G(x, z, \theta_G, t) = A_G e^{i[(k_G \sin \theta_G)x + (k_G + i\gamma_G) \cos \theta_G]z - \omega t}$, де задані амплітуда хвилі A_G , кут падіння θ_G , хвильове число k_G

$$\frac{1}{(k_G)^2} = \frac{2}{(k_G^o)^2 (n_G m_G \omega)^2} \left\{ 1 + (m_G^2 - 1) / \left\{ (n_G m_G \omega)^2 \left[1 + \left((n_G m_G \omega)^2 \right)^{-1} \right] \right\} \right\} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{(m_G^2 - 1)^2}{(n_G m_G \omega)^2 \left\{ \left[1 + \left((n_G m_G \omega)^2 \right)^{-1} \right] + (m_G^2 - 1) \right\}^2}} \right\} \right.$$

коефіцієнт затухання

$$\left. \gamma_G = \frac{k_G}{n_G m_G \omega} \left[-1 \pm \sqrt{1 + (n_G m_G \omega)^2 \left(1 - \frac{(k_G^o)^2}{(k_G)^2} \right)} \right] \right.$$

Для прикладу покажемо формулу для коливання на поверхні Землі

$$u_2(x, z, t) = \frac{W_2 \cdots W_{N+2}}{(1 - V_1 V_2) \cdots (1 - V_N V_{N+1})} A_{N+2} e^{-\gamma_2 h_2 \cos \theta_2} e^{i[(k_2 \sin \theta_2)x - \omega t]} \times$$

$$\left[\left(\begin{aligned} & (1 + V_1(V_1 + \cdots + V_{N+1})) + V_2(V_3 + \cdots + V_{N+1}) + \cdots \\ & + V_N V_{N+1} + V_1 V_2 V_3 (V_4 + \cdots + V_{N+1}) + \cdots + V_1 \cdots V_{N+1} \end{aligned} \right) e^{i(k_2 \cos \theta_2)h_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\begin{aligned} & V_1 + \cdots + V_{N+1} + V_1 V_2 (V_3 + \cdots + V_{N+1}) + \\ & + V_1 V_3 (V_4 + \cdots + V_{N+1}) + \cdots + V_{N-2} V_{N-1} (V_N + V_{N+1}) + \\ & + V_{N-1} V_N V_{N+1} + \cdots + V_1 V_2 V_3 V_4 (V_5 + \cdots + V_{N+1}) + \cdots + V_3 \cdots V_{N+1} \end{aligned} \right) e^{-i(k_2 \cos \theta_2)h_2} \right]$$

1. Кендзера О.В., Косарев Г.Л., Саваренский Е.Ф. Определение величин истинной скорости колебаний почвы из сейсмограммы // Геофизический журнал. – 1979. – **1**, № 1. – С. 56-62.
2. Кендзера О.В., Руцицький Я.Я. Реологічні моделі ґрунтової товщі для сейсмічного мікрорайонування будівельних майданчиків // Доповіді НАН України. – 2016. – № 9. – С. 83-90.
3. Кендзера О.В., Руцицький Я.Я. Про нелінійні моделі деформування ґрунтової товщі і поширення сейсмічних коливань // Доповіді НАН України. – 2017. – № 11. – С. 84-91.
4. Саваренский Е.Ф. Сейсмические волны. – М.: Недра, 1972. – 296 с.
5. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publishing, ApS, 2012. – 270 p.
6. Shearer P.M. Introduction to Seismology. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 396 p.
7. Slawinski M.A. Seismic Waves and Rays in Elastic Media. – London: Elsevier, 2003. – 424 p.
8. Stepanishen P.R., Strozkeski B. Reflection and transmission of acoustic wideband plane waves by layered viscoelastic media // J. Acoust. Soc. Amer. – **71**, № 1. – P. 9-21.

**ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ДЗИГИ ЛАГРАНЖА З
ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАТИВНОГО
ТА ДВОХ ПОСТІЙНИХ МОМЕНТІВ**

Юрій Кононов, Валерія Василенко

Донецький національний університет імені Василя Стуса (Україна)

Kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com; v.vasilenko@donnu.edu.ua

Отримано у вигляді системи двох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі, що чинить опір, дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною рідиною. Важке тверде тіло має нерухому точку і знаходиться під дією двох постійних моментів в інерційній і неінерційній системах координат. Проведено аналітичні та чисельні дослідження впливу відносного руху рідини, перекидаючого та відновлюючого моментів, дисипативного моменту і двох постійних моментів на асимптотичну стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. Узагальнено результати роботи [1] на випадок відносного руху ідеальної рідини в порожнині і робіт [2-3] на випадок двох постійних моментів.

Характеристичне рівняння збуреного руху щодо рівномірного обертання твердого тіла і рідини як одного цілого з кутовою швидкістю ω навколо вертикально розташованої третьої головної осі має вигляд [2-3]

$$A + \frac{iC\omega + D_1}{\lambda - i\omega} - \frac{\Gamma - iP}{(\lambda - i\omega)^2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda - i\omega\lambda_n} = 0. \quad (1)$$

Тут A та C – відповідно головний екваторіальний та осьовий моменти інерції твердого тіла і рідини; $\vec{M}_d = -D\vec{\omega}$, $D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$, $D_i > 0$ – дисипативний момент, що моделює середовище, яке чинить опір; два постійних моменти $\vec{M}_q = Q\vec{k}$ та $\vec{M}_p = P\vec{\gamma}$ підтримують рівномірне обертання у середовищі, що чинить опір дзиги Лагранжа з рідиною; \vec{k} – одиничний вектор третьої головної осі інерції твердого тіла; момент \vec{M}_p постійний у інерціальній системі відліку, а момент \vec{M}_q – в неінерційній, тобто в пов'язаній з твердим тілом системі координат; P та Q – довільні постійні; Γ – перекидаючий ($\Gamma > 0$) або відновлюючий ($\Gamma < 0$); $\omega = (\pm P + Q)/D_3$; $E_n = 2a_n^2/N_n^2$.

У більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини ($n = 1$). В цьому випадку характеристичне рівняння (1) буде кубічним з комплексними коефіцієнтами, а для існування асимптотично стійких рішень необхідно і достатньо, щоб матриця п'ятого порядку, складена з коефіцієнтів цього многочлена була іннерно-позитивною [2-3].

Таким чином, умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі, що чинить опір, дзиги Лагранжа з осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною рідиною, з урахуванням основного тону коливання рідини, зводяться до двох нерівностей $|\Delta_3| > 0$, $|\Delta_5| > 0$. Для еліпсоїдальної і циліндричної порожнини проведені аналітичні і чисельні дослідження цих нерівностей.

Дослідження проведені в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U002522).

1. *Карпетян А.В.* О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2000. – № 5. – С. 39-43.
2. *Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В.* Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость // Вісник Донецького ун-ту. Сер.А. – 2007. – № 1. – С. 48-51.
3. *Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В.* Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2009. – № 850. – С. 52-56.

ON THE STABILITY OF ROTATION OF A LAGRANGE TOP WITH THE IDEAL LIQUID, WITH THE ASSEMBLY OF DISSIPATIVE AND TWO CONSTANT MOMENTS

Received in the form of a system of two inequalities for the asymptotic stability of uniform rotation in a resisting medium of the Lagrange top with an arbitrary axisymmetric cavity completely filled with an ideal fluid. A heavy rigid body has a fixed point and is under the action of two constant moments in the inertial and non-inertial coordinate systems. Analytic and numerical studies of the effect of the relative motion of the liquid, the tilting and restoring moment, the dissipative moment and two constant moments on the asymptotic stability of the uniform rotation of the Lagrange top with an ideal fluid are carried out.

УДК 538.9

ТОНКА СТРУКТУРА КОЛИВНОЇ РЕАКЦІЇ ОКИСНЕННЯ ЧАДНОГО ГАЗУ НА ПОВЕРХНІ МЕТАЛЕВОГО КАТАЛІЗАТОРА

Петро Костробій, Ірина Риж

Національний університет "Львівська політехніка" (Україна)

petro.kostrobi@gmail.com; ira.saj@gmail.com

Розглянуто модель реакції каталітичного окиснення чадного газу (СО) згідно механізму Ленгмюра-Гіншелвуда (LH) [1], яка враховує процес дифузії молекул СО на поверхні платини Pt(110). На відміну від існуючих моделей [2, 3], поверхня каталізатора вважається плоскою з заданою декартовою системою координат ХОУ. Часова еволюція поверхневих покриттів СО (u) та кисню (v), а також частки поверхні неперестроєної структури (1×1) [4] (w) визначається наступними кінетичними рівняннями [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p_u \kappa_u s_u \left(1 - \left(\frac{u}{u_{sat}} \right)^3 \right) - k_{des} u - k_r u v + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p_v \kappa_v s_v \left(1 - \frac{u}{u_{sat}} - \frac{v}{v_{sat}} \right)^2 - k_r u v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k_{ph} \left(1 + \exp \left(\frac{u_0 - u}{\delta u} \right) \right)^{-1} - k_{ph} w. \quad (3)$$

Рівняння (1)-(3) складають запропоновану двовимірну математичну модель процесу окисації СО на поверхні платинового каталізатора.

Величини параметрів, які використовувалися в числових розрахунках, наведені в праці [5]. Результати числового аналізу моделі (1)-(3) подано на рис. 1.

З рис. 1 видно, що динаміка залежності поверхневих покриттів $u(x, y, t)$ $v(x, y, t)$ і частки поверхні неперестроєної структури (1×1) $w(x, y, t)$ має яскраву осциляційну поведінку. На відміну від одновимірної моделі [3], розрахована нами динаміка залежності поверхневих покриттів демонструє коливання змішаного режиму, які спостерігаються експериментально на Pt(110) [6].

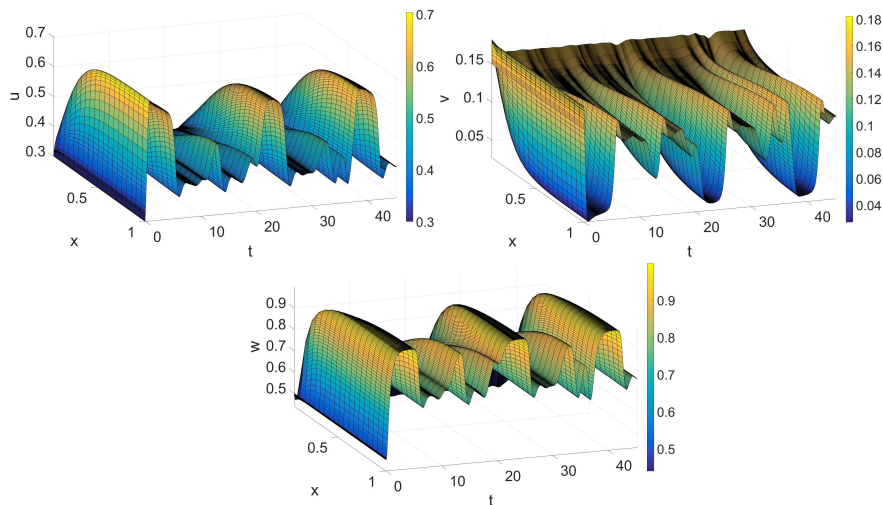


Рис. 1. Залежність $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ при фіксованому значенні координати $y = 0,5$.

1. *Baxter R.J., Hu P.* Insight into why the Langmuir-Hinshelwood mechanism is generally preferred // *J. Chem. Phys.* – 2002. – **116**, N. 11. – P. 4379-4381.
2. *Krischer K., Eiswirth M., Ertl G.* Oscillatory CO oxidation on Pt(110): Modeling of temporal self-organization // *J. Chem. Phys.* – 1992. – **96**, N. 12. – P. 9161-9172.
3. *Бзовська І. С., Мрузлод І. М.* Поверхневі структури в каталітичній реакції монооксиду вуглецю // *Укр. фіз. журн.* – 2016. – **61**, № 2. – С. 140-148.
4. *Gritsch T., Coulman D., Behm R.J., Ertl G.* Mechanism of the CO-induced (1×2)-(1×1) structural transformation of Pt(110) // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – **63**, N. 10. – P. 1086-1089.
5. *Ryzha I., Matseliukh M.* Carbon monoxide oxidation on the Pt-catalyst: modeling and stability // *Math. Model. Comput.* – 2017. – **4**, N. 1. – P. 96-106.
6. *Eiswirth M., Krischer K., Ertl G.* Nonlinear dynamics in the CO-oxidation on Pt single crystal surfaces // *Appl. Phys. A.* – 1990. – **51**, N. 2. – P. 79-90.

FINE STRUCTURE OF CARBON MONOXIDE OXIDATION OSCILLATORY REACTION ON THE METAL CATALYST SURFACE

The two-dimensional mathematical model for carbon monoxide (CO) oxidation on the platinum (Pt) catalyst surface is investigated according to the Langmuir-Hinshelwood (LH) mechanism. The effects of the catalyst surface reconstruction processes and the substrate temperature are taken into account. It is shown that when two-dimensionality is accounted for, the dynamics of oxidation process changes and mixed mode oscillations (MMO) can be obtained.

ДОСЛІДЖЕННЯ НОРМАЛЬНОГО ПАДІННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ РІЗНОЇ ПОЛЯРИЗАЦІЇ НА ПЛОСКИЙ НЕОДНОРІДНО ДЕФОРМОВАНИЙ ШАР

Оксана Кравчишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

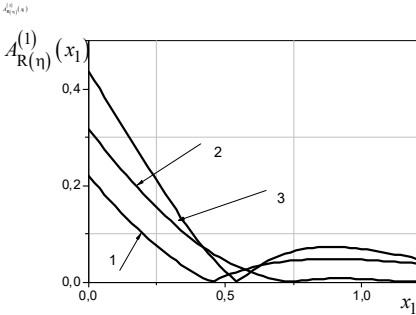
oxana.kravchyshyn@meta.ua

Наявність у твердому тілі неоднорідного напружено-деформованого стану впливає на процеси проходження, відбивання та заломлення зондувальних ультразвукових хвиль. Для контролю матеріалів та елементів конструкцій широко використовують поздовжні та поперечні хвилі нормального падіння, які найкраще виявляють дефекти у досліджуваному об'єкті.

Розглядається ізотропний пружний шар $\mathbf{S}: 0 < x_2 < h$ із густиною маси ρ , коефіцієнтами Ляме λ і μ та Мурнагана a, b, c , що розділяє два ізотропних півпростори $\mathbf{S}^{(1)}: -\infty < x_2 < 0$ та $\mathbf{S}^{(2)}: h < x_2 < \infty$ із густинами маси $\rho^{(n)}$ та коефіцієнтами пружності $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$, ($n = 1, 2$) відповідно. Шар перебуває у стані плоскої деформації $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$, ($i, j = 1, 2$), яка робить його акустично неоднорідним та анізотропним. Нехай у півпросторі $\mathbf{S}^{(1)}$ у напрямку осі Ox_2 поширюється плоска ультразвукова хвиля L - або Sv -поляризації, яка частково відбивається від поверхонь розділу середовищ $x_2 = 0$ та $x_2 = h$, а частково проходить в інше середовище. У випадку нормального падіння відбиватись та заломлюватись будуть лише по одній хвилі із поляризацією падаючої.

Хвильове поле у шарі \mathbf{S} є суперпозицією відбитих та заломлених на поверхнях розділу середовищ хвиль із амплітудами $\dot{W}_\chi(x_1, x_2)$ ($\chi = I, R$). Для їх визначення записано рівняння в частинних похідних еліптичного типу із залежними від координат шару коефіцієнтами. На поверхнях розділу середовищ $x_2 = 0$ та $x_2 = h$ задамо умови ідеального механічного контакту для пружних збурень, що пов'язують амплітуди $\dot{W}_\chi^{(n)}$ ($n = 1, 2$), $\dot{W}_\chi(x_1, x_2)$ хвиль у півпросторах та шарі. Для розв'язування отриманої крайової задачі використано розроблений раніше ітераційний метод [1].

У результаті у нульовому наближенні поля початкових деформацій отримано співвідношення для коефіцієнтів відбивання/заломлення хвиль за падіння хвилі поляризації ($\eta = L, Sv$) як функцій середньоінтегральних значень компонент тензора початкової деформації вздовж напрямків поширення зондувального імпульсу.



Раніше аналогічну задачу було розв'язано для хвилі SH- поляризації нормального падіння [2].

Було числово досліджено вплив поля початкових деформацій на величини амплітуд хвиль нормального падіння різної поляризації, відбитих і заломлених неоднорідно деформованим шаром із залишковими напруженнями, зумовленими стрибками переміщень в

околі поверхні $x_1 = 0$, який розділяє два ізотропних півпростори. На рисунку показано модулі амплітуд відбитих шаром у середовище $\mathbf{S}^{(1)}$ хвиль різної поляризації залежно від точки входження x_1 зондувальної хвилі у шар. Пружні властивості $\mathbf{S}^{(1)}$ співпадають із пружними властивостями шару без деформацій. Криві 1, 2, 3 відповідають різним поляризація падаючої хвилі, а саме: ($\eta = L, Sv, SH$). Виявлено, що наявність поля початкових деформацій найменше впливає на поздовжньо поляризовану хвилю.

Отримані співвідношення, що встановлюють зв'язок між хвильовими характеристиками та компонентами деформації шару, можна ефективно застосовувати для формулювання прямих та обернених задач неруйнівного визначення НДС неоднорідно деформованих твердих тіл.

1. Чекурін В.Ф., Кравчишин О.З. Математична модель взаємодії пружних хвиль L- та Sv- поляризації із неоднорідно деформованим шаром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 22, № 2. – С. 133-141.
2. Кравчишин О.З., Чекурін В.Ф. Взаємодія гармонічної пружної SH-хвилі нормального падіння із неоднорідно деформованим плоским шаром // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2014. – Вип. 12. – С. 97-103.

INVESTIGATION OF NORMAL FALLING OF RESILIENT WAVES OF DIFFERENT POLARIZATION ON THE NON-UNIFORMLY PLANE LAYER

For the case normally incidence of harmonic plane L- and Sv-waves on elastic layer under plane deformation, an elastic layer under plane deformation, a stationary problem has been formulated. The influence of non-uniform strains on the coefficients of reflected and refracted waves of different polarization reflection and refraction has been studied.

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ФІЗИКО-ХІМІЧНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ РІДИН В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ПРИ ЗМІНАХ ЇХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВНАСЛІДОК ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**Віталій Крємез, Сергій Телима***Інститут гідромеханіки НАН України*KremezVitaSem@gmail.com

Фільтрація багатокомпонентних рідин в природних і штучних пористих середовищах в багатьох випадках супроводжується масообміном між компонентами в поровому розчині і на поверхні, а також у мікропорах (за гетерогенної будові середовища) частинок пористих матеріалів. Внаслідок масообмінних процесів різного походження (механічні, фізико-хімічні і біохімічні) відбуваються фазові перетворення, що призводять до структурних змін пористих середовищ внаслідок утворення або зникнення нерухомого осаду у поровому просторі. Зазначені процеси відбуваються у фільтрах водоочисних споруд, водозабірних і дренажних свердловин, а також в деяких типах природних ґрунтів на ділянках інтенсивного техногенного впливу на режим ґрунтових вод.

В роботі розроблено математичну модель зазначених процесів, засновану на фундаментальних рівняннях фільтрації підземних вод, тепломасопереносу і тепломасообміну між розчином і твердою фазою ґрунту. Розглянуто нелінійні рівняння кінетики масообміну, що відповідають випадкам наявності розчинних солей в поверхневій (плівковій) або об'ємній (дисперсній) формах. Оригінальність дослідження криється в параметризації задачі, тобто замикання системи диференціальних рівнянь в часткових похідних, що відбувається шляхом залучення теоретичних або експериментальних залежностей коефіцієнта фільтрації пористого середовища від концентрації солей в твердій фазі. Розглянуто типові початкові і граничні умови, що відповідають характерним випадкам природного і техногенного впливу на водний, хімічний і тепловий режими підземних вод. Сформульовані проблеми є типовими прикладами задач фізико-хімічної гідродинаміки підземних вод в ґрунтах із змінними властивостями. Записано дискретні аналоги рівнянь, приведено алгоритм розв'язання задачі методом кінцевих різниць (МКР). За допомогою розробленої програми для ПК виконано розрахунки і встановлено характер змін гідродинамічних напорів, концентрацій, температури і коефіцієнта фільтрації для модельного прикладу в рамках площинно-вертикальної моделі. Досліджено особливості процесів в основах будинків за наявності лінзоподібного утворення хімічно-суфозійного ґрунту під впливом різноманітних дренажних споруд. Вивчено вплив теплових по-

токів на процеси масообміну в хімічно-суфозійних ґрунтах в межах територій старої забудови, де найчастіше відбуваються аварійні втрати гарячої води з водонесучих комунікацій.

SOME PROBLEMS OF PHYSICO-CHEMICAL HYDRODYNAMICS OF LIQUID IN POROUS MATERIALS IN CHANGES OF THEIR PROPERTIES AFTER PHASE TRANSFORMATIONS

The mathematical model of these processes is developed, which is based on the fundamental equations of groundwater filtration, heat transfer mass transfer and heat transfer between the solution and solid phase of soil. Non-linear equations of mass exchange kinetics are considered, which correspond to the cases of soluble salts in the surface (film) or volumetric (disperse) forms. The originality of the research lies in the parametrization of the problem, that is, the closure of the system of differential equations in partial derivatives, which is achieved by attracting theoretical or experimental dependences of the coefficient of filtration of the porous medium on the concentration of salts in the solid-phase.

ДИФРАКЦІЯ SH-ХВИЛЬ ТОНКИМ НЕКОНТРАСТНИМ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Ярослав Кунець, Роман Рабош, Юлія Максимів

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

romanrabosh@gmail.com; kunets@iappmm.lviv.ua; yulyya2609@i.ua

Нехай у пружному ізотропному півпросторі міститься тонке п'єзокерамічне включення постійної товщини h та довжини $2a$ ($\varepsilon = h/a \ll 1$). Матеріал неоднорідності належить до кристалографічного класу $6mm$, а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини x_1x_2 , $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати [1]. Складові композиту перебувають в умовах ідеального механічного контакту. На поверхні включення електрична індукція рівна нулю. За поздовжнього зсуву та при усталених коливаннях електропружної системи переміщення у матриці задовольняють рівняння Гельмгольца. У п'єзоелектричній неоднорідності виконуються відповідне рівняння руху та електростатичне рівняння відносно електричного потенціалу [1, 2].

Вважаємо, що матеріали тонкого включення і матриці неконтрастні, тобто $\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$, де γ – відносна жорсткість матеріалу неоднорідності.

Динамічну взаємодію такого п'єзоелектричного включення з пружним середовищем асимптотично точно змодельовано з допомогою ефективних граничних умов [1, 2]:

$$\Psi(x_1) = (1 - \gamma_*) h \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial U^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + (k^2 - \gamma_* k_0^2) h(x_1) U^{in}(\mathbf{x}),$$

$$\Phi(x_1) = \frac{1 - \gamma_*}{\gamma_*} h \frac{\partial U^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0; \quad \gamma_* = \gamma(1 + \eta^2). \quad (1)$$

Тут $\Phi(x_1)$ і $\Psi(x_1)$ – стрибки шуканих переміщень і їхніх похідних через серединну лінію неоднорідності; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку матеріалу включення; $U^{in}(\mathbf{x})$ – динамічне навантаження на розсіювач.

За допомогою ефективних граничних умов (1) та інтегральних подань Гріна для розв'язку змодельованої задачі [3] отримуємо вираз для комплексної амплітуди розсіяння SH-хвиль включенням у півпросторі:

$$f(\theta) = \left(\frac{1-\gamma_*}{\gamma_*} \sin \theta_{in} \sin \theta \sin(k_* H_* \sin \theta) \sin(k_* H_* \sin \theta_{in}) + \right. \\ \left. + \left((1-\gamma_*) \cos \theta_{in} \cos \theta + \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \cos(k_* H_* \sin \theta) \cos(k_* H_* \sin \theta_{in}) \right) J(\theta), \\ J(\theta) = 2 \frac{\sin \left[k_* (\sin \theta + \sin \theta_{in}) \right]}{k_* (\sin \theta + \sin \theta_{in})},$$

де $k_* = ka$ і $H_* = h/a$ – приведені хвильова частота і відносна глибина залягання включення; θ_{in} та θ – кути падіння плоскої гармонічної хвилі на включення та спостереження; ρ і ρ_0 – густини у матриці і неоднорідності.

За допомогою отриманих теоретичних результатів досліджено закономірності поведінки спектральних характеристик розсіяних полів у дальній хвильовій зоні (зоні Фраунгофера).

1. Сулим Г.Т., Кунець Я.І., Рабош Р.В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісн. Донецького університету. – 2008. – № 1. – С. 137-141.
2. Rabosh R.V. Dynamic interaction between elastic medium and thin curvilinear piezoelectric inclusion under longitudinal vibration of composite // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 168, No. 5 – P. 625-632.
3. Максимів Ю.І., Рабош Р.В., Кунець Я.І., Пороховський В.В. Взаємодія SH-хвиль з тонким п'єзоелектричним неконтрастним включенням у пружному півпросторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 97-101.

SCATTERING OF SH-WAVES BY A THIN NONCONTRAST PIEZOELECTRIC INCLUSION IN AN ELASTIC HALF-SPACE

The antiplane dynamic problem for an elastic half-space with a thin noncontrast piezoelectric inclusion is considered. The components of the electroelastic system are in the ideal mechanical contact and electrical induction on the inclusion surface equals zero. Wave fields scattered into the far zone (Fraunhofer zone) are investigated based on effective boundary conditions and boundary integral equation method.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ТРИЛАНКОВИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ ХВИЛЬОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Оксана Литвин, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія» (Україна)

litvinov.od@gmail.com; dr.vg.popov@gmail.com

Нехай у необмеженому пружному середовищі, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації, міститься триланкове в перерізі площиною xOy тонке абсолютно-жорстке включення. З включенням взаємодіють гармонічні хвилі поздовжнього зсуву, що викликають наступні переміщення вздовж осі Oz

$$W^0(x; y) = A e^{i\kappa_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G},$$

де G, ρ – модуль зсуву та густина середовища, ω – частота коливань, θ_0 – кут між напрямком поширення хвилі та віссю Ox . За умов антиплоскої деформації єдина відмінна від нуля z -компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля $W(x; y)$ в системі координат xOy задовольняє рівняння Гельмгольца.

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується локальна система координат $x_k O_k y_k$. За умов повного зчеплення на кожній ланці виконуються умови

$$W_k(x_k, 0) = c - W_k^0(x_k, 0), \quad (1)$$

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2; 3, \quad (2)$$

де $W_k(x_k; y_k), W_k^0(x_k; y_k)$ – переміщення $W(x; y), W^0(x; y)$ після переходу до системи координат $x_k O_k y_k$, c – переміщення включення під дією падаючої хвилі, τ_{zy_k} – відповідні дотичні напруження, $\chi_{1k}(x_k)$ – невідомий стрибок дотичних напружень на k -ій ланці, $2d_k$ – довжина k -ї ланки.

Метод розв'язання полягає у поданні переміщень в тілі у вигляді суми розривних розв'язків рівняння Гельмгольца зі стрибками (2), побудованими на кожній ланці включення. Відносно невідомих стрибків після реалізації умов (1) отримана система інтегральних рівнянь

$$-\int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{11}(\tau - \xi) \right) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) (q_{12}(\tau, \xi) - R_{12}(\tau, \xi)) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_3(\tau) R_{13}(\tau, \xi) d\tau = f_1(\xi),$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\tau)(q_{21}(\tau, \xi) - R_{21}(\tau, \xi))d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau)\left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{22}(\tau - \xi)\right)d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 \varphi_3(\tau)(q_{23}(\tau, \xi) - R_{23}(\tau, \xi))d\tau = f_2(\xi),$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau)R_{31}(\tau, \xi)d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau)(q_{32}(\tau, \xi) - R_{32}(\tau, \xi))d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_3(\tau)\left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{33}(\tau - \xi)\right)d\tau = f_3(\xi),$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^3 \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau)(\ln|\tau| + D_l(\tau))d\tau = c_0 - f_{0l}, \quad \varphi_k(\tau) = \frac{\chi_k(\eta)}{G}, \quad k=1;2;3. \quad (3)$$

До системи необхідно додати рівність для визначення невідомої амплітуди коливань включення $c_0 = c / d, \quad d = \max(d_1, d_2, d_3)$.

Сингулярна складова рівнянь системи окрім ядра Коші містить ще і ядра $q_{lk}(\tau, \xi)$ з нерухомою особливістю при $\tau, \xi = \pm 1$.

Тому одним з основних результатів є числовий метод розв'язання отриманої системи. Відповідно до запропонованого методу невідомі функції подаються у вигляді

$$\varphi_1(\tau) = (1+\tau)^{-1/2} (1+\tau)^{-\delta_1} \psi_1(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = (1+\tau)^{-\delta_1} (1+\tau)^{-\delta_2} \psi_2(\tau),$$

$$\varphi_3(\tau) = (1+\tau)^{-\delta_2} (1+\tau)^{-1/2} \psi_3(\tau). \quad (4)$$

Тут показники особливості залежать від значення кутів, утворених ланками включення. Далі здійснюється апроксимація функцій, яка ґрунтується на використанні спеціальних інтерполяційних многочленів. Це дає можливість отримати спеціальні формули для сингулярних інтегралів і застосувати до системи (3) метод колокації.

За характеристику напруженого стану поблизу включення прийнятий узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Отримані формули обчислення КІН, значення яких виражені через наблизений розв'язок системи інтегральних рівнянь. Досліджено вплив на значення КІН кута, утвореного ланками включення і частоти падаючої хвилі.

THE STRESS STATE OF AN ELASTIC SOLID WITH A THREE-TIER RIGID INCLUSION UNDER HARMONIC WAVE LOAD

A problem on the determination of stress state in the vicinity of a tunnel rigid inclusion with a three-tier cross-section is considered. Plane harmonic waves of the longitudinal shift are propagating in the unbounded medium containing the inclusion. The problem is reduced to the solution of a system of three singular integral equations with fixed singularities. A numerical method is employed for construction of an approximate solution to this system. It takes into account the true asymptotics of unknown functions and uses special quadrature formulas for singular integrals.

УДК 532.5

ПРЯМЕ ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОГО ПОТОКУ НЕСТИСЛИВОЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ З ДВОМА ПОСЛІДОВНИМИ СТЕНОЗАМИ

Володимир Малюга, Ярослав Троценко

Інститут гідромеханіки НАН України;

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна)

v_s_malyuga@ukr.net; yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Течія рідини (газу) в нерегулярних каналах широко зустрічається як в природі, так і в технічних приладах: судини кровоносної системи людини, бронхіальні дерева, труби для транспортування технічних середовищ, вентиляційні системи, твердопаливні ракетні двигуни тощо. Через складну геометрію таких систем структура потоку приймає неоднорідний характер та може бути нестационарною, що при певних умовах призводить до виникнення тонального звуку [1]. Сьогодні, завдяки стрімкому розвитку комп'ютерної техніки та числових методів, стає можливим дослідження таких систем за допомогою прямого чисельного моделювання.

У даній роботі досліджується течія в'язкої нестисливої рідини у напів-нескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими стенозами (різкими звуженнями поперечного перетину). Вважається, що стінки каналу та стенозів - нерухомі й абсолютно жорсткі (рис. 1).

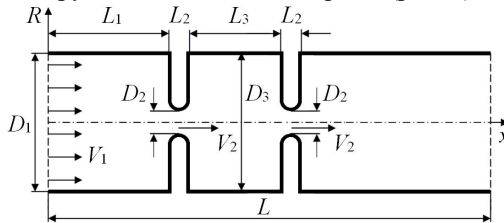


Рис. 1. Повздовжній перетин каналу.

В межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса, що у безрозмірних величинах у векторній формі мають вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

де $Re = V_2 D_2 / \nu$. Числове розв'язання проводиться методом скінченних елементів з використанням різницевих схем другого порядку. Для дискретизації області використовується кусково-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах стенозів. Для розрахунку об'ємних інтегралів по контрольному об'єму застосовується загальна процедура Гауса. Для інтерполяції конвективних членів використовується TVD форма центрально-різницевої схеми для векторного поля з обмежувачем типу Sweby [2]. При дискретизації похідної за часом використовується неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад. Зв'язаний розрахунок поля швидкості і тиску проводиться за допомогою процедури PISO [3]. Для розв'язання отриманої системи лінеаризованих алгебраїчних рівнянь використовуються ітераційні солвери, що побудовані на основі методу спряжених/біспряжених градієнтів, а для передобумовлення обрано спрощені схеми неповної факторизації Холецкого та неповної LU-факторизації для симетричних і асиметричних матриць відповідно [4].

Встановлено, що при обраних параметрах течія рідини в області між стенозами є нестационарною. У зсувному шарі, утвореному прилежним шаром, що зривається з поверхні першого стенозу, утворюється послідовний ряд вихорів. Ці вихорі викликають стійкі періодичні автоколивання профілю швидкості потоку в отворі другого стенозу, що може бути джерелом звуку в каналі.

1. *Вовк І.В., Гринченко В.Т.* Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике). – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. *Sweby P.K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *J. Numer. Anal.* – 1984. – **21**, Iss. 5. – P. 995-1011.
3. *Ferziger J.H., Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. – Berlin: Springer, 2002. – 424 p.
4. *Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J.M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.* Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.

DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF THE 3-D FLOW OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN A CYLINDRICAL DUCT WITH TWO SERIAL STENOSES

The 3-D flow of viscous incompressible fluid in a cylindrical duct with two serial stenoses (contractions) is studied by the numerical solution of unsteady Navier-Stokes equations. The discretization procedure is based on the finite volume method using the TVD scheme for the discretization of the convective terms and second order accurate in both space and time difference schemes. The resulting system of non-linear algebraic equations is solved by the PISO algorithm. It is established that under the chosen parameters the fluid flow in the region between the stenoses is non-stationary. A series of vortices is formed in the shear layer formed by the boundary layer breaking off from the first stenosis. It causes stable periodic self-sustained oscillations of the velocity profile in the orifice of the second stenosis. These oscillations may serve as an acoustic source in the duct.

УДК 539.3

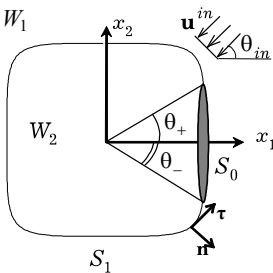
МЕТОД НУЛЬОВОГО ПОЛЯ У ЗАДАЧАХ РОЗСІЯННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ ВОЛОКНАМИ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА МІЖФАЗНИХ ПОВЕРХНЯХ

Валерій Матус, Ярослав Кунець, Віктор Міщенко, Василь Пороховський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

matus@iappmm.lviv.ua; adm@iappmm.lviv.ua; porvas@meta.ua

Характеристики хвиль (фазова швидкість, загасання, дисперсія), що поширюються у волокнисто-армованих композитах суттєво залежать від умов контакту матриці з волокнами. На сьогодні в літературі достатньо повно досліджено акустичні властивості композитів при ідеальному контакті їх складових (неперервність векторів переміщень та напружень). Проте, міжфазні поверхні реальних композитних матеріалів є недосконалими. Переважно цю недосконалість моделюють тонким прошарком постійної товщини. При цьому досліджували, в основному, волокна кругової форми і розв'язки відповідних задач розсіяння отримували при допомозі методу розділення змінних. У доповіді запропоновано метод нульового поля для задачі розсіяння пружних хвиль волокном неканонічної форми за наявності тонкого пружного дефекту на частині міжфазної поверхні. Раніше цей метод був розвинутий для задач розсіяння пружних хвиль частково відшарованими волокнами неканонічної форми [1, 2].



Розглянемо необмежене пружне двовимірне середовище W_1 з густиною ρ_1 та модулями Ламе λ_1, μ_1 , що містить обмежену область $W_2 = R^2 \setminus W_1$ (волокно) неканонічної форми з відповідними матеріальними параметрами ρ_2, λ_2, μ_2 . Пружна система перебуває під дією усталених у часі навантажень. Вектори переміщень $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ у композиті задовольняють рівняння руху Ляме.

На частині S_1 міжфазної поверхні $S = \partial W_2$

волокно ідеально контактує з матрицею:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{t}_1(\mathbf{u}_1) = \mathbf{t}_2(\mathbf{u}_2), \quad \mathbf{x} \in S_1,$$

де $\mathbf{t}_j(\mathbf{u}_j) = \mathbf{n} \lambda_j \nabla \cdot \mathbf{u}_j + 2\mu_j \partial \mathbf{u}_j / \partial n + \mu_j \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}_j)$ – вектори напружень; \mathbf{n} –

зовнішня одинична нормаль до S_1 . На $S_0 = S \setminus S_1$ розміщене тонке пружне включення малої жорсткості $\max(\lambda_0, \mu_0) / \max(\lambda_j, \mu_j) \ll 1$, $j = 1, 2$, де λ_0, μ_0 – модулі Ляме включення. Товщину включення $h(\mathbf{x})$ характеризує малий безрозмірний параметр $\varepsilon = l^{-1} \max_{\mathbf{x} \in S_0} h(\mathbf{x}) \ll 1$ (l – характерний розмір S_0).

Динамічну взаємодію такої неоднорідності з навколишнім середовищем наближено моделюємо ефективними умовами контакту, записаними на частині S_0 поверхні волокна:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x})(\eta_1^{-1} \mathbf{nn} + \mu_0^{-1} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{t}_1(\mathbf{u}_1), \quad \mathbf{x} \in S_0, \\ \mathbf{t}_1(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{t}_2(\mathbf{u}_2), \quad \mathbf{x} \in S_0, \end{aligned}$$

де $\eta_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)$; $\boldsymbol{\tau}$ – одиничний тангенціальний вектор до S .

Для дослідження дифракції P - та SV -хвиль розглянутим розсіювачем розвинуто метод нульового поля. Основна ідея методу полягає у поданні шуканих переміщень та напружень на поверхні волокна через спеціально введені векторні функції, що адекватно описують асимптотичну поведінку механічних величин в околі країв міжфазної неоднорідності. Такий підхід дає можливість суттєво зменшити порядок редукції відповідних систем лінійних алгебричних рівнянь. Шляхом числового експерименту встановлено співвідношення між хвильовим розміром розсіювача та порядком редукції, за якого відносна похибка обчислень менша за 10^{-4} .

1. *Kunets Y.I., Matus V.V., Mykhas'kiv V.V. et al. Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack // Mech. Composite Mat. – 2008. – 44. – P. 165-172.*
2. *Matus V., Kunets Y., Mykhas'kiv V., Boström A., Zhang Ch. Wave propagation in 2D elastic composites with partially debonded fibres by the null field approach // Waves in Random and Complex Media. – 2009. – 19, № 4. – P. 654-669.*

NULL FIELD METHOD FOR SCATTERING OF ELASTIC WAVE ON ELASTIC FIBERS WITH THIN INTERPHASE INHOMOGENEITIES

The modified null field approach is proposed for solving two-dimensional scattering problems of P- and SV-waves by an elastic fiber of a non-canonical form with thin interphase inclusion of low rigidity. The interaction of inclusion with the environment is modeled by the effective boundary conditions recorded on the part of the surface scatterer. The convergence and validity of the proposed method are analyzed.

**РОЗВИТОК МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ У РАМКАХ
КОНТИНУУМУ КОССЕРА****Олена Мікуліч, Василь Шваб'юк***Луцький національний технічний університет (Україна)*shypra@ukr.net; v.shvabyuk@gmail.com

Велика кількість сучасних досліджень присвячена створенню нових зернистих композиційних матеріалів, що мають широке застосування. Низка досліджень показала, що використання апарату класичної теорії пружності до дослідження напруженого стану таких матеріалів, особливо за динамічного навантаження, призводить до значних відмінностей між теоретичними та експериментальними результатами.

Це пояснюється тим, що при високочастотних коливаннях і малих значеннях довжин хвиль відбувається істотний вплив мікроструктури матеріалу на динамічний напружений стан таких матеріалів. Особливо важливим є урахування впливу мікроструктури матеріалу при розрахунках концентрації динамічних напружень на границі отворів чи порожнин.

У рамках класичної теорії пружності не можна пояснити і спрогнозувати з необхідною точністю перебіг хвильових процесів, що відбуваються у «зернистих» середовищах за впливу імпульсного чи динамічного навантаження. Це обумовлено тим, що суцільна модель твердого тіла, яка лежить в основі класичної теорії пружності, не дає можливість показати ті властивості реальних тіл, що визначаються їх дискретною структурою.

Для врахування таких властивостей необхідно використовувати уточнені моделі, у яких властивості, що визначаються дискретною структурою, були б явно відображені.

Тому, у роботі для дослідження динамічної поведінки «зернистих» мікрополних середовищ використовуються континуум Коссера [1]. У рамках цієї моделі кожна мікрочастинка розглядається як абсолютно тверде тіло: має шість ступенів вільності, що характеризують положення у просторі та орієнтацію. У рамках континууму Коссера з'являються додаткові фізичні параметри, які характеризують лінійний розмір, момент інерції частин та властивості частин відносно обертання. Дослідження взаємодії частинок мікрополярного тіла здійснюється не тільки з урахуванням силових (звичайних), але і моментних напружень.

Для дослідження динамічної концентрації «зернистих» середовищ у роботі запропоновано метод, що ґрунтується на застосуванні перетворення

Фур'є за часом та модифікації методу граничних інтегральних рівнянь.

Використовуючи рівняння руху моментного континууму Коссера [2]:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i,$$

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \mu_{ji,j} = I \ddot{\phi}_i,$$

де u_i , ϕ_i – компоненти векторів переміщень та мікроповоротів, X_i – компоненти вектора масових сил, ρ – густина середовища, I – інерція обертання одиничного об'єму, σ_{ji} , μ_{ji} – силові та моментні напруження [2]:

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij},$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij},$$

λ , μ , α , β , γ , ε , κ – пружні характеристики металу у континуумі Коссера, $\gamma_{ij} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \phi_k$ – несиметричний тензор деформацій; $\kappa_{ij} = \phi_{i,j}$ – тензор згину-кручення, ϵ_{ijk} – антисиметричний тензор Леві-Чівіта, у області Фур'є-зображень на основі зважено-залишкового методу побудовано потенціальні представлення зображень переміщень та мікроповоротів. Використовуючи побудовані для континууму Коссера фундаментальні функції впливу переміщень та мікроповоротів, записано інтегральні рівняння першої основної задачі, ядра яких мають особливості типу Коші.

Використовуючи числові методики [3] розв'язання побудованих інтегральних рівнянь та визначення динамічних напружень, на основі запропонованого у роботі методу досліджено динамічну концентрацію напружень у циліндричній порожнині керамічного середовища на основі карбиду кремнію.

1. *Eringen A.C.* Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves // *Int. J. Engng Sci.* – 1972. – **10**. – P. 425-435.
2. *Nowacki W.* The Linear Theory of Micropolar Elasticity // *Micropolar elasticity.* – 1974. – P. 1-34.
3. *Шваб'юк В.І., Мікуліч О.А., Шваб'юк В.В.* Напружений стан пінистих середовищ із тунельними порожнинами при нестационарному динамічному навантаженні // *Проблеми прочності.* – 2017. – **6**. – С. 99-110.

DEVELOPMENT OF THE BOUNDER INTEGRAL EQUATIONS METHOD TO THE INVESTIGATION OF DYNAMIC PROBLEM IN COSSERAT CONTINUUM

The paper proposes a method of solving the non-stationary problem of micropolar elasticity, which based on the application of Fourier transform for time variable and the development of the boundary integral equation method. For the constructed fundamental functions of displacements and microrotations, the integral equations of the first exterior problem are written. Numerical calculations of the stress concentration on the boundary of the cylindrical cavity of the SiC ceramic medium are performed.

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ З ТРІЩИНОЮ У ПРУЖНОМУ ШАРІ

Зіновій Назарчук, Мирон Войтко, Ярослав Кулинич, Дозислав Куриляк

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

voytko@ipm.lviv.ua

Розв'язується задача дифракції SH-хвилі на дефекті типу тріщини в пружному шарі, а також відповідна спектральна задача. Знайдено залежності частот резонансних коливань від параметрів структури.

У декартовій системі координат $Oxyz$ розглянуто пружний шар з вільними від напружень границями $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, d), z \in (-\infty, \infty)\}$ у якому,

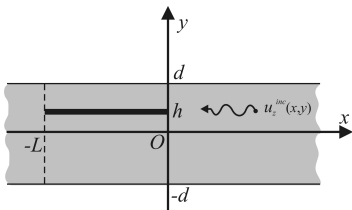


Рис.1. Геометрична схема

на відстані h від середньої лінії міститься дефект типу тріщини скінченної протяжності $\Gamma: \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ (рис. 1).

Структура опромінюється нормальною гармонічною SH-хвилею з гармонічною залежністю від часу $e^{-i\omega t}$, що поширюються у пластині P .

Крайова задача дифракції цієї хвилі на тріщині в шарі P записується так:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\hat{\partial} u^{tot}(x, y) / \hat{\partial} y = 0, \quad y = \pm d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\hat{\partial} u^{tot}(x, y) / \hat{\partial} y = 0, \quad y = \pm 0, \quad x \in (-L, 0), \quad (3)$$

де $u = u(x, y)$ – невідома u_z – компонента дифрагованого поля зміщень. Крім того, шукана функція повинна задовольняти умовам граничного поглинання на нескінченності та умовам Мейкснера в околі вершин тріщини.

Застосовуючи перетворення Фур'є, крайову задачу (1)–(3) зведено до функціонального рівняння типу Вінера–Хопфа:

$$[\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L} \Psi^{-}(\alpha)] M(\alpha) + J_1(\alpha) = 0. \quad (4)$$

Тут $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha (\equiv \sigma + i\tau)$ – параметр перетворення Фур'є, $\alpha \in \Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}, \tau_0 \leq \text{Im } k$; $\Psi^{(+)}(\alpha), \Psi^{-}(\alpha)$ – невідомі Фур'є трансформанти поля напружень відповідно справа та зліва від тріщини, $J_1(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка за фізичним змістом є трансформантою Фур'є стрибка зміщень на

берегах тріщини, $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в областях регулярності; $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, коли $\tau < \tau_0$, а при $\tau > -\tau_0$ отримуємо $e^{iaL} J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$. Парна функція $M(\alpha)$ має вигляд

$$M(\alpha) = -\frac{\text{sh}(2\gamma d)}{\gamma \text{sh}[\gamma(d+h)] \text{sh}[\gamma(d-h)]}, \quad (5)$$

є регулярною у смузі Π і допускає факторизацію у вигляді:

$$M(\alpha) = M_+(\alpha) M_-(\alpha), \quad (6)$$

де $M_{\pm}(\alpha)$ – регулярні функції, які не мають нулів у півплощинах $\tau > -\tau_0$ та $\tau < \tau_0$.

Функціональне рівняння (4) зведено до еквівалентної нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР) другого роду, яку подаємо у матричному вигляді так

$$[\mathbf{I} + \mathbf{A}]\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (7)$$

де $\mathbf{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – вектор невідомих, $x_n = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$; \mathbf{A}, \mathbf{I} – нескінченні матриці, \mathbf{I} – одинична матриця, \mathbf{F} – права частина; для елементів матриці $\mathbf{A}: \{a_{ln}\}_{l,n=1}^{\infty}$ справедлива оцінка

$$|a_{mn}| \leq C m^{-1} n^{-1} e^{-\lambda n}, \quad (8)$$

де $C, \lambda > 0$ – відомі сталі. Тоді $\sum_{m,n} |a_{mn}|^2 < \infty$, а отже розв'язок НСЛАР (7)

існує в l_2 .

Знаходження спектра вихідної дифракційної задачі зводиться до знаходження розв'язку характеристичного рівняння

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{A}(\Omega)] = 0. \quad (9)$$

Для однозначного визначення коренів рівняння (6) розглядаємо як функцію спектрального параметра $\Omega = 2kd$ на рімановій поверхні з розрізами, які проводимо так, щоб на першому листі забезпечити формування загасаючих у часі власних коливань [1].

1. Назарчук З.Т., Куриляк Д.Б., Войтко М.В., Кулинич Я.П. Про взаємодію пружної SH-хвилі з міжфазною тріщиною в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 107-118.

SH-WAVE RESONANT INTERACTION WITH CRACK IN THE ELASTIC SLAB

Wiener-Hopf technique is applied for rigorous analysis of elastic SH-wave diffraction by the finite crack in the elastic slab and for investigation the corresponding spectral properties.

УДК 539.3

**ЗАДАЧА ПРО УДАР ПО ПРУЖНОМУ СТРИЖНІ
ІЗ ЗОВНІШНІМ СУХИМ ТЕРТЯМ НА БОКОВІЙ ПОВЕРХНІ
ЗА УМОВИ ЛІНІЙНОГО ЗРОСТАННЯ ПРИТИСКУ НА ТОРЦІ**

Василь Перепічка

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

an_w@i.ua

Задачі динамічної взаємодії стержневих систем з доквіллям за складних умов контакту на бічних поверхнях стержнів є актуальними в моделюванні багатьох процесів природного та техногенного характеру. Особливо важливим аспектом цих прикладних задач динаміки конструкцій є аналіз розсіювання енергії за рахунок фрикційного проковзування в контактї. Характерним для цих результатів є використання класичної теорії стержнів та моделі фіксованого кулонівського тертя. Задачі розповсюдження ударних хвиль у стержнях із зовнішнім сухим тертям докладно описано у праці [1].

Розглядається нестационарна задача про розповсюдження збурення у півнескінченному пружному стержні із зовнішнім сухим тертям за умов удару та подальшого лінійного зростання сили притиску на торці. Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщення стержня $u(x, t)$ в рамках гіпотези Бернуллі має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{u''}{L} + \frac{\tau_x}{E} &= \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ \tau_x &= -\tau_D \operatorname{sgn} \dot{u}, \quad \dot{u} \neq 0 \quad \text{або} \quad \dot{u} = 0, \quad |\tau_x| < \tau_S \quad (\tau_D \leq \tau_S = \tau_c); \\ u(x, 0) &= 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \\ \frac{u'(0, t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} (1 + Kt)H(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Тут $x = X/L, t = cT/L$ – безрозмірні координата та час, $L = F/\Pi$ – характерний розмір, а F та Π – площа та периметр поперечного перерізу стержня, τ_x – дотичне напруження на бічній поверхні, τ_c – порогове значення дотичних напружень в моделі сухого тертя, K – безрозмірний параметр що характеризує швидкість зміни притиску на торці ($K = L\Delta/c\sigma_0$), σ_0 і Δ – відповідно напруження удару і приріст напруження за одиницю часу на торці стержня, $c = \sqrt{E/\rho}$ – акустична швидкість в стержні, ρ, E – густина та

модуль Юнга матеріалу стержня, $H(t)$ – функція Гевісайда.

В граничних випадках вищенаведеної крайової задачі отримуємо відомі задачі [1] про розповсюдження ударної хвилі стиску в стержні за умов удару з незмінним притиском чи поштовху з лінійним у часі зростанням навантаження на торці.

Розв'язок сформульованої задачі побудували, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів для розвинення в степеневий ряд за метричною координатою і в часі. Проаналізовано вплив ефекту довантаження притиску на торці на структуру області руху, на розподіл нестационарних полів переміщення, швидкості та напружень.

Встановлено, що довантаження притиску на торці спричинює можливість двох якісно відмінних механізмів поширення збурення в стержні. Отримано ключовий керуючий параметричний комплекс, що визначає характер збурення стержня і отримано його граничне значення, котре розділяє поле параметрів задачі. При малій швидкості довантаження в процесі збурення завжди виникає тимчасова область зупинки руху, де залишкові дотичні напруження до часу приходу фронту повторного збурення визначаються з рівнянь статички і дорівнюють градієнтові осьових напружень, обчислених на лінії слабого розриву області первинного збурення. Зупинка руху після проходження відбитої хвилі можлива лише у випадку, коли в моделі тертя порогове значення перевищує дотичне напруження на поверхні стержня під час руху.

Для значних довантажень зусиль притиску хвильова картина якісно подібна до відомого випадку кінематичного удару із підтримкою постійної швидкості на торці для стержня з зовнішнім сухим тертям [1].

1. *Никитин Л.В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. – М.: Моск. Лицей, 1998. – 272 с.

THE PROBLEM ABOUT A SHOCK ON AN ELASTIC ROD WITH EXTERNAL DRY FRICTION ON THE LATERAL SURFACE WITH A CONDITION OF LINEAR GROWTH OF THE CLAMPING FORCE ON EDGE

As a result of the solution to the boundary value problem for the wave equation with non-stationary right side and force condition on the near edge, within the framework of the zero order model of the approximation, the possibility of two qualitatively different mechanisms of propagation of perturbation in the rod is established. At low speed of loading in the process of perturbation, there is a temporary area of stop motion. For a significant speed loading of the clamp, the wave pattern is qualitatively similar to the known problem of kinematic shock with the support of constant speed at the end of a rod with external dry friction.

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА СТОСОВНО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНКАХ З ОТВОРАМИ

Тетяна Соляр, Олеся Максимович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Національний університет “Львівська політехніка” (Україна)

t_solyar@ukr.net

Для розв’язування плоских динамічних задач теорії пружності сумісно використовують перетворення Лапласа та метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР). Основні труднощі у цьому підході виникають при знаходженні оригіналів на основі знайдених МГІР зображень Лапласа від переміщень і напружень. У літературі побудовано низку формул числового обернення Лапласа. Однак, при їх числовій реалізації виникає проблема контролю за точністю розрахунків, оскільки задача обернення Лапласа в загальному випадку є некоректною. Зокрема, при використанні теоретично точних формул типу Папуліса виникає некоректна задача, яка пов’язана з виконанням дій над великими числами та підсумовуванням повільно збіжних рядів.

Тут для числового обернення використано формулу Пруднікова, яка регуляризована стосовно динамічних задач теорії пружності таким чином, що при її застосуванні залишковий член може бути зроблено як завгодно малим та покращено збіжність ряду, який входить у цю формулу.

Точна формула Пруднікова, яка поєднує значення оригіналу $f(t)$ та зображення Лапласа $F(s)$ має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{l} \exp\left(c \frac{t}{l}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s_n) \exp(2\pi n i t / l) - R_1, \quad R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nc) f(t + nl), \quad (1)$$

де $0 < t < l$, $s_n = (c + 2\pi n i) / l$; c і l – сталі, вибираючи які можна покращити збіжність розв’язку, причому $\text{Re}(c) > 0$.

Для регуляризації цієї формули додатково приймемо, що відомими є значення оригіналу та його похідної при $t = 0$: $f(0)$, $f'(0)$, а також відомим є значення оригіналу за великих значень змінної t , яке позначимо через $f_{\infty} = \text{const}$. Тоді формула (1) набуде вигляду [1]

$$f(t) = \frac{1}{l} \exp\left(c \frac{t}{l}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp\left(2\pi n i \frac{t}{l}\right) + (1 + \gamma) [f(0) + f'(0)(t + \gamma l)] - \gamma f_{\infty} - R_2, \quad (2)$$

$$\text{де } F_n = F(s_n) - \frac{f(0)}{s_n} - \frac{f'(0)}{s_n^2}, \quad R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nc) [f(t + nl) - f_{\infty}], \quad \gamma = \frac{1}{\exp(c) - 1}.$$

Формула (2) також є точною, ряд у цій формулі є швидкозбіжним, оскільки за припущень коефіцієнти ряду при великих значеннях n мають порядок $F_n = O(n^{-3})$. Якщо вибрати параметр l таким, щоб при $t > l$ $f(t) \approx f_{\infty}$ та покласти $c > 3$ то величиною R_2 можна нехтувати. Зокрема, якщо вибрати l так, що $|f(t) - f_{\infty}| < \epsilon$ при $t > l$, то для залишкового члену маємо оцінку $|R_2| \leq \epsilon \gamma$.

Застосуємо формулу обернення перетворення Лапласа (2) до динамічної задачі теорії пружності. Вважатимемо, що в початковий момент часу переміщення та швидкості в площині дорівнюють нулю. Значення зображень від напружень знайдемо МГПР, покладаючи у співвідношеннях для визначення зображень від напружень параметр перетворення $s = s_n$, $n = 0, 1, \dots$

Розглянемо задачу про знаходження основних у розрахунках на міцність кільцевих напружень σ_{θ} на межі отвору. Визначимо напруження σ_{θ} у початковий момент часу (вони входять у співвідношення (2)). Для цього використаємо формулу для визначення кільцевих деформацій ϵ_{θ}

$$\epsilon_{\theta} = (\sigma_{\theta} - \nu_1 \sigma_n) / E_1, \quad (3)$$

де σ_n – нормальна складова зусиль, прикладених до межі, $E_1 = E / (1 - \nu^2)$, $\nu_1 = 1 / (1 - \nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга.

Тоді зі співвідношення (3) бачимо, що в початковий момент часу на межі отвору кільцеві напруження будуть $\sigma_{\theta} = \nu_1 \sigma_n$. Звідси знаходимо й похідну при $t = 0$: $d\sigma_{\theta} / dt = \nu_1 d\sigma_n / dt$. Асимптотичні значення для кільцевих напружень σ_{θ}^{∞} , що входять у формулу обернення, отримуємо шляхом розв'язування статичної задачі для площини з отворами.

Проведені розрахунки концентрації динамічних напружень біля отворів різної форми вказують на ефективність застосування формули обернення (2) для розв'язування динамічних задач теорії пружності.

1. *Kushnir R.M., Solyar T.Ya.* A Numerical-Analytical Approach to the Analysis of Non-Stationary Temperature Fields in Multiply-Connected Solids // *Mechanics, Materials Science & Engineering*. – 2016. – № 3. – P. 90-106, doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.

REGULARIZATION OF FORMULAS OF LAPLACE TRANSFORM INVERSION CONCERNING THE DETERMINATION OF STRESS CONCENTRATION IN PLATES WITH THE HOLES

The stresses concentration near the holes under dynamic loads on the basis of the refined formula for Laplace inverse transformation, is determined.

УДК 621.7.02

**МАТЕМАТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СЕРЕДОВИЩ
ПРИ ВІБРАЦІЙНОМУ ОБРОБЛЕННІ ПОВЕРХОНЬ ВИРОБІВ****Зіновій Стоцько, Володимир Топільницький, Дарія Ребот, Ярослав Кусий***Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)*stotsko@lp.edu.ua; topilnvol@gmail.com; dasha_kotlyarova@ukr.net; yarkym@ukr.net

Проведення досліджень ефективності роботи вібраційних оброблювальних систем є актуальною прикладною задачею, так як вони дають змогу оптимізувати саму вібраційну операцію з точки зору підвищення її часової інтенсивності, зменшення матеріало- та енергозатрат на її проведення, та мінімізації шкідливого впливу на довкілля. Адекватне проведення даних досліджень з можливістю їх подальшої автоматизації не реальне без ґрунтовного математичного опису як самої вібраційної системи, так і її технологічних середовищ зокрема. Реалізувати дану задачу можливо через побудову нелінійних математичних моделей опису функціонування оброблювальних систем вібраційного типу, як в цілому, так і її складових частин, зокрема побудову моделей їх технологічних середовищ.

В роботі побудована нелінійна математична модель опису динаміки технологічних середовищ при вібраційному обробленні поверхонь виробів, яка враховує фізико-механічні властивості частин оброблювального середовища і оброблюваних виробів (деталей та заготовок).

В залежності від типу технологічного середовища, зокрема величини його складових – виробів (деталей та заготовок), які піддаються обробленню, та оброблювальних тіл, фізичних та механічних параметрів матеріалів, з яких вони зроблені, і відповідного їхнього співрозміру між собою, математична модель, що описує динаміку технологічного середовища (нелінійні диференціальні рівняння його руху та їх аналітичні розв'язки) буде мати декілька видів запису.

При побудові моделі прийнято, що матеріал технологічного середовища вібраційної системи є однорідного типу, анізотропний, та є множиною нашарованих одна на одну пластин. Дані пластини мають пластично-пружні властивості, висота їх є малою порівняно із їх довжиною та шириною, що відповідають внутрішнім розмірам робочої камери вібраційної оброблювальної системи. Множина даних пластин може контактувати із стінками робочої камери вібраційної оброблювальної системи шарнірно, пружно, жорстко. Останнє відображає різні випадки взаємовпливу стінок робочої камери вібраційної системи і частин технологічного середовища з математичної точки зору. Також прийнято, що технологічне середовище перебуває в плоскому русі,

паралельно до площин подачі вібраційної коливної енергії від приводу оброблювальної системи її робочій камері. Тут виділено два види рухів, зокрема: відносний рух технологічного середовища (рух однієї з множини пластин), представлений як її поздовжні коливання, та переносний рух технологічного середовища, як єдиного цілого разом з робочою камерою вібраційної оброблювальної системи. Даний спосіб моделювання дозволяє відобразити процес циркуляції технологічного середовища по об'єму робочої камери в процесі функціонування вібраційної системи. В шарі технологічного середовища, при його русі, виникатиме одночасно деформація та напруження. Співвідношення між останніми можна записати на основі закону нелінійності Фойгта. Але нелінійною, в даному випадку, може бути лише одна складова напружень – в'язка або пружна. Тому в отриманій моделі відображено ці два варіанти: нелінійний вид в'язкої складової напружень та нелінійний вид пружної складової напружень в шарі технологічного середовища.

Модель, отримана з використанням асимптотичних методів нелінійної механіки, дає змогу аналітично дослідити вплив параметрів середовища на ефективність функціонування всієї вібраційної системи з метою її оптимізації як на стадії проектування так і при виборі режимів експлуатації. Побудована модель є уніфікована та параметризована. Вона може входити в склад комплексної моделі для дослідження динамічних процесів оброблювальних систем вібраційного типу, та бути частиною систем їх автоматизованих розрахунків.

1. *Стоцько З.А., Ребот Д.П., Сокіл Б.І., Топільницький В.Г.* Вплив зміни амплітудо-частотних характеристик сипкого середовища на процес вібраційної сепарації // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні". – 2015. – № 821. – С. 51-57.
2. *Топільницький В.Г., Сокіл М.Б., Ребот Д.П., Кусий Я.М.* Математичне моделювання динамічних процесів завантаження вібраційних технологічних машин // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2017. – № 866. – С. 92-98.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE TECHNOLOGICAL ENVIRONMENTS DURING THE SURFACE VIBRATION PROCESSING OF PRODUCTS

In the article, a nonlinear mathematical model for describing the dynamics of technological environments of the vibrating-type processing systems, which takes into account the physical and mechanical properties of the parts of the processing environment and the processed articles (blanks), is constructed. Based on the model was investigated and analyzed the established and transitional dynamic processes, what happens in the technological environment during the surface vibration processing of products.

УДК 539.3

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ганна Фесенко, Олексій Мойсесюк

Одеський Національний Університет імені І.І. Мечникова (Україна)

81anna81@gmail.com; yogan@ua.fm

Розглянуто пружний шар з модулем зсуву G , коефіцієнтом Пуассона μ та густиною ρ : $a \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. На грані $z = h$ діє осесиметричне нормальне динамічне стискаюче навантаження

$$\sigma_z(r, h, t) = -p(r, t), \quad \tau_{zr}(r, h, t) = 0.$$

На грані $z = 0$ задано умови жорсткого закріплення

$$u_z(r, 0, t) = 0, \quad u_r(r, 0, t) = 0$$

або пружний шар спирається на жорстку гладку основу без тертя

$$u_z(r, 0, t) = 0, \quad \tau_{rz}(r, 0, t) = 0.$$

В області контакту жорсткого включення з шаром задано умови гладкого контакту $u_r(a, z, t) = 0$, $\tau_{rz}(a, z, t) = 0$.

Необхідно побудувати поле переміщень точок пружного шару $u_r(r, z, t) \equiv u(r, z, t)$, $u_z(r, z, t) \equiv w(r, z, t)$, що задовольняють осесиметричним рівнянням руху

$$r^{-1}[ru']' - r^{-2}u + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}u'' + \frac{2}{\kappa+1}w' = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2},$$

$$r^{-1}[rw']' + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}w'' + \frac{2}{\kappa-1}r^{-1}[ru']' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2},$$

де штрих означає похідну за змінною r , а крапка – за змінною z , $c = \sqrt{G/\rho}$ – швидкість розповсюдження поперечної хвилі, $\kappa = 3 - 4\mu$.

Після використання безрозмірних координат

$$\rho = a^{-1}r, \quad \xi = h^{-1}z, \quad \tau = a^{-1}ct, \quad \rho \in [1, \infty), \quad \xi \in [0, 1],$$

$$u(r, z, t) = U(\rho, \xi, \tau), \quad w(r, z, t) = W(\rho, \xi, \tau)$$

та застосування перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Вебера за змінною ρ [1]

$$U_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho U(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, \quad W_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho W(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho,$$

де $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $i = 0, 1$, $J_i(\lambda)$ – функція Бесселя, $N_i(\lambda)$ – функція Неймана, ($i = 0, 1$), задачу запишемо у векторній формі

$$\begin{cases} L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}, & 0 < \xi < 1 \\ U_i[\mathbf{y}(\xi)] = \gamma_i, & i = 0, 1 \end{cases}$$

відносно невідомого вектора трансформант переміщень

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \\ W_{p\lambda}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Розв'язок одновимірної векторної задачі має вигляд [2]

$$\mathbf{y}(\xi) = \Psi_1(\xi) \cdot \gamma_1,$$

де $\Psi_1(\xi)$ – базисна матриця, що має вигляд $\Psi_1(\xi) = \mathbf{Y}_-(\xi)\mathbf{C}_1^0 + \mathbf{Y}_+(\xi)\mathbf{C}_1^1$ та знаходиться із співвідношень

$$\begin{cases} L_2 \Psi_1(\xi) = \mathbf{0}, \\ U_i[\Psi_1(\xi)] = \delta_{i1}, & i = 0, 1, \end{cases}$$

$\mathbf{Y}_-(\xi), \mathbf{Y}_+(\xi)$ – спадаючий та зростаючий при $\xi \rightarrow \infty$ розв'язки відповідного однорідного матричного рівняння $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}$, $0 < \xi < 1$, що були побудовані з використанням теорії лишків.

Після використання оберненого перетворення Лапласа за змінною τ і оберненого перетворення Вебера за змінною λ , отримано поле вихідних переміщень, на основі яких знайдено нормальні напруження.

1. Попов Г.Я., Вайсфельд Н.Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // Прикл. механика. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 27-38.
2. Попов Г.Я., Абдымананов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Изд. Рауан, 1999. – 133 с.

THE EXACT SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEM FOR AN ELASTIC LAYER WITH A CYLINDRICAL RIGID INCLUSION

The exact solution of the problem for an infinite elastic layer with a cylindrical rigid inclusion is constructed in this paper, when smooth contact conditions are given on a cylindrical surface. On one of the faces of the layer a normal axisymmetric dynamic compression load is given, the other face is fixed to an absolutely rigid foundation or is supported on a smooth foundation without friction. To construct the displacement field and stresses in the layer the Laplace and Weber integral transforms are applied successively to axisymmetric equations of motion of the problem, which leads to a one-dimensional vector inhomogeneous boundary value problem with respect to unknown transformants of displacements. The problem is solved using matrix differential calculus. After application of inverse integral transformations the field of initial displacements is obtained. On the basis of which the normal stresses on the cylindrical surface of rigid inclusion and on the lower face of the elastic layer are constructed.

УДК 533:519.6:621.64.029

ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ГАЗУ В ДОВГОМУ ТРУБОПРОПОВІДІ ЗА ЛОКАЛЬНОЇ РОЗГЕРМЕТИЗАЦІЇ

Василь Чекурін, Ольга Химко

*Інститут Прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України;*

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

chekurin@iapmm.lviv.ua; olgakhymko@ukr.net

Математична модель динаміки газу у довгому трубопроводі включає в себе рівняння стану і нестационарні диференціальні рівняння перенесення маси, імпульсу та енергії. Виходячи цієї моделі, сформульована ключова система рівнянь стосовно густини ρ , густини масового потоку $J = \rho V$ та температури T – функцій координати x вздовж трубопроводу і часу t , де V – швидкість руху газу. Течію газу в трубопроводі визначають часові залежності значень густини ρ та/чи масового потоку J на вході $\rho_{in}(t), J_{in}(t)$ та виході $\rho_{out}(t), J_{out}(t)$. Коректна постава прямих задач вимагає встановлення крайових умов першого роду (задані функції $\rho_{in}(t), \rho_{out}(t)$), або мішаних, коли на краях $x = 0, L$ (L – довжина трубопроводу) задані пари функцій $\rho_{in}(t), J_{out}(t)$ чи $J_{in}(t), \rho_{out}(t)$ [1].

Сформулювали задачі визначення перехідних процесів, які виникають за локальної розгерметизації трубопроводу. Для чисельного розв'язування задач використовували метод скінчених різниць, зводячи їх до задач Коші для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь. Розроблений ітераційний алгоритм, який застосували для дослідження параметрів перехідних процесів перенесення маси та імпульсу в трубопроводі залежно від крайових умов, місця розгерметизації та інтенсивності витоку.

Обговорюється можливість використання отриманих результатів для розроблення методів ідентифікації витоків у магістральних газопроводах [2].

1. Чекурін В., Химко О. Чисельне дослідження перехідних процесів у довгому газопроводі, спричинених розгерметизацією // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 100-111.
2. Чекурін В., Химко О. Математичні моделі для ідентифікації витоку в довгому газопроводі // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 25. – С. 157-169.

PROBLEMS FOR GAS DYNAMICS IN A LONG PIPELINE AT LOCAL DEPRESSURIZATION

Results of numerical study of transient processes of mass, momentum and energy transfer emerging in a long pipeline at local depressurization are considered in the paper.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ ТА ВКЛЮЧЕННЯМИ**Тетяна Шопа***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*tetyana.sh@gmail.com

В рамках теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та інерцію обертання, отримано розв'язок задачі про усталені поперечні коливання ортотропної пластини з довільною кількістю отворів та абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування на основі непрямого методу граничних елементів та послідовнісного підходу до побудови функцій Гріна. Інтегральні рівняння розв'язано методом колокацій. На межі отворів задано різні типи крайових умов. На включення діють гармонічні в часі сили і вони рухаються поступально вздовж нормального напрямку до серединної поверхні пластини. Включення та мають різні типи з'єднання з пластиною. Зовнішня границя пластини довільної форми, на якій задано довільні мішані гармонічні в часі крайові умови. Досліджено числові розв'язки у різних часткових випадках задачі.

Випадок 1. Задача про усталені коливання ортотропної прямокутної шарнірно опертої пластини з двома круглими підкріпленими отворами.

Випадок 2. Задача про усталені коливання ортотропної прямокутної шарнірно опертої пластини з двома круглими жорстко закріпленими включеннями.

Випадок 3. Задача про усталені коливання ортотропної прямокутної шарнірно опертої пластини з одним підкріпленим круглим отвором та одним круглим жорстко закріпленим включенням.

Досліджено вплив розмірів та розташування отворів, розташування та маси включень, фізичних та геометричних параметрів пластини, а також частоти коливань на амплітуду прогину пластини.

INVESTIGATION OF DYNAMIC BEHAVIOR OF ORTHOTROPIC PLATES WITH CUTOUTS AND INCLUSIONS

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and rotary inertia, on the base of indirect boundary elements method the numerical results on dynamic behavior of orthotropic plates for different cases of the presence of cutouts and inclusions are presented.

BEAM WITH MAGNETO-REOLOGICAL CORE USING REFINED LAYER-WISE THEORY VIBRATION SUPPRESSION

Ihor Butyter, Bohdan Diveyev

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;
Lviv Polytechnic National University,
Institute of Engineering Mechanics and Transport (Ukraine)*

divboglviv@yahoo.com

This article deals with the dynamic characteristics of sandwich plates consisting of external rigid layers and an inner layer with magneto-rheological (MR) properties. The effect of the electric field on the frequency and the loss factor is also considered. Magneto-rheological viscoelastomer (MRVE) is used in sandwich plates for vibration control. The dynamic behaviour of MRVE during vibration is characterized by the inhomogeneous complex module, which depends on the oscillation frequency and is controlled by applied magnetic field. Partial differential equations for the coupled transverse and longitudinal oscillations of a sandwich plate are obtained from the conditions of dynamic equilibrium, physical and kinematic relations. This paper presents a new method for stress analysis for the accurate determination of detailed stress distributions in multilayer plates subjected to cylindrical bending. Here are some approximate methods for predicting the stress state for laminated plates. This method is adaptive and is not based on strict assumptions about the plate model. The described theoretical model includes the deformations of each layer of the plate, which take into account the effects of deformation of the transverse shear, transverse normal deformation, and nonlinear displacement changes with respect to the coordinate of thickness.

The numerical method developed in this paper follows a semi-analytic approach with an analytic field applied in the longitudinal direction and a layer of the displacement field of power series used in the transverse direction [1-3]. The purpose of this article is to develop a simple numerical method that can give very accurate results in comparison with the available analytical solution. The goal is also to provide an opportunity to determine the level of refinement in a higher-order theory that is necessary for accurate and efficient analysis.

1. *Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N.* Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. 1. Theoretical approach // *Mechanics of Composite Materials.* – **44**, No. 1. – 2008. – P. 25-36.
2. *Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N.* Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. 2. Theoretical-experimental approach // *Mechanics of Composite Materials.* – **44**, No 2. – 2008. – P. 139-144.
3. *Diveyev B., Konyk S., Malcolm J. Crocker.* Dynamic properties and damping predictions for laminated plates: High order theories - Timoshenko beam // *Journal of Sound and Vibration.* – Vol. 413. – 2018. – P. 173-190.

**AMPLITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTICS OF ELONGATED
PANELS WITH ARBITRARY GENERATRIX FOR GEOMETRICALLY
NONLINEAR VIBRATIONS****Mykhailo Marchuk, Taras Goriachko, Vira Pakosh, Oksana Lesyk***Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine*mv_marchuk@ukr.net; taras.horyachko@gmail.com; v.pakosh@ukr.net

Thin elongated panels with various curves as generatrix medial surfaces are widely used in the construction and hardware for various purpose. In the operating conditions they are subjected to intense dynamic loading, in particular, cyclic. These loads are causing in panels the normal displacement commensurate with their thickness. The last are causing to their geometrically nonlinear dynamic stress-strain state.

To avoid resonance phenomena for the actions of cyclic loading is necessary at the design stage to determine the spectrum of frequencies of said structural elements. Issues of geometrically nonlinear vibrations of plate and shell elements of the constructions on the basis classical and shear theories thoroughly examined in [7] for the definition of the fundamental frequency. Significant progress in this field together with experimental approaches is done in [1, 2] and some analytical results are given in [6]. However, for nonlinear oscillations in many cases it is necessary to define a number of first frequencies and forms to detect the phenomena of internal, subharmonic and combination resonances [3]. A numerical method for determining the first several frequencies and forms of geometrically nonlinear vibrations for shells is proposed in the work [4].

To verify the proposed algorithm practicing it for problem, where are known analytical and numerical solutions [5].

In this paper is developed and verified algorithm for finding a finite number of the first values of natural frequencies and forms of geometrically nonlinear free transverse vibrations of thin-walled elongated panels with arbitrary generatrix. For the primary relations is taken spatial equation geometrically nonlinear dynamic theory of elasticity. Used quadratic approximation of displacements by the normal coordinate and finite-element by tangential. The discrete variation problem is built. For its solving the method of perturbations is applied. The numerical results are compared with previously obtained by other authors.

The skeletal curves [7], constructed using the proposed method and the results presented in the work [4]. The maximum relative error does not exceed 9%, indicating a sufficiently good approximation property of the proposed method. Subsequently, it is advisable to perform a similar study for a wider class of thin-walled elements of constructions and anisotropy of mechanical properties.

1. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 374 p.
2. *Amabili M.* Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments // *Comput. Struct.* – 2004. – **82**(31-32). – P. 2587-2605.
3. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища шк., 1989. – 208 с.
4. *Курна Л.В., Будников Н.А.* Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации // *Вісник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки.* – 2013. – № 1. – С. 55-60.
5. *Lewandowski R.* Free vibration of structures with cubic non-linearity-remarks on amplitude equation and Rayleigh quotient // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2003. – **192**(13). – P. 1681-1709.
6. *Marchuk M., Pakosh V., Lesyk O., Hurayewska I.* Influence of Pliability to Transversal Deformations of Shear and Compression on Correlation Frequency from Amplitude for Nonlinear Oscillations of Composite Plates // *Vibrations in Physical Systems.* – 2006. – Vol. **22**. – P. 251-256.
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИДОВЖЕНИХ ПАНЕЛЕЙ З ДОВІЛЬНОЮ ТВІРНОЮ ЗА ГЕОМЕТРИЧНО-НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Запропоновано та верифіковано алгоритм знаходження скінченної кількості перших значень власних частот та форм геометрично нелінійних вільних поперечних коливань видовжених тонкостінних панелей з довільною твірною. За нормальною координатою використана квадратична апроксимація переміщень. Вздовж тангенціальної координати використані одновимірні скінченні елементи. Побудована дискретизована варіаційна задача. Для її розв'язання застосований метод збурень.

RESONANCE BEHAVIOUR OF THE SYSTEM WITH LIMITED POWER SUPPLY HAVING NONLINEAR ABSORBERS

Yuri Mikhlin, Katarina Plaksiy, Anton Onizhuk

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" (Ukraine)

muv@kpi.kharkov.ua

The non-ideal systems are characterized by interaction of source of excitation and the elastic sub-system under this excitation. The most important phenomenon in such systems is the Sommerfeld effect, when the stable resonance large amplitude regimes of the elastic sub-system are observed, and a big part of the source energy is leaved to resonance vibrations. This effect was first analytically described by Kononenko [1]. Then investigations of such system dynamics were presented in numerous publications. A behavior of the non-ideal system coupled with the nonlinear absorber (Fig. 1) is considered here for the cases of external resonances on natural frequencies and for both external and internal resonances.

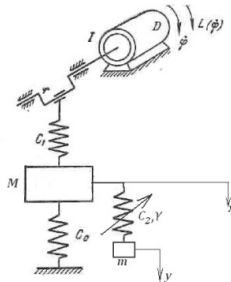


Fig. 1. The non-ideal mechanical system with nonlinear absorber.

The multiple scales method [2] and transformation to the reduced system [3, 4] stated with respect to the system energy, an arctangent of the vibration amplitudes ratio ψ and the phase difference φ are used. Analysis of the reduced system permits to describe an interaction of nonlinear normal vibration modes [5], transfer from unstable vibration modes to stable ones, and appearance of so-called *Transient nonlinear normal modes* (TNNMs) [3, 4]. The TNNMs are realized only for some levels of the system energy. In vicinity of time, corresponding to these energy values, the system motions are close to the TNNMs; then the energy decreases and the system motions tend to other stable vibration mode. Conditions of the energy

localization in the nonlinear vibration absorber are obtained. The loops of the trajectories in Fig. 2 correspond to the TNNM existing in the case of external resonance. When the TNNM disappears, the trajectories tend to straight line representing the stable localized mode. Fig. 3 illustrates two equilibrium states of coupled vibrations in vicinity of simultaneous external and internal resonances; one of them is stable and attractive.

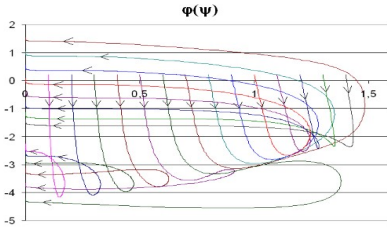


Fig. 3. Trajectories for the external resonance case

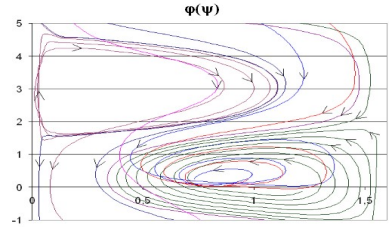


Fig. 4. Trajectories for the simultaneous external and internal resonances

The non-ideal systems having the snap-through truss (Mises form) as nonlinear absorbers are considered too. Here two NNMs can be selected, namely: a) mode of coupled vibrations, which is not appropriate for absorption of the elastic sub-system vibrations; b) localized mode when the small vibrations of the elastic sub-system combine with large amplitude vibrations of the absorber. The last mode is appropriate for absorption. It is shown that a use of the nonlinear absorber permits to reduce large vibration amplitudes of the elastic sub-systems.

1. *Kononenko V.O.* Vibrating Systems with a Limited Power Supply. – London: Iliffe Books, 1969. – 245 p.
2. *Nayfeh A.H.* Perturbations Methods. – New York: Wiley, 1973. – 704 p.
3. *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. – New York: Wiley, 1996. – 552 p.
4. *Plaksey K.Yu., Mikhlin Yu.V.* Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance // J. of Sound and Vibration. – 2015. – **334**. – P. 319-337.
5. *Plaksey K.Yu., Mikhlin Yu.V.* Resonance behavior of the limited power-supply system coupled with the nonlinear absorber // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2015. – **6**, № 3. – P. 475-495.

RESONANCE BEHAVIOUR OF THE SYSTEM WITH LIMITED POWER SUPPLY HAVING NONLINEAR ABSORBERS

A behavior of the non-ideal system coupled with nonlinear absorbers is considered for external resonances on natural frequencies and for both external and internal resonances.

DESIGN, SIMULATION AND APPLICATION OF INERTIAL DAMPERS: FROM TRANSMISSION LINES TO DRILL COLUMNS

**Andrii Velychkovych, Ivan Shatskyi, Vasyl Shopa,
Maciej Dutkiewicz, Irena Gołębiowska**

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas (Ukraine);

*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute for Applied Problems
in Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;*

University of Science and Technology (Poland)

a_velychkovych@ukr.net; ipshtsky@gmail.com; macdut@utp.edu.pl

That is the huge need to design and construct overhead transmission lines with application of the passive dampers [1, 2] due to wind actions and then the aeolian vibrations with a frequency from 3 to 150 Hz and amplitudes lower than the conductor diameter, galloping with a frequency from 0.1 to 2 Hz and amplitudes from ± 0.1 to 1 of conductor sag, wake induced vibrations with a frequency from 0.15 to 10 Hz and amplitudes from 0.5 to 80 times the conductor diameter. Authors investigate the efficiency of dampers with proper mass and damping parameters of messengers. The constructions of weighted drill pipes with vibration-impact particle dampers [3] designed to absorb the energy of longitudinal and twisting oscillations of the drill tool are described. The advantage of a multi-container absorber is substantiated. The aspects of design, theoretical and experimental simulation and application of the inertial dampers developed by the authors are combined using the common effects based on the phenomenon of antiresonance or vibration-shock interaction.

1. *Gołębiowska I., Dutkiewicz M., Usewicz B.* Methods of damping of overhead transmission lines // TTS. – 2015. – **12**, № 5. – P. 2544-2548 (in Polish).
2. *Vecchiarelli J., Curie I.G., Havard D.G.* Computational analysis of aeolian conductor vibration with a stockbridge-type damper // *J. Fluids and Struct.* – 2000. – **14**. – P. 489-509.
3. *Velichkovich A.S., Velichkovich S.V., Shopa V.M.* A set of vibration dampers for controlling dynamic drilling stem conditions. – Ivano-Frankivsk: Siversia Ltd, 2000. – 86 p. (in Ukrainian).

КОНСТРУЮВАННЯ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ІНЕРЦІЙНИХ ДЕМПФЕРІВ: ВІД ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧ ДО БУРИЛЬНИХ КОЛОН

Розглянуто деякі аспекти конструювання, моделювання та застосування інерційних демпферів для зниження рівня коливань в конструкціях за рахунок явищ антирезонансу та віброударної взаємодії.

ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ СМУГОВИХ ПІДКРІПЛЕНЬ ПРЯМОКУТНИХ ОТВОРІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ

Вадим Гудрамович, Етері Гарт, Сергій Панченко

*Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України;
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара (Україна)*

hudramovich@ukr.net

Підкріплення отворів принципово впливає на напружено-деформований стан (НДС) пластинчато-оболонкових елементів конструкцій. Досягнення у цьому напрямку пов'язані, перш за все, з дослідженнями українських вчених [1-3]. Перші дослідження підкріплених отворів належать С.П. Тимошенку та Дж. Лессельсу [4], які звели задачу визначення напружень біля отвору до знаходження напружень у кривому брусі, навантаженому по зовнішньому контуру.

Досліджено НДС пружної пластини з центрально розташованим прямокутним видовженим отвором, підкріпленим по бічних сторонах смуговими накладками. Вивчено вплив параметрів підкріплень та орієнтації отвору на розподіл інтенсивностей напружень і деформацій у пластині. Матеріали підкріплень і пластини відрізняються.

Виявлені найбільш прийнятні геометричні і механічні характеристики підкріплень та місця їх розташування. Вдалий вибір параметрів підкріплень у разі розташування видовженого отвору паралельно до напрямку дії навантаження дає змогу зменшити коефіцієнт концентрації напружень на $\sim 35\%$, а у випадку отвору, розташованого під кутом 45° – на $\sim 24\%$.

1. *Вайнберг Д.В.* Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. Справочное пособие. – К.: Техника, 1969. – 220 с.
2. *Гарт Э.Л., Панченко С.В.* Численный анализ напряженно-деформированного состояния пластины с прямоугольным отверстием, подкрепленным треугольными накладками // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 35-47.
3. *Гузь А.Н. и др.* Методы расчета оболочек. В 5 т. Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
4. *Тимошенко С.П., Лессельс Дж.* Прикладная теория упругости. Пер. с англ. – М.; Л.: ОНТИ, 1931. – 340 с.

**NUMERICAL INVESTIGATION OF THE EFFECT OF REINFORCEMENT OF
RECTANGULAR HOLES ON THE STRESS-STRAIN STATE OF A PLATE**

The stress-strain state of the elastic plate with a rectangular elongated hole, reinforced with band-pass patches was considered. The material of the reinforcing elements and plate are different. Computer simulation was carried out using finite element method. The most acceptable geometric and mechanical characteristics of the reinforcements and their location were determined. The successful choice of parameters of reinforcements can reduce the concentration of stresses.

ІМОВІРНІСНІ ПІДХОДИ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ РЕСУРСУ КОНСТРУКЦІЙ НА ЕТАПІ ПРОЕКТУВАННЯ

**Вадим Гудрамович, Володимир Пошивалов, Юрій Данієв,
Людмила Резниченко**

*Інститут технічної механіки НАН України
і Державного космічного агентства України*

hudramovich@ukr.net; vposhivalov@gmail.com

До методологічних основ проблеми проектування конструкцій можна віднести наступні питання: класифікація видів навантажень, вибір моделі підсумовування пошкоджень і критерію настання граничного стану, розробка підходу до визначення ресурсу за різних видів навантажень тощо. Успішне вирішення цих питань залежить від наявності відпрацьованого прототипу, який найбільш близький по технічній сутності та досягнутому ефекту до розглянутої конструкції. Слід зазначити, що методам оцінки ресурсу присвячені численні монографії і статті. Проте, на сьогодні належно не вирішена ціла низка принципово важливих питань, пов'язаних з тим, що зовнішні сили (навантаження), які діють на конструкцію, та зумовлені ними напруження і деформації в реальних умовах являють собою випадкові функції часу, які можуть істотно змінюватися під час експлуатації. Крім того міцнісні характеристики реальних елементів конструкції є випадковими величинами. Виходячи із цього, оцінку міцності елементів конструкцій доцільно проводити із залученням імовірнісних підходів (при оцінці міцності конструкцій норми міцності повинні містити імовірнісні характеристики навантажень і зовнішніх впливів) як при дослідженні навантаження, так і при визначенні руйнівних навантажень.

Головне завдання прогнозування ресурсу на стадії проектування полягає в узгодженні основних параметрів надійності із призначеними показниками, до яких відносяться призначений ресурс і термін служби. На стадії проектування вони є заданими величинами, які визначаються нормативними документами, з урахуванням статистичних даних про навантаження, матеріали та умови експлуатації подібних конструкцій.

У роботі розглядаються методологічні питання визначення на етапі проектування імовірнісних моделей характеристик міцності матеріалів, прогнозування ресурсу за відомими імовірнісними характеристиками накопиченої пошкоджуваності та ін. При цьому використовується розподіл Вейбулла. Обговорюються деякі питання прогнозування ресурсу відповідно до критеріїв малоциклової і багатоциклової втоми.

**PROBABILISTIC APPROACHES FOR STRUCTURE RESOURCE FORECASTING
AT THE DESIGN STAGE**

The research considers methodological issues of development at a design stage of resource forecasting for known probabilistic characteristics of accumulated damage etc. The Weibull distribution is considered. Forecasting a resource according to the criteria of low-cycle and multi-cycle weariness is considered.

ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СИЛОВОГО ШПАНГОУТА ТА З'ЄДНАНОГО З НИМ ПУЧКА ОБОЛОНОК ПРИ НЕСИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Анатолій Дзюба, Володимир Сіренко

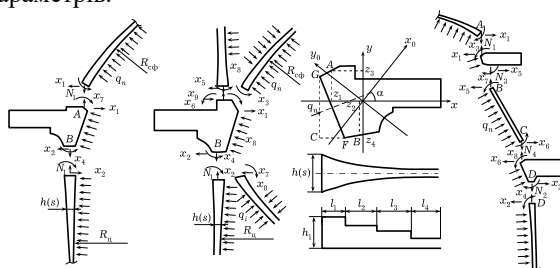
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара (Україна);

ДП Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля (Україна)

dzub@ua.fm

Для забезпечення міцності оболонкових конструкцій, що піддаються дії локальних навантажень, використовуються підсилення у вигляді шпангоутів, накладок та інших силових елементів. Конструкція може мати декілька шпангоутів з різною конфігурацією поперечного перерізу, а кожна із оболонкових підконструкцій представляти собою сполучену оболонку з довільною формою меридіану, послідовністю ділянок з різними для окремих підконструкцій фізичними параметрами, умовами закріплення та ін.

В умовах екстремальних термосилових навантажень напружено-деформований стан таких елементів конструкцій ракетно-космічної техніки має нерегулярний характер, а забезпечення міцності шляхом збільшення розмірів перерізів підкріплюючих елементів та товщини стінки оболонок призводить до не виправданого завищення вагових показників. Використання силових елементів змінної жорсткості дає змогу покращити зазначені параметри, однак суттєво ускладнює як розв'язування контактної задачі спільного деформування силових елементів і оболонок при несиметричному навантаженні, так і вибору їх оптимальних параметрів.



Розв'язування такої складної оптимізаційної задачі пропонується здійснювати шляхом її декомпозиції на окремі підконструкції у вигляді підкріплюючих кілець і оболонок обертання, оптимізації геометричних розмірів поперечних перерізів шпангоутів і товщини стінки окремих оболонок в зоні перехідних ділянок (стиків оболонок зі шпангоутом) та подальшого синтезу

Оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем

оптимальних підконструкцій шляхом ітераційного уточнення зусиль взаємодії окремих елементів. При цьому слід зазначити, що застосування дискретно-континуальної моделі прямого розрахунку складеної конструкції має певні переваги у зв'язку з введенням вузлових ліній контакту оболонок із шпангоутом замість вузлових точок в методі скінченних елементів.

Задача вагової оптимізації оболонок формулюється в термінах теорії оптимального керування використанням необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна для випадку довільних фазових обмежень. Для виконання технологічних і конструктивних обмежень в зонах перехідних ділянок (стиків оболонок зі шпангоутом) у вигляді, зокрема, вимог дискретного (ступінчатого) змінювання товщини оболонки, пропонується методика найкращої кусково-постійної апроксимації неперервних оптимальних керувань, що реалізується шляхом розв'язування допоміжної скінченно-вимірної задачі оптимізації.

Розв'язування задачі вагової оптимізації параметрів силового стержневого елемента (шпангоута), який знаходиться під дією зовнішнього навантаження і зусиль взаємодії з оболонками, на відміну від традиційних підходів, пов'язаних із безпосереднім застосуванням методів нелінійного програмування для відшукування варіюваних геометричних розмірів заданої форми поперечного перерізу шпангоута, пропонується алгоритм, що дає змогу (шляхом варіювання координат контурних (кутових) точок) створити цілу «мозаїку» конфігурацій поперечних перерізів і виявити серед них найкращу (з точки зору витрат матеріалу) з урахуванням обмежень на напруження та переміщення.

У поєднанні із застосуванням дискретно-континуальної моделі прямого розрахунку такої складової конструкції запропонований алгоритм поетапної оптимізації дає змогу відшукати оптимальні параметри достатньо складних складових оболонкових конструкцій, найкращим чином використовувати як можливості методів теорії оптимальних процесів, так і алгоритмів нелінійного програмування та досить просто врахувати вимоги реального проектування і, що особливо важливо, суттєво скоротити витрати на розв'язування задачі зниження матеріаломісткості таких оболонкових конструкцій, що є досить перспективним у застосуванні підходу до розв'язування задач оптимального проектування конструкцій при створенні зразків нової техніки.

THE WEIGHT OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF THE FORCE FRAME AND THE BUNDLE OF SHELLS CONNECTED WITH IT AT NON-SYMMETRICAL LOADING

Algorithm for weight optimization of parameters of composite shell constructions is proposed. The structure consists of a bundle of shells rotation, which are connected by a force frame. The structure is divided into separate substructures (frames and shells). The algorithm for finding the optimal parameters of the construction is constructed by iteration with optimization of the parameters of individual substructures and further refinement of the efforts of their joint deformation. The methods of the theory of optimal processes and finite-dimensional optimization are used together.

ПРОГНОЗУВАННЯ МІЦНОСТІ НАДЗЕМНОЇ ДІЛЯНКИ МАГІСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДУ

**Андрій Дзюбик, Іван Прокопишин, Людмила Дзюбик,
Ярослав Зінько**

*Національний університет "Львівська політехніка" (України);
Львівський національний університет імені Івана Франка (України)*

dar.lviv@gmail.com; lviv.pi@gmail.com; liudmyla.v.dziubyk@lpnu.ua;
yaroslav.a.zinko@lpnu.ua

Надземні ділянки магістральних трубопроводів переважно споруджують із використанням окремих опорних елементів, на які обпирається тіло труби. При цьому в перерізі виникають напруження, що зумовлені дією ряду факторів: вагою та тиском транспортованого продукту, температурними впливами, зсувами масивів ґрунту та зміщенням опор тощо. Тому конструкція зазнає, окрім дії внутрішнього тиску та осьових зусиль, також повздовжньо-поперечного згину [1].

У випадку виявлення дефектів матеріалу труб виконують визначення роботоздатності ділянки трубопроводу. Тут широко використовують підходи, які ґрунтуються застосування діаграми оцінки руйнування (ДОР) [2, 3]. Остання визначає двокритеріальну залежність між безпечним та критичним станом конструкції за критеріями крихкого та в'язкого руйнування. Аналіз літературних даних показує [4, 5], що наявність згинних напружень пришвидшує перехід до критичного стану. При цьому встановлення їх впливу потребує визначення згинних моментів для існуючих надземних переходів та оцінки впливу цих напружень на параметри крихкого та в'язкого руйнування. В роботі для дослідження величини діючих навантажень в трубопроводі запропонований комплексний підхід. Він ґрунтується на представленні надземного переходу у вигляді балкової конструкції, що розташована на окремих точкових опорах [6]. При цьому жорсткість балки може бути кусково змінною (враховує утовщення окремих ділянок), опори можуть піддаватися зміщенням у вертикальному напрямку, а підземна частина трубопроводу працює взаємодіє з ґрунтовими масивами, які можуть мати жорсткі зміщення. Використовуючи при цьому доступні експериментальні дані про перехід (різницю температур між зварюванням стиків та часом спостереження, прогини окремих прогонів, деформації окремих перерізів труб, величини зміщення опор), можна відтворити максимально наближену картину напружено-деформованого стану надземного переходу.

Оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем

Для розглянутої моделі трубопроводу, запропоновано методику оцінки коефіцієнта запасу міцності за критеріями крихкого та в'язко-пружного руйнування за наявності поперечних кільцевих поверхневих півеліптичних тріщин на основі ДОР, відповідно до стандарту [3].

Для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень використано методику American Petroleum Institute [7]. Оцінка показника в'язкого руйнування пороведена методом референтних напружень з використанням результатів роботи [8].

1. Білобран Б., Дзюбик А. Розрахунок напружено-деформованого стану балкових переходів магістральних трубопроводів чисельними методами // Вісник НУ "ЛП": "Динаміка, міцність та проєкт. машин і приладів". – 2007. – № 588 – С. 8-12.
2. Ориняк І.В. Розробка методів розрахунку на міцність елементів конструкцій з тріщинами на основі двокритеріального підходу: автореферат дисертації на здобуття наук. ступеня докт. технічн. наук: спец. 01.02.04. – К, 2000. – 38 с.
3. Визначення залишкової міцності магістральних трубопроводів з дефектами: ДСТУ-Н Б В.2.2-21:2008. – К.: Держстандарт України 2008. – 87 с.
4. Кришук М.Г., Ориняк А.І. Обґрунтування методик розрахунку σ_{ref} для труби з наскрізною поперечною тріщиною при комбінованому навантаженні силою, моментом і тиском. частина: і Вісник НТУУ "КПІ": "Машинобудування". – 2012. – № 64 – С. 76-80.
5. Zahoor A. Ductile Fracture Handbook. – Vol.1-3. – Novotech. Cop&EPRI, 1989. – 1472 p.
6. Дзюбик Л., Кузьо І., Прокопишин І. Статична рівновага балки змінної жорсткості на пружних опорах з попереднім зміщенням // Машинознавство. – 2009. – № 11 – С. 27-30.
7. *Fitness-for-Service*. American Petroleum Institute. Recommended Practice 579. First edition. – 2000. – 625 p.
8. Şefika Elvin Eren, Isabel Hadley, Kamran Nikbin. Differences in the assessment of plastic collapse in BS 7910:2005 and R6/FITNET FFS PROCEDURES // Proceedings of the ASME 2011 Pressure Vessels and Piping Division Conference, July 17-21, 2011, Baltimore, Maryland, USA. – PVP2011-57255. – P. 1-28.

SAFETY FACTOR ANALYSIS AN ABOVEGROUND SECTION OF PIPELINE

The analysis of the conditions of exploitation of the aboveground multisupport sections of pipeline has been carried out. To determine the stress-strain state of the pipeline, a model of beam on elastic supports with an additional accounting of membrane stresses is considered. The method of estimation of the safety factor on the basis of FAD is proposed.

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ТРИШАРОВИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Олексій Кудін, Ольга Козлова, Анастасія Кривохата

Запорізький національний університет (України)

avk256@gmail.com; oskozlova@gmail.com; krivohata@gmail.com

Дослідження напружено-деформованого стану, стійкості та несучої здатності шаруватих оболонкових елементів конструкцій є важливою складовою сучасної будівельної механіки. Використання сучасних композиційних та полімерних матеріалів при виготовленні шарів оболонок потребує побудови уточнених математичних моделей, які описують поведінку реального технічного об'єкта під час експлуатації.

На сьогодні опубліковано велику кількість робіт зі стійкості тришарових елементів конструкцій. Оглядові праці [3, 9] дають змогу отримати уявлення про стан та перспективи досліджень в цій галузі. Підходи до побудови уточнених моделей деформованого стану та стійкості тришарових оболонок викладено у працях [4, 7, 8].

Метою роботи є побудова функціонала повної потенціальної енергії тришарових оболонок обертання та визначення їх критичних навантажень за дії комбінованих навантажень. Вважається, що зовнішні шари довільної товщини виготовлені із анізотропного матеріалу та задовольняють закону Гука, приймаються гіпотези Кірхгофа. Середній шар виготовлено із нелінійно-пружного ізотропного матеріалу у формі Г. Каудерера[2]:

$$\sigma_r = 3K(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2G(1 + \gamma_2 \psi_0^2) (\varepsilon_r - \varepsilon_0),$$

$$\sigma_\varphi = 3K(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2G(1 + \gamma_2 \psi_0^2) (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0),$$

$$\tau_{r\varphi} = G(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = G(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{rz},$$

$$\tau_{\varphi z} = G(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{\varphi z},$$

де G , K – модулі зсуву та об'ємної деформації матеріалу заповнювача; ε_0 , ψ_0^2 – середнє відносне подовження та квадрат інтенсивності деформацій зсуву. Для представлення геометричних та фізичних співвідношень теорії пружності в найбільш загальному вигляді вводяться безрозмірні параметри та

Оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем

записуються безрозмірні вирази для деформацій, напружень та функціоналу енергії. В цій частині робота розвиває підхід, запропонований в [1] для ортотропних гладких та підкріплених одношарових оболонок.

При розв'язуванні задачі визначення критичних навантажень використовується підхід, що ґрунтується на методах Рітца та продовження розв'язку за параметром [5, 6]. Порівнюють два варіанти методу: метод, який використовує зміну параметру продовження розв'язку та метод продовження за найкращім параметром.

Виконано числові розрахунки для циліндричних і конічних оболонок та проведено порівняння отриманих результатів із відомими у літературі.

1. Картов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74-94.
2. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
3. Паймушин В.Н. Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (Этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Изв. РАН, МТТ. – 2001. – № 2. – С. 148-162.
4. Паймушин В.Н., Иванов В.А., Луканкин С.А., Вялков А.Е. Смешанные изгибные формы потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки произвольной толщины при внешнем давлении и сжатии несущих слоев неодинаковыми усилиями // Изв. вузов, Авиационная техника. – 2004. – № 2. – С. 14-20.
5. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
6. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 1. – С. 49-63.
7. Трач В.М. Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 109-124.
8. Khalili S.M.R. Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2015. – 22, № 4.
9. Noor A.K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Applied Mechanics Reviews. – 49, No. 3. – 1996. – P. 155-199.

BUCKLING ANALYSIS OF THE ANISOTROPIC SANDWICH SHELLS OF REVOLUTION WITH NONLINEAR ELASTIC CORE

Full energy functional for sandwich shells of revolution with anisotropic outer layers and a nonlinearly elastic isotropic core are proposed. A technique for solving the static buckling problem is described, which includes the Ritz method and the method of consecutive loading. The obtained solution is compared with other works.

КОМП'ЮТЕРНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕХНОЛОГІЯХ ТЕРМОБАРИЧНОЇ ОБРОБКИ МАТЕРІАЛІВ

**Олександр Лещук, Сергій Полотняк, Тетяна Псярнецька, Тетяна
Панасюк, Володимир Нагорний**

Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України

leshchuk@ism.kiev.ua; psb@ism.kiev.ua; t_tsysar@ism.kiev.ua;
tanua_p@ukr.net; vnagorni@ism.kiev.ua

Створення нових і вдосконалення існуючих технологій отримання прогресивних матеріалів і виробів нерозривно пов'язано з розвитком методів термомеханіки матеріалів і комп'ютерного матеріалознавства. Розглядаються результати застосування розроблених в Інституті надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України розрахункових методів, пов'язаних з комп'ютерним проектуванням оптимальних конструкторсько-технологічних рішень, що забезпечують максимальний якісний і кількісний ефект застосування техніки високих тисків і температур в технологіях виробництва надтвердих, композиційних, керамічних матеріалів і виробів на їх основі. Такі методи охоплюють можливості комп'ютерного моделювання і оптимізації наступних процесів:

- термобаричної обробки матеріалів в умовах спільної дії резистивного нагрівання, термопружнопластичного деформування, фазових перетворень;
- деформування елементів конструкцій з урахуванням контактної тертя, великих деформацій, структури та граничного стану матеріалу;
- інжекційного формування керамічних виробів з порошків тугоплавких матеріалів.

Проведено комп'ютерний аналіз і оптимізацію процесів отримання широкої гами надтвердих матеріалів та виробів в різних апаратах високого тиску: ковадла із заглибленнями, циліндричні, багатоступінчасті, багатопуансонні, алмазні ковадла. Визначено оптимальні технологічні параметри інжекційного формування керамічних виробів різного функціонального призначення.

COMPUTER DESIGN AND OPTIMIZATION IN TECHNOLOGIES OF HPHT MATERIAL PROCESSING

Computer analysis and optimization of processes of obtaining a wide range of superhard materials and products in various high-pressure apparatuses have been performed. The optimum parameters of injection molding of various functional ceramic products have been determined.

ПРОЕКТУВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ РАДІАЛЬНИХ ПАСИВНИХ МАГНІТНИХ ПІДШИПНИКІВ ЯК ОПОР РОТОРА ДЕТАНДЕР- КОМПРЕСОРНОГО АГРЕГАТУ

Геннадій Мартиненко

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (України)

gmartynenko@ukr.net

У роботі сформульовано і розв'язано задачу пошуку варіантів магнітного підшипника на постійних кільцевих магнітах (МППКМ) для ротора ДКА (довжиною ~ 1000 м і масою ~ 55 кг), що забезпечують силові та жорсткісні характеристики, прийнятні з точки зору практичного використання (жорсткість $> 10^6$ Н/м) [1]. Розглянуті конструктивні варіанти радіальних МППКМ представлені на рис. 1а,б,в,г. Кільця МППКМ, виготовлені зі сплаву NdFeB, мають осьову намагніченість і забезпечують самоцентрування в радіальному напрямку за рахунок сил відштовхування або тяжіння. Виходячи з технічно обґрунтованих припущень про допустимість величини зазору в підшипниках, для всіх проектів значення зазору приймалося рівним 1 мм. Внутрішній діаметр рухомого кільцевого магніту приймався рівним діаметру посадки на вал $D_4=60$ мм (рис. 1а,б) або $D_2=65$ мм (рис. 1в,г), а для зовнішнього діаметра D_1 нерухомого магніту було вибрано кілька дискретних значень, виходячи з конструкційних особливостей ДКА і економічних обґрунтувань (150, 175, 200 та 220 мм). На рис. 1д,е їм відповідають графіки 1, 2, 3 та 4. Для розрахунку магнітних сил, що виникають в МППКМ та діють в напрямку протилежному радіальному зміщенню роторного магніту, застосована експериментально підтверджена методика скінченно-елементного розрахунку [2]. Для пошуку оптимальних наборів параметрів застосовувалися два методи оптимального проектування. На варійовані параметри накладалися обмеження, що описують геометрично можливі конструктивні варіанти, а в якості максимізовуваної цільової функції вибрано значення магнітної сили $F_M(y_{ст})$. Результати у вигляді силових і жорсткісних характеристик для найбільш прийнятних проектів варіанту (г) в порівнянні з найпростішим варіантом (а – АХІ) представлені на рис. 1д,е. Таким чином, за допомогою варіантних розрахункових досліджень для ротора ДКА знайдена конфігурація МППКМ (г) у вигляді трьох пакетів магнітів (двох статорних і одного роторного) з оптимальними параметрами, що забезпечують необхідну жорсткість і силову характеристику близьку до лінійної в околі положення статичної рівноваги, порівнянному з половиною радіального зазору.

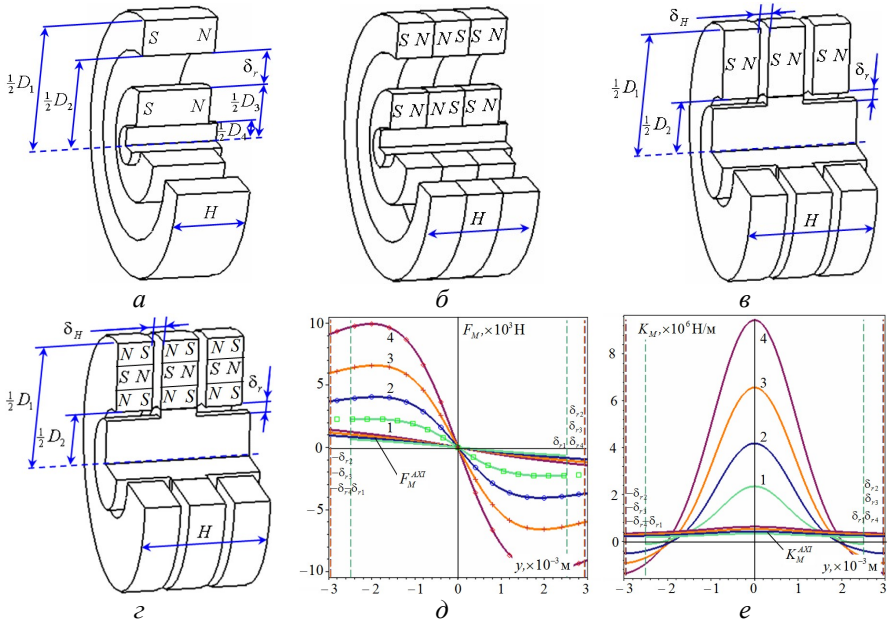


Рис. 1 – Радіальні МППКМ для ротора детандер-компресорного агрегату: а, б, в, з – розрахункові моделі; д, е – силова та жорсткісна характеристики для варіанта моделі МППКМ з трьох пакетів кілець (з)

1. Мартыненко Г.Ю., Левашов В.А., Бухолдин Ю.С. Оценка возможности применения опор на постоянных магнитах для ротора детандер-компресорного агрегата // Компресорное и энергетическое машиностроение. – 2012. – 30, № 4. – С. 39-45.
2. Мартыненко Г.Ю. Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – 2007. – № 38. – С. 83-95.
3. Мартыненко Г.Ю. Оптимальное проектирование радиальных пассивных магнитных подшипников для ротора детандер-компресорного агрегата // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – 2011. – № 63. – С. 79-100.

DESIGN AND OPTIMIZATION OF RADIAL PASSIVE MAGNETIC BEARINGS AS THE BEARINGS OF THE ROTOR OF THE EXPANDER-COMPRESSOR UNIT

The results of the design of radial magnetic bearings on permanent annular magnets for the rotor of an expander-compressor unit of a natural gas liquefaction plant are presented. Several design variants of radial passive magnetic bearings are considered. For the purpose of an informed choice for these variants, the optimization problem is numerically solved and a comparative analysis of the force and rigidity characteristics of the optimal projects is carried out.

МЕТОДИКА ДИНАМІЧНОГО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСУ ПРОХОДЖЕННЯ ПОРШНЯ В ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Андрій Новіков, Ігор Ориняк

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

andrii.i.novikov@gmail.com

Проходження внутрішньотрубного поршня через повітряний перехід є динамічним явищем, оскільки навантаження в різні моменти часу прикладається до різних точок повітряного переходу. Це може зумовити коливання повітряного переходу та, відповідно, накладання зусиль і моментів в трубопроводі від коливань на статичні зусилля та моменти, які діють в повітряному переході. З огляду на це просте статичне прикладання ваги поршня в різних точках повітряного переходу може дати занижені результати розрахунків. Динамічна задача полягає в наступному: необхідно визначити максимальну швидкість руху внутрішньотрубного поршня (поршнів) із врахуванням реальної кривини геодезичної лінії надземного переходу та маси всіх конструктивних елементів переходу, за якої виконання діагностики буде безпечним. Під безпечним виконанням діагностики розуміється забезпечення динамічної міцності і стійкості переходу, а під повною динамічною постановкою - врахування маси трубопроводу і маси канату при знаходженні власних частот та форм коливань конструкції. Вважається, що геометрично-нелінійна постановка враховує статичну і набуту динамічну кривину надземного переходу. В основі проведення таких розрахунків лежить рівняння динамічної рівноваги елементарної ділянки трубопроводу

$$EJ \cdot \bar{W}^{IV}(x, t) + \rho F \cdot \ddot{\bar{W}}^{IV} = \bar{P}(x, t), \quad (1)$$

де E – модуль Юнга, J – момент інерції перерізу, ρ – усереднена щільність матеріалу труби, F – площа перерізу труби, $\bar{W}(x, t)$ – переміщення цього перерізу у векторній формі, що залежить від поздовжньої координати x та часової t , $\bar{P}(x, t)$ – змінна в часі зовнішня сила (вага поршня, та відцентрова сила, з якою поршень діє на трубу під час проходження згинів чи ділянок в яких прямий трубопровід має деяку статичну кривину та набуту динамічну кривину) у векторній формі. Вважається, що набута динамічна кривина отримана в наслідок дії поршня.

Вплив вказаних чинників реалізовано у вигляді ітераційної процедури, що полягає в обчисленні поточної кривини трубопроводу в місці знаходження поршня до тих пір поки ця динамічна кривина не вибрана повністю. Ітерування починається із статичної кривини осьової лінії трубопроводу надземного

переходу. В роботі для проведення динамічних розрахунків використано метод гармонічного аналізу, який полягає в пошуку декількох власних форм та частот коливань, розв'язку динамічної задачі для кожної власної частоти окремо та в подальшому алгебраїчному додаванні результатів для всіх власних частот, що розглядаються. Розв'язок знаходиться за допомогою інтеграла Дюамеля. Оскільки більшість повітряних переходів, що розглядаються, є достатньо довгими ($\approx 10^3$ м), то снаряд проходить такі переходи протягом 3-х хвилин і у рівняннях використовується коефіцієнт відносного демпфування.

З диференційного рівняння для i -тої власної частоти, що враховує безрозмірний коефіцієнт затухання ξ ,

$$\ddot{A}_i(t) + 2\xi\omega_i\dot{A}_i(t) + A_i(t)\omega_i^2 = \frac{1}{M_i} \int_0^L (\bar{P}(x,t), \bar{W}(x,t)) dx, \quad (2)$$

знайдено значення $A_i(t)$ для i -тої власної частоти у вигляді:

$$A_i(t) = \frac{1}{\omega_i M_i \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^L (\bar{P}(x,t), \bar{W}(x,t)) \cdot e^{-\xi\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin(\omega_i \sqrt{1-\xi^2} \tau) \cdot (t-\tau) d\tau \quad (3)$$

де ω_i – кругова власна частота, L – загальна довжина трубопроводу; M_i – узагальнена маса трубопроводу для заданої власної частоти коливань; $(P(x,t), W(x,t))$ – скалярних добуток сили та власної форми коливань (переміщення в трьох напрямках) в точці.

Для проведення розрахунків поведінки $A_i(t)$ створено чисельну процедуру. Побудована процедура дає змогу знаходити власні частоти та форми коливань, тобто отримувати значення ω_i , $W_i(x,t)$ та M_i . На основі отриманих розв'язків вдосконалено методику визначення міцності і стійкості надземних переходів магістральних газопроводів при проходженні поршня в геометрично нелінійній постановці. Із застосуванням наведеної методики виконано розрахунок проходження діагностичного поршня для вантового і двобалкових надземних переходів магістрального газопроводу. Врахування відцентрової сили інерції на прямолінійних ділянках трубопроводу, яка виникає від поточної статичної кривини трубопроводу, збільшує напруження приблизно на 25%. А додаткове врахування набутої динамічної кривини трубопроводу збільшує напруження ще на 10%.

METHOD OF DYNAMIC ANALYSIS OF PROCESS OF PISTON PASSING IN GEOMETRICALLY NON-INFLATION STANDS

The paper is devoted to the description of the process of passage of the piston over the pipeline. Equations are obtained that make it possible to find the natural frequencies and modes of oscillations. These equations take into account attenuation. The problem is solved in a geometrically nonlinear formulation. By a geometrically non-linear statement it is understood that the complete (natural and acquired) curvature of the pipeline is taken into account.

ПОТОКОВІ МОДЕЛІ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Олександр Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

od_polishchuk@ukr.net

Визначальною особливістю мережевих систем (МС) є рух потоків у них [1]. В одних випадках забезпечення руху потоків є основною ціллю утворення та функціонування таких систем, у інших – основним процесом, який забезпечує їх життєдіяльність. Зазвичай саме процес функціонування МС визначає динаміку (розвиток або деградацію) її структури. Необхідність забезпечення руху потоків у нові вузли означає їх включення в структуру мережі разом із відповідними зв'язками-ребрами. Навпаки, припинення руху потоків окремими ребрами або через певні вузли призводить до їх фактичного виключення зі складу мережі.

Динаміку МС ми описуємо матрицею суміжності щільності потоків, динамічною потоковою матрицею суміжності та інтегральною потоковою матрицею суміжності (ІПМС), елементами яких є функції щільності потоку у ребрах мережі, функції об'єму потоку, який знаходиться на ребрах у кожний момент часу та значення об'єму потоку, який проходить ребрами за заданий проміжок часу відповідно. ІПМС повністю визначає структуру мережі та описує процес функціонування відповідної МС на рівні сумарних об'ємів потоків, які рухаються мережею протягом певного часового періоду. Співставимо цій мережі її бінарний аналог, тобто мережу з тотожним складом та структурою вузлів та зв'язків, ненульові елементи матриці суміжності якої дорівнюють 1. k -серцевиною такої мережі називається така її найбільша підмережа, ступінь вузлів якої є не меншим за k [2]. Визначимо потокову λ -серцевину МС як найбільшу підмережу вихідної мережі, для якої усі елементи ІПМС мають значення, не менші за λ , $\lambda \in [0,1]$. $\lambda(k)$ -серцевиною МС називаємо найбільшу підмережу її λ -серцевини, ступінь вузлів якої є не меншим за k . У роботі показано, що структура цих серцевин суттєво відрізняється, при цьому потокова λ -серцевина МС дає значно важливішу інформацію для системних досліджень, ніж k -серцевина її структури. Наприклад, розповсюдження епідемій зазвичай відбувається на шляхах найбільш інтенсивного пересування великих мас людей, а розповсюдження комп'ютерних вірусів найбільш ймовірно на шляхах найбільш інтенсивного інформаційного трафіку. Потоківі серцевини МС з великими значеннями λ визначають найбільш ймовірні шля-

хи розповсюдження таких процесів. Окрім того, виділення та дослідження потокової серцевини МС порівняно з дослідженням всієї мережі дозволяє зменшити розмірність задачі завдяки відкиданню функціонально найменш важливих вузлів та зв'язків, «відключення» яких не призводить до серйозних збоїв у роботі системи. При цьому, чим більша питома вага λ -серцевини в системі, тим адекватніший результат дослідження. Для визначення питомої ваги λ -серцевини ми використовуємо параметр σ_λ , який визначає відношення об'ємів потоків, які проходять λ -серцевиною, до об'ємів потоків, які проходять мережею загалом. Оскільки основною ціллю більшості мережевих систем є забезпечення руху певного типу потоків, параметр σ_λ кількісно визначає наскільки λ -серцевина забезпечує реалізацію цієї цілі. Тому, якщо замість моделі всієї системи ми досліджуємо модель її λ -серцевини, значення параметра σ_λ можна інтерпретувати, як міру адекватності цієї моделі.

Розмірність моделей МС відіграє значну роль під час розв'язання багатьох важливих задач моделювання складних мереж та мережевих систем: керованості, спостережуваності, синхронізації [3] тощо. У даний час задачі керованості та спостережуваності складних мереж обмежуються найпростішими лінійними моделями орієнтованих щільних однорідних мереж, кількість вузлів яких обмежується кількома десятками. Тому зменшення розмірності задач керованості та спостережуваності стає вирішальним для можливості їх розв'язання, яке доцільно починати з $\lambda(k)$ -серцевини МС з великими значеннями k та λ . Також у роботі показано, що під час розв'язання задач керованості та спостережуваності у якості вузлів управління доцільно обирати вузли-генератори та у якості вузлів спостереження – вузли-приймачі потоків, а не вузли з найбільшим структурним ступенем.

1. *Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: I. Опис методики // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 1. – С. 21-31.
2. *Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F. F.* k-core organization of complex networks // Physical review letters. – 2006. – **96**, № 4. – 040601.
3. *Liu Y.-Y., Slotine J.J., Barabási A.L.* Controllability of complex networks // Nature. – 2011. – **473**. – P. 167-173.

FLOW MODELS OF NETWORK SYSTEMS

The flow characteristics of complex network systems are determined. The notion of the flow core of the network system is introduced and a comparative analysis of its properties with the properties of the core of a complex network is carried out. The ways of reducing the dimension of models of network systems with the help of introduced flow concepts are explored.

ПРО СЕРЦЕВИНИ СИСТЕМ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО ТИПУ

Олександр Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

od_polishchuk@ukr.net

Мультиплекси є широко розповсюдженим видом міжсистемних взаємодій. Транспортна інфраструктура країни, різномовні середовища, мультиплекси соціальних мереж – це знайомі та зрозумілі приклади таких утворень. Мультиплекси є динамічними структурами. Поява нового виду взаємодій між вузлами мереж, які входять до складу мультиплексу, породжує новий шар мультиплексу. Навпаки, якщо якийсь вид взаємодій зникає, то щезає і відповідний шар. Часто новий шар та відповідний вид взаємодій розширяє можливості існуючих зв'язків у мультиплексі (стаціонарний та мобільний телефонний зв'язок, пошта та E-mail). З наведених прикладів слідує, що у більшості випадків різні мережеві шари мультиплексу мають різний склад вузлів та структуру зв'язків. Тому, узагальнюючи відоме визначення [1], мультиплексом або М-структурою називаємо поєднання кількох взаємодіючих мереж, перетин множин вузлів яких є непорожнім. Ядром мультиплексу називаємо мережу, яка складається із вузлів та зв'язків, які входять до кожного мережевого шару М-структури. Кожний вузол ядра мультиплексу є «точкою переходу» з довільного шару-мережі на будь-який інший шар. Здатність переходу через вузли ядра з одного мережевого шару на інший та зворотно розширяє можливості доступу до вузлів, недосяжних в окремих шарах-мережах, та дозволяє здійснювати зв'язок між незв'язними складовими таких шарів.

Під час дослідження М-структур виникає багато важливих проблем: існування шляху з довільного вузла одного шару у довільний вузол іншого шару, побудова найкоротших шляхів руху через мультиплекс, пошук альтернативних шляхів через інші мережеві шари під час ізоляції певної зони в окремому мережевому шарі [2]; протидія розповсюдженню епідемії, комп'ютерних вірусів, які через мультиплексні взаємодії можуть поширюватися значно швидше, ніж в одному шарі. У роботі доводиться, що ефект «тісного світу» у М-структурах суттєво посилюється.

Кожний мережевий шар мультиплексу відображає структуру певної мережевої системи. Мультиплекс-системою (М-системою) називаємо сукупність мережевих шарів-систем, структури яких поєднані у М-структуру, і які спільно функціонують для забезпечення руху певного типу потоків. Таким чином, М-структура породжує М-систему лише у разі можливості переходу потоку з

довільного шару мультиплексу на інший та зворотно. Такою мультиплекс-системою є вже згадана вище транспортна система країни, потоками в якій є пасажирів та/або вантажі, М-системою породжує мультиплекс соціальних мереж і т. п.

Процес функціонування М-системи можна описати її потоковою матрицею суміжності [2]. Елементи цієї матриці дають можливість визначити низку важливих локальних та глобальних характеристик М-систем. Серед локальних характеристик можна назвати потоковий ступінь окремого вузла у певному системному шарі, який визначається об'ємами потоків, які проходять через нього у цьому шарі; потоковий мультиплексний ступінь цього вузла, який визначається об'ємами потоків, які проходять через нього в інших шарах М-системи та зворотно; питому вагу окремого системного шару у процесі функціонування всієї системи тощо.

Підсистемою М-системи, структура якої є ядром відповідної М-структури, називатимемо К-системою. Використовуючи потокові матриці суміжності, можна визначити питому вагу К-системи у процесі функціонування М-системи або, іншими словами, відстежувати кількісну міру адекватності моделі К-системи порівняно з моделлю всієї системи. На основі потокової матриці суміжності М-системи ми можемо визначити питому вагу окремого шару у процесі міжшарових взаємодій М-системи, виділяти шари-генератори та шари-приймачі потоків, визначити рівень пріоритетності для кожного шару внутрі-та/або міжшарових взаємодій, обчислювати силу взаємозв'язку між окремими шарами і т.п. Загалом описані вище параметри дозволяють кількісно визначити роль окремих складових в процесі функціонування М-системи та суттєво спростувати її модель.

У роботі вводиться поняття потокової серцевини М-системи і визначаються потокові характеристики цієї серцевини у процесі функціонування М-системи та окремих її шарів: питома вага серцевини у М-системі, питома вага серцевини окремого шару у процесі функціонування цього шару в межах всієї системи, питома вага серцевини у процесі міжшарових взаємодій і т.д. Ці характеристики також дозволяють суттєво спростувати моделі вихідної системи, одночасно відстежуючи кількісну міру збереження їх адекватності.

1. *Boccaletti S. et all.* Structure and Dynamics of Multilayer Networks // Physics Reports. – 2014. – **544**, № 1. – P. 1-122.
2. *Polishchuk O.* Flows characteristics and cores of complex network and multiplex type systems // arXiv preprint. – arXiv:1702.02730 [physics.soc-ph] . – 9 Feb 2017. – 22 p.

ABOUT CORES OF MULTIPLEX TYPE SYSTEMS

The concepts of the multiplex kernel, the flow adjacency matrix and the flow core of multiplex type systems are introduced. The possibilities of reducing the dimension of models of such systems with simultaneous monitoring of the quantitative measure of maintaining their adequacy are studied.

АЛГОРИТМ ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ РОЗРАХУНКУ І ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ

Інга Сафронова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара (України)

compumech@ua.fm

При розв'язуванні задач оптимального проектування складних багатопараметричних конструкцій кількість ітерацій пошукового оптимізаційного алгоритму часто виявляється досить значною, а враховуючи, що і прямий розрахунок таких об'єктів оптимізації теж достатньо трудомісткий, може бути поставлена під сумнів і сама можливість оптимізації. Очевидно, що для випадку нелінійної задачі прямого розрахунку проблема зменшення кількості етапів ітераційного процесу розрахунку та оптимізації параметрів конструкції стає ще більш актуальною.

Суть розробленого підходу до прискорення збіжності розв'язування нелінійних задач розрахунку та оптимізації неоднорідних елементів конструкцій полягає в зменшенні кількості етапів ітераційного процесу шляхом моделювання самого ітераційного процесу з використанням результатів вдалих попередніх кроків розрахунку та побудови прогноз-точок замість проведення всього обсягу обчислень k -го кроку наблизень.

Таким чином, визначення нелінійних складових $\bar{g}_i^{(n+1)}$ наступного кроку ітераційного процесу розрахунку полягає в екстраполяції (імітації) їх значень за результатами обчислених нелінійних параметрів $\bar{g}^{n-2}, \bar{g}^{n-1}, \bar{g}^n$ на трьох попередніх кроках ітераційного процесу для кожної із вузлових точок x_i проміжку $x_0 \leq x \leq x_L$ інтегрування відповідних лінеаризованих крайових задач чи оптимізаційного алгоритму.

Спочатку здійснюються три кроки ітераційного процесу, на яких нелінійні складові уточнюються з використанням методу верхньої релаксації

$$g_i^{(n+1)} = g_i^n - \gamma \left(g_i^n - g_i^{(n-1)} \right), \quad (1)$$

(для $n = 0$ лінеаризована задача розв'язується при початковому значенні \bar{g}^0 , що відповідає розв'язку лінійної задачі), а компоненти вектора $\bar{\gamma}$ ($0 < \bar{\gamma} \leq 1$), як відомо, встановлюються із вимог найкращої збіжності ітераційного процесу, ґрунтуючись на результатах числового моделювання, одержаних при розв'язуванні конкретних задач.

Оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем

Далі форма прогнозу поділяється за виглядом ітераційного процесу: якщо послідовність $\bar{g}_i^{n-2}, \bar{g}_i^{n-1}, \bar{g}_i^n$ немонотонна $(\bar{g}_i^{n-1} - \bar{g}_i^{n-2})(\bar{g}_i^n - \bar{g}_i^{n-1}) < 0$, то прогноз пропонується здійснювати за формулою Ейткена – Стеффенсена

$$g_i^{(n+1)} = \frac{g_i^n g_i^{(n-2)} - (g_i^{(n-1)})^2}{g_i^{(n-2)} - 2g_i^{(n-1)} + g_i^n}, \quad n \geq 2, (i = \overline{0, N}), \quad (2)$$

якщо процес монотонний $(\bar{g}_i^{n-1} - \bar{g}_i^{n-2})(\bar{g}_i^n - \bar{g}_i^{n-1}) \geq 0$, то у формі аналогу методу Адамса, який ґрунтується на екстраполяційних залежностях Лагранжа і Ньютона

$$g_i^{(n+1)} = \frac{23g_i^n - 16g_i^{(n-1)} + 5g_i^{(n-2)}}{12}, \quad n \geq 2, (i = \overline{0, N}). \quad (3)$$

Далі, за основним алгоритмом, знову здійснюється розв'язування лінеаризованої системи на двох наступних послідовних кроках і процес продовжується до досягнення заданої точності з урахуванням одержаних трьох нових точок, починаючи з прогноз-точки.

Такий підхід дає змогу уникати необхідності «зайвого» розв'язання крайової задачі чи прямої задачі розрахунку на кожному третьому кроці. Крім того, обчислювані прогнозні значення $\bar{g}_i^{(n+1)}$ часто виявляються більш близькими до відшукуваного розв'язку ніж ті, що могли б бути отримані за основним ітераційним процесом. Все це дозволяє відчутно зменшити кількість ітерацій методу послідовних наближень.

В особливо складних випадках нелінійності (значних переміщеннях) для забезпечення збіжності додатково може застосовуватись і метод додаткових навантажень. При цьому достатньо всього декількох ступенів збільшення зовнішнього навантаження з глибиною ітераційного процесу. Ефективним виявилось також і поступове збільшення точності обчислення з глибиною ітераційного процесу $\varepsilon = \varepsilon/c(k)$, $c(k) > 1$.

За результатами досить обширного числового експерименту встановлено, що запропоновані алгоритми прискорення збіжності дозволяють суттєво (в рази) скоротити обчислювальні витрати в задачах розрахунку та оптимізації нелінійних структур.

THE ALGORITHM OF ACCELERATION OF CONVERGENCE OF ITERATION PROCESSES FOR CALCULATION AND OPTIMAL DESIGN OF CONSTRUCTIONS

The approach to accelerating the convergence of solving nonlinear problems of calculation and optimization of heterogeneous elements of shell designs was proposed. The essence of the approach is reduction of the number of stages of the iterative process by simulating this iterative process with using periodic extrapolations of the values of nonlinear components and (or) variables based on the results of successful previous calculation steps and constructing forecast points instead without carrying out all calculations of the k-th step of approximation.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ І РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ ТІЛ, ЩО ПРОНИКАЮТЬ У ВОДУ З ВЕЛИКОЮ ШВИДКІСТЮ

Володимир Семененко, Тетяна Крижановська, Тетяна Семененко

Інститут гідромеханіки НАН України;

Державний університет інфраструктури та технологій (Україна)

vnsvns60@gmail.com; takr@i.ua

1. Постановка задачі. Розглядаються процеси, що протікають при високошвидкісному вході тіл у воду під довільним кутом γ до горизонту і при подальшому русі у воді за інерцією. При перетині вільної поверхні води тіло відчуває великі "ударні" навантаження [1]. У процесі проникнення в воду за тілом розвивається каверна, і подальший рух відбувається в режимі суперкавітації. Оскільки швидкість тіла стрімко падає, тіло знаходиться в стані пружного стиснення під дією сили кавітаційного опору F_n і сил інерції. При взаємодії зі стінками каверни тіло знаходиться в стані плаского згину під дією поперечної контактної сили F_s і сил інерції.

Метою роботи є розробка методики розрахунку для оптимального проектування форми і конструкції моделей, що проникають у воду з великою швидкістю, з урахуванням вимог міцності, максимальної дистанції руху в воді за інерцією і мінімального відхилення від прямолінійної траєкторії.

2. Метод дослідження. Зважаючи на складність і комплексний характер проблеми для її дослідження застосовується метод комп'ютерного моделювання. При цьому використовується апроксимаційна математична модель нестационарної суперкаверни, заснована на принципі незалежності розширення перерізів суперкаверни Г.В. Логвиновича [1]. Для розрахунку ударних навантажень при вході у воду використовуються напівемпіричні співвідношення. Система рівнянь просторового руху моделі, співвідношення для розрахунку форми нестационарної каверни і діючих гідродинамічних сил F_n , F_s наведені в роботі [2]. В кожен момент часу обчислюється розподіл нормальних σ_x і дотичних τ_y пружних напружень в перерізах моделі.

3. Результати. Комп'ютерне моделювання показало, що при ненульових початкових збуреннях модель робить кутові коливання, рикошетуючи своєю хвостовою частиною від протилежних стінок каверни. При цьому частота коливань залишається майже незмінною, а амплітуда зменшується внаслідок того, що швидкість моделі стрімко падає і каверна стає все більш "тісною". Рух

добре спроектованої суперкавітуючої моделі за інерцією є стійким у цілому і триває до тих пір, поки не відбудеться кільцевий замив моделі.

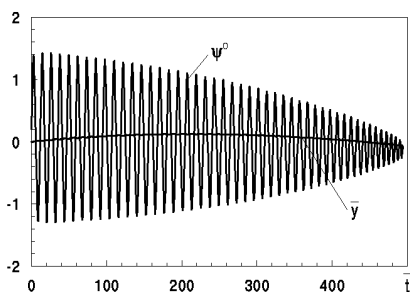


Рис. 1.

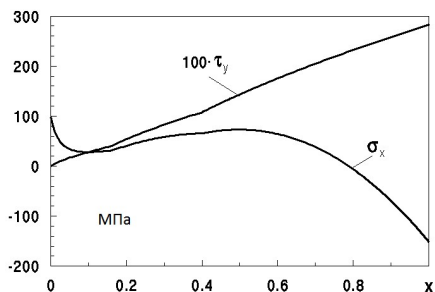


Рис. 2.

Як приклад на рис. 1 наведено типові графіки залежності кута тангажу “добре спроектованої” моделі ψ і відхилення її центру мас від прямолінійної траєкторії $\bar{y} = y/L$ від безрозмірного часу $\bar{t} = tV_0 / L$. Параметри розрахунку: $L = 150$ мм – довжина моделі; $m = 100$ г – маса моделі; $V_0 = 500$ м/с – швидкість входу у воду; $\gamma = -30^\circ$. На рис. 2 показано розподіл нормального і дотичного пружних напружень (в МПа) в перерізах моделі в момент $\bar{t} = 20$, коли хвостова частина моделі знаходиться в контакті зі стінкою каверни. Максимальне напруження при вході у воду дорівнює 157.6 МПа. Пройдена моделлю дистанція у воді за інерцією становить 55.57 м.

1. Логвинович Г.В., Якимов Ю.Л. Погружение тел в жидкость с большими скоростями. – В кн.: Труды Международ. симп. “Неустановившиеся течения воды с большими скоростями”. – М.: Наука, 1973. – С. 85-92.
2. Semenenko V.N. and Naumova Ye.I. Study of the supercavitating body dynamics // In book: Supercavitation: Advances and Perspectives. – Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg. – 2012. – P. 147-176.

MODELING OF BODY DYNAMICS AND BODY STRENGTH DESIGN DURING HIGH-SPEED WATER PENETRATION

A methodology of analysis of a body dynamics and strength during the high-speed water penetration is presented. It includes computer simulation of a supercavitating body motion based on the G.V.Logvinovich principle of independence of cavity section expansion. The developed methodology can be used for optimal designing the model shape and structure for high-speed water entry and following motion in water on inertia.

МЕТОДОЛОГІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ГЕОМЕТРІЇ ЛОПАТКИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ НА ПРИКЛАДІ ЛОПАТКИ ГАЗОТУРБІННОГО ДВИГУНА

Микола Скрицький

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

n.skritsky@gmail.com

У сучасному світі багато програмних комплексів ґрунтуються на методи скінченних елементів, наприклад SolidWorks, ANSYS. Від кількості елементів в моделі і від потужності обчислювальної техніки залежить час розрахунку. Кількість елементів залежить від геометрії тіла, типу скінченного елемента і його розмірів. Тип скінченного елемента залежить від специфіки розрахунку, а розмір від необхідної точності. В сучасних газотурбінних двигунах лопатковий апарат є найбільш відповідальною і напруженою системою [1]. Компресорні лопатки відрізняються тонкими профілями, малою жорсткістю, і коливання складають для них основну небезпеку. Лопатковий апарат компресорів сучасних газотурбінних двигунів перебуває під дією інтенсивних статичних і динамічних навантажень. Основною причиною порушення коливань лопаткового апарату компресора є колова нерівномірність потоку [2]. Для визначення частот збуджуючих гармонік на резонансних режимах необхідний модальний аналіз коливань робочих лопаток і побудова резонансної діаграми [3]. В роботі наведено дослідження коливань власних частот при різних видах спрощення моделі робочої лопатки компресора. Метою роботи є визначення оптимального методу спрощення геометрії тіла, на прикладі лопатки газотурбінного двигуна (ГТД), без зниження точності розрахунку.

Дослідження проводилися для робочої лопатки компресора газотурбінного двигуна з хвостовиком типу «ластівчин хвіст». При числових розрахунках лопатки, відповідні моделі жорстко закріплювалися по робочих поверхнях хвостовика (переміщення в місці закріплення обмежені в усіх напрямках). Податливість диска в замковому з'єднанні «ластівчин хвіст» при розрахунках не враховувалася. Розрахунки проводилися з урахуванням частоти обертання по осі x зі швидкістю 837 рад/с. З огляду на те, що температура лопатки не перевищує 100 С°, її вплив не враховувався. Для проведення числових розрахунків моделі розбивались автоматично сіткою гексагонального типу з використанням елемента розміром 2 мм та 1 мм. Для кожної побудованої сітки моделі було проведено статичний аналіз й визначено час побудови сітки скінченних елементів й час числового розрахунку. Для моделей із сіткою 2 мм спостерігається невелика різниця за часом, проте у випадках,

коли елементу присвоюється розмір 1 мм відмінності вагомі. Для моделі з найбільшим спрощенням геометрії, відповідно з найменшим числом скінчених елементів і найшвидшим розрахунком похибка в модальному і статичному аналізах не перевищує 5%, що є хорошим результатом з урахуванням витрачених ресурсів на її числовий розрахунок. Таку модель доцільно використовувати для попередньої оцінки задачі. За результатами модального аналізу були побудовані частото-резонансні діаграми, які дають змогу зробити висновок, що немає необхідності проводити розрахунок по 10 перших формах коливаль, оскільки робочі тільки шість перших форм. На побудову подібної діаграми з використанням інших моделей необхідно було б затратити набагато більше часу, а без її побудови складно сказати скільки форм збуджуються під час роботи ГТД.

Наведену методологію можна описати так: *«Для збільшення швидкості розрахунків не забороняється спрощувати модель тіла, що розраховується, шляхом часткового зменшення його об'єму або (і) часткового видалення складних ділянок його геометрії. Однак цю методологію доцільно використовувати тільки в тому випадку, якщо такі спрощення не призводять до помилкових результатів у поставленій задачі»*. Спрощення геометрії моделі важливий етап в розрахунках. Правильно спрощена модель економить час в майбутніх розрахунках і допомагає проаналізувати майбутню роботу.

1. Воробьев Ю.С., Овчарова Н.Ю., Кулаков П.Н., Кулишов С.Б., Скрицкий А.Н. Проблема анализа динамических напряжений в лопаточном аппарате компрессора ГТД в газодинамическом потоке // Вестник двигателестроения. – Запорожье: АО «Мотор Сич» – 2015. – № 2. – С. 58-61.
2. Воробьев Ю.С., Овчарова Н.Ю., Кулаков П.Н., Кулишов С.Б., Скрицкий А.Н. Вынужденные колебания ступени компрессора ГТД в потоке // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков: НАКУ «ХАИ» – 2014. – 115, № 8. – С. 152-155.
3. Воробьев Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин. – Киев: Наук.думка, 1988. – 224 с.

GEOMETRY OPTIMIZATION METHODOLOGY OF THE BLADES FOR NUMERICAL CALCULATIONS AS EXAMPLE WAS SELECTED GAS TRACTOR ENGINE BLADES

The purpose of the work is to determine the optimal method for simplifying the geometry of the body, for example, a blade of a gas turbine engine, without reducing the accuracy of the calculation. In this article we study the vibrations of natural frequencies with different types of simplification of models of the working blade of compressor. Were measured the time for each construction of the elements, modal and static calculations. After analyzing the data, we can come to the following conclusions. Simplification of geometry for accelerating numerical calculations is an effective method, but it is necessary to clearly understand the statement of the problem and the purpose of the study.

ОПТИМІЗАЦІЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ОЦІНЮВАННЯ СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ НА ПІДСТАВІ РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЕНЬ

Михайло Яджак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

yadzhak_ms@ukr.net

Складні мережеві системи (СМС) використовуються в багатьох галузях людської діяльності [6]: на транспорті, у промисловості, освіті та науці, зв'язку, торгівлі, охороні здоров'я, енергозабезпеченні, фінансах, охороні довкілля тощо. Від якості функціонування таких систем, які до того ж постійно розвиваються, залежить рівень життя громадян. Отже, дослідження, пов'язані з покращенням роботи СМС або їх окремих підсистем, є доволі актуальними та перспективними.

В [1] була запропонована методика комплексного детермінованого оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем (СІМС), яка поєднує методи локального, прогностичного, агрегованого та інтерактивного аналізу стану і якості функціонування об'єктів таких систем. Ця методика ґрунтується на використанні значної кількості характеристик елементів СІМС, враховує різні режими функціонування окремих підсистем та залучає низку критеріїв оцінювання. Тому для ефективної її реалізації потрібно застосовувати високопродуктивні обчислювальні засоби. З цією метою в [2, 3] були розроблені паралельні алгоритми локального та агрегованого оцінювання СІМС. Крім цього, в [4] подано загальний підхід до розпаралелювання методики комплексного оцінювання та способи його застосування. Загалом для запропонованого підходу вхідними даними є результати регулярних (планових) оглядів (вимірювань) об'єктів системи.

Важливою є і проблема оперативного (в режимі реального часу) оброблення та аналізу даних про систему, які надходять у процесі її неперервного моніторингу. Цю проблему будемо вирішувати завдяки розпаралелюванню методів інтерактивного оцінювання СМС для реалізації на сучасних універсальних обчислювальних засобах зі спільною (багатоядерні комп'ютери) та розподіленою (кластери, гібридні архітектури, високопродуктивні обчислювальні середовища) пам'яттю. Зауважимо, що вхідні дані про систему загалом можуть бути дещо спотвореними, неточними або пошкодженими. Тому перед використанням їх потрібно попередньо обробити (відфільтрувати).

Інтерактивне оцінювання здійснюється на рівні аналізу взаємодії таких об'єктів СМС, як потоки і лінія. Лінія є послідовністю вузлів і ребер, які їх

з'єднують. При цьому вважається, що проходження потоків є повністю детермінованим, тобто визначено графік їх руху. Зазначимо, що метою інтерактивного оцінювання є виявлення, локалізація та усунення саме регулярних негативних факторів, які зумовлюють відхилення від встановленого графіка руху потоків.

Для попереднього оброблення великих масивів вхідних даних про досліджувану мережеву систему запропоновано низку паралельних методів та алгоритмів, зокрема метод організації обчислень [5], який дозволяє будувати ефективні алгоритми цифрової фільтрації з повністю автономними гілками для кластерів.

Нами формалізовано процедуру інтерактивного оцінювання у вигляді послідовності п'яти кроків. На першому кроці обчислюються локальні оцінки (руху та оброблення потоків), а на решті чотирьох – оцінки певного рівня узагальнення (на другому та третьому – вузлів та ребер; на четвертому та п'ятому кроках – ліній). У межах кожного з кроків (з першого по четвертий) всі оцінки можна обчислювати одночасно.

Запропоновано ефективні алгоритмічні конструкції для паралельної реалізації методів інтерактивного оцінювання. Для окремих конструкцій одержано оцінки прискорення паралельних обчислень. Наведено способи виконання запропонованих алгоритмічних конструкцій з використанням сучасних універсальних програмних та апаратних засобів.

1. *Полищук Д.О., Полищук О.Д., Яджак М.С.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: I. Опис методики // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 1. – С. 21-31.
2. *Полищук О.Д., Тютюнник М.І., Яджак М.С.* Локальне оцінювання якості функціонування складних систем на підставі паралельних обчислень // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32 (108). – С. 119-124.
3. *Полищук О.Д., Тютюнник М.І., Яджак М.С.* Оцінювання якості функціонування складних систем на основі паралельної організації обчислень // Відбір і обробка інформації. – 2007. – Вип. 26 (102). – С.121-126.
4. *Яджак М.С., Полищук О.Д., Тютюнник М.І.* Оптимізація методики комплексного оцінювання складних систем на підставі паралельних обчислень // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – 6, № 4. – С. 347-356.
5. *Яджак М.С.* Паралельні алгоритми розв'язання просторової задачі цифрової фільтрації даних // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2017. – 7, № 3. – С. 234-239.
6. *Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunnyk M., Yadzhak M.* Big Data Processing in Complex Hierarchical Network Systems I: Structures and Information Flows // AASCIT Communications. – 2016. – 3, № 3. – P. 112-118.

THE OPTIMIZATION OF INTERACTIVE EVALUATION FOR COMPLEX NETWORK SYSTEMS BASED ON PARALLEL COMPUTING

Complex network systems are considered in the paper. Effective parallel algorithms are proposed for an interactive evaluation of the behaviour of such type systems. The computational algorithms are oriented on modern soft- and hardware means.

КЕРУВАННЯ СТАЦІОНАРНИМИ ТЕМПЕРАТУРНИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ ПЛОСКОДЕФОРМОВАНОГО ПІВПРОСТОРУ

Анатолій Ясінський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

yasinskyi.anatoliy@gmail.com

Збереження стабільності вихідної геометрії теплонавантажених деталей технологічного обладнання в умовах їх експлуатації є актуальною задачею точного машинобудування та приладобудування. Найчастіше погіршення характеристик робочої поверхні деталі може відбуватися через досягнення на ній деякої критичної температури, наприклад, температури плавлення чи рекристалізації, появу і розвиток пластичних деформацій або перевищення її пружними переміщеннями допустимої величини.

В роботі сформульовано математичну постановку та побудовано аналітичний розв'язок задачі оптимального керування стаціонарними вертикальними температурними переміщеннями межевої поверхні плоскодеформованого півпростору. Розглянуто півпростір, який нагрівається через межеву поверхню шляхом конвективного теплообміну із довкіллям. Вибравши за функцію керування інтенсивність внутрішніх теплових джерел, зосереджених у деякій площині, паралельній до межевої поверхні, знайдено керування, яке забезпечує мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу переміщень межевої поверхні півпростору від заданого. За умов існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності вихідну задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності, яка описується інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. Побудовано розв'язок отриманого інтегрального рівняння. Для конкретних випадків теплового навантаження півпростору проведено числовий аналіз поведінки розв'язку задачі оптимізації, який забезпечує нульові вертикальні переміщення межевої поверхні півпростору, у залежності від характерних параметрів.

CONTROL OF STATIONARY TEMPERATURE DISPLACEMENTS IN PLANE DEFORMED HALF-SPACE

The article considers the statement and the solution of the optimal control problem with internal heat sources, normal stationary displacements of boundary surfaces induced by temperature in plane deformed half-space. The optimization problem is reduced to the inverse problem of thermoelasticity.

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІДЗЕМНИХ ДІЛЯНОК ТРУБОПРОВОДІВ В ЗОНАХ ШАХТНИХ ВИРОБІТОК З ВРАХУВАННЯМ ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ПОЗДОВЖНИХ ЗМІЩЕНЬ ҐРУНТУ

Захар Ясковець, Ігор Ориняк

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

yaskovets.zakhar@gmail.com

В Європейській практиці проблема руйнування трубопроводів в результаті геодинамічних процесів поверхні ґрунту є досить гострою [1]. Одним з випадків таких процесів є штучно-створені зсуви ґрунту в результаті діяльності вугледобувних шахт. На території України в зону впливу вугледобувних шахт потрапляє близько 22,1 км магістральних газопроводів [2] і їх кількість постійно зростає в зв'язку з розширенням меж видобування.

У загальному випадку при розрахунках напруженого стану трубопроводів в зоні шахтних виробіток поперечними зміщеннями ґрунту (осіданнями) нехтують: максимальні осідання в зоні виробітки (0,9-1,2 м) на загальній протяжності трубопроводу (600-1000м) утворюють кривини великих радіусів, що, в свою чергу, призводить до незначного напруженого стану (≈ 4 МПа). Основна небезпека для трубопроводів виникає саме від переміщень ґрунту вздовж осі трубопроводу [3]. Для аналізу напружень в трубопроводі, спричинених такими зсувами ґрунту, авторами створено чисельно-аналітичну процедуру, опис якої наведено в [4].

Розрізняють два основні випадки взаємної орієнтації осі трубопроводу та напрямку шахтної виробітки: поперечний та поздовжній. На рис. 1 представлено схеми розвитку поздовжніх зміщень ґрунту при поперечному а) та поздовжньому б) варіантах. Для поперечного випадку розрахунок напруженого стану виконують за прогнозними зміщеннями при повному (кінцевому) відпрацюванні шахтної виробітки, оскільки розвиток зміщень відбувається в одному напрямку (рис. 1а). У поздовжньому випадку взаємної орієнтації осі трубопроводу та шахтної виробітки класичний підхід до розв'язання задачі розрахунку напруженого стану з врахуванням лише кінцевого моменту часу (рис. 1б) буде хибним, оскільки при цьому не враховується перерозподіл внутрішніх сил в трубопроводі під час виробітки.

З метою коректного врахування історії розвитку поздовжніх зміщень ґрунту в часі виконано модернізацію аналітичної процедури [4] шляхом впровадження алгоритму врахування перерозподілу сил взаємодії між поверхнею трубопроводу та ґрунтом на кожному ітераційному кроці. На основі цього проведено моделювання напруженого стану трубопроводу для різних

взаємних положень шахтної виробітки та лінії трубопроводу з врахуванням історії розвитку поздовжніх зміщень ґрунту в часі. Отримані результати порівнювались з аналогічними, отриманими для кожного часового кроку. Для поздовжнього випадку розбіжність результатів складає до 50 МПа в залежності від часового кроку T_i , що може бути критичним при формуванні підходів щодо забезпечення надійної експлуатації.

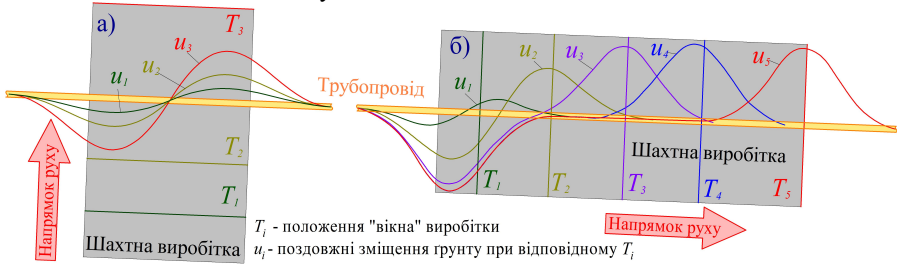


Рис. 1. Схеми розвитку поздовжніх зміщень ґрунту.

Висновки. Створено процедуру врахування історії розвитку поздовжніх зміщень ґрунту в часі, в основі якої лежить моделювання напруженого стану трубопроводу на поточному часовому кроці з використанням стану точок трубопроводу на попередньому часовому кроці. Результати розрахунків показали, що неврахування історії навантаження при поздовжньому відпрацюванні може призвести до значної недооцінки напруженого стану трубопроводу під час руху шахтної виробітки в часі.

1. Gas pipeline incidents. 9-th Report of the European Gas Pipeline Incident Data Group (1970-2013), February 2015. Режим доступу: [https://www.egig.eu/reports/\\$97/\\$155](https://www.egig.eu/reports/$97/$155).
2. Сакун М.Ю., Система спостережень та захисту магістральних газопроводів, які підробляються вуглевидобувними шахтами // Нафт. і газова пром-сть. – 2006. – № 4. – С. 45-48.
3. Камерштейн А.Г., Рождественский В.В., Ручимский М.Н. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга. – М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. – 424 с.
4. Ориняк І.В., Ясковець З.С. Метод функції внутрішнього відклику для оцінки напруженого стану підземних магістральних газопроводів в зонах шахтних виробіток // Проблем міцності, (Подана до друку).

STRESS STATE CALCULATION OF BURIED PIPELINE IN THE AREAS OF MINE PRODUCTION WITH TAKING INTO ACCOUNT THE HISTORY OF LONGITUDINAL SOIL DISPLACEMENTS

The paper deals with stress-strain state calculation of buried pipelines in the areas of coal mining. A numerical iterative procedure for taking into account of the history of longitudinal soil displacements during mining is developed. It was found that the ignoring of the history of longitudinal soil displacements can cause to a significant underestimation of the stress state of the pipeline.

**ASSESSMENT OF ULTIMATE LOAD ON HUMAN
FEMUR AFTER SURGICAL RESECTION: EFFECT
OF MECHANICAL PROPERTIES ANISOTROPY**

**Sergei Bosiakov, Kirill Yurkevich, Denis Alekseev,
Vadim Silberschmidt, Ihar Shpileuski**

Belarusian State University (Belarus);

Loughborough University (UK);

Republican Scientific and Practical Centre for Traumatology and Orthopedics (Belarus)

bosiakov@bsu.by; kirill.bsu@gmail.com; onardeon@gmail.com;
v.silberschmidt@lboro.ac.uk; ihar760@gmail.com

Properties of components such as minerals, organic matrix and osteons of the bone tissue in combination with their orientation and distribution significantly influence its mechanical behavior. Differences in the orientation of the constituent components of the bone lead to its anisotropy (transverse isotropy or orthotropy) of properties, and anisotropic properties can manifest both along the length of the bone and the anatomical quadrants (or sides of the cross section of the bone) [1, 2]. In particular, elastic properties [2] and toughness [3] of the cortical bone tissue are non-uniform along the bone's circumference (in different anatomical quadrants). Different properties of bone tissue for different quadrants of the bone cross-section can influence the bone's load-carrying capacity after surgical resection (removal of a tumor-like lesion with formation of a sectorial bone defect). This is due to the fact that a part of the bone remaining after the operation is loaded partially or fully, corresponding its position in the cross section of the bone. The aim of this study is to evaluate the ultimate load on the femur with post-resection defect, taking into account the various elastic properties and toughness of bone tissue in different quadrants of the cross section of the bone. The finite-element modeling with using ANSYS 17.0 was utilized to reach this aim.

The solid model of the femur was obtained on the basis of tomographic data. The load on the femur was applied along the biomechanical axis passing from the upper pole of the femoral head to the middle of the distance between the extreme lower sections of the condyles of the femur [5]. The boundary conditions were defined in such a way that the femoral head (the acetabular contact area) and the lower sections of the condyles of the femur (the sites of contact with the condyles of the tibia) were rigidly embedded. In numerical simulations, a bone defect was located in the middle third of the femur in various quadrants of the cross section. The angular dimensions of the defects, irrespective of the quadrant, approximately were

270°, while its linear dimensions were 50.2 mm.

Two-dimensional regression functions (using the least squares method) are derived to describe the elastic properties of the femur bone based on the values of the elastic moduli, shear moduli and Poisson's ratios at twenty points located in different anatomical quadrants of trabecular and cortical bone tissue [2]. It was assumed that the elastic properties of the femur within any cross-section in the radial direction remain unchanged for regression functions.

The magnitudes of the ultimate load on the femur were determined on the basis of the J -integrals calculation in the post-surgical defect domain. The load was assumed to be ultimate if the J -integral reached the critical value J_C . The elastic properties of the femur bone tissue were described in three different cases. In case 1, the elastic properties were assumed on the basis of regression functions for the elastic moduli, Poisson's coefficients and shear moduli. In case 2, the averaged values of the elasticity moduli, the Poisson coefficients and the shear moduli along the bone length and over all anatomical quadrants were used for regression functions. In case 3, cortical bone tissue was considered as an isotropic material with averaged moduli of elasticity and Poisson's ratio for entire femur. The J_C values were different for all anatomical quadrants [3].

The finite-element analysis resulted that the ultimate load in case 1 was 650 N, in the case 2 was 630 N, in the case 3 was 600 N. Thus, the anisotropic distribution of the elastic properties of the cortical bone tissue in different anatomical quadrants and along the length of the bone can affect significant influence on the ultimate load magnitude on the femur with postresection defect. Averaging the elastic properties of the femur leads to a decrease in the ultimate load. Thus, neglecting the anisotropy of the elastic properties can lead to an incorrect estimate of the ultimate load, which can lead to incorrect recommendations for postoperative rehabilitation of the patient, in particular, to excessive treatment.

1. *Orias A.A.E.* The relationship between the mechanical anisotropy of human cortical bone tissue and its microstructure // Dissertation. Notre Dame, Indiana, USA. – 2005. – 142 p.
2. *Rho J.-Y.* An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone // *Ultrasonics*. – 1996. – **34**. – P. 777-783.
3. *Li S., Demirci E., Silberschmidt V.V.* Variability and anisotropy of mechanical behaviour of cortical bone in tension and compression // *J. Mech. Behav. Biomed. Mat.* – 2013. – **21**. – P. 109-120.
4. *Yoshioka Y., Siu D., Cooke D.V., Chir B.* The anatomy and functional axes of the femur // *J. Bone Joint. Surg.* – 1987. – 69-A. – P. 873-880.
5. *Letter to the editor*, 2002. ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion—part I: ankle, hip, and spine. *Journal of Biomechanics* 35, 543-548.

MATHEMATICAL MODELING OF HUMAN GAIT WITH ELECTROMECHANICAL EXOSKELETON

Myroslav Demydyuk, Bogdan Lytwyn

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

demydyuk@iapmm.lviv.ua; b_lytwyn@ukr.net

The human gait with electromechanical exoskeleton over fixed horizontal surface is researched. Exoskeleton is a mechanical device, which can be used for recovering of human locomotion functions (under lowered muscle tone of lower extremities). Exoskeleton consists of belt and a pair of three-link hinged levers. Belt is fixed on a human trunk, lever links are fixed successively on thigh, shank and foot. The exoskeleton control for each degree of freedom is happened by means of electromechanical device, which consist of electric motor with microcontroller and reduction gear [1]. The motor input is an electrical voltage, which provides corresponding forces in the exoskeleton joints. The development of a mathematical model of a human gait with electromechanical exoskeleton under restriction of anthropomorphic movement of a total biotechnical system is a goal of the investigation.

Human locomotor apparatus is modeled by a system of nine rigid bodies: trunk and two four-links legs (thigh, shin and two-link foot) [2, 4, 5]. Exoskeleton is presented by rod-hinge system with electromechanical device in six hinges in corresponding human's ankle, knee and hip joints. The system movement is caused by interaction of gravity force, ground reaction forces, and control torques in the joints. Torques in the joints is generated by a human muscle-skeletal structure and the exoskeleton devices.

Human gait is modeled over double stride period $[0, T]$, where a "natural" sequence of feet phases is taken into account: rotating over heel, support on full foot, rotating over metatarsal and foot swing. Additional kinematical and dynamical restrictions of anthropomorphic feet contact with a support surface, periodic restriction (by angles and angular velocities) of whole system and restrictions of relative feet placements in the time moments $t=0$, $t=T$ are imposed on the system's movement. Assume that feet mass is located in the ankle joints. In this case the dynamics of model movement (in a sagittal plane) is described by the following system: a) seven nonlinear differential equation of 2-nd order (equations of movement of weighty elements); b) four algebraic equations (conditions of kinetostatic balance of massless feet); c) six linear differential equations of 2-nd

order (equations of motors rotor rotation); d) six linear differential equations of 1-st order (describes electromagnetic processes in the motor winding).

Let introduce the next vectors: \mathbf{q} – generalized coordinates of mechanical system, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\mathbf{c})$ – control stimuli (electric voltage changes in time law), $\mathbf{U}(\mathbf{c})$ – parametric set of suitable controls (for example, piecewise constant timeline functions over interval $[0, T]$), \mathbf{c} – vector of parameters, which unequivocally determine controls $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ over domain \mathbf{U} , \mathbf{p} – torques of muscles forces in the model's hinges, \mathbf{g} – interlink angles in hip, knee and ankle joints, $\mathbf{g}^0(t) \leq \mathbf{g}(t) \leq \mathbf{g}^1(t)$, $t \in [0, T]$ – restrictions imposed on interlink angles (functions $\mathbf{g}^{0,1}(t)$ are built on the basis of human gait experimental investigations). The given restrictions on interlink angles supplement the terms of anthropomorphic system movement. The quadratic functional $P = \int_0^T \mathbf{p} \mathbf{A} \mathbf{p} dt$, where \mathbf{A} – the diagonal matrix with weighting coefficients is used for evaluating of muscle forces magnitude in the system joints.

Problem. It is required to determine $\mathbf{q}^*(t)$ and $\mathbf{u}^* \in \mathbf{U}(\mathbf{c}^*)$, $t \in [0, T]$, which satisfy equations of system movement, given restriction, and minimize functional P .

The methodology of parametric optimization [2–5] is effective for the formulated problem's investigation. The essence of methodology is based on reduction of the initial optimal control problem to the minimization problem of many variables functions. The set of independently variable functions, selected accordingly to the number of degree of freedom of the system on corresponding movement rhythmic phases is introduced. This set is approximated by cubic smoothing splines with unknown parameters \mathbf{z} in the discretization nodes. Part of these parameters are determined from kinematic conditions, other restrictions are satisfied by penalty functions approach, where restrictions in the form $g^0 \leq g \leq g^1$ are converted to the integral form $V = \int_0^T [(g - g^1)_+ + (g^0 - g)_+] dt$, where denoted: $(g)_+ = g$, when $g \geq 0$, and $(g)_+ = 0$, when $g < 0$. The static uncertainty of the system over double support phases is solved by approximation of corresponding characteristics by cubic Hermite splines by their boundary values on adjacent single support phases and by the values of the first derivatives in the boundary points (the latest ones are included into optimization parameters). Further, the parametric family $\mathbf{p}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ is determined from motion equations by using the inverse dynamics approach. By substituting $\mathbf{p}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ into expression for functional P the many variables function $P(\mathbf{z}, \mathbf{c})$ will be obtained. Finally, the nonlinear mathematical programming problem will be obtained: $P(\mathbf{z}, \mathbf{c}) + \langle \lambda, \mathbf{V}(\mathbf{z}) \rangle \xrightarrow{\mathbf{z}, \mathbf{c}} \min$, where λ – vector of penalty coefficients,

vector-function $\mathbf{V}(\mathbf{z})$ is determined from corresponding restrictions of initial problem with considering of ones integral representations. The numerical procedures of mathematical programming are used for solving of obtained problem.

The developed mathematical model of human gait with electromechanical exoskeleton and the control algorithm is implemented in the corresponding (Inprise Delphi 7) software. The series of carried out numerical experiments confirms efficiency of the proposed parametric-optimization approach for a human gait modeling with actively controlled exoskeleton.

1. *Berbyuk V.E., Demydyuk M.V., Ivakh G.F.* Problems of optimizing the structures and laws of control of the motion of electromechanical manipulators // Soviet Journal of computer and systems sciences. – 1987. – **25**, Is. 6. – P. 103-112.
2. *Berbyuk V.E., Demydyuk M.V., Lytvyn B.A.* Mathematical modeling and optimization of walking of human being with prosthesis of crus // J. Autom. Inform. Sci. – 2005. – **37**, Is. 6. – P. 46-60.
3. *Demydyuk M.V.* Parametric optimization of a four-link close-chain manipulator with active and passive actuators // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No 5. – P. 746–758.
4. *Demydyuk M.V., Lytvyn B.A.* The mathematical modeling of the human gait with ankle hinged orthosis // J. Autom. Inform. Sci. – 2015. – **47**, Is. 4. – P. 64-77.
5. *Demydyuk M.V., Lytvyn B.A.* Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot // J. Autom. Inform. Sci. – 2016. – **48**, Is. 12. – P. 48-61.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХОДИ ЛЮДИНИ З ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИМ ЕКЗОСКЕЛЕТОМ

Досліджуємо задачу математичного моделювання ходи людини з електромеханічним екзоскелетом. Екзоскелет складається із корсета і пари триланкових шарнірних важелів. Корсет закріплюють на корпусі людини, ланки важелів послідовно фіксують на стегні, гомілиці та стопі. Керування екзоскелетом (для кожного ступеня вільності) відбувається за допомогою електромеханічного приводу (електродвигун з мікроконтролером та редуктор). На вхід двигуна подається електрична напруга, яка забезпечує створення відповідних зусиль у шарнірах екзоскелета. Формулюємо задачу пошуку таких керувальних напруг (у параметризованому класі кусково-постійних функцій часу), які за умови антропоморфності руху біотехнічної системи мінімізують моменти м'язових сил у суглобах ніг людини (у сенсі норми L_2). Алгоритм розв'язання задачі ґрунтується на методах параметричної оптимізації. Узагальнені координати механічної системи подаємо у вигляді кубічних згладжувальних сплайнів з невідомими коефіцієнтами, що зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування.

THE DEVELOPMENT OF THE INTERNATIONAL PROJECT "VIRTUAL PHYSIOLOGICAL HUMAN", THE ROLE OF BIOMECHANICS IN THE DEVELOPMENT OF BIOMEDICINE

Yurij Nyashin

Perm National Research Polytechnic University (Russia)

nyashin@inbox.ru

The development of medicine of the XXI century is based on four directions, beginning with the letter "p": predictive medicine, preventive medicine, personalized medicine, participative medicine. The realisation of these directions in medicine requires extensive use of the latest achievements of computer science and biomechanics in particular. One of the perspective directions in this regard is the development of the International Megaproject "Virtual Physiological Human". According to this concept, the human body is considered as a complex multi-block biomechanical system. It includes all the subsystems of the human body: cardiovascular system, nervous system, dentoalveolar system, musculoskeletal system, etc. The purpose of the development of the concept "VPH" consists in detailed study of all subsystems of the human body and the establishment of quantitative and qualitative relations between them. The development of this concept allows us to significantly accelerate and improve diagnostics, to find the optimal method of treatment for each individual patient, including carrying out of virtual operation. In this message, special attention will be paid to the connection between the pathology of the dentoalveolar system of the human and the disturbance of cerebral circulation (in particular, this is associated with a formidable disease, such as stroke of the brain vessels. This disease is multifactorial and can arise from the impact of various factors. At present, many leading scientists of the world say that the fight against this serious disease should be conducted in connection of the specialists of medicine and specialists in fundamental natural sciences, in particular biomechanics. This communication will analyze in detail the relationship of the pathology of the dentoalveolar system (abnormal bite, disturbances in the activity of temporomandibular joints, etc.) and associated pathologies of the carotid artery and cerebral circulation.

This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research grant № 18-01-00589.

МІЦНІСТЬ І ВТОМА МАТЕРІАЛІВ

УДК 537.43

**ФОРМУВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ПОШКОДЖУВАНOSTІ ТА
ЗОН ПЛАСТИЧНОСТІ БІЛЯ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ****Володимир Віра, Володимир Кулик, Володимир Палюх***Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)*

viravolodymyr@gmail.com; kulykvolodymyrvolodymyrovych@gmail.com;
palyukh_v@ukr.net

Визначення втомної довговічності тіл з концентраторами напружень, а також прогнозування залишкового ресурсу елементів конструкцій за дії циклічних навантажень є важливою задачею сучасної механіки руйнування матеріалів. При розв'язанні таких задач місця концентрації напружень (отвори, надрізи, непровари, виточки) становлять великий інтерес, оскільки саме там в більшості випадків починається накопичення структурних пошкоджень матеріалу, відбувається процес зародження макротріщини, розвиток якої в результаті призводить до руйнування конструкції в цілому. На даний час відсутні універсальні критерії, за якими можна встановлювати опір матеріалу зародженню та поширенню в ньому втомних тріщин залежно від геометрії тіла та умов навантаження, що зумовлено складністю вибору параметрів, які б адекватно описували напружено-деформований стан в околі вершини концентратора і тріщини. Немає також загальноприйнятого критерію переходу мікротріщини у макротріщину.

Перспективною у цьому плані є уніфікована модель Осташа-Панасюка [1], де визначальним параметром є так звана втомна зона передруйнування. Формується вона в межах статичної (r_{pm}) і циклічної (r_{cm}) пластичних зон, а її розмір (d^*) визначає напружено-деформований стан в околі концентраторів напружень, а також довжину початкової макротріщини (рис. 1). Однак вона потребує широкого експериментального обґрунтування і більш детального дослідження.

Експериментально [2, 3] досліджено процес формування втомної зони передруйнування і встановлено, що вона, на відміну від статичної і циклічної пластичних зон, утворюється не відразу з перших циклів, а поступово, досягаючи максимального стабілізованого розміру за кількості циклів, що становить 20–25% від періоду зародження макротріщини. За цей інкубаційний період біля вершини надрізу утворюється система мікротріщин, а на полірованій поверхні біля надрізу появляються сліди пластичної деформації.

Підтверджено, що максимум напружень і деформації знаходиться на певній віддалі від вершини концентратора. Показано, що мікротріщина в межах зони передруйнування візуально відрізняється від макротріщини поза її межами. Лінійний розмір зони передруйнування є певною константою матеріалу, який визначає максимум розмаху локальних напружень та довжину початкової макротріщини і практично не залежить від розміру концентратора, лише від асиметрії циклу навантаження.

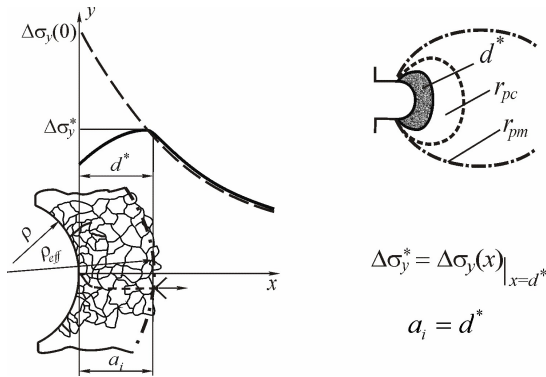


Рис. 1. Схеми розподілу напружень, утворення пластичних зон і зони перед руйнування.

Цей параметр є фізично обґрунтованим і може послужити основою створення нової методології визначення ефективних параметрів, які контролюють опір матеріалу зародженню та росту втомних тріщин в конструкційних матеріалах.

1. *Ostash O.P., Panasyuk V.V., Kostyk E.M.* A phenomenological model of fatigue macro-crack initiation near stress concentrators // *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* – 1999. – 22, С. 161-172.
2. *Патент України № 42549, МПК G01N 17/00.* Спосіб визначення розмірів втомної зони передруйнування / О.П. Остащ, Л.І. Муравський, І.М. Андрейко, Т.І. Вороняк, А.Б. Кметь, В.В. Віра. Опубл. 10.07.2009, Бюл. № 13.
3. *Патент України № 69067, МПК G01N 21/00.* Спосіб визначення розміру втомної зони перед руйнування / О.П. Остащ, Р.В. Чепіль, І.М. Андрейко, В.В. Віра, В.І. Прокопець. Опубл. 25.04.2012, Бюл. № 8.

FORMATION OF INITIAL DAMAGE AND PLASTIC ZONES NEAR STRESS CONCENTRATORS

The main provisions of the well-known unified model of fatigue failure have been substantiated and confirmed, as well as the regularities and peculiarities of the fatigue process zone formation as a defining parameter of the fatigue.

УДК 539.43

СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ДИСИПАЦІЇ ЛОКАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ДЕФОРМУВАННЯ ЗА ЦИКЛ НАВАНТАЖЕННЯ

Володимир Віра, Володимир Кулик, Володимир Палюх

Національний університет «Львівська політехніка» (Україна)

viravolodymyr@gmail.com; kulykvolodymyrvolodymyrovych@gmail.com;
paluykh_v@ukr.net

В механіці втомного руйнування конструкційних матеріалів використовують силовий, деформаційний та енергетичний підходи. В рамках останнього, для опису закономірностей зародження і росту втомних тріщин, запропоновано локальний енергетичний параметр ΔW^* , який базується на локальних напруженнях $\Delta \sigma_y^*$ і локальних деформаціях $\Delta \epsilon^*$ в околі вирізів і тріщин (рис. 1) на відміну від існуючого енергетичного параметра ΔW , який базується на номінальних напруженнях $\Delta \sigma_{\text{ном}}$ і локальних переміщеннях $\Delta \delta$, що дозволяє інваріантно описати зародження втомної макротріщини у зразках з концентратором напружень різної геометрії.

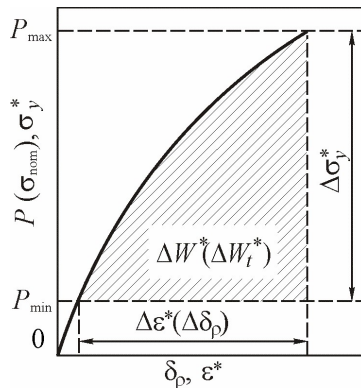


Рис.1. Визначення локальної енергії деформування за цикл навантаження.

A METHOD FOR DETERMINING OF LOCAL ENERGY DISIPATION IN CYCLIC LOADING.

A new method for determining one of the main parameters of local fatigue failure - local energy of deformation for a load cycle - was developed and experimentally tested.

УДК 539.432

ОЦІНКА ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ ЗА НАЯВНОСТІ ГОСТРОГО КОНЦЕНТРАТОРА НАПРУЖЕНЬ

Олег Герасимчук, Олег Кононученко, Олена Герасимчук

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

herasymchuk@ipp.kiev.ua; kov3@ipp.kiev.ua; elena.gerasymchuk@gmail.com

У даній праці пропонується модель втомної міцності, що є модифікацією моделі Чапетті [1]. Модель може бути використана для зразків/елементів конструкцій, які містять гострі концентратори напружень або поверхневі дефекти, що можуть бути представлені як початкові тріщини. Рівняння граничної кривої порогових напружень, σ_{th} , за симетричного циклу регулярного змінного навантаження для гострого концентратора глибиною D пропонується у наступному вигляді:

$$\sigma_{th} = E\sqrt{b/l_c} \cdot Y_1\sqrt{d} \frac{1 + (\sqrt{l_s/d} - 1) \{1 - \exp[(d-l)/((\sqrt{l_s/d} - 1)l_c)]\}}{Y\sqrt{D+l}} \quad \text{за } l \geq d, \quad (1)$$

$$l_s = (d \cdot 8^2 \cdot \pi(1+\nu)^2 h) / (12 \cdot M^2 b), \quad (2)$$

$$l_c = E^2 b (A + B \cdot \arctg((E\sqrt{b/(4d)} - A)/B))^{-2}, \quad (3)$$

де $A = (\sigma_f + \sigma_p) / 2$; $B = (\sigma_p - \sigma_f) / \pi$; $\sigma_f \cong ME[2(1+\nu)]^{-1} \cdot 10^{-3}$; σ_p – границя пропорційності; ν – коефіцієнт Пуассона; M – фактор Тейлора; b – модуль вектора Бюргерса; E – модуль пружності; h – відстань між сусідніми паралельними площинами ковзання у кристалічній ґратці; d – розмір зерна; Y_1, Y – геометричні фактори, Y_1 – для тріщини глибиною d , $Y_1 = 0,67$; Y – для концентратора, $Y = 1,12$ для крайового надрізу [2].

На рис. 1 наведено криві (лінії), розраховані за рівнянням (1), порівняно з експериментально отриманими у [3, 4] даними (точки) вимірювань розміру тріщини, l , що утворилась від вершини концентратора і далі не розповсюджується, для кількох рівнів навантаження зразків. Як видно з рис. 1, розраховані криві порогових розмахів напружень, $\Delta\sigma_{th} = 2\sigma_{th}$, добре узгоджуються з експериментальними результатами, підтверджуючи таким чином достовірність запропонованої моделі. Для розрахунку за моделлю (1)

достатньо лише дані про характеристики мікроструктури: d, M, b, h , які визначаються з аналізу мікроструктури вихідного матеріалу, та характеристики статичної міцності: E, ν, σ_p , які отримуються з випробувань на короточасний розтяг стандартних зразків з даного матеріалу.

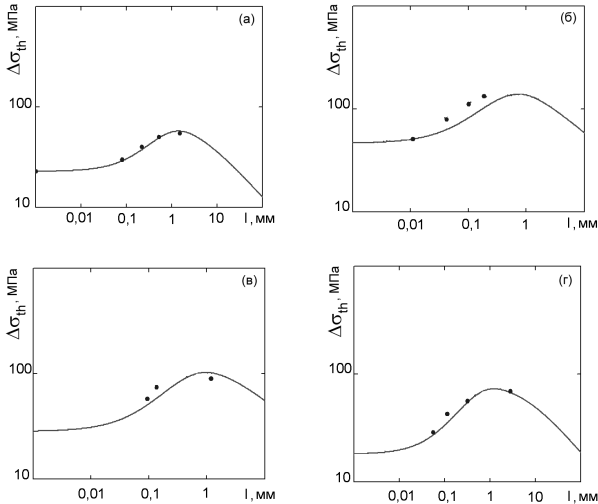


Рис. 1. Порівняння результатів розрахунку з експериментальними даними:
 а – для зразків зі сталі SM41B з крайовим концентратором $D = 3$ мм;
 б, в, г – для зразків зі сталі 25CrMo4 з різними розмірами крайового концентратора D : 0,813 мм, 2,19 мм та 5,39 мм відповідно.

1. *Chapetti M.D.* Fatigue propagation threshold of short cracks under constant amplitude loading // *Int. J. Fatigue.* – 2003. – **25**. – С. 1319-1326.
2. *Herasymchuk O.M., Kononuchenko O.V., Bondarchuk V.I.* Fatigue life calculation for titanium alloys considering the influence of microstructure and manufacturing defects // *Int. J. Fatigue.* – 2015. – **81**. – С. 257-264.
3. *Maierhofer J., Ganser H.P., Pippan R.* Modified Kitagawa–Takahashi diagram accounting for finite notch depths // *Int. J. Fatigue.* – 2015. – **70**. – С. 503-509.
4. *Tanaka K., Akinawa Y.* Resistance curve method for predicting propagation threshold of short fatigue cracks at notches // *Eng. Fract. Mech.* – 1988. – **30**. – С. 863-876.

FATIGUE STRENGTH ESTIMATION FOR SHARP NOTCH

A model for fatigue strength estimation of the specimens/structures with sharp notches/defects is proposed. A model allows to calculate a limiting curve for the threshold stress ranges and respective non-propagating crack sizes for sharp notch, using the monotonic strength and microstructure characteristics of initial material.

УДК 539.3

МЕТОДИКА СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ ЛИСТОВОГО СКЛА НА ТРИВАЛУ МІЦНІСТЬ ЗА СТАТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ РОЗТЯГУ

Василь Дяків, Василь Чекурін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

dvv1301@gmail.com; chekurin@iapmm.lviv.ua

Для оцінювання ресурсу об'єктів, виготовлених із використанням неорганічного скла чи інших крихких матеріалів, необхідні теорії їхньої тривалої міцності, які враховують вид зовнішніх навантажень (силові, теплові, комплексні), характер їхньої дії (статичні, циклічні, вібраційні), умови експлуатації (температура, вологість, радіація). Скло є мікронеоднорідний матеріал, його механічні властивості характеризуються значним розкидом. Тому важливо визначити статистичні параметри тривалої міцності [1].

Відомий спосіб визначення статистичних параметрів міцності листового скла, який базується на випробуваннях кількох серій однотипних зразків, виготовлених у вигляді тонких платівок. Для випробувань їх згинають, використовуючи циліндричні пуансон і опору, до яких прикладають статичне навантаження [2]. Вибираючи зразки круглої форми (диски), які встановлюють у пристрій навантаження співвісно з пуансоном та опорою, отримують осесиметричний напружений стан, такий, що на одній із поверхонь зразка виникає кругова область S_0 (базова площинка), в якій реалізується однорідний ізотропний напружений стан розтягу $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{zz} = 0$.

Щоб отримати достатньо інформативний об'єм даних за таким способом, необхідно провести випробування великої кількості зразків. Однак виготовлення круглих зразків (дисків) є трудомістким процесом, що вимагає використання спеціального обладнання. Прямокутні (зокрема, квадратні) скляні платівки значно простіші й дешевші у виготовленні. Проте, така геометрія зразка спричиняє неоднорідність й анізотропію напруженого стану в межах базової площинки S_0 , внаслідок чого знижується точність методу.

У доповіді розглядається модифікація методики проведення статистичних випробувань [1, 2], із використанням зразків квадратної форми. За умов навантаження, які використовуються для випробувань, вплив геометрії зразка на напружений стан базової площинки зменшується зі збільшення його розмірів. Однак, при цьому зростає погонне навантаження вздовж лінії контакту пуансона і опори із поверхнею зразка. Внаслідок цього зменшується кількість інформативних зразків у партії.

Виходячи із цього сформульовано задачу оптимізації зразка. Її розв'язок дозволяє визначити розміри, за яких анізотропія і неоднорідність напруженого стану базової площинки, спричинені формою зразка, є достатньо малі і не впливають істотно на точність визначення статистичних параметрів тривалої міцності. Водночас, напруження, які виникнуть в околі зони контакту пунсона зі зразком не призводить до істотного зменшення кількості інформативних зразків у партії.

Відповідна пряма задача полягає у визначенні напруженого стану прямокутної пластинки, контур якої вільний від навантажень, а до верхньої та нижньої поверхонь прикладені поперечні сили, однорідно розподілені вздовж двох концентричних кіл, центри яких лежать на осі симетрії 4-го порядку зразка. Розроблена методика розв'язування цієї задачі із використанням варіаційного методу однорідних розв'язків [3].

У доповіді наведені деякі результати, отримані із застосуванням запропонованої методики.

1. *Марголин А.М., Мартынова В.П., Осадчук В.А., Чекурин В.Ф.* К статистической теории длительной прочности стекла // Проблемы прочности. – 2005, № 3. – С. 75-85.
2. *Чекурин В.Ф., Дяків В.В.* Спосіб статистичних випробувань скла на тривалу міцність. – Патент України на корисну модель № 67825 від 12.03.2012.
3. *Чекурин В.Ф., Постолак Л.І.* Варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008.– 51, № 1. – С. 88-98.

A METHOD FOR STATISTICAL TEST OF LONG-TERM STRENGTH OF SHEET GLASS UNDER STATIC TENSION

A statistic long-term strength test of sheet glass, in which thin discs are used as the specimens, is known. The specimens are subjected to axisymmetric bending with the use of two hollow cylinder dies of different diameters, applied concentrically with the disc to its opposite surfaces. Such specimen geometry provides a homogeneous and isotropic tension within a round area located on one of the specimen surface (test area). But fabrication of the round specimens is too costly. A method of the statistic test with the use of thin rectangular glass specimens is considered in the paper. Fabrication of such specimens is much easier. Method is based on optimisation of the specimen geometry. A corresponding inverse problem is formulated and an algorithm for it solving is developed. Solution of the problem gives the optimal dimensions of the rectangular specimen. Application of such specimens enables to eliminate the influence of inhomogeneity and anisotropy of the stress state within the test area, evoked by the specimen geometry, on the test results.

УДК 539.3

ТЕНЗОМЕТРИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ЗРАЗКІВ ЗА ВИПРОБУВАНЬ ЛИСТОВОГО СКЛАЛА НА ТРИВАЛУ МІЦНІСТЬ

Василь Дяків, Василь Чекурін, Ярослав Іваницький, Юрій Мольков

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

dvv1301@gmail.com; chekurin@iapmm.lviv.ua; dep-12@ipm.lviv.ua

Відомий спосіб визначення параметрів тривалої міцності листового скла, за яким випробовують однотипні зразки [1, 2], навантажені так, що на одній із поверхонь виникає кругова область (базова площинка), в межах якої реалізується напружений стан однорідного і ізотропного розтягу. Напруження $\sigma = \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$ базової площинки є випробувальним.

Представлені результати вимірювань деформації базової площинки. Вимірювання проводили з використанням малобазних фольгових тензорезисторів 2ФКПА 3-100 з базою $l = 2$ мм. Їхній номінальний опір складає 100 Ом, а коефіцієнт тензочутливості $k = 2,22$. Вимірювальний і термокомпенсаційний тензорезистори утворювали суміжні плечі вимірювального моста. Вихідний сигнал із моста подавали на вхід операційного підсилювача, вихідну напругу з якого оцифровували АЦП. Оцифрований сигнал вводили в комп'ютер через інтерфейс RS-232C. Дослідили часові залежності сигналу в циклах «навантаження/розвантаження» залежно від сили навантаження P та часу витримки.

Результати досліджень будуть використані для встановлення адекватності математичної моделі для розрахунку випробувальних напружень σ за заданого P , а також для оцінювання пружних властивостей зразків.

1. *Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – Киев: Наукова думка, 1991. – 289 с.
2. *Чекурін В.Ф., Дяків В.В.* Спосіб статистичних випробувань скла на тривалу міцність. – Патент України на корисну модель № 67825 від 12.03.2012.

STRAIN-GAUGE MEASUREMENTS OF SPECIMENS STRAIN IN LONG-TERM TESTS OF SHEET GLASS

Strain of the specimens, used in long-term strength tests, was measured with the use of resistive-strain gauges. Time dependences of the measured signal during testing cycles depending on the testing stress value were studied.

УДК 62.20.F, 62.20.–x

ВПЛИВ ДЕФОРМАЦІЙНОГО ЗМІЦНЕННЯ НА НЕСТІЙКІСТЬ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТАЛІВ ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Микола Ісаєв, Тетяна Григорова, Павло Забродін,
Сергій Шумілін, Вусал Гейдаров

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України

grigорова@ilt.kharkov.ua

У роботі вивчений зв'язок між швидкістю деформаційного зміцнення і нестійкістю плинну ультрадрібнозернистих (УДЗ) полікристалів міді та сплаву Al-Li при розтягуванні з постійною швидкістю при температурі 0,5 К.

Досліджувалися зразки полікристалів безкисневої міді Cu-OF та твердого розчину Al - 3,8 ат. % Li, які підвергалися попередній інтенсивній деформації (ПД) шляхом: 1) для міді - рівноканальної кутової гідроекструзії; 2) для Al-Li - комбінованої прямої та рівноканальної кутової гідроекструзії. Для зміни мікроструктури частину зразків міді піддавали відпалу: 1) при $T=150^{\circ}\text{C}$, $t=1,5$ години у вакуумі або 2) при 600°C , $t=1$ година в атмосфері аргону. Для УДЗ сплаву Al-Li також застосовували відпал 373 К або 623 К. Зразки деформували шляхом квазістатичного розтягування з постійною швидкістю штока 10^{-4} c^{-1} у деформаційній машині з кріостатом для рідкого ^3He . Схема установки та кріостата описані в [3]. Зразки перебували в атмосфері рідкого ^3He при постійній температурі $0,5 \pm 0,02$ К.

EBSD-аналіз показав [1], що зразки міді після ПД мають характерну для УДЗ полікристалу високу частку великокутових границь, дещо витягнутих уздовж напрямку екструзії. Середня відстань між границями в поперечному напрямку (розмір зерна) $d \sim 0,5$ мкм. Відпал УДЗ полікристалів міді в першому режимі, як правило, активує тільки процеси відпочинку. Контрольні виміри показали близькі значення мікротвердості зразків до і після відпалу у межах: 1300 ± 100 МПа. Другий, високотемпературний режим відпалу відповідає збірній рекристалізації й супроводжується ростом зерна. За оцінками даних оптичної мікроскопії методом січних середній розмір зерна (по ~ 300 зернам) збільшується майже на два порядки і становить $\sim 40 \pm 20$ мкм. Отримані УДЗ зразки сплаву Al-Li мали розмір зерна $\sim 1-3$ мкм [2].

Показано, що полікристали, піддані ПД, в ході розтягування при температурі 0,5 К мають високу міцність і пластичність порівняно з крупнозернистим зразком (КЗ) (рис.1) та зберігають достатню швидкість деформаційного зміцнення. Разом з тим, ПД стимулює нестійкий (стрибоподібний) плин полікристала, обумовлений динамікою дислокацій,

який проявляється у вигляді стрибків напруження на кривій розтягування. Середня амплітуда стрибків зростає з деформацією, а розподіл амплітуд відповідає випадку колективного руху дислокаційних лавин, що мають виділений масштаб. В результаті високотемпературного відпалу стрибкоподібна деформація частково пригнічується.

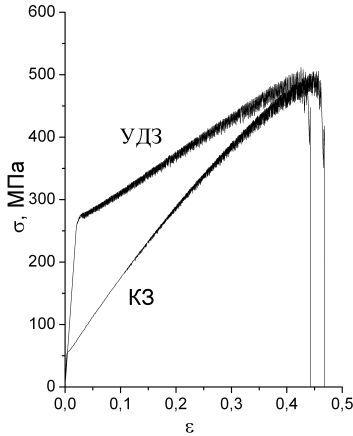


Рис.1. Криві розтягування σ - ϵ для УДЗ та КЗ полікристалів Al-Li при температурі 0,5 К.

Показано, що нестійкість плин у вигляді макроскопічних стрибків напруження на кривій розтягування проявляється при граничному напруженні, достатньому для активації динамічного повернення, у результаті якого коефіцієнт деформаційного зміцнення зменшується. Вплив розміру зерна та вихідної щільності дислокацій на еволюцію дислокаційної структури при розтягуванні визначає масштаб і статистику нестійкого плин вивчених полікристалів при низькій температурі.

1. *Исаев Н.В., Григорова Т.В. и др. ФНТ* **42**, 1053 (2016); *Low Temp. Phys.* – 2016. – **42**, 825.
2. *Исаев Н.В., Забродин П.А. и др. ФНТ*, **38**, 102 (2012); *Low Temp. Phys.* – 2012. – **38**, 80.
3. *Кузьменко И.Н., Пустовалов В.В., Шумилин С.Э. ПТЭ* **1**. – 1988. – 196.

THE EFFECT OF DEFORMATION STRENGTHENING ON THE INSTABILITY OF PLASTIC DEFORMATION OF METALS AT LOW TEMPERATURES

The mechanical properties of UFG polycrystals of oxygen-free copper and Al-Li solid solution were studied in tensile deformation tests at extremely low temperature of 0.5 K. The purpose of this study was to investigate the flow stress and work hardening rate as well as the development of serrated (jump-like) deformation for the polycrystalline samples with different microstructure.

УДК 539.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОРИЕНТАЦИИ КОНЦЕНТРАТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ТРУБОПРОВОДА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ ЭНЕРГИИ РАЗРУШЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРУ ВЯЗКО-ХРУПКОГО ПЕРЕХОДА ОРАЗЦОВ ШАРПИ ИЗ СТАЛИ 22К

Андрей Кравчук, Евгений Кондряков, Александр Панасенко,
Валерий Харченко

Институт проблем прочности имени Г.С. Писаренко НАН Украины

kravchuk.a@ipp.kiev.ua

В различных отраслях промышленности, в частности в атомной энергетике, для определения критической температуры хрупкости применяются ударные испытания образцов Шарпи. Например, при расчетах на сопротивление хрупкому разрушению, необходимо знать значение критической температуры хрупкости T_{k0} материала в исходном состоянии, которое определяется по результатам ударных испытаний образцов Шарпи. При испытаниях образцов с концентраторами на ударный изгиб существует различие в результатах для образцов, вырезанных в поперечном и продольном направлениях. Поэтому исследование влияния направления вырезки образцов Шарпи и ориентирования надреза на результаты ударных испытаний и определения критической температуры хрупкости имеет большую актуальность.

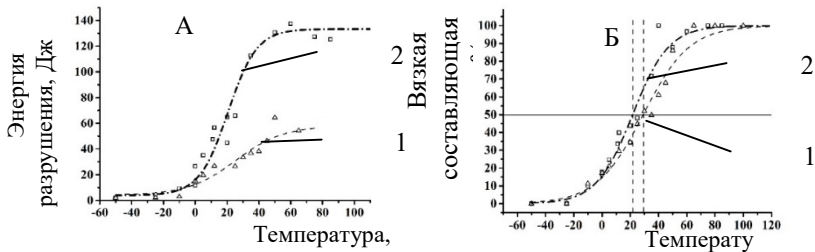


Рис. 1. А - Температурные зависимости полной энергии разрушения; Б - Температурная зависимость вязкой составляющей излома для двух групп образцов: 1 – образцы, вырезанные в продольном направлении, 2 – образцы, вырезанные в поперечном направлении.

В рамках данной работы ударные испытания проводились на инструментальном вертикальном копре [1-2], оборудованном высокоскоростной системой регистрации усилий (частота дискретизации 20 МГц), а также системой нагрева и охлаждения образцов в широком диапазоне температур. Для испытаний использовались стандартные образцы Шарпи из стали 22К, вырезанные в двух направлениях из части трубопровода - продольном и поперечном. Высокая чувствительность системы регистрации позволяет разделить диаграмму на-

гружения на характерные участки и рассчитать значения полной энергии деформирования и разрушения и ее составляющих: энергии зарождения трещины, энергии вязкого подрастания трещины, энергии проскока хрупкой трещины и энергии вязкого долома. Значение полной энергии деформирования и разрушения и ее составляющих определялись согласно стандарту ISO 14556 [3]. По результатам ударных испытаний были построены температурные зависимости полной энергии деформирования и разрушения и ее составляющих (рис. 1.А).

На основе фрактографических исследований поверхностей изломов образцов обеих групп проведена оценка вязкой составляющей изломов. По полученным температурными зависимостями вязкой составляющей излома образца и энергии разрушения была проведена оценка критической температуры хрупкости, при которой доля вязкой составляющей в изломе составляет 50% от всей площади излома $T_K = T_{50\%}$ (рис.1.Б). Для образцов, вырезанных в продольном направлении $T_{50\%} = 21,6$ ° С. Для образцов, вырезанных в поперечном направлении $T_{50\%} = 29,5$ ° С.

Таким образом, для стали 22К направление вырезки образцов Шарпи существенно влияет на величину энергии разрушения и ее составляющих, а также на величину критической температуры хрупкости.

1. Кондряков Е.А. Жмака В.Н., Харченко В.В. и др. «Система измерения деформаций и усилий при динамических испытаниях» // Проблемы прочности. – 2005. – № 3. – С. 140-146.
2. Харченко В.В., Кондряков Е.А., Жмака В.Н., Бабуцкий А.А. Инструментированный копер для ударных испытаний: основные элементы, анализ работоспособности // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2006. – № 27. – С. 121-130.
3. ISO 14556. Steel Charpy V-Notch Pendulum Impact Test – Instrumented Test Method. – 05.01.2005.

**STUDY OF THE INFLUENCE OF THE CONCENTRATOR ORIENTATION
RELATIVE TO THE PIPELINE AXIS ON THE COMPONENTS OF THE FRACTURE
ENERGY AND THE DUCTILE-BRITTLE TRANSITION TEMPERATURE OF THE CHARPY
SPECIMENS FROM THE STEEL 22K**

Charpy specimens impact tests are one of more simple and inexpensive method to determine the mechanical properties of materials. The results of these tests can be used to estimate the strength and durability of large-scale structures. A series of Charpy specimens impact test from high-alloyed high-temperature resistant steel 22K were carried out in the temperature range of $-50 \div +100$ °C with control of cutting direction. Tests were conducted on instrumented vertical impact machine, which can record a full diagram of specimen's deformation and fracture. The values of total energy of deformation and fracture and its components: energy of crack initiation, energy of ductile crack growth, brittle cracks energy and ductile rupture energy were determined. It was found, that ductile-brittle transition temperature for specimens cutting along the rolling direction higher than for specimens along the perpendicularly direction. It is shown, that the cutting direction of Charpy specimens significantly influences the values of total energy of deformation and fracture and its components, and the values of the ductile-brittle transition temperature for 22K steel.

УДК 539.3

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО РЕСУРСУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З МЕХАНІЧНО МАЛИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА ДІЇ СИЛОВИХ І ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ФАКТОРІВ

Юрій Лапуста, Олександр Андрейків, Наталія Штаюра

Французький інститут сучасної механіки, м. Клермон-Ферран (Франція);

Львівський національний університет імені Івана Франка (Україна)

andreykiv@ipm.lviv.ua

Потенційна небезпека руйнування при дії водневмісних і корозійних середовищ більш значна при циклічному навантаженні. Це обумовлено тим, що розвиток воднево-втомної або корозійно-втомної тріщини може спостерігатися і при рівні КІН нижчому за K_{ISCC} , досягнення якого є необхідною умовою для корозійно-статичного росту тріщини. В даний час уже розроблено ряд розрахункових моделей для опису росту втомних тріщин за дії згаданих вище експлуатаційних факторів. Більшість із них побудовані на основі більш простого силового підходу. Проте, як свідчать результати експериментальних досліджень Ritchie R.O., Miller K.J., Kawagoishi N., Nisitani H., Toyohiro T. і ін., моделі побудовані на основі коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) не придатні для випадків механічно малих тріщин навіть для тих, розміри яких задовольняють умови автотемпературності для статичної тріщини.

В даній роботі для випадку пластини з тріщиною довжини l за симетричного навантаження зусиллями інтенсивності p зроблена спроба побудувати ефективну розрахункову модель для визначення періоду докритичного росту механічно малих втомних тріщин за дії вище згаданих силових і фізико-хімічних факторів. В основу побудови даної моделі покладений раніше розроблений авторами енергетичний підхід на основі першого закону термодинаміки. При цьому, для встановлення роботи пластичних деформацій в зоні передруйнування біля вершини тріщини, побудована наступна наближена формула для визначення її розкриття δ_t

$$\delta_t \approx K_I^2 [E \sigma_t (1 - \xi^2)]^{-1}, \quad (1)$$

де δ_t – розкриття тріщини в її вершині при усередненому напруженні σ_t в зоні передруйнування; E – модуль Юнга; $\xi = p \sigma_t^{-1}$ – відносний рівень навантаження пластини.

Тоді на основі рівняння балансу швидкостей зміни енергетичних складових для елементарного стрибка втомної тріщини отримаємо таку математичну модель для визначення періоду докритичного росту тріщини $N = N_*$

$$V = dl/dN = \alpha(E\sigma_t)^{-1}(K_{I\max}^2 - K_{sc}^2)(K_{fCC}^2 - K_{I\max}^2)^{-1} \times \\ \times [(1-R)^4(K_{I\max}^2 + K_{sc}^2) + \eta_i E\sigma_t] \\ N = 0, l(0) = l_0; N = N_*, l(N_*) = l_*, \quad (2)$$

$V = dl/dN$ - швидкість поширення втомної тріщини; α, η_i - характеристики корозійно-втомного руйнування, які визначаються із експерименту: $i = 1$ - за дії водню, $i = 2$ - за дії корозійного середовища; $R = K_{I\min} K_{I\max}^{-1}$; $K_{I\min}$ і $K_{I\max}$ - мінімальне і максимальне значення КІН за цикл; K_{fC} - критичне значення КІН за циклічного навантаження; K_{th} - значення КІН, при якому не відбувається поширення тріщини; $N = N_*$ - період докритичного росту втомної тріщини; $l = l_*$ - критична довжина тріщини; $l = l_0$ - початкова довжина тріщини. З допомогою математичної моделі (2) проведені розрахунки $N = N_*$ для дії на пластину з тріщиною вище згаданих силових і фізико-механічних факторів.

Отримані результати співставленні з відомими в літературі експериментальними даними. Показано, що при різних відносних рівнях завантаженості пластини з короткою тріщиною можуть трапитися випадки, що при однакових значеннях коефіцієнтів інтенсивності напружень можуть бути різні значення швидкості її росту. Це означає, що коефіцієнт інтенсивності напружень не може бути інваріантною характеристикою для визначення швидкості росту коротких тріщин.

DETERMINATION RESIDUAL RESOURCE OF CONSTRUCTION ELEMENTS WITH MECHANICALLY SHORT CRACKS UNDER ACTIONS OF POWER, PHYSICAL AND CHEMICAL FACTORS

On the basis of energy approach the computational model to determine through compressive plastic deformation in the sub fracture area the period of short corrosion-mechanical cracks subcritical growth in elastic-plastic plates under the actions of long-term mechanical loads, hydrogen or corrosive environments was built. The results were compared with known in the literature data.

УДК 691.5

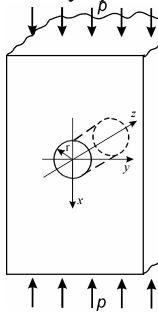
МІЦНІСТЬ ФІБРОБЕТОНІВ ЗА СТИСКУ

Андрій Ліснічук, Наталія Івантишин

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

dniprovets14@gmail.com; n.ivantyshyn@gmail.com

Запропонована розрахункова модель міцності на стиск цементного каменю, армованого мікрОВОлокнами різного виду в залежності від вмісту дефектів у матеріалі, якими є пори і мікротріщини. Суттєву роль у виникненні та розвитку тріщин у структурі бетону за стиску відіграють пори.



Згідно з відомими розв'язками теорії пружності [1] біля кругового отвору в тілі (рис. 1) за стиску виникає зона розтягальних напружень, які визначають за формулою

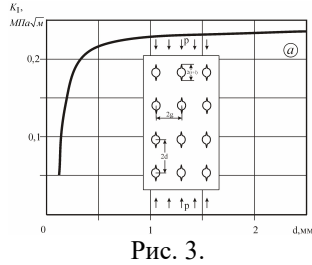
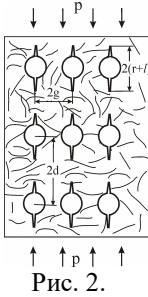
$$\sigma_{yy}(x, 0) = -p \frac{r^2}{2x^2} \left(1 - \frac{3r^2}{x^2} \right). \quad (1)$$

Напруження розтягу за достатньої інтенсивності зовнішнього навантаження стиску ініціюють появу тріщин на контурі порожнини. Експериментальні дослідження свідчать, що тріщини з'являються вже за інтенсивності навантаження $p \approx (0,5 \dots 0,6)R_b$; тут R_b – міцність матеріалу на стиск.

Рис. 1.

За розрахункову модель міцності на стиск цементного каменю, стохастично армованого мікрОВОлокнами, візьмемо товсту пластину зі системою періодичних кругових отворів з тріщинами на контурі (рис. 2). Поза порами матеріал вважатимемо однорідним та ізотропним із ефективними пружними характеристиками E , ν . Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень для цієї схеми методом скінченних елементів виявив, що за певного вмісту пор їх взаємодією можна знехтувати (рис. 3). Тоді виникнення та поширення тріщин на контурі пор можна дослідити на прикладі одного ізольованого отвору.

Зовнішні навантаження, за яких тріщини зливаються в одну, що перетинає все тіло, приймаємо за границю міцності композиту за стиску. Цю характеристику встановлюємо за формулою (2), покладаючи довжину тріщини l рівною половині відстані між порами $d - r$ та враховуючи залежність K_{IC} композиту від вмісту фібри [3].



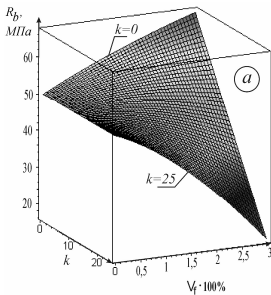
Граничні навантаження для росту тріщин на контурі ізольованого отвору можна розраховувати за відомою формулою [2]:

$$p^* = \sqrt{\frac{\pi(1+\lambda)^7}{4r((1+\lambda)^2-1)}} K_{IC}, \quad \lambda = \frac{l}{r}, \quad (2)$$

де K_{IC} – характеристика локальної тріщиностійкості матеріалу. Розвиток цих тріщин спочатку нестійкий, далі для їх росту навантаження необхідно збільшувати.

$$R_b = (1-kV_f) \sqrt{\frac{\pi(1+\lambda_c)^7}{4r((1+\lambda_c)^2-1)(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{0,33\sigma_f V_f \left(1 - \frac{r\sigma_f}{l\sigma_m}\right) + \sigma_m(1-V_f)} \times \\ \times \sqrt{E_m \left(1 + \frac{V_f}{(m/(m-1)) - V_f^{1/3}}\right) \rho(\exp \varepsilon_c - 1)}, \quad (3)$$

де σ_f , σ_m – міцність волокон і матриці відповідно; V_f – об’ємний вміст



волокон; E_f – модуль пружності волокна; E_m – модуль пружності цементного каменю; $m = E_m / E_f$; ε_c – гранична деформація матеріалу; r – радіус пор; $d-r$ – відстань між порами, $\lambda_c = d / r - 1$; k – параметр пошкодження матеріалу.

На рис. 4 за формулою (3) побудовано залежність прогнозованої міцності композиту від об’ємного вмісту базальтової фібри за різних значень параметра пошкодження k матеріалу за

стиску. Виявлено, що залежно від параметра пошкодженості матеріалу за стиску міцність композиту зі збільшенням об'ємного вмісту волокон може як зростати (максимально при $k = 0$), так і зменшуватись.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
2. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
3. Силованюк В.П., Юхим Р.Я., Івантишин Н.А., Ліснічук А.С. Прогнозування тріщиностійкості цементного каменю та фібробетону // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. № 4. – С. 120-124.

STRENGTH OF FIBRE-CONCRETE OF COMPRESSION

The mechanism of damage accumulation in the form of cracks appearing near the pores under compression loads is considered. It was found that an important factor for high fracture toughness of the material, along with the strength of the reinforcing fibers, is their deformability. Particularly, reinforcing of the cement paste with strong high-modulus carbon fibers results in durable composites, however their fracture toughness is somewhat lower comparing to the composites reinforced with some fibers of a greater deformability.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Денис Мармыш

Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)

marmyshdenis@mail.ru

Исследование повреждаемости силовых систем позволяет объяснить некоторые закономерности поведения отдельных узлов и агрегатов механизмов. Общая концепция опасных объемов и повреждаемости силовой системы было рассмотрено в работах [2, 3].

Имея некоторое значение напряжения σ в точке A среды Ω , можно определить локальную относительную повреждаемость φ в точке A по формуле

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sigma^{(\text{lim})}},$$

где $\sigma^{(\text{lim})}$ – некоторое предельное напряжение.

Если $\varphi \geq 1$, то говорят, что среда Ω в точке A повреждена. Как известно, в реальных объектах действующее напряжение σ превышает предельное не только в одной точке, а в некоторой замкнутой области среды. Повреждаемость среды можно описать двумя параметрами: опасный объем (V) и интегральная повреждаемость (Ψ), которые определяются следующим образом

$$V = \int_{\substack{\Omega \\ \varphi \geq 1}} dV, \quad \Psi = \int_{\substack{\Omega \\ \varphi \geq 1}} \varphi dV.$$

Таким образом, задача определения повреждаемости системы сводится к задаче определения величины объема V фигуры заданной неравенством $\varphi \geq 1$ или $\sigma \geq \sigma^{(\text{lim})}$. Отметим, что данная задача является частным случаем определения объема фигуры в n -мерном евклидовом пространстве.

Решение неравенства $\sigma \geq \sigma^{(\text{lim})}$ в замкнутом виде в общем случае не представляется возможным, поэтому используются различные численные подходы. В данной работе используется метод Монте-Карло для определения величины опасного объема и повреждаемости в полуплоскости при действии на ее границе нормально распределенного давления. Результаты моделирования сравниваются с результатами вычисленными на регулярной сетке с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ мм². Для моделирования использовались следующие распределения нормального давления: а) эллиптическое распределение

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}; \quad \text{б) вдавливание жесткого штампа } p(x) = p_0 / \sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Алгоритм определения величин опасного объема и интегральной повреждаемости состоит из следующих этапов:

- 1) разбиение отрезка распределения нагрузки на n элементов и аппроксимация на каждом из них равномерным распределением;
- 2) определение напряженного состояния в точке полуплоскости от действия нагрузки по каждому элементу;
- 3) суммирование действий по каждому из n элементов [1];
- 4) генерация случайным образом точек $A_i(x_i, y_i)$ ($i=1,2,\dots,N$) из области $D = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$, в которой содержится опасный объем V ;
- 5) определение количества точек K , в которых $\sigma \geq \sigma^{(\text{lim})}$ ($K < N$).

После выполнения пп. 1-5 можно найти величину опасного объема и повреждаемости по формулам

$$V = K \cdot dV, \quad \Psi = dV \sum_{i=1}^K \frac{\sigma_i}{\sigma^{(\text{lim})}}, \quad dV = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{N}.$$

На рисунке 1 представлены графики величин опасного объема V и интегральной повреждаемости Ψ в зависимости от количества элементов n при аппроксимации равномерным распределением нормального эллиптического нагружения (рис. 1 а) и вдавливание жесткого штампа в упругую полуплоскость (рис. 1 б) для полуоси $a = 3$ мм и отношения $\sigma^{(\text{lim})}/p_0 = 0.88$.

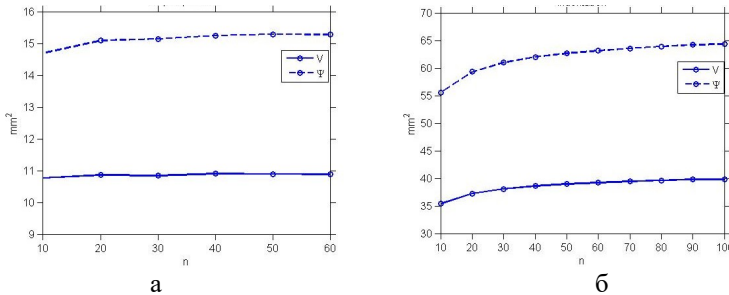


Рис. 1. – Зависимости величины опасного объема и повреждаемости.

1. *Мармыш Д.Е.* Численно-аналитический метод граничных элементов в плоской контактной задаче теории упругости // Молодежь в науке – 2012: прил. к журн. «Весті Нацыянальная акадэміі навук Беларусі». – Минск: Беларус. навука. – 2013. Ч. 3 – С. 42-46.
2. *Щербаков С.С., Сосновский Л.А.* Механика трибофатических систем. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
3. *Sherbako S.S, Zhuravkov M.A.* Interaction of Several Bodies as Applied to Solving Tribofatigue Problems // Acta Mechanica. – 2013. – Vol. 224. – № 3. – P. 1-13.

CALCULATION OF DAMAGEABILITY OF THE POWER SYSTEM BY THE MONTE CARLO METHOD

In this paper, the determination of the damageability of the continuum by the Monte-Carlo method is considered. The boundary element method is applied for the simulation the stress state. The grid convergence of the boundary element method is shown in calculating the dangerous volume and the integral damageability for two cases of loading a semi-infinite continuum.

УДК 539.3:621.64

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО РЕСУРСУ ТРУБОПРОВОДІВ ІЗ ЗОВНІШНІМ КОРОЗІЙНИМ ДЕФЕКТОМ ПРИ ВІДМОВАХ ВНАСЛІДОК ВТОМИ

Ксенія Потопальська, Олексій Ларін

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (Україна)

ks.potopalskaya@gmail.com; alexeya.larin@gmail.com

Трубопроводи є найбільш поширеним та економічно вигідним засобом транспортування рідких нафтопродуктів та газу. Зазвичай, трубопровідні системи експлуатуються впродовж тривалого періоду. Оскільки дані конструкції працюють в достатньо агресивному середовищі, на їх поверхні можуть з'являтися корозійні дефекти, які впливають на міцність конструкції та її надійність. Також, під час довгострокової експлуатації елементи трубопроводу подвержені не тільки пошкодженням, які пов'язані зі зовнішніми чинниками, а і втомного характеру, які розвиваються в наслідок наявності циклічної пульсації внутрішнього навантаження трубопроводу, що обумовлено особливостями роботи. Тому при прогнозуванні гарантованого ресурсу треба враховувати одночасний перебіг процесів розвитку корозійних пошкоджень та накопичення втоми.

У данній роботі розглядається коліно трубопроводу з об'ємним корозійним дефектом, який має фіксовані розміри. Проведено розрахунки із визначення його залишкової міцності, визначено, що при дії типового навантаження в конструкції з пошкодженням можуть виникати пластичні деформації [1]. Таким чином, оцінка довготривалої міцності проводилась за критерієм накопичення малоциклової втоми. Кінетика накопичення втомних пошкоджень визначалась в рамках концепції ефективних напружень Работнова-Качанова [2].

Отримано чисельні оцінки залишкового ресурсу коліна трубопроводу в залежності від величини пульсації тиску при нестационарних режимах експлуатації. Отримані значення його гарантованого ресурсу з корозійними дефектами різних розмірів. На рис.1 зображено кількість циклів до відмови за різної глибини дефекту (де кривими з різними маркерами позначено залежності залишкового ресурсу від величини внутрішнього тиску для різних співвідношень глибини дефекта до початкової товщини коліна трубопроводу).

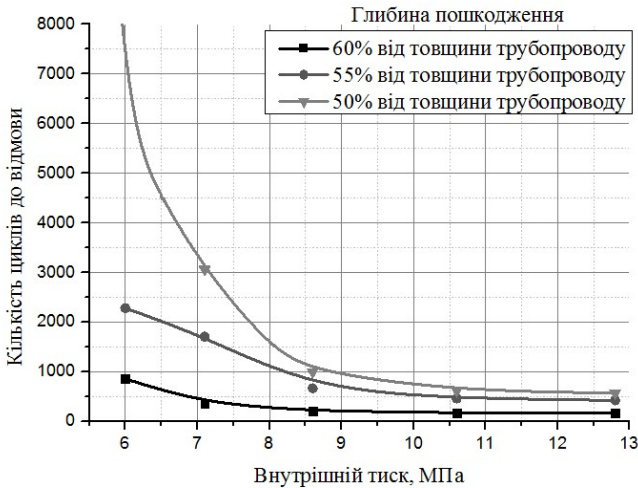


Рис. 1. Залежність залишкового ресурсу від внутрішнього тиску.

Відповідні закономірності дозволяють сформулювати технічні приписи та спланувати графік ремонтних робіт для пошкоджених трубопроводів.

1. Ларін О.О., Потопальська К.Є. Оцінка залишкової міцності криволінійної ділянки трубопроводу зі статистично заданим корозійним дефектом, що розвивається у часі // Міжвузівський збірник “НАУКОВІ НОТАТКИ.” – 2017. – 60. – С. 137-146.
2. Lemaitre J. (Jean), Desmorat R. Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures. – Springer, 2005. – 380 p.

ESTIMATION OF RESIDUAL LIFETIME OF PIPELINE WITH EXTERNAL CORROSION DEFECTS COUSED BY FATIGUE FAILURES

In this paper, the pipeline elbow with external corrosion defect with fixed dimensions has been considered. It is determined that plastic deformations may occur under the typical load in a structure with damage. The assessment of long-term strength was carried out on the basis of accumulation of low cycle fatigue. The kinetics of the accumulation of fatigue damage was determined within the framework of the concept of effective stresses of Rabotnov-Kachanov. Numerical estimation of the residual life-time of the elbow of the pipeline has been obtained, depending on the value of the pressure pulsation at nonstationary operating modes. Obtained values of the guaranteed life-time for the pipeline elbow with corrosion defects of various sizes.

УДК 539.3

НАВАНТАЖЕНІСТЬ СТИКУ ВІДСІКІВ РАКЕТИ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ**Володимир Харченко, Дмитро Клименко***Державне підприємство «Конструкторське бюро
«Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*volod.kharchenko@meta.ua

Експлуатацію ракети умовно прийнято розділяти на такі основні етапи: наземна експлуатація (кантування та транспортування складових частин та ракети вцілому); підготування до старту та старт; політ (на активних та пасивних ділянках траєкторії). На кожному етапі на ракету комплексно діють зовнішні силові фактори (інерційні, вітрові та аеродинамічні сили, тяга двигунів та сили управління ракетою). На кожному етапі експлуатації розглядаються і аналізуються багато варіантів навантажень ракети, а для польоту – всі можливі траєкторії.

Для розрахунку навантаженості ракети в ДП «КБ «Південне» використовують як спеціалізовані програми власної розробки, так і багатофункціональне програмне забезпечення на основі методу скінченних елементів. Для цього ракету представляють як балку зі змінними масовими і жорсткісними параметрами, розділену перетинами на ділянки. В результаті розв'язку динамічної задачі знаходять коефіцієнти динамічності при дії окремо осьових сил K_N і згинних моментів $K_{дм}$. В результаті розв'язку квазістатичної задачі в перетинах ракети знаходять внутрішні зусилля (осьову N_x і перерізуючі сили N_y, N_z та згинальні моменти M_y, M_z). Сумарні внутрішні розрахункові зусилля знаходять як суму квазістатичних і динамічних складових, помножених на коефіцієнт безпеки f для конкретного розрахункового випадку.

При аналізі навантаженості стику ракети для конкретних розрахункових випадків та виборі основних розрахункових випадків, для яких в подальшому проводять розрахунок на міцність, розраховують навантаги на кожний елемент кріплення стику з врахуванням коефіцієнтів нерівномірності розподілу зусиль по стику в залежності від розподілу жорсткості відсіків в коловому та осьовому напрямках, схем кріплення ракети та нагріву.

THE LOADING OF MISSILE BAYS JOINT AT ITS OPERATION

The methodology to evaluate the loading of the missile bays joint and the loads on fastening elements for the different design cases with taking into account the structural features of jointed bays, missile fastening schemes and heating is proposed.

УДК 539.3

НАВАНТАЖЕНІСТЬ КРІПІЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СТИКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ВІДСІКІВ РАКЕТИ З НЕРІВНОМІРНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Володимир Харченко, Володимир Сіренко

*Державне підприємство «Конструкторське бюро
«Південне» ім. М.К. Янгеля» (Україна)*

volod.kharchenko@meta.ua

При експлуатації ракети на її стики діють осьові та перерізуючі сили і згинальні моменти. При цьому навантаги на елементи кріплення стиків сусідніх циліндричних відсіків ракети розраховують по методиці [1, 2], що базується на рівномірному при дії осьової сили та лінійному при дії згинального моменту за законами розподілу навантаг на елементи кріплення. Такий підхід дає достатньо точні результати, якщо з'єднані відсіки-оболонки мають незмінну в колісному і поздовжньому напрямку товщину та елементи кріплення ракети розміщені на достатній відстані від стиків.

Якщо відсіки-оболонки мають зони з локальними потовщеннями, або елементи кріплення ракети знаходяться близько від стиків, то навантаги на елементи кріплення в цих зонах мають підвищений рівень в порівнянні з [1, 2]. Для розрахунку навантаг на елементи кріплення відсіків при комплексній дії зовнішніх навантаг розроблена методика визначення коефіцієнтів розподілу навантаг на окремі елементи стиків при дії окремо одиничних сил та моментів на стик. Задача знаходження коефіцієнтів вирішується в скінченно-елементній постановці з допомогою системи ANSYS. При цьому моделюються зони з підвищеною товщиною оболонок та умови закріплення ракети, а оболонки з'єднуються між собою дискретно в місцях кріпильних елементів. Проведений розрахунок коефіцієнтів для типових моделей відсіків, досліджений вплив умов закріплення на розподіл навантаг в стиках.

1. Биргер И.А., Иосилевич Г.Б. Резьбовые и фланцевые соединения. – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с.
2. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1985. – 344 с.

THE LOADING OF JOINT FASTENERS OF MISSILE CYLINDRICAL BAYS WITH UNEVEN RIGIDITY

The methodology to evaluate the loading of joint fasteners of missile cylindrical bays with taking into account the uneven rigidity of bays and missile fastening schemes is proposed.

УДК 539.42, 004.032.26

ЕФЕКТИВНІСТЬ ПРОГНОЗУВАННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДАМИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

**Олег Ясній, Олег Пастух, Віталій Бревус, Ірина Дідич,
Степан Гречківський**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя (Україна)

oleh.yasniy@gmail.com; oleg.pastuh@gmail.com; vitaly.brevus@gmail.com;
iryna.didych@ukr.net; grechkivskyy@gmail.com

Ріст втомної тріщин (РВТ) відбувається під час експлуатації багатьох інженерних конструкцій та їх деталей. Тому важливим завданням механіки втомного руйнування є спрогнозувати швидкість РВТ, щоб завчасно провести ремонт або заміну деталі. Таку задачу можна розв'язати, застосувавши методи машинного навчання (МН), зокрема, нейронні мережі, підсилені дерева та випадкові ліси.

Метою даного дослідження є спрогнозувати методами машинного навчання діаграму втомного руйнування (ДВР) колектора, виготовленого із сталі 12Х1МФ за регулярного навантаження при асиметрії циклу навантаження $R = 0,1$ та за температур 20°C і 500°C .

Відомо [1], що основними параметрами для опису швидкості РВТ середньоамплітудної ділянки ДВР є коефіцієнт інтенсивності навантаження КІН ΔK та асиметрія циклу навантаження R :

$$\frac{da}{dN} = C \left[(1-R)^{m-1} \Delta K \right]^n, \quad R \geq 0. \quad (1)$$

де C , m , n – сталі матеріалу, які визначаються з експерименту; $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ – розмах КІН; K_{\max} , K_{\min} – максимальний та мінімальний КІН.

Одну із задач механіки руйнування, зокрема, прогнозування швидкості РВТ, розв'язали найбільш відомими алгоритмами навчання з учителем, такими як нейронні мережі, підсилені дерева та випадкові ліси [2]. Такі методи МН максимально ефективно описують дані та забезпечують успішні прогнози. Завдання МН полягає у тому, щоб знайти приховану залежність при прогнозуванні на основі даних, котрі невідомі системі.

Швидкість РВТ прогнозували на основі експериментальних даних ДВР сталі 12Х1МФ [3]. Результати дослідження представлено у подвійних логарифмічних координатах.

У дослідженні набір даних містить 66 елементів, з яких 70% вибрано випадковим чином для навчальної вибірки, а 30% елементів залишили як

тестову вибірку для оцінки якості прогнозування. Швидкість РВТ при регулярному навантаженні за $R = 0,1$ прогнозували вищезгаданими методами МН. Коефіцієнт інтенсивності навантаження ΔK та температура T вибрано як вхідні параметри, тоді як швидкість РВТ da/dN як вихідний. Результати, отримані авторами, добре узгоджуються з експериментальними даними.

На рисунку 1 подано експериментальні та прогнозовані різними методами машинного навчання залежності $da/dN - \Delta K$ при $R = 0,1$ за 20°C та 500°C . Метод нейронних мереж дає найменшу похибку, що складає 2%. Похибка, отримана при застосуванні методів підсилених дерев та випадкових лісів, дорівнює 3% та 5,8%, відповідно.

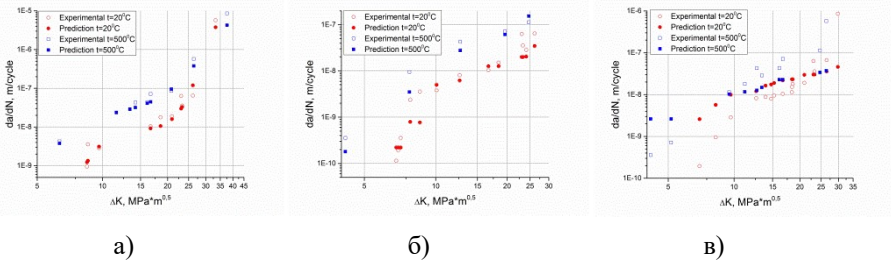


Рис. 1. Прогнозовані та експериментальні залежності швидкості РВТ da/dN від КІН ΔK при $R = 0,1$ за 20°C та 500°C методами а) нейронних мереж, б) підсилених дерев, в) випадкових лісів.

Експериментальні залежності швидкості РВТ у сталі 12Х1МФ прогнозовано універсальними методами МН. Показано, що ДВР при 20°C і 500°C найліпше прогнозувати методом нейронних мереж. Точність прогнозу становить 98%.

1. Mohanty J.R., Verma B.B., Parhi D.R.K., Ray D.R. Application of artificial neural network for predicting fatigue crack propagation life of aluminum alloys // Archives of Computational Materials Science and Surface Engineering. – 2009. –1, № 3. – P. 133-138.
2. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. – Springer Series in Statistics, 2009.
3. Ясній О., Бревус В., Немченко В. Вплив температури на циклічну тріщиностійкість сталі колектора пароперегрівника // Вісник ТНТУ. – 2012. – 68, № 4. – С. 35-41.

EFFECTIVENESS OF PREDICTION OF STRUCTURAL ELEMENTS LIFETIME BY MACHINE LEARNING METHODS

The methods of machine learning (neural networks, boosted trees and random forests) were used to predict structural elements lifetime in 12Cr1MoV steel under regular loading at stress ratio $R = 0,1$ at 20°C , and 500°C . The experimental data are in good agreement with the obtained results. It was determined that the method of neural networks gives the least prediction error, which is 2% in the test sample.

УДК 620.16: 539.42: 539.43

МОДЕЛЮВАННЯ МСЕ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ПЛАСТИНАХ ІЗ ЗМІЩЕНИМИ ОТВОРАМИ**Петро Ясній, Юрій Лапуста, Сергій Гладь, Тетяна Шніцар***Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя (Україна)
Pascal Institute / UCA/CNRS/SIGMA - SIGMA Clermont / ex-IFMA*

petroyasniy@gmail.com; yuri.lapusta@sigma-clermont.fr; sergiiglado@gmail.com;
tania.socolova@gmail.com

Одним з ефективних методів підвищення втомної міцності і довговічності елементів конструкцій з отворами є дорнування, яке полягає в протисканні дорна у вигляді конуса з калібруючою ділянкою через отвір. В результаті дорнування утворюються залишкові напруження і деформації, які є основним чинником підвищення тримкості елементу конструкції під час експлуатації. Найбільшого поширення дана технологія набула в авіабудуванні, де важливо забезпечити необхідну міцність силових елементів конструкцій не збільшуючи її матеріалоємності.

Представлена робота присвячена дослідженню впливу геометричних параметрів дорна і отворів на формування поля залишкових напружень в поастині з алюмінієвого сплаву.

Для визначення напружено-деформованого стану, враховуючи симетрію досліджуваного об'єкту, створили тривимірну скінченно-елементну модель чверті досліджуваного плоского зразка і дорна з центральним отвором. Діаграму пружно-пластичного деформування матеріалу описували за моделлю Steinberg-Guinan.

Виявлено, що із збільшенням натягу дорнування збільшуються абсолютне значення та ширина ділянки дії стискувальних залишкових напружень. Незалежно від натягу дорнування, найменші значення залишкових напружень з боку входу дорна, а найбільші – у середній по товщині ділянці, ближче до виходу дорна. З ростом відносного натягу дорнування різниця у значеннях напружень по товщині зразка зменшується. Зі збільшенням холодно розширеного ступеня від 1 до 3% ці напруги зростають на поверхні отвору у 1,5 - 2 рази.

FINITE ELEMET SIMULATION OF RESIDUAL STRESSES IN PLATE NEAR COLD EXPANDED HOLE

Finite element analysis approach of predicting induced residual stresses in an aluminum plate after cold expanded hole was presented. The influence of the holes diameter and cold expanded degree (CED) on the residual stresses is analyzed. With the increase of CED from 1 to 3% these stresses increase at surface of the hole in 1.5–2 times.

UDC 666.9-127, 666.3-492.2, 666.3.017

INFLUENCE OF MAGNETITE ON MECHANICAL CHARACTERISTICS OF HYDROXYAPATITE BIOCERAMICS

**Oksana Otychenko, Yuriy Bezimyaniy,
Anatoliy Kolesnykov, Iryna Uvarova**

Frantsevich Institute for Problems of Materials Science NAS of Ukraine

OksanaOtychenko@gmail.com; bezimyani@gmail.com;
dep57@materials.kiev.ua; uvarovaira@ukr.net

The investigations were carried out to determine differences in physic-mechanical properties of nanostructured composite biomaterials based on biogenic hydroxyapatite (BHA) doped with nanomagnetite ($\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$) which was synthesized by two different methods. In the one case, previously prepared iron oxalate was precipitated on the surface of BHA microgranules in the form of hydrosuspension (physic-mechanical method). In the other case, BHA was introduced directly during the production of iron oxalate (chemical method). Subsequently filtering, dehydration and drying of obtained condensation disperse systems were carried out [1]. The compact samples of pure BHA and alloyed materials of cylindrical shape ($d = 10 \pm 0.2$ mm) with mass 1.9 ± 0.3 g were obtained by dry pressing (10 MPa). Subsequently low temperature thermolysis of studied materials in a nitrogen medium at 500°C (below the Curie point for magnetite – 572°C) for 2 h was carried out [2]. Their physical characteristics are presented in Table 1.

Table 1– Physical characteristics of studied compact samples

Material	Apparent density, g/cm^3	Porosity, %		Elastic characteristics, GPa
		Open	Total	
BHA ($<160 \mu\text{m}$)	1.80	38.8	42.2	15.0
BHA/ Fe_3O_4 phys.-mech.method	1.83	32.4	41.62	6.8
BHA/ Fe_3O_4 chem. method	1.78	39.4	44.8	8.0

Dynamic characteristics of elasticity were determined on the basis of measuring the propagation rate of longitudinal elastic wave, the excitation parameters of which were chosen by taking into account the structural characteristics of compact samples

[3]. Since all studied materials are anisotropic (Fig. 1), the measurements were made in the direction of the highest rigidity.

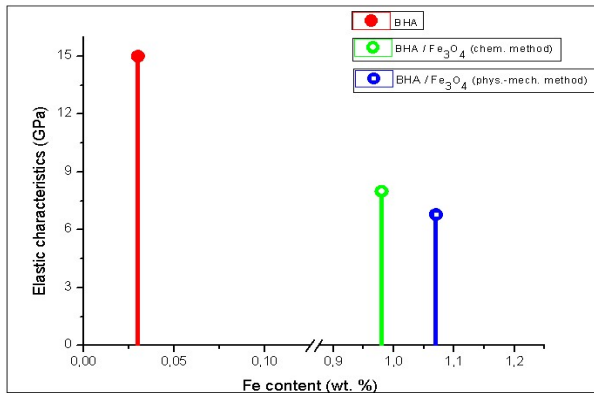


Figure 1 – Dependence of the dynamic characteristics of studied samples on the content of total iron.

Difference in the elasticity of BHA and alloyed materials can be related to the difference in the particle size spectrum of initial powders [4]. Particles of different sizes form different structures of samples under pressing, which additionally changed under the decomposition of iron oxalate to magnetite. Thereby, the studied method of doping bioceramics on the basis of hydroxyapatite with 4.4 wt. % of magnetite (~1 wt. % in terms of total Fe content) is characterized by an inverse proportional dependence between the amount of total iron and the magnitude of the characteristics of elasticity.

1. *Otychenko O.M., Babutina T.E., Parkhomey O.R., Budylna O.M., Protsenko L.S., Uvarova I.V.* Influence of thermolysis in the nitrogen medium on physicochemical properties of medical using material based on biogenic hydroxyapatite // Chemistry, Physics and Technology of Surface. – 2017. – **8**, No.1. – P. 10-17.
2. *Otychenko O.M., Babutina T.Ye., Kuda O.A., Budylna O.M., Protsenko L.S., Koval O.Yu., Uvarova I.V.* Adsorption of ceftriaxon by biogenic hydroxyapatite with magnetic additions // Functional materials. – 2017. – **24**, No. 4. – P. 577-583.
3. *Сич О.Є., Товстоног Г.Б., Пінчук Н.Д., Безимяний Ю.Г., Козирцацький С.О., Комаров А.К., Євич Я.І., Уварова І.В.* Вплив добавки високодисперсного діоксиду кремнію на структуру та механічні характеристики гідроксиапатитної біокераміки // Наукові нотатки. – 2017. – **59**. – С. 244-249.
4. *Отиченко О.М., Бабутіна Т.Є., Пархомей О.Р., Проценко Л.С., Будиліна О.М., Уварова І.В.* Особливості адсорбції препаратів різної молекулярної маси біогенним гідроксиапатитом, легованим наномагнетитом // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2017. – **15**, №1. – С. 185-192.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А	
Альфавіцька Соломія	13
Андрейків Олександр	223
Архипенко Костянтин	15

Б	
Бараненко Валерій	16
Бедзір Олександр	18
Біда Надія	76
Білаш Оксана	13
Білова Оксана	20
Блін Євген	115
Бобилев Дмитро	113
Богданов Вячеслав	21
Богданова Ольга	23
Бойчук Олена	124
Борисенко Максим	124
Бреус Віталій	234
Бутринський Дмитро	25
Бутринський Ігор	25

В	
Вайсфельд Наталія	150, 151
Василенко Валерія	139
Василько Галина	122
Ветров Олег	123
Віра Володимир	211, 213
Войтко Мирон	157
Волчок Денис	16
Врублевський Віктор	33

Г	
Гарт Етері	175
Гейдаров Вусал	219
Герасимчук Олег	214
Герасимчук Олена	214
Гладько Сергій	236
Глазов Артем	27
Гомілко Олександр	102
Гречківський Степан	234
Григоренко Олександр	124
Григорова Тетяна	219

Гудрамович Вадим	175, 177
------------------------	----------

Д	
Данісв Юрій	177
Дацишин Олександра	27
Довбня Катерина	33
Дейнека Олег	100
Демешин Ульяна	126
Демидов Олександр	29
Дем'яненко Анатолій	127
Дзюба Анатолій	31, 179
Дзюбик Андрій	181
Дзюбик Людмила	181
Дівсєв Богдан	130
Дідич Ірина	234
Дорош Ігор	130
Дубик Ярослав	132
Дяків Василь	216, 218

Ж	
Жбадинський Ігор	35
Журавльова Зінаїда	87

З	
Забродін Павло	219
Зеленяк Володимир	36
Зінько Ярослав	181
Зуєва Тетяна	134

І	
Іваницький Ярослав	218
Івантишин Наталія	225
Ісасв Микола	219
Іщенко Олексій	132

К	
Кагадій Тетяна	20
Камінський Анатолій	38
Кваснюк Олексій	76
Кендзера Олександр	136
Кирилова Ольга	40
Кіпніс Олександр	69
Клименко Дмитро	232
Козачок Олег	42

Козлова Ольга	183
Коляса Любов	36
Кондряков Евгений	221
Кононов Юрій	139
Кононученко Олег	214
Костробій Петро	141
Кравчишин Оксана	143
Кравець Володимир	44
Кравчук Андрей	221
Кравчук Оксана	27
Кравчук Роман	47
Кремез Віталій	145
Кривий Олександр	15, 49
Крижановська Тетяна	196
Кривохата Анастасія	183
Кудін Олексій	183
Кузь Ігор	51
Кузь Ольга	51
Кузьменков Дмитрій	67
Кулик Володимир	211, 213
Кулинич Ярослав	157
Кундрат Андрій	53
Кундрат Микола	53
Кунець Ярослав	147, 153
Куриляк Дозислав	157
Кусній Ярослав	163
Куротчин Леся	72
Курташ Ірина	55

Л

Лапуста Юрій	223, 236
Ларін Олексій	230
Лаушник Ігор	35
Левитіна Лариса	31
Литвин Оксана	149
Лісничук Андрій	225

М

Маковійчук Микола	56
Максимів Юлія	147
Максимович Олеся	161
Максимук Олександр	90
Маланчук Наталія	59
Малюга Володимир	151
Мармыш Денис	228
Мар'яна Наталія	67

Мартиненко Володимир	57
Мартиненко Геннадій	186
Мартиняк Ростислав	59
Марченко Григорій	27
Матус Валерій	153
Махоркін Микола	61
Микитин Мар'яна	92
Мьсов Константин	120
Мікуліч Олена	155
Мірошніков Віталій	63
Мішарін Андрій	65
Мищенко Віктор	153
Можаровський Валентин	67
Мойсеєнок Олексій	165
Мольков Юрій	218
Морозов Юрій	49

Н

Нагорний Володимир	185
Назаренко Володимир	69
Назарчук Зіновій	157
Николишин Мирон	13, 61, 72
Николишин Тарас	70
Новіков Андрій	188

О

Онишкевич Володимир	74
Онишко Любов	76
Опанасович Віктор	13, 72, 79
Ориняк Ігор	132, 188, 203
Острик Володимир	81

П

Палюх Володимир	211, 213
Панасенко Александр	221
Панасюк Тетяна	185
Панченко Сергій	175
Пастух Олег	234
Пацюк Анатолій	31
Перепічка Василь	159
Піскозуб Йосиф	98
Піскозуб Любов	98
Поліщук Олександр	190, 192
Пономаренко Олександр	76
Попадюк Ігор	18
Попов Всеволод	29, 40, 65, 149

Пороховський Василь	153
Потопальська Ксенія	230
Пошивалов Володимир	177
Прокопишин Ігор	83, 181
Прокенко Володимир.....	85
Псярнецька Тетяна.....	185

Р

Рабош Роман.....	147
Ребот Дарія.....	163
Резниченко Людмила	177
Реут Віктор	87
Рижа Ірина	141
Рудавська Ірина.....	88
Рушицький Ярема	136

С

Савицький Олег	102
Сафронова Інга	194
Сачук Юрій	90
Селіванов Михайло	38
Семененко Володимир.....	196
Семененко Тетяна	196
Середницька Христина	92
Сибіль Юрій	94
Сіренко Володимир	179, 233
Скрицький Микола	198
Слободян Богдан	59
Слободян Микола	13, 72, 96
Соляр Тетяна	161
Стоцько Зіновій	163
Стягар Андрій	83
Сулим Георгій	98
Сяський Андрій	100

Т

Телима Сергій	145
Ткачук Микола Анатолійович	59
Ткачук Микола Миколайович.....	59
Топільницький Володимир.....	163
Трофимчук Олександр	102
Троценко Ярослав	151
Турчин Ігор	122

У

Українець Наталія	85
-------------------------	----

Ф

Фесенко Ганна	165
---------------------	-----

Х

Харченко Валерій.....	221
Харченко Володимир	232, 233
Химко Ольга.....	167

Ц

Цуркан Мар'яна	96
----------------------	----

Ч

Чекурін Василь	167, 216, 218
Черчик Геннадій	130
Чорненький Андрій.....	104
Чорноіван Юрій	38

Ш

Шашький Іван	55
Шваб'юк Василь	155
Шевцова Наталія	100
Шевченко Володимир.....	123
Шніцар Тетяна	236
Шопа Василь	18
Шопа Тетяна	168
Штаюра Наталія.....	223
Шумілін Сергій	219

Щ

Щербина Ірина	20
---------------------	----

Я

Яджак Михайло	200
Ясінський Анатолій	202
Ясковець Захар.....	203
Ясній Олег	234
Ясній Петро.....	236
Ящик Ігор	79

А

Alekseev Denis	205
----------------------	-----

В

Bezimyanniy Yuriy	238
Bosiakov Sergei	205
Butyter Ihor.....	169

C		O	
Chomenkyi Andrii.....	107	Onizhuk Anton.....	172
D		Onopriienko Oleg	111
Demydyuk Myroslav	207	Otychenko Oksana	238
Diveyev Bohdan	169	P	
Dutkiewicz Maciej	174	Pakosh Vira	170
G		Plaksiy Katarina	172
Goriachko Taras.....	142	Prikazchikov Danila	109
K		S	
Kaplunov Julius	109	Savruk Mykhaylo	107
Kazberuk Andrzej.....	107	Shatskyi Ivan	39
Kolesnykov Anatoliy	238	Shopa Vasyl.....	174
L		Shpileuski Ihar.....	205
Lapusta Y.....	111	Silberschmidt Vadim.....	205
Lesyk Oksana.....	170	Stankevych Volodymyr	109
Loboda V.	111	U	
Lytwyn Bogdan	207	Uvarova Iryna.....	238
M		V	
Marchuk Mykhailo.....	170	Velychkovych Andrii	174
Mikhlin Yuri.....	172	Y	
Mykhas'kiv Viktor	109	Yurkevich Kirill	205
N		Z	
Nyashin Yuriy	210		

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Наукові праці у трьох томах

Том 2

*Комп'ютерна верстка та технічне редагування
Івanni Бутрак*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060
тел.: +380 (32) 263-83-77, факс: +380 (32) 263-62-70

E-mail: confmech2018@gmail.com
Web: <http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>

