СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ

MODERN PROBLEMS OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Збірник наукових праць

За загальною редакцією
академіка НАН України А.М. Самойленка
та академіка НАН України Р.М. Кушніра

Том 3

Львів – 2018

УДК 539.3; 510(061)

Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018

Збірник наукових праць складається з трьох томів. Перший та другий томи збірника містять наукові праці, присвячені проблемам математичного моделювання у механіці деформівних твердих тіл; математичних методів механіки та термомеханіки; механіки неоднорідних твердих тіл і наномеханіки; механіки контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями; динаміки неоднорідних середовищ; оптимізації та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем; міцності та втоми матеріалів. Третій том присвячено сучасним проблемам математики: зокрема, алгебри і топології, теорії функцій і функціонального аналізу, числових методів, диференціальних рівнянь і математичної фізики. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», яка проходила 22-25 травня 2018 р. у Львові.

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Ухвалено до друку
Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

ISBN 978-966-02-8502-6 (загальний, електронне видання)
ISBN 978-966-02-8505-7 (т. 3)

National Academy of Sciences of Ukraine
Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

Modern Problems of Mechanics and Mathematics

Collection of scientific papers

Edited by
Academician of NAS of Ukraine A.M. Samoilenko
and Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir

Volume 3

L'viv – 2018

UDC 539.3; 510(061)

Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vol. / Edited by A.M. Samoilenko, R.M. Kushnir [Electronic resource] // Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 3. – Access mode: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

The collection of proceedings contains three volumes. The first and second volumes deal, basically, with such problems: mathematical modelling in mechanics of deformable solids, mathematical methods of mechanics and thermomechanics; mechanics of non-homogeneous solids and nanomechanics, mechanics of contact interaction, solids with cracks and thin inclusions; dynamic problems of non-homogeneous environments; optimization and design of elements of the constructions and biomechanics systems, strength and fatigue of materials. The third volume is devoted to modern problems of mathematics, partially, numerical methods, theory of functions and functional analysis, theory of functions and functional analysis, differential equations and mathematical physics, algebra, geometry and topology. They were the subject for discussion on International Conference «Modern Problems of Mechanics and Mathematics», held on May 22-25, 2018, L'viv.

The book may be useful to scientists, to those working for a doctor's degree, post-graduate students, masters and students of corresponding specialties.

Approved for publishing
by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

ISBN 978-966-02-8502-6 (common, electronic edition)
ISBN 978-966-02-8505-7 (v. 3)

ЗМІСТ

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Бернакевич Ірина, Вагін Петро, Козій Ірин Числове розв’язування задач теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. 15

Григоренко Олександр, Панкратьєв Сергій, Пінчук Тетяна Чисельний аналіз статичного деформування чотирикутних пластин різної геометрії 17

Григоренко Олександр, Яремченко Сергій Напружений стан неоднорідних порожнистих циліндрів в тривимірній постановці 19

Дияк Іван, Савула Ярема Чисельний аналіз гетерогенних моделей задач теорії пружності 20

Жук Петро Математичні основи дослідження умов самоорганізації територіальних громад 21

Круль Марта, Кунинець Андрій, Кутнів Мирослав Алгоритмічна реалізація точних триточкових різницевих схем для нелінійних крайових задач на півпрямій........ 23

П’янило Ярослав, Собко Валентина, П’янило Галина Побудова біортогональних многочленів та їх використання до моделювання процесів масопереносу 26

Савенко Петро Чисельне розв’язування двоточкових крайових задач з нелінійними спектральними параметрами 29

Стельмащук Віталій Коректність нестаціонарної варіаційної задачі термоп’єзоелектрики Ґріна-Ліндсея........ 32

Турчин Юлія, Савула Ярема Обернена заміна у методі скінченних елементів для задач адвекції-дифузії-реакції з великими числами Пекле........ 34

Тучапський Роман, Несполяк Дмитро Наближений алгоритм розв'язування деяких класів задач теорії оболонок методу $\{m, n\}$-апроксимації........ 36

Чернуха Ольга, Білущак Юрій Числовий метод знаходження подвійного інтеграла зі змінними верхніми межами 38

Юзефович Роман, Курапов Павло, Яворський Ігор Аналітичні періодично нестаціонарні випадкові сигнали у вібродіагностиці....... 41

Bessmertnyi Yaroslav Behaviour of thin-walled shallow conical shells in case of non-uniform stress-strain state 43

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ І ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Антонова Тамара, Возна Світлана, Сусь Ольга Деякі властивості наближень гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з дійсними елементами 45

Баран Оксана, Гоєнко Наталія Про відповідність в теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів 48

Боднар Дмитро, Біланик Ірина, Чорний Віктор Про оцінку швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.. 49

Василишин Тарас Симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції на просторах вимірних за Лебегом функцій......................... 50

Власик Ганна, Шкапа Вікторія Гріді-алгоритми на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q 51

Галущак Світлана Деякі властивості алгебр, породжених послідовністю поліномів на банаховому просторі 53

Гладун Володимир, Манзій Олександра Множини стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами 54

Загороднюк Андрій, Кравців Вікторія Спектр алгебри блочно-симетричних поліномів на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ 55

Загороднюк Андрій, Марцінків Марія Симетричний тензорний добуток метричних просторів... 56

Замрій Ірина, Негоденко Олена Структура неперервних функцій, що зберігають центральну цифру у Q_3-зображенні чисел 58

Іванов Юрій Про наближення функцій неквазіаналітичних класів узагальненими рядами Тейлора... 61

Климчук Світлана Про один клас сингулярних функцій канторівського типу.. 63

Лозинська Віра Перетворення Фур'є-Лапласа поліноміальних ω-ультрарозподілів 66

Митрофанов Михайло Основні результати по апроксимації неперервних та рівномірно неперервних функцій на підмножинах нескінченновимірних просторів 67

Новосад Зоряна, Фуштей Василь Диференціювання в алгебрах аналітичних функцій банахового простору, породжених послідовністю поліномів 68

Пожарська Катерина Оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних 69

Сердюк Анатолій, Соколенко Ігор Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах диференційовних періодичних функцій.................................... 70

Сокіл Марія, Сокульська Наталія, Христіянин Андрій Про рівність Карлемана для мультиплікативно періодичної мероморфної функції 72

Сусь Ольга, Антонова Тамара, Возна Світлана Про відносну стійкість до збурень двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами 74

Терлич Наталія Деякі результати про осциляції для рівнянь Штурма-Ліувілля з енергозалежними потенціалами 77

Трофименко Ольга Теореми про середнє для розв’язків лінійних еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 78

Тугай Ганна Матриці Якобі і сингулярні збурення самоспряжених операторів 79

Чернега Ірина Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах. 82

Banakh Taras, Bokalo Bogdan SW-regular topological spaces 83

Brysina Iryna, Makarichev Victor On the generalized atomic wavelets 84

Chaplick Steven, Fleszar Krzysztof, Lipp Fabian, Ravsky Alexander, Verbitsky Oleg, Wolff Alexander Drawing graphs on few lines and few planes 86

Gök Ömer On regular M-weakly compact operators 87

Hryniv Rostyslav, Mykytyuk Yaroslav Trace formulae for Schrödinger operators 88

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

Атамась Иван Формула Лиувилля-Остроградского для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары . 90

Баранецький Ярослав, Каленюк Петро Крайова задача з умовами типу Неймана для рівнянь із частинними похідними з постійними коефіцієнтами 92

Баранецький Ярослав, Сохан Петро Нелокальна крайова задача з кратним спектром для звичайного диференціального рівняння парного порядку з оператором інволюції 94

Бешлей Василь, Петрук Олег Числове моделювання поляризаційних карт залишків наднових зір 96

Ванєєва Олена Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку 97

Васюник Зоряна Особливості галуження розв’язків системи реакції-дифузії з експоненційними нелінійностями 99

Возняк Ольга, Мединський Ігор Фундаментальний розв’язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині 101

Войтович Михайло Поточкова оцінка розв’язків квазілінійних рівнянь четвертого порядку з підсиленою еліптичністю в термінах потенціала Вольфа 103

Гентош Оксана, Прикарпатський Ярема Інтегровні суперконформні аналоги редукцій рівняння Алонсо-Шабата та рівнянь типу Ліувілля 105

Герасименко Віктор, Кречко Вікторія Процес поширення початкових квантових кореляцій в границі самоузгодженого поля 107

Геселева Катерина Сумісність та побудова наближених розв’язків інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями 108

Грод Іван Знакозмінні функції Ляпунова для розширень динамічних систем на многовидах 110

Гузик Надія Визначення невідомих параметрів у параболічному рівнянні з довільним слабким виродженням 113

Дем’яненко Анатолій Динаміка пружних об’єктів з рухомим інерційним навантаженням – механічні, математичні моделі, їх особивості та методи дослідження 114

Дронь Віталій Властивості інтегралів типу похідних від об'ємного потенціалу для ультрапараболічного рівняння Колмогорова довільного порядку 117

Зернов Олександр, Кузіна Юлія Про розв'язки деякої сингулярної задачі Коші 119

Івасишен Степан, Пасічник Галина Про задачу Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині 120

Ільків Володимир, Страп Наталія Умови розв'язності нелокальної задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю в уточненій шкалі просторів Соболєва функцій дійсних змінних 121

Каленюк Петро, Волянська Ірина, Ільків Володимир, Нитребич Зіновій Умови коректної розв'язності триточкової задачі для рівняння з частинними похідними у плоскій області 123

Колісниченко Володимир Динамічна стійкість математичного маятника при дії імпульсних та параметричних збурень 125

Конет Іван, Пилипюк Тетяна Еліптичні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових областях 127

Кравчук Станіслав Робасна стійкість лінійних періодичних систем ... 129

Кузь Антон, Симотюк Михайло Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними над полем р-адичних чисел 132

Кузь Антон, Симотюк Михайло Нелокальна двоточкова задача для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами 134

Кузьо Тарас, Петрук Олег Тривимірне моделювання еволюції сильних ударних хвиль у неоднорідному середовищі 136

Літовченко Владислав Про параболічні за Шиловим системи із змінними коефіцієнтами 137

Лопушанська Галина, Лопушанський Андрій, М'яус Ольга Обернені задачі для рівняння дробової дифузії з інтегральною за часом додатковою умовою 139

Лукашів Тарас Про оптимальне керування одного виду стохастичних систем випадкової структури 141

Лучко Володимир, Лучко Вікторія Задача про знаходження майже періодичного розв'язку для диференціальних рівнянь та систем рівнянь параболічного типу 142

Марченко Ольга, Самойленко Тетяна, Благовещенська Тетяна Дослідження осесиметричної задачі динаміки взаємопов'язаних фаз ґрунтового середовища 144

Матійчук Михайло Про функцію Ґріна псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною 147

Негрич Марія, Симотюк Михайло Нелокальна задача для рівняння з похідною Ґельфонда-Леонтьєва 149

Омелян Олександр Потенціальна симетрія та нелокальна редукція однієї нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії 151

Парасюк Ігор Існування гіперболічного багаточастотного розв'язку рівнянь руху твердого тіла у квазіперіодичному за часом силовому полі 153

Поліщук (Чайчук) Ольга Якісне дослідження сингулярного функціонально-диференціального рівняння 155

Савка Іван, Тимків Іван Задача спряження з багатоточковими умовами для мішаного рівняння високого порядку в циліндричній області 157

Сергєєва Лідія Побудова глобального розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними, що містить відхилення за часом 159

Сливка-Тилищак Ганна, Михасюк Михайло Властивості розв'язку задачі про коливання струни з випадковими початковими умовами 161

Слинько Віталій, Тимошенко Богдан Метод апріорних оцінок в теорії інтегральних нерівностей 163

Спічак Станіслав, Стогній Валерій, Копась Інна, Горбунова Олена Симетрійні властивості та точні розв'язки (2+1)-вимірного лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону 165

Тарасенко Оксана Про одну задачу оптимального керування 167

Тацій Роман, Стасюк Марта, Пазен Олег Прямий метод розрахунку нестаціонарних температурних полів у багатошарових структурах основних геометричних форм 169

Турчина Наталія Матриця Ґріна модельної $\overrightarrow{2b}$-параболічної крайової задачі 171

Унгурян Галина Спряжена задача Коші для одного класу параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами...................................... 173

Хома Григорій, Хома-Могильська Світлана Методика вивчення Т-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку.... 175

Хорошун Анатолий Стабилизация поступательных движений вращением эксцентрикового маховика.. 176

Чорненька Олена, Цирин Олександра Асимптотика лінійних сингулярно збурених систем трьох диференціальних рівнянь з особливою точкою.. 178

Шань Марія Результат усувності для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом 180

Широковських Альона Про одну нелокальну задачу для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором.. 181

Яшан Богдан Багатоточкова задача Коші для параболічних рівнянь з виродженням 183

Bivziuk Vladyslav, Slyn'ko Vitalij Conditions of asymptotic stability of linear impulsive differential equations.. 185

Fedorchuk Vasyl On symmetry reduction of some partial differential equations 187

Fedorchuk Volodymyr On symmetry reduction of the eikonal equation..... 188

Kuduk Grzegorz Problem with homogeneous integral conditions for non-homogeneous system of partial differential equations.......................... 189

Rvachova Tetiana, Tomilova Yevheniia Application of the generalized Taylor-Birkhoff series for solving of the initial value problem for ordinary differential equations 191

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ І ТОПЛОГІЯ

Бондаренко Віталій, Цімболинець (Динис) Руслана Кільця ендоморфізмів бімономіальних матриць.. 193

Гаталевич Андрій, Дмитрук Анатолій Кільця Безу з умовами на радикал Джекобсона.. 194

Грушка Ярослав Про неперервність нарізно неперервного і одностайно поступального перетворення координат....................... 195

Джалюк Наталія, Петричкович Василь Трикутні розв'язки матричного рівняння $AX + YB = C$ 197

Жирак Оксана PRINC кільця стабільного рангу один........................... 199

Забавський Богдан, Романів Олег Комутативні області Безу, в яких довільний ненульовий простий ідеал міститься у скінченній множині максимальних ідеалів 200

Зеліско Галина Про максимальні радикали в категорії полігонів 203

Кирчей Іван Правило Крамера для кватерніонового матричного рівняння Сильвестра.. 204

Кіосак Володимир Геодезичні відображення майже ейнштейнових просторів... 205

Клименко Ігор, Лисенко Світлана, Петравчук Анатолій Будова елементів в алгебрі Лі диференціювань з великим абелевим ідеалом 206

Коржик Володимир Трикутні вкладення повних графів у двовимірні поверхні 208

Крайнічук Галина, Акопян Арсен Подання функційних рівнянь через графи.. 210

Крайнічук Галина, Андреєва Юлія Про звідність нескоротних узагальнених функційних рівнянь.. 212

Кучма Марія Факторизації симетричних матриць над кільцями поліномів і квазіполіномів з інволюцією 215

Ладзоришин Наталія Про розв’язність матричних діофантових рівнянь над квадратичними кільцями 217

Мельник Іванна Про квазіпервинні диференціальні ідеали напівкілець 219

Олійник Роман Категорія мультиплікативних полігонів 221

Ольшевська Віта Зображення підстановок кореневими деревами 222

Пирч Назар Графи-дерева та М-еквівалентність 223

Поливода Орислава Многовиди, модельовані над зліченними прямими границями абсолютних екстензорів... 225

Попович Роман Про елементи великого порядку в розширеннях Артіна-Шраєра 227

Прохорчук Вероніка Скінченно автоматні розширення груп Баумслага-Солітера 229

Раєвська Ірина, Раєвська Марина Локальні майже-кільця на скінченних неабелевих p-групах 230

Романів Андрій, Щедрик Володимир Про стабільний ранг кілець матриць над комутативними кільцями головних ідеалів 231

Савчук Анатолій, Гутік Олег Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел 233

Саган Андрій Про майже ω-евклідові області 234

Скуратовський Руслан Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих 236

Тилищак Олександр Деякі нерозкладні модулярні зображення циклічної p-групи над локальним кільцем скінченної довжини 237

Фриз Ірина Ортогональні доповнення бінарних операцій...................... 238

Шаваровський Богдан Уточнена трикутна форма 3×3-матриць з одним характеристичним коренем у класі напівскалярно еквівалентних матриць 241

Шапочка Ігор Про модулярні матричні зображення знакозмінної групи четвертого степеня 243

Шевчик Ольга Про максимальні локально нільпотентні підалгебри Лі $W_3(K)$ 244

Bondarenko Vitaliy, Styopochkina Maryna On coefficients of transitiveness of posets critical with respect to the positivity of the quadratic Tits form 246

Bovdi Victor Integral group ring of the Suzuki sporadic simple group.......... 248

Chernikov Nikolay On Shunkov groups with complemented non-abelian subgroups 249

Drzymała Ilona Twelve-Point sphere 250

Fraś Paulina Geometry in music?.. 252

Giza Marta Descartes' method of dividing an angle 254

Gołąb Małgorzata Configurations of lines in the projective plane............... 255

Kabat Jakub Line arrangements, pseudoline arrangements and Boroczky configurations from the few points of view 256

Maturin Yuriy Modules with boolean lattices of radical filters 257

Petravchuk Anatoliy, Chapovskyi Yevhenii Nilpotent modules over polynomial rings 258

Prokip Volodymyr On the similarity of matrices AB and BA 260

Sobol Oleksandra, Gutik Oleg On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$ 262

Sokhatsky Fedir, Savchuk Viktor About isomorphism of topological linear quasigroup on real numbers and their sub quasigroups 264

Sokhatsky Fedir, Tarkovska Olena About linearity over commutative groups 266

Tuleja Zuzanna De Bruijn-Erdos theorem 268

Vainstein Feodor Testing of numerical computations by the use of functional equations 269

Wicher Anna C-symmetric operators 271

Zabavsky Bogdan, Gatalevych Andrii Diagonal reduction of matrices over commutative semihereditary Bezout rings..................................... 272

Zborowska Anna On some properties of circulant matrices.......................... 274

Подлевський Богдан, Ярошко Оксана Один підхід до знаходження кількості власних значень двопараметричних спектральних задач . 275

Алфавітний покажчик... 277

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

УДК 517.958:519.6

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ

Ірина Бернакевич, Петро Вагін, Ірина Козій

Львівський національний університет імені Івана Франка

iryna.bernakevych@lnu.edu.ua, vahin@franko.lviv.ua, ira_shot@yahoo.com

Тонкостінні оболонкові конструкції різноманітної форми і складної фізико-механічної структури, які зазнають різних навантажень (силових та теплових, як статичних, так і динамічних), що призводить до втрати їх стійкості, мають широке застосування в багатьох галузях сучасної техніки. Розробка універсальних, теоретично обґрунтованих методів, алгоритмів і програм розрахунку напружено-деформованого стану таких конструкцій, що вимагає використання нелінійної теорії оболонок, дозволяє прогнозувати і покращувати їх міцнісні та експлуатаційні властивості.

Запропоновано методику числового дослідження напружено-деформованого стану, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок з використанням методу скінченних елементів та на основі шестимодального варіанту теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Для зручності застосування числових методів [1, 3, 5] усі співвідношення подано у матричному вигляді.

Записано системи рівнянь для розв'язку задач статичного (1) та динамічного (2) деформування:

$$K(q)q = R, \tag{1}$$

$$Mq''(t) + K\big(q(t)\big)q(t) = R(t), \tag{2}$$

де q – вектор невідомих вузлових переміщень і поворотів.

Для розв'язування нелінійної системи (1) застосовується метод Ньютона, який приводить до ітераційної процедури

$$K_T(q_i)\Delta q + K(q_i)q_i - R = 0. \tag{3}$$

При знаходженні частот лінійних коливань попередньо навантаженої оболонки приходимо до узагальненої задачі на власні значення [2]

$$\big(K_T(0) + G(q_0)\big)\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}, \tag{4}$$

де ω – колова частота вільних коливань, $\tilde{q}(t)=\{\tilde{q}_l(t)\}$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу.

Рівняння стійкості розглядуваної теорії оболонок запишемо [6] у вигляді

$$K_T(0)q+\lambda G(q_0)q=0 . \tag{5}$$

Найменше власне значення рівняння (5) визначає критичний параметр навантаження λ^*, за якого оболонка з початкового стійкого стану рівноваги переходить у суміжний.

У співвідношеннях (1) – (5) введено наступні позначення: $K(q)$ – матриця січної жорсткості, $K_T(q)$ – матриця тангенціальної жорсткості, $G(q_0)$ – геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень, R – вектор зовнішнього вузлового навантаження, M – матриця мас, q_0 — вектор шуканих переміщень лінійної статичної задачі. Вигляд матриць наведено у [4].

Досліджено та розв’язано низку числових прикладів визначення статичних та динамічних характеристик оболонок, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок методом скінченних елементів. Здійснено порівняльний аналіз отриманих числових розв’язків з розв’язками, наведеними в літературі.

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. *Вагін П. П., Шот І. Я.* Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
3. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
4. *Шот І. Я.* Чисельне розв’язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісник Одеського нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18, вип. 1 (17). – С. 132–141.
5. *Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T.* Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
6. *Bernakevych I. E., Vahin P. P., Shot I. Ya.* A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **181**, № 4. – P. 497–505.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THEORY OF THIN SHELLS AMENABLE TO SHEARS AND COMPRESSION

The key equations of the theory of thin shells amenable to shear and compression (a six-modal variant) have been noted in matrix form. Numerical schemes for finite element method applying biquadratic isoparametric approximations for solving the problems of deformation, stability and vibrations of shells amenable to shears and compression have been constructed. There are a number of numerical examples.

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТАТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН РІЗНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Олександр Григоренко, Сергій Панкратьєв, Тетяна Пінчук

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
Технічний центр НАН України

ayagrigorenko1991@gmail.com, sp4soft@gmail.com, techcenter@nasu.kiev.ua

Задачі про напружено-деформований стан чотирикутних пластин складної форми зазвичай розглядаються з використанням підходів, що передбачають дискретизацію області з використанням методу скінчених елементів, скінчених різниць та ін. Для деяких випадків геометрії пластин були запропоновані схеми з використанням координатних перетворень, що використовують особливості тієї чи іншої вихідної області. Проте більшість існуючих робіт розглядають пластини в межах класичної теорії та обмежуються ізотропними метеріалами.

Запропонований авторами підхід до розв’язання задач про напружено-деформований стан чотирикутних ортотропних пластин сталої товщини, деформація яких відбувається під дією розподіленого поверхневого навантаження $q(x,y)$, передбачає використання відображення складної вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника в одиничну квадратну область у новій системі координат [1]. Для описання пружних властивостей матеріалу використано уточнену теорію типу Тимошенка, що спирається на гіпотезу прямолінійного елементу.

Записана відносно статично-еквівалентних напруженням моментів M_x, M_y, M_{xy} та перерізуючих зусиль Q_x, Q_y вихідна система диференційних рівнянь рівноваги має вигляд

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0,\quad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,\quad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0.$$

Після деяких перетворень ці рівняння разом із виразами для обраних граничних умов складають двовимірну крайову задачу відносно прогину $w(x,y)$ та кутів розвороту елементу серединної поверхні пластини $\psi_x(x,y)$, $\psi_y(x,y)$. Для її розв’язання використано методи сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації, оскільки після перетворення координат область має форму одиничного квадрату.

Зниження розмірності вихідної двовимірної крайової задачі методом сплайн-колокації здійсненно з використанням *B*-сплайнів третього степеня, побудованих на рівномірній сітці вузлів. Отримана система звичайних диференційних рівнянь високого порядку розв'язується методом дискретної ортогоналізації. Параметри обох методів (кількість точок колокації, точок інтегрування) обрано достатніми великими для отримання стійкого розв'язку.

За допомогою запропонованого підходу було розв'язано ряд задач для пластин у формі паралелограму, трапецій, дельтоідів та чотирикутників загального виду при різних геометричних параметрах. Досліджено вплив взаємної орієнтації вісей ортотропії та країв пластини при різних умовах опирання на характер напружено-деформованого стану для ізотропних і ортотропних матеріалів. Проведено також аналіз змін у розподілі полів напружень і переміщень в умовах нерівномірного навантаження.

Аналіз обмежень на форму пластин показав можливість розгляду пластин у формі дельтоіда з кутом α від 1° (рис. 1а), а у формі рівнобоких трапецій – при співвідношенні основ *a/b* від 1:1 (квадрат) до 1000:1 (майже трикутник). Приклади загального вигляду відповідних поверхонь функції прогину *w(x,y)* представлені на рис. 1б,в.

Достовірність результатів розрахунків було підтверджено порівнянням з даними інших авторів для пластин у формі прямокутника, паралелограму, трапецій. Розбіжність в усіх випадках не перевищувала 10 %.

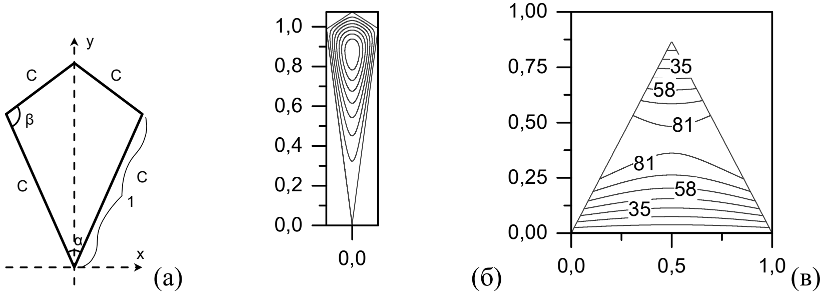


Рис. 1. Пластина у формі дельтоіду з кутом α між сторонами (а), вигляд поверхні прогину для дельтоіду з $\alpha = 15°$ (б) та для трапеції з $a/b = 1000$ (в)

1. *Grigorenko A. Ya., Pankratiev S. A. and Yaremchenko S. N.* Solution of stress-strain problems for complex-shaped plates in a refined formulation // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, № 3. – P. 326–333.

NUMERICAL ANALYSIS OF STATIC DEFORMATION PROBLEMS OF QUADRANGULAR PLATES OF VARIOUS GEOMETRIES

Using a numerical-analytic approach and mapping the original region into a unit square in the new coordinate system, the authors solved a number of problems related to plates of complex shape at various load and geometric parameters. In addition, possible form limitations were analyzed while the results were compared with those of other authors, showing good agreement of the calculated values.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Олександр Григоренко, Сергій Яремченко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

ayagrigorenko1991@gmail.com, yaremch@gmail.com

Нові сучасні технології дають змогу створювати неоднорідні матеріали, механічні характеристики яких змінюються неперервно. Такими є, наприклад, функціонально-градієнтні матеріали [1]. В цьому повідомленні розглянемо напружений стан неоднорідних циліндрів в тривимірній постановці зі змінним вздовж радіальної координати модулем Юнга. Задачі про осесиметричний напружений стан таких циліндрів розв'язано в [3].

З загальних рівнянь тривимірної теорії пружності в циліндричних координатах виведено розв'язувальні диференціальні рівняння в частинних похідних з врахуванням змінного модуля пружності. Тривимірну крайову задачу зведено до одновимірної з використанням двовимірних сплайнів, а одновимірну розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Такий підхід застосовано для розв'язання тривимірних задач в декартовій системі координат в [2].

Вказану задачу розв'язано також у варіаційній постановці методом скінченних елементів. При цьому використано елементи у формі прямокутних паралелепіпедів з вузлами в вершинах (восьмивузлові елементи). Проведено порівняння результатів отриманих різними методами.

1. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and Fnalysis of Functionally Graded Materials and Structures. Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60 – P. 195–215.
2. *Григоренко А. Я., Бергулев А. С., Яремченко С. Н.* Численное решение задач об изгибе прямоугольных пластин. //Прикладная механика. – 2013. – 49, № 1. – С.101–112.
3. *Григоренко А. Я. Яремченко С. Н.* Расчет напряженно деформированного состояния неоднородных полых цилиндров // Прикладная механика. – 2016. – 52, № 4. – С. 16–24.

STRESS STATE OF INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDERS IN SPATIAL FORMULATION

Three dimentional boundary elasticity problem for inhomogeneous hollow cylinder is under conciderationю The problem is reduced to one dimentional by using two dimensional splines. The problem obtained is solved by discrete-orthogonalization method. This 3D problem is solved also by FEM. The results obtained by two methods are compared.

УДК 517.958:539.3

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ГЕТЕРОГЕННИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Іван Дияк, Ярема Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка

ivan.dyyak@lnu.edu.ua

Математична, фізична та чисельна гетерогенність при моделюванні задач теорії пружності для багатьох сучасних проблем є єдиним засобом отримання реальної картини їх картини. Використання рівнянь різної розмірності для опису напружено-деформованого стану конструкцій широко застосовується, як сучасний засіб моделювання. Побудова гетерогенних математичних і чисельних апроксимацій їх теоретичного обгрунтування та паралельні реалізації залишаються відкритою проблемою.

Тут демонструємо, що гетерогенне моделювання з застосуванням методів скінченних і граничних елементів на основі методу декомпозиції області можуть бути використані для побудови зручного алгоритму для дослідження конструкцій, що складаються з різновимірних елементів. Гетерогенна модель складається з системи інтегральних і диференціальних рівнянь, умов спряження та змішаних граничних умов для яких будуємо слабкий розв'язок. На основі використання теорії операторів Пуанкаре-Стєклова та методу декомпозиції області отримані теоретичні результати збіжності запропонованих схем [1]. Розроблені підходи реалізовані у сучасному програмному комплексі. Результати проведених числових експериментів дослідження модельних і деяких інженерних проблем підтверджують перспективність запропонованих підходів.

1. *Dyyak I. I., Savula Ya., Styahar A.* Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition. Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2012. № 3 (109). P. 23-33.

NUMERICAL ANALYSIS OF HETEROGENEOUS MODELS OF THE PROBLEMS OF ELASTICITY

Heterogeneous modeling using finite and boundary element methods based on the domain decomposition method can be used to construct an algorithm for investigation of the structures with multi-dimensional elements. The heterogeneous mathematical model is formulated as the coupled system of integral and differential equations in the weak formulation. The results of the numerical experiments confirm the perspective of the proposed approaches.

УДК 681.3

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ САМООРГАНІЗАЦІЇ ТЕРИТОРІАЛЬНИХ ГРОМАД

Петро Жук

Науково-виробничий центр з інформаційних проблем територій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

cipt@litech.net

Самоорганізація територіальних громад полягає в формуванні внаслідок досвіду їхньої діяльності структур, які забезпечують ефективну поведінку громад. При прийнятті рішень про дії і виборі способів дій найбільше значення має структура наявних в громаді стереотипів. Через її розвиток в процесі діяльності громади відбувається й розвиток інших структур. Стереотип – твердження, на основі якого більшість осіб в громаді, через яких може виконуватися певна дія, приймають рішення про дію та спосіб її виконання. Рішення про конкретну дію може виводитися з кількох стереотипних тверджень.

Стан громади описується множиною цільових параметрів Z, які узагальнено відображають якість функціонування в 4 суспільних сферах, і визначаються експертними оцінками та самооцінками громади, та формовими параметрами X, що задають всі актуальні для діяльності громади властивості всіх осіб, що входять у склад громади, та всіх об'єктів, що знаходяться на її території. Вплив зовнішнього середовища задається множиною параметрів середовища U. Дії громади Y є змінами формових параметрів. В кожен момент часу t наявна поточна множина можливих дій $YY(t)$ – підмножина об'єднання декартових добутків множин значень різних підмножин множини формових параметрів. Як цілеспрямований об'єкт, громада має певний цільовий функціонал $\Phi(Z)$, що є об'єднаним критерієм співвідношення її цілей. Об'єктивно наявні закони поточної зміни стану задають його залежність від змін, що були від початкового t_0 до поточного t моменту часу.

Поведінка громади задається законом вибору її дії в момент t, як реакції на вплив середовища $U(t)$, на основі поточного стану і досвіду:

$$y(t) = yy\Big(t, X(t), Z(t), U(t), \big\{X(tt), Z(tt), U(tt) \big| tt < t\big\}\Big).$$

Кожне поведінкове правило формується, як рекурсивна функція від стану та досвіду. Механізм вдосконалення поведінки є механізмом формування таких функцій. Вдосконалення поведінки територіальної громади є розвитком в тому його означенні, що розвиток – нелокальна адаптація обмеженої цілеспрямованої системи до необмеженого середовища.

Загалом механізм вдосконалення поведінки є механізмом виведення певних нових тверджень на основі досвіду та старих правил поведінки. Його бути виражено через звичайні правила виводу, що використовуються в математиці, зокрема, в формальній арифметиці. Формальна система, що описує систему поведінкових правил і досвід багатша від формальної арифметики, оскільки вона використовує числові параметри, що описуються формальною арифметикою. Тому за 1-ю теоремою Геделя про неповноту існують твердження, сформульовані на мові досвіду та поведінкових правил, які не може бути виведено в їх формальній системі. Такі твердження можуть бути твердженнями локального фрагменту ідеальної системи поведінки, тому для їх досягнення має бути цільово подана нова недосвідна, а зовнішня інформація. Отже, вдосконалення поведінки цілеспрямованої системи лише на основі емпіричного досвіду неможливе. Прихильники саморозвитку, визнаючи його заперечення, що виходить з 1-ї теореми Геделя про неповноту, разом з тим вважали цю теорему незастосовною до розвитку, обгрунтовуючи це тим, що реально розвиток існує [1]. Проте вони заперечували твердження про те, що для кожної матеріальної системи є надсистема, яка здатна цільово подавати інформацію, необхідну для розвитку. А якщо це твердження прийняти, то суперечність між 1-ю теоремою Геделя про неповноту і об'єктивною наявністю розвитку зникає.

Отже, для розвитку системи стереотипів поведінки територіальної громади необхідна зовнішня інформація, яка б спрямовувала вдосконалення закону поведінки. Задача визначення цієї частки її істинності, тобто прогнозу того, розвиток, чи розвал системи буде в даному інформаційному середовищі, розв'язується на основі математичних моделей механізму вдосконалення поведінки та верифікації інформації соціальними системами параметри яких визначаються соціологічним експериментом, з використанням геделівської арифметизації правил поведінки.

1. *Глушков В. М.* Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1982 – 552 с.

MATHEMATICAL BASES OF INVESTIGATING THE CONDITIONS OF SELF-OGRANIZATION TERRITORIAL SYSTEMS

The statement of the problem of self-organization of territorial communities, as the development of a system of stereotyped statements, is being made. From the 1st Gödel's theorem on incompleteness, the inability of self-organization is impossible without the objective presentation of external information. The solution of the problem of determination for specific communities is the minimum share of true statements in external information, in which development is possible.

УДК 519.6

АЛГОРИТМІЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПІВПРЯМІЙ

Марта Круль, Андрій Кунинець, Мирослав Кутнів

Жешувський технологічний університет,
Національний університет «Львівська політехніка»,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

krolmb@prz.edu.pl, andriy.kunynets@gmail.com, kutniv@yahoo.com

Розроблено нову ефективну алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми розв'язування нелінійних крайових задач на півпрямій для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}-m^2u(x)=-f\left(x,u\right),\quad x\in(0,\infty),\ u(0)=\mu_1,\quad \lim_{x\to\infty}u(x)=0,$$

$$u:R_+^1\to R^s,\quad f(x,u):R_+^1\to R^s,\quad \mu_1\in R^s, \tag{1}$$

де $m\neq 0$ – дійсна стала, R^s – простір s-вимірних векторів.

На інтервалі $[0,\infty)$ введемо нерівномірну сітку $\hat{\bar{\omega}}_N=\left\{x_j\in[0,\infty),\, j=\overline{0,N},\ x_0=0,\, h_j=x_j-x_{j-1}>0,\, h_1+...+h_N=x_N\right\}$. На кроки сітки накладемо такі обмеження:

$$c_1\le h_{\max}/h_{\min}\le c_2,\ \ 1/h_{\max}\le x_N\le 1/h_{\min}.$$

Для розв'язування задачі (1) побудовано триточкові різницеві схеми (ТРС) рангу $\bar{n}=2[(n+1)/2]$ (n–ціле, $[\cdot]$–ціла частина) вигляду

$$\begin{gathered}\left(ay_{\bar{x}}^{(\bar{n})}\right)_{\hat{x},j}-d(x_j)y_j^{(\bar{n})}=-\phi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})}),\quad j=1,2,\dots,N-1,\\ y_0^{(\bar{n})}=\mu_1,\quad -a(x_N)y_{\bar{x},N}^{(\bar{n})}=\beta_2y_N^{(\bar{n})}-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})}),\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$u_{\bar{x},j}=\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j},\quad u_{\hat{x},j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j},\quad \hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},$$

$$a(x_j) = \frac{mh_j}{\sinh(mh_j)}, \quad j = 1,2,\ldots,N, \quad \beta_2 = m\frac{\exp(mh_N) - 1}{\sinh(mh_N)},$$

$$d(x_j) = \frac{m}{\hbar_j}\left\{\frac{\cosh(mh_j) - 1}{\sinh(mh_j)} + \frac{\cosh(mh_{j+1}) - 1}{\sinh(mh_{j+1})}\right\}, \quad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\phi^{(\overline{n})}(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\left[Z_2^{(n)j}(x_j,u) - Z_1^{(n)j}(x_j,u) + \frac{m(\cosh(mh_j)Y_1^{(\overline{n})j}(x_j,u) - u_{j-1})}{\sinh(mh_j)} + \right.$$

$$\left. + \frac{m(\cosh(mh_{j+1})Y_2^{(\overline{n})j}(x_j,u) - u_{j+1})}{\sinh(mh_{j+1})}\right], \quad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\mu_2^{(\overline{n})}(x_N,u) = Z_2^{(\overline{n}-1)N}(x_N,u) + mY_2^{(\overline{n}-1)N}(x_N,u) - Z_1^{(n)N}(x_N,u) +$$

$$+ \frac{m(\cosh(mh_N)Y_1^{(\overline{n})N}(x_N,u) - u_{N-1})}{\sinh(mh_N)},$$

функції $Y_\alpha^{(\overline{n})j}(x,u), Z_\alpha^{(n)j}(x,u) \in R^s$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \alpha = 1,2$ – чисельний розв'язок задач Коші

$$\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} = Z_\alpha^j(x,u), \quad \frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx} - m^2 Y_\alpha^j(x,u) = f\left(x, Y_\alpha^j(x,u)\right),$$

$$x_{j+\alpha-2} < x < x_{j+\alpha-1}, \quad Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) = u(x_{j+(-1)^\alpha}),$$

$$Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$$

отриманий будь-яким однокроковим методом, а $Y_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u), Z_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u)$ – чисельний розв'язок задачі Коші

$$\frac{dY_2^N(x,u)}{dx} = Z_2^N(x,u), \quad \frac{dZ_2^N(x,u)}{dx} - m^2 Y_2^N(x,u) = f\left(x, Y_2^N(x,u)\right),$$

$$x > x_N, \quad \lim_{x\to\infty} Y_2^N(x,u) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} Z_2^N(x,u) = 0. \tag{3}$$

Для розв'язування задачі (3) використано підстановку $x = 1/t$ та знайдено її чисельний розв'язок методом рядів Тейлора.

Доведено, що ТРС рангу $\overline{n}$ (2) має порядок точності $\overline{n}$.

1. *Кутнів М. В., Круль М.* Реалізація точних триточкових різницевих схем для нелінійних крайових задач на півпрямій // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 12. – С. 1641–1656.

ALGORITHMIC IMPLEMANTATION OF EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES FOR NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ON THE SEMIAXIS

New algorithmic implemantation of exact three-point difference schemes via the three-point difference schemes of high order of accuracy is proposed for the numerical solution of boundary-value problems for systems of nonlinear ordinary differential equations on the semiaxis.

УДК 621.532.3.004.17:681.142:622.691.24:536.12

ПОБУДОВА БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ

Ярослав П'янило, Валентина Собко, Галина П'янило

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

pjanylo@cmm.lviv

В даній роботі побудовано квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи. Досліджено їх властивості. На базі побудованих біортогональних базисів розроблені методи та відповідні алгоритми для вирішення крайових задач, якими описуються багато фізичних процесів, закрема масопереносу вуглеводнів в трубопроводах та пористих природних середовищах. Досліджено спосіб розв'язування задач методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Знайдено наближено-аналітичні та наближені розв'язки задач масопереносу.

Швидкий розвиток обчислювальної техніки дозволяє ускладнювати математичні моделі фізичних процесів, що дає можливість більш адекватно описувати процеси, які вивчаються. Тому проблема розроблення ускладнених адекватних математичних моделей фізичних процесів, зокрема, моделей фізичних процесів транспортування та зберігання газу є особливо актуальною в цей час. Ускладнення моделей вимагає побудови нових або уточнення існуючих методів вирішення відповідних задач математичної фізики.

Спосіб вирішення апробовано як на прикладах розкладу відомих функцій, так і на модельних задачах, рішення яких відомі в аналітичному вигляді. Це зроблено з метою вивчення ефективності методу та впливу його параметрів на точність та адекватність шуканого рішення.

На елементах базису із модифікованих поліномів Чебишова першого роду запропоновано оператор, на основі якого побудовані квазіортогональні та біортогональні базиси. Отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+\bar{i}}\left(x\right)$ такі, що їх похідні другого порядку виражаються через суму двох доданків, одним із яких є самі ці поліноми $V_i^{n+\bar{i}}\left(x\right)$ з коефіцієнтами $\left(-\lambda^n_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}\right)^{-1}$, $i=1,\dots,n$ відповідно, а другий доданок – це похідна першого порядку многочлена

Чебишова $T'_{n+1+\overline{i}}\left(x\right)$ з коефіцієнтом $\tau^{n}_{i+(-1)^{\overline{i}+1}}\left(\lambda^{n}_{i+(-1)^{\overline{i}+1}}\right)^{-1}$, $i=1,...,n$ відповідно. Це дає можливість розв'язувати системи рівнянь, які отримуємо при розв'язуванні задач математичної фізики набагато швидше та зменшує накопичення машинної похибки. При знаходженні розв'язків наведених задач, саме у вигляді суми ряду по знайдених біортогональних функціях $V_i^{n+\overline{i}}\left(x\right)$, $i=1,...,n$ дістанемо діагональну матрицю для знаходження невідомих коефіцієнтів ряду, з якої відразу ж отримуємо невідомі величини. Отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+\overline{i}}\left(x\right)$ володіють властивостями: $V_i^{n+\overline{i}}\left(-1\right)=0$ та $V_i^{n+\overline{i}}\left(1\right)=0$, що дає змогу відразу ж з крайових умов знайти невідомі два коефіцієнти $G_{n+2}\left(t\right)$ та $G_{n+1}\left(t\right)$ (у випадку наближено-аналітичної моделі) та невідомі коефіцієнти $q_{n+1,j}$, $q_{n+2,j}$, $j=1,...,s$ (у випадку наближеної моделі) для шуканого розв'язку. Побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів. Ця властивість є дуже важливою, коли потрібно знайти похідну першого порядку від функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи знайти інтеграл від функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми. Коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції при них, які є відомими.

Знайдено коефіцієнти нев'язки для сформульованих задач. Знайдені рекурентні формули для представлення поліномів Чебишова через біортогональні та квазіортогональні функції. При застосуванні знайдених біортогональних многочленів до роз'язування поставлених задач позитивним є те, що параметри: $\overline{n}^{2i-1+\overline{i}}_{1+\overline{i}}$, $\lambda^{n}_{2i-1+\overline{i}}$, $N_{2i-\overline{i}}$, $\tau^{n}_{2i-1+\overline{i}}$, які входять в одержані розв'язки можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій $V^{n+\overline{i}}_{2i-\overline{i}}\left(x\right)$, $\overline{V}^{n+\overline{i}}_{2i-\overline{i}}\left(x\right)$. Для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку, що теж економить час.

Модель процесу руху газу в трубопроводі. Враховуючи рівняння стану в ізотермічному випадку математична модель руху газу в трубопроводі є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\alpha\rho\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)+\rho g\dfrac{\partial h}{\partial y}+\dfrac{\lambda\rho\upsilon^2}{2D}+\dfrac{\partial\left(\rho\upsilon\right)}{\partial t}=0, \dfrac{\partial\left(\rho\upsilon\right)}{\partial y}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}=0\end{cases}.$$

Формулювання крайової задачі. Знайти розв'язок системи за наступних крайових умов

$$p(X,0)=\sqrt{p_0^2-\frac{\lambda zRT}{D}\left(\frac{\rho_s q_s}{s}\right)^2 X}\ ,$$

$$q_0(t)=q_{0n}+(q_0-q_{0n})\,\ell^{-\gamma_0 t}\ ;\ q_l(t)=q_{ln}+(q_l-q_{ln})\,\ell^{-\gamma_l t}\ .$$

1. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya. Pjanylo, V. Sobko // Mathematical modeling and computing, Vol. 3, No. 2, pp. 199–207 (2016)
2. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigat / Ya. Pjanylo, V. Sobko, O. Bratash // Mathematical modeling and computing, Vol. 4, No. 2, pp. 187–196 (2017).

CONSTRUCTION AND USE OF BIORTHOGONAL POLYNOMIALS FOR MASS TRANSFER PROCESSES MODELING

In this paper, the quasi-spectral polynomials are constructed as well as the complete biorthogonal systems. Their properties are investigated. On the ground of the constructed biorthogonal bases, methods and corresponding algorithms for solving boundary-value problems describing many physical processes, in particular the mass transfer of hydrocarbons in pipelines and in porous natural media, are developed. The method of solving problems by means of separation of variables in the basis of biorthogonal polynomials is investigated. Approximate analytical and approximate solutions of the problems of mass transfer are obtained.

УДК 519.614 (35P30, 65L15)

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З НЕЛІНІЙНИМИ СПЕКТРАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Петро Савенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

spo@iapmm.lviv.ua

Розглядається двоточкова крайова задача для лінійного диференціального рівняння m-го порядку:

$$L(\lambda)u(t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t,\lambda)u^{(k)}(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1\,, \tag{1}$$

$$l_i(\lambda)u \equiv \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{i,k}(\lambda)u^{(k)}(0) + \beta_{i,k}(\lambda)u^{(k)}(1)] = 0, \quad i = 1,2,...,m, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \subset \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ – область у комплексному просторі $\mathbb{C}^2$, причому Λ_1, Λ_2 – обмежені відкриті однозв'язні опуклі множини в $\mathbb{C}$. Покладається, що коефіцієнти $\alpha_k(t,\lambda)$, $\alpha_{i,k}(\lambda)$, $\beta_{i,k}(\lambda) \in \mathbb{C}$ ($i = 1,...,m$, $k = 0,1,...,m-1$); $\alpha_m(t,\lambda) = 1$, а $\alpha_k(t,\lambda)$ — досить гладкі функції від t на відрізку $[0, 1]$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, і $\alpha_k(t,\lambda)$, $\alpha_{i,k}(\lambda)$, $\beta_{i,k}(\lambda)$ — голоморфні функції від $\boldsymbol{\lambda}$ на $\boldsymbol{\Lambda}$; граничні умови (2) є лінійно незалежними при всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Необхідно знайти такі значення $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ з $\boldsymbol{\Lambda}$, при яких однорідна крайова задача (1), (2) має ненульові розв'язки, тобто знайти власні значення цієї задачі.

Для дискретизації задачі (1), (2) застосовуємо метод скінченних різниць. В результаті одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь n - го порядку у векторному записі представимо у вигляді

$$A_n(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}^h = 0 \qquad (n = 1 \div \mathbb{N}). \tag{3}$$

Коефіцієнти матриці $a_{ij}^n(\boldsymbol{\lambda})$ є голоморфними функціями параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Число $\boldsymbol{\lambda}^0 = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right) \in \boldsymbol{\Lambda}$ буде власним значенням задачі (3), якщо точка λ^0 є коренем рівняння

$$\Psi_n\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\det\left(A_n(\lambda)\right)=0\,. \tag{4}$$

Знаходження множини розв'язків рівняння (4) будемо розглядати як задачу на знаходження неявно заданої функції $\lambda_2=\lambda_2\left(\lambda_1\right)$ або $\lambda_1=\lambda_1\left(\lambda_2\right)$. Теорема про неявно задані функції [13] визначає умови існування розв'язків рівняння (4) і дозволяє звести цю задачу до чисельного розв'язування відповідної задачі Коші

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}=-\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_1}{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_2}\,,\quad \lambda_2\left(\lambda_1^n\right)=\lambda_2^n=\alpha\lambda_1^n\quad (n\in\mathbb{N}). \tag{5}$$

Початкові умови в (5) знаходимо, розв'язуючи допоміжну однопараметричну нелінійну спектральну задачу на промені $\lambda_2=\alpha\lambda_1\subset\boldsymbol{\Lambda}=\Lambda_1\times\Lambda_2$

$$\begin{cases} L_\alpha(\lambda_1)u(t)\equiv\sum\limits_{k=0}^{m}\tilde{\alpha}_k\left(t,\lambda_1\right)u^{(k)}(t)=0,\ \ 0\le t\le 1, \\ l_{i,\alpha}(\lambda_1)u\equiv\sum\limits_{k=0}^{m-1}[\tilde{\alpha}_{i,k}\left(\lambda_1\right)u^{(k)}(0)+\tilde{\beta}_{i,k}\left(\lambda_1\right)u^{(k)}(1)]=0,\, i=1,2,...,m, \end{cases} \tag{6}$$

де $\tilde{\alpha}_k\left(t,\lambda\right)=\alpha_k\left(t,\lambda_1,\alpha\lambda_1\right)$, $\tilde{\alpha}_{i,k}\left(\lambda_1\right)=\alpha_{i,k}\left(\lambda_1,\alpha\lambda_1\right)$, $\tilde{\beta}_{i,k}\left(\lambda_1\right)=\beta_{i,k}(\lambda_1,\alpha\lambda_1)$.

Доведено тереми про існування зв'язних компонент спектра задачі (1), (2) та збіжності наближених розв'язків задачі (3) до точних розв'язків вихідної задачі.

Запропонований метод поширено на двоточкові крайові задачі для системи звичайних диференціальниз рівнянь з нелінійним входженням двовимірних спектральних параметрів у коефіцієнти рівнянь та крайові умови. Наведено числові приклади розв'язування конкретних крайових задач.

1. *Савенко П. А, Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двухмерной нелинейной спектральной проблемы // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41-44.
2. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. Гос.ун-тет., 1976. – 161 с.
3. *Petro Savenko.* Computational Methods in the Theory of Synthesis of Radio and Acoustic Radiating Systems // *Applied Mathematics*, Vol. 4 No. 3, 2013, pp. 523-549. doi: 10.4236/am.2013.43078.
4. *Petpo O. Savenko, Lesya M. Klakovych (Pasnak), Myroslava D. Tkach.* "*Theory of* Nonlinear Synthesis of Radiating Systems" // LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 357 p.

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS WITH NONLINEAR SPECTRAL PARAMETERS

The application of the implicit function method to solving two-point boundary-value problems for the differential equation of m-th order and the systems of linear differential equations with nonlinear occurrence of two-dimensional spectral parameters in equation coefficients and boundary conditions are studied. The convergence of approximate solutions of the discrete problems to the exact solutions of the original problem is substantiated.

УДК 519.6

КОРЕКТНІСТЬ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ ГРІНА-ЛІНДСЕЯ

Віталій Стельмащук

Львівський національний університет імені Івана Франка

vitali.stelmashchuk@gmail.com

Класична математична модель термоп'єзоелектрики була сформульована в працях R.D. Mindlin і досліджена в роботах W. Nowacki. Проте, вона має один суттєвий недолік – швидкість поширення тепла в піроелектричному матеріалі вважається нескінченною. Зрозуміло, що таке припущення йде в розріз з законами фізики, тому розвинулися так звані узагальнені моделі, що той чи інший спосіб нейтралізують цей недолік класичної моделі. Грін і Ліндсей (Green & Lindsay) [3] запропонували свою модифікацію моделі термопружності, яка передбачає введення додаткових параметрів «часу релаксації» і робить гіперболічним рівняння теплопровідності. Chandrasekharaiah [2] розвинув їхню теорію на модель термоп'єзоелектрики. В нашому дослідженні ми застосовуємо цей підхід для побудови та аналізу узагальненої класичної нестаціонарної задачі термоп'єзоелектрики, яка вивчалася в роботі Шинкаренка [1]. Звідти й запозичено вжиті нами позначення та методика аналізу варіаційних задач.

Нехай Ω – обмежена зв'язна область точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \Re^d$ з неперервною за Ліпшицем межею $\partial\Omega = \Gamma$. Тоді, згідно з [1], взаємодія фізико-механічних полів у піроелектрику може бути описана вектором пружних зміщень $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, електричним потенціалом $p = p(\mathbf{x}, t)$, та приростом температури $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, які задовольняють рівняння руху, теплопровідності та електродинаміки

$$\rho(u_i'' - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0, \tag{1}$$

$$D_{k,k}' + J_{k,k} = 0, \tag{2}$$

$$\rho(T_0 S' - w) + q_{i,i} = 0. \tag{3}$$

В моделі Гріна-Ліндсея основні феноменологічні співвідношення для механічного напруження σ_{ij}, електричної індукції D_k та ентропії S, які використовуються в рівняннях (1)-(3) модифікуються з допомогою так званих параметрів «часу релаксації» t_0 та t_1, де $t_1 \ge t_0 > 0$, таким чином:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkm}[\varepsilon_{km}(\mathbf{u}) - \alpha_{km}(\theta + t_1\theta')] + a_{ijkm}\varepsilon_{km}(\mathbf{u}') - e_{kij}E_k(p), \tag{4}$$

$$D_k = \chi_{km} E_m(p) + e_{kij} \varepsilon_{ij}(u) + \pi_k(\theta + t_1\theta'), \tag{5}$$

$$\rho S = \rho c_v T_0^{-1}(\theta + t_0\theta') + c_{ijkm}\alpha_{km}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \pi_k E_k(p). \tag{6}$$

Відповідна варіаційна задача для цієї задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано } \boldsymbol{\psi}_0 = (u_0, p_0, \theta_0) \in \boldsymbol{\Phi},\ \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H},\ \theta_{10} \in L^2(\Omega) \\ \text{та } (l, r, \mu) \in L^2(0,T;\boldsymbol{\Phi}'); \\ \text{знайти } \boldsymbol{\psi} = \{\mathbf{u}(x,t), p(x,t), \theta(x,t)\} \in L^2(0,T;\boldsymbol{\Phi}) \text{ таке, що} \\ m(\mathbf{u}''(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) - e(p(t),\mathbf{v}) - \\ -\gamma(\theta(t) + t_1\theta'(t),\mathbf{v}) = < l(t),\mathbf{v} >, \\ \chi(p'(t),\xi) + e(\xi,u'(t)) + z(p(t),\xi) + \pi(\theta'(t) + t_1\theta''(t),\xi) = < r(t),\xi >, \\ s(\theta'(t) + t_0\theta''(t),\eta) + k(\theta(t),\eta) + \pi(\eta, p'(t)) + \\ +\gamma(\eta,\mathbf{u}'(t)) = < \mu(t),\eta > \quad \forall\, t \in (0,T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0,\mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0,\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ \chi(p(0) - p_0,\xi) = 0 \quad \forall \xi \in P, \\ s(\theta(0) + t_0\theta'(0) - (\theta_0 + t_0\theta_{10}),\eta) = 0 \quad \forall \eta \in Z. \end{cases} \tag{7}$$

За допомогою апріорних оцінок, одержаних з рівняння енергетичного балансу, доведено коректність цієї варіаційної задачі.

1. *Шинкаренко Г. А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т.39, №.2. – С. 317-326.
2. *Chandrasekharaiah D. S.* A temperature-rate-dependent theory of thermo-piezoelectricity //J. Thermal Stresses. – 1984. – Vol. 7. – P. 293–306.
3. *Green A. E., Lindsay K. A.* Thermoelasticity. //J. Elasticity. – 1972. – Vol. 2, No.1. – P.1-7.

WELL-POSEDNESS OF NON-STATIONARY GREEN-LINDSAY THERMOPIEZOELECTRICITY VARIATIONAL PROBLEM

Non-stationary Green-Lindsay thermopiezoelectricity problem based on works of Chandrasekharaiah [2] and Shynkarenko [1] has been considered. Green-Lindsay theory provides the finite speed of thermal signals propagation by introduction of two “relaxation time”-parameters, which are used for modification of constitutive equations for mechanical stress, electric displacement and entropy. The corresponding variational problem has been formulated and its well-posedness has been proved based on the energy balance law.

УДК 519.6

ОБЕРНЕНА ЗАМІНА У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-РЕАКЦІЇ З ВЕЛИКИМИ ЧИСЛАМИ ПЕКЛЕ

Юлія Турчин, Ярема Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка

yuliya.turchyn@lnu.edu.ua

Розглянуто математичну модель розповсюдження ліків у стінці судини [3]. Ліки являють собою сукупність наночастинок, кожна з яких містить інкапсульовані біоактивні речовини. Модель процесу поширення ліків описується крайовою задачею адвекції-дифузії-реакції для системи двох диференціальних рівнянь. Необхідно знайти c_1, c_2 – невідомі концентрації наночастинок і ліків, відповідно, які задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \nabla\cdot(Vc_1) - K_1\Delta c_1 + \sigma_1 c_1 = 0; \\ \nabla\cdot(Vc_2) - K_2\Delta c_2 + \sigma_2 c_2 = c_1 f, \end{cases} (x_1, x_2)\in\Omega \tag{1}$$

і граничні умови

$$\beta_i K_i \frac{\partial c_i}{\partial \nu} + \lambda_i c_i = \psi_i, \quad (x_1, x_2)\in\Gamma. \tag{2}$$

Оскільки рівняння (1), (2) є пов’язаними між собою лише присутністю невідомої концентрації наночастинок $\tilde{n}_1$ у правій частині другого рівняння системи (1), то кожне рівняння пропонуємо розв’язувати по черзі [2]. Оскільки оператор кожного окремого рівняння є спільним, то надалі запропонований підхід розглядатимемо для одного рівняння адвекції-дифузії-реакції.

У зв’язку з специфікою реальних біохімічних вхідних параметрів задачі, а саме значною перевагою коефіцієнтів адвекції над коефіцієнтами дифузії, у ході числових експериментів виявлено, що застосування методу скінченних елементів з лінійними та квадратичними базисними функціями призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. У роботі запропоновано новий підхід до розв’язування задач адвекції-дифузії-реакції з специфікою великих чисел Пекле, який базується на наступній експоненціальній заміні [1] шуканої функції у формулюванні задачі (1), (2):

$$c = u\exp\left(\frac{V_1x_1 + V_2x_2}{2K}\right)$$

і на зворотній заміні в ході застосування методу скінченних елементів, що призводить до варіаційного рівняння виду

$$K\int_{\Omega}\nabla c\nabla w\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{V}{2}\cdot\nabla\tilde{n}w\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma}\lambda\tilde{n}w\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Gamma+\sigma\int_{\Omega}cw\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Omega=$$

$$=\int_{\Omega}fw\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Omega+\int_{\Gamma}\psi w\exp\left(-\frac{V_1x_1+V_2x_2}{2K}\right)d\Gamma.$$

Проведено аналіз результатів запропонованого методу з використанням стандартних лінійних базисних функцій. Показано ефективність даного методу для задач адвекції-дифузії з великим числами Пекле. Результати продемонстровано для одновимірної задачі адвекції-дифузії-реакції та здійснено порівняння з точним розв'язком. Метод застосовано також для знаходження наближеного розв'язку задачі поширення ліків у стінці судини.

1. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высшая школа - 1985 – 480 с.
2. *Турчин Ю. І.* Експоненціальна заміна у методі скінченних елементів для рівнянь адвекції-дифузії. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Науковий збірник - 2017 – Випуск 24 – с. 111-117.
3. *S. Hossain, F. Hossainy, Y. Bazilevs.* Mathematical modeling of coupled drug and drug-encapsulated nanoparticle transport in pacient-specific coronary artery walls – Texas: University of Texas - 2010 – 162 p.

INVERSE REPLACEMENT IN THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEM OF ADVECTION-DIFFUSION-REACTION WITH LARGE PECLET NUMBERS

The mathematical model of distribution of drugs in the vessel wall is considered. The model is described by the initial boundary-value problem of advection-diffusion-reaction for a system of two differential equations. Due to the specifics of the input parameters of the problem, namely, a significant advantage of the coefficients of advection over diffusion coefficients, numerical experiments revealed that the application of the classical finite element method with linear and quadratic basis functions leads to loss of stability of approximation. The paper proposes a new approach to solving advection-diffusion problems with the specifics of large Peclet numbers, which is based on the replacement of the desired function in the formulation of the problem and the inverse replacement during the application of the finite element method. The analysis of the results of the proposed method is carried out and the efficiency of this method for problems of advection-diffusion with large Peclet numbers is shown. The method is also used to find an approximate solution to the problem of drug distribution in the vessel wall.

УДК 539.3

НАБЛИЖЕНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК МЕТОДУ {*m, n*}-АПРОКСИМАЦІЇ

Роман Тучапський, Дмитро Неспляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львівський державний університет внутрішніх справ

roman.tuch@gmail.com, dnespliak@gmail.com

Багато конструкцій сучасної техніки містять тонкі балки й (або) тонкі оболонки обертання, що мають природні або конструктивні анізотропні властивості.

Для розв’язування задач про напружено-деформований стан тонких оболонок обертання на основі теорій Кірхгофа – Лява, типу Тимошенка тощо, давно й успішно використовують підхід на основі методу ортогональної прогонки С. К. Годунова [2 – 5].

Послідовність обчислень при цьому виглядає так: 1) отримують з вихідних рівнянь оболонок обертання систему диференціальних рівнянь, розв’язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно координати по меридіану, виражаючи при цьому всі невідомі функції, що в них входять, через компоненти вектора розв’язків і частинні похідні відносно координати по колу від них; 2) зводять цю систему до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв’язують за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова.

Узагальнення цього алгоритму на нові класи задач, що виникають у рамках теорії оболонок обертання методу $\{m,n\}$-апроксимації (задачі про напружено-деформований стан оболонки обертання під дією швидкозмінного за просторовими координатами навантаження) і незв'язаної квазістатичної теорії термопружних оболонок методу $\{m,n\}$-апроксимації (задачі аналізу теплових напружень в авіаційних структурах, таких як тонкі балки, де перепад температур є однією з головних причин появи полів напружень, здатних спричинити руйнування цих структур) несе безумовний інтерес, але наштовхується на значні труднощі, зумовлені складністю структури рівнянь методу $\{m,n\}$-апроксимації за великих m і n. Особливо складну задачу представляє реалізація першого етапу, на якому необхідно розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності. Вирішенню вказаної задачі присвячено роботи [6, 7]. Більшість отриманих у них результатів можна використати в рамках теорії [1].

У цій роботі в якості прикладу використання згаданого алгоритму розглянуто низку задач розрахунку напружено-деформованого стану балок і оболонок обертання за механічних і температурних впливів. Отримані при цьому результати дозволяють судити про високу ефективність запропонованого підходу.

1. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
2. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3 (99). – С. 171–174.
3. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
4. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.
5. *Григоренко Я. М., Григоренко А. Я.* Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 2. – С. 3–70.
   Те саме: *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, No. 2. – P. 123–193.
6. *Тучапський Р. І.* Побудова методом {m, n}-апроксимації та приведення до спеціального вигляду рівнянь теорії тонких анізотропних термопружних оболонок // Сучасні проблеми термомеханіки: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2016. – Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016. – С. 239–240.
7. *Тучапський Р. І.* Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу $\{m,n\}$-апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 43–56.
   Те саме: *Tuchapskyy R. I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the $\{m,n\}$-approximation method // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 226, No. 1. – P.52 –68.

APPROXIMATE ALGORITHM FOR SOLVING CERTAIN CLASSES OF PROBLEMS OF THE SHELL THEORY OF THE $\{m,n\}$-APPROXIMATION METHOD

The algorithm for solving problems on the stress-deformed state of shells of revolution on the basis of the S. K. Godunov method of orthogonal successive substitution is generalized on the new classes of problems arising in the framework of the shell theory of the $\{m,n\}$*-approximation method.*

УДК 517.9

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ЗІ ЗМІННИМИ ВЕРХНІМИ МЕЖАМИ

Ольга Чернуха, Юрій Білущак

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»

cher@cmm.lviv.ua, byixx@gmail.com

Під час розв’язання науково-технічних завдань виникає необхідність обчислення подвійних інтегралів зі змінними верхніми межами і складною підінтегральною функцією. Такі задачі виникають, наприклад, при визначенні концентрації забруднення, сорбованого на скелеті засипних фільтрів води і встановлення часу його ефективної роботи [1]. В даній роботі розроблено метод визначення подвійних інтегралів зі змінними верхніми межами.

Розглянуто випадок подвійного інтегралу

$$I(\tau) = \int_0^{g_1(\tau)} \int_0^{g_2(\tau')} f(\tau', \tau'', \tau) d\tau'' d\tau' , \quad (1)$$

в якому верхні межі інтегрування є незалежними часовими змінними, тобто τ , $\tau' \in [0;\infty)$, при цьому підпорядковуються необхідним обмеженням. Без втрати загальності можемо прийняти, що $g_1(\tau) = \tau$ та $g_2(\tau') = \tau'$.

Область інтегрування підінтегральної функції (1) у просторі $O\tau\tau'\tau''$ має вигляд нахиленого трикутника (рис. 1а). Враховуючи, що τ - це час, тобто змінна неперервно змінюється від нуля до ∞ , зі зміною τ область інтегрування в просторі $O\tau\tau'\tau''$ залишається трикутником. При цьому зміна τ призводить до зміни максимальних значень τ' і τ'' .

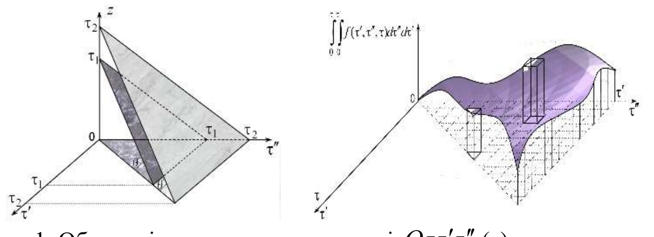


Рис. 1. Область інтегрування в просторі $O\tau\tau'\tau''$ (a) та схема чисельного подвійного інтегрування зі змінними верхніми межами (b)

Для $\tau = \tau_1$ маємо $\max \tau' = \max \tau'' = \tau_1$, а для $\tau = \tau_2$ - $\max \tau' = \max \tau'' = \tau_2$. Ці області є подібними трикутниками, які знаходяться в паралельних площинах, тобто під однаковим кутом нахилу θ до $O\tau'\tau''$ (рис. 1a). При цьому змінюється площа поверхні інтегрування. Для $\tau = 0$ область інтегрування є точкою $(0,0,0)$.

Зробимо проекцію поверхні інтегрування на площину $O\tau'\tau''$. Тоді отримуємо множину областей інтегрування в просторі $O\tau'\tau''z$. При цьому площа області P_a інтегрування є $P_a = \cos(\theta) P_{pr}$, де P_{pr} - площа проекції області інтегрування. В результаті ми отримаємо сімейство підінтегральних функцій, параметризованих змінною τ. На проекцію області інтегрування накладаємо квадратну сітку (рис. 1b). Враховуємо адитивну властивість інтеграла. У результаті розбиття області інтегрування ми отримали квадратні sq_{el} і трикутні tr_{el} елементи.

На основі квадратур у внутрішній області інтегрування та триангуляційного розбиття вздовж змінної межі $\tau'' = \tau'$ отримано наступну формулу чисельного інтегрування для подвійного інтегралу зі змінними верхніми межами:

$$\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'} f(\tau',\tau'',\tau)d\tau'' d\tau' \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w^2 f(\tau_i',\tau_i'',\tau) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i-1}^{n-1} w^2 f(\tau_i',\tau_i'',\tau)\right).$$

Тут $w = \tau'/n$, n – кількість трикутних елементів; $\tau_{i+1}' = \tau_i' + w$; $\tau_{i+1}'' = \tau_i'' + w$.

Зазначимо, що кількість трикутних елементів на 1 менше ніж квадратних в найдовшому рядку.

Головний член похибки отриманий у вигляді

$$R \approx \frac{w^2}{24} \iint\limits_{\left(\bigcup\limits_{sq_{el}} V_{sq_{el}}\right)} f''_{\tau'\tau'}(\tau',\tau'',\tau)d\tau' d\tau'' + \frac{w^2}{48} \iint\limits_{\left(\bigcup\limits_{tr_{el}} V_{tr_{el}}\right)} f''_{\tau''\tau''}(\tau',\tau'',\tau)d\tau' d\tau'', \quad (2)$$

або $R = O(2w^2)$. Тут $V_{sq_{el}}$ і $V_{tr_{el}}$ – об’єми квадратного і трикутного елементів.

Оскільки в оцінці відкинуті високі степені w (більше ніж квадрат), тому відношення для похибки (2) є асимптотичним, і виконується при $w \to 0$ з точністю до членів більш високого порядку малості щодо w.

1. *Журба М.* Основы процессов доочистки сточных вод фильтрированием // Тепло- и массообмен в капиллярнопористых телах. – 1965. – № 1. – С. 60–73.

NUMERICAL METHOD OF CALCULATION OF DOUBLE INTEGRAL WITH VARIABLE UPPER BOUNDS

The method of numerical calculation of the double integral with variable upper bounds is developed. The variable domain of integration is established. Uniform grid in the form of triangular and square elements is overlaid the domain. The formula for the approximate integration is obtained and the principal term of error is established.

УДК 621.391:519.21

АНАЛІТИЧНІ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ У ВІБРОДІАГНОСТИЦІ

Роман Юзефович, Павло Курапов, Ігор Яворський

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,
Національний університет “Львівська Політехніка”,
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету

roman.yuzefovych@gmail.com, pavlo.r.kurapov@lpnu.ua

Аналіз вібраційних сигналів методами спектрально-кореляційної теорії періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) дав можливість значно підвищити ефективність вібродіагностики [1, 2, 4, 5]. Це зумовлено тим, що з використанням імовірнісних характеристик цього класу випадкових процесів можна описати ті нелінійні ефекти, які виникають при появі пошкоджень елементів обертових механізмів.

Розглянемо властивості періодично нестаціонарного сигналу $\zeta(t)$ і аналітичного сигналу $\zeta(t)=\xi(t)+i\tilde{\xi}(t)$ та огинаючої

$$\eta(t)=\sqrt{\left[\xi(t)\right]^2+\left[\tilde{\xi}(t)\right]^2}\ .$$

Математичне сподівання аналітичного сигналу

$$m_{\zeta}(t)=E\zeta(t)=m_{\xi}(t)+im_{\tilde{\xi}}(t)=2\sum_{k\in\mathbb{N}}m_k e^{ik\omega_0 t}$$

є величиною комплекснозначною, яка визначається в області додатних частот.

Комплекснозначною в загальному випадку є і його кореляційна функція

$$b_{\zeta}(t,u)=b_{\xi}(t,u)+b_{\tilde{\xi}}(t,u)+i[b_{\xi\tilde{\xi}}(t,u)-b_{\tilde{\xi}\xi}(t,u)]\ .$$

Дійсна частина стаціонарного наближення аналітичного сигналу дорівнює подвоєному нульовому кореляційному компоненту ПНВС, а уявна частина – подвоєному його перетворенню Гільберта [3, 6]:

$$B_0^{(\zeta)}(u)=\frac{1}{T}\int_0^T b_{\zeta}(t,u)dt=2\left[B_0^{(\xi)}(u)+i\tilde{B}_0^{(\xi)}(u)\right].$$

Дійсна частина комплексних амплітуд гармонік визначається сумою кореляційних компонентів сигналу та його перетворення Гільберта, а уявна – сумою їх перетворень Гільберта:

$$B_k^{(\zeta)}(u) = 2\left[B_k^{(\xi)}(u) + B_k^{(\tilde{\xi})}(u)\right] + i\left[\tilde{B}_k^{(\xi)}(u) + \tilde{B}_k^{(\tilde{\xi})}(u)\right].$$

Середнє значення квадрату амплітуди огинаючої дорівнює сумі дисперсій сигналу та його перетворення Гільберта:

$$EA^2(t) = b_\xi(t,0) + b_{\tilde{\xi}}(t,0).$$

Її кореляційна функція для гаусових сигналів має вигляд:

$$b_{A^2}(t,u) = E\left[\left[\xi^2(t) + \tilde{\xi}^2(t)\right]\left[\xi^2(t+u) + \tilde{\xi}^2(t+u)\right]\right] =$$

$$= 2\left[b_\xi^2(t,u) + b_{\tilde{\xi}}^2(t,u) + b_{\xi\tilde{\xi}}^2(t,u) + b_{\tilde{\xi}\xi}^2(t,u)\right].$$

Коефіцієнти Фур'є цієї функції виражаються через коефіцієнти Фур'є авто- та взаємокореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта, однак отримані вирази будуть набагато складнішими для аналізу та відповідної інтерпретації, ніж характеристики початкового сигналу $\xi(t)$.

Таким чином, перехід в загальному випадку до моделі аналітичного сигналу і визначення на його основі огинаючої дозволяє провести більш детальний аналіз модуляційних процесів, що в свою чергу підвищує ефективність виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження.

1. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ НАНУ, 2013. – 804 с.
2. *Antoni J.* Cyclostationary by examples // Mechanical systems and Signal Processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036.
3. *Antoni J., Randall R.* A Stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearing with localized faults. // Transactions of ASME. – 2003. – Vol. 125. – P. 282–289.
4. *Javorskyi I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R.* Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – Vol. 83. – P. 406–438.
5. *Randall R. B., Antoni J.* Rolling element bearing diagnostics – A tutorial // Mechanical Systems and Signal processing. – 2011. – Vol. 25. – P. 485–520.
6. *Feldman M.* Hilbert transform applications in mechanical vibration. – John Wiley, 2011. – 293 p.

ANALYTICAL PERIODICALLY CORRELATED RANDOM SIGNALS IN VIBRATION DIAGNOSIS

Switch-over in the general case to the model of analytical signal and computation of the envelope on its base allows more detail analysis of modulating processes that enhance efficiency of defect detection on the early stages of initiation.

УДК 539.3

BEHAVIOUR OF THIN-WALLED SHALLOW CONICAL SHELLS IN CASE OF NON-UNIFORM STRESS-STRAIN STATE

Yaroslav Bessmertnyi

Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture

yaroslavbessmertnyi@gmail.com

The aim of this work is to study (using ANSYS software) the influence of periodically discrete border fixation of shallow conical shells under uniform external pressure on deformation and buckling, as well as effects that are caused by non-uniform stress-strain state (SSS). A great amount of cylindrical shells and some series of conical shells with non-uniform have been already investigated in [1-3].

We performed three types of analysis: 1) linear bifurcation analysis to determine the critical pressure value and corresponding eigen modes; 2) dynamic analysis to determine first transversal eigen vibration modes of a shell without any load; 3) geometrically nonlinear analysis to determine SSS of a shell, its limit pressure value and corresponding buckling modes. All analyses were executed both for shells with periodically discrete border fixation (mobile hinged edge sections alternate with immobile hinged edge sections of the same length) and for shells with continuous movable support or hinged support. The number of mobile and immobile hinged sections (n) of the shell edge is varied from 0 to 14 in increments of 1.

As already mentioned, the numerical study was carried out within ANSYS software (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0 customer 298728). Thin-walled closed shallow cones had next parameters: shells thickness $h = 5mm$; base radius $R = 2000\ mm$; height $H = 140\ mm$. Angle between conical shell generatrix and its base is $\alpha = 4°$. Material of shells is steel X18H9н (former Soviet Union steel specification) with following mechanical characteristics: modulus of elasticity $E = 2{\times}10^5\ MPa$, Poisson's ratio $\nu = 0.3$, yield stress $\sigma_{02} = 800\ MPa$, material density $\rho = 7850\ kg/m^3$ (the density is taken into account in the analysis 2).

The results of the present research predict "static resonance" of shallow conical shell subject to external pressure in the case of periodically non-uniform SSS using two simple linear analyses. In particular, "static resonance" appears when periodicity of SSS in the circumferential direction coincides with a half-sum of waves of the first proper oscillation's mode of an unloaded shell and waves of the first eigen mode of linear buckling problem of a shell subject to external uniform pressure. In both cases, these calculations must be carried out for continuous hinged support of shell edges.

Note that few values of limit pressure are presented in the region of dangerous limit pressures, and they are also dangerous for shells along with minimum (resonance) value of minimal limit pressure. Therefore, we recommend moving out this region as much as possible by increasing the periodicity of SSS away from "resonance" periodicity i.e. by increasing a number of hinged supports.

Design of shells with small number of periodically discrete edge fixation assumes a choice of analysis. It is necessary to focus on limit pressure obtained in geometrically non-linear analysis for small angles α (for shallow shells). While for large angles (for deep shells) a dangerous load is critical pressure obtained in linear buckling analysis (bifurcation).

1. *Krasovsky V.L. & Varyanychko M.A.* 2004. Effect of a "Static resonance" in elastic thin-walled cylinders. 21st Intern. Congress of Theoretical and Applied Mechanics; Abstracts Book and CD-ROM Proceedings, 2004: 337. Warsaw: IPPT PAN.
2. *Krasovsky V.L. & Kolesnikov M.V.* 2013. "Static resonance" in cylindrical shells with periodical non-uniform strain-stress state conditioned by load or initial imperfections. In Review and Current Trends in Stability of Structures 3 (11): 289-312. Lodz: LTU.
3. *Karasev, A.G.* 2016. Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells. Mathematics and Mathematics of Solids 21 (4): 444-453.

BEHAVIOUR OF THIN-WALLED SHALLOW CONICALSHELLS IN CASE OF NON-UNIFORM STRESS-STRAIN STATE

A numerical study (within ANSYS software) deals with deformation and buckling of series of elastic isotropic shallow closed conical shells subject to external pressure. Fixation of shells edges is periodically discrete (mobile hinged edge sections alternate with immobile hinged edge sections of the same length). While loading, the type of shells fixation causes periodically non-uniform stress-strain state in the circumferential direction. Periodicity of subcritical stress-strain state is equal to a number of fixed sections that varies in a wide range. The phenomenon of "static resonance" was found for conical shells. The essence of the effect is as follows. Minimum limit pressure of geometrically nonlinear analysis corresponds to the periodicity of stress-strain state of a conical shell which coincides with a half-sum of the periodicity of the first eigen vibration mode of an unloaded shell and the first eigen mode of linear buckling problem of a continuously hinged supported shell subject to external pressure.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ І ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

УДК 517.524

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НАБЛИЖЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Тамара Антонова, Світлана Возна, Ольга Сусь

Національний університет “Львівська політехніка”,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

tamara_antonova@ukr.net, svitlanavozna@gmail.com, olja_sus@ukr.net

Об'єктом дослідження є нескінченні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) вигляду

$$b_0+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,0}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+i,k}}{1}}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{0,i}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,k+i}}{1}}, \tag{1}$$

де b_0, $a_{i,j}$, $i=0,1,\ldots$, $j=0,1,\ldots$, $i+j\ge 1$ − дійсні сталі. ГЛД такої структури так само, як і двовимірні неперервні дроби (ДНД) пов'язані із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних [6, 7, 9].

Існують різні способи побудови наближень (підхідних дробів) багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Звичайне n-е наближення (звичайний n-й підхідний дріб) ГЛД (1) означимо так:

$$f_0=b_0,\ f_n=b_0+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{i,i}}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{i,0}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{n-i}\frac{a_{k+i,k}}{1}}+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{0,i}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{n-i}\frac{a_{k,k+i}}{1}},\ n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Інший спосіб побудови n-го наближення ГЛД (1) запропоновано у роботі [9]:

$$\tilde{f}_n=b_0+\mathop{D}_{i=1}^{[n/2]}\frac{a_{i,i}}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{i,0}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{[(n-i)/2]}\frac{a_{k+i,k}}{1}}+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{0,i}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{[(n-i)/2]}\frac{a_{k,k+i}}{1}},\ n=1,2,\ldots \tag{3}$$

де $[a]$ − ціла частина дійсного числа a. Наближення (3) називатимемо фігурним (фігурним підхідним дробом)

Найбільш вивченими є багатовимірні узагальнення неперервних дробів з додатними елементами. Їх характерною особливістю є властивість „вилки" для звичайних наближень, яка виражається системою нерівностей $f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2l-1} < f_{2l+1}$, де k, l – довільні натуральні числа. Фігурні наближення такою властивістю не володіють. Властивості монотонності та обмеженості послідовностей фігурних та звичайних наближень можуть бути застосовані при дослідженні збіжності ГЛД загального та спеціального вигляду, а також ДНД [3–5].

На даний час встановлено деякі достатні умови [1, 2], за яких

$$\tilde{f}_0 \le \tilde{f}_2 \le \ldots \le \tilde{f}_{2p} \le \ldots \le M_1, \quad f_0 \le f_2 \le \ldots \le f_{2p} \le \ldots \le M_1,$$

$$\tilde{f}_0 \ge \tilde{f}_2 \ge \ldots \ge \tilde{f}_{2p} \ge \ldots \ge M_2, \quad f_0 \ge f_2 \ge \ldots \ge f_{2p} \ge \ldots \ge M_2,$$

$$\lim_{p\to\infty} \tilde{f}_{2p} = \lim_{p\to\infty} f_{2p},$$

а також

$$\tilde{f}_{4m} < \tilde{f}_{4m+4} < \tilde{f}_{4n+2} < \tilde{f}_{4n-2}, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad n = 1,2,\ldots .$$

1. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Про одну ознаку збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14 – С. 16–24.
2. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Деякі властивості наближень гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з недодатними частинними чисельниками // Бук. мат. журн. – 2017. – **5,** № 1-2. – С. 6–15.
3. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 4–9.
4. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 5–16.
5. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 660. – С. 49–55.
6. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
7. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів, ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
8. *Сусь О. М.* Про один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для двовимірних неперервних дробів // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 71–76.

9. *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.

SOME PROPERTIES OF APPROXIMANTS FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM WITH REAL ELEMENTS

The paper deals with branched continued fractions of the special form with two branches which similarly as the two-dimensional continued fractions are connected with the problem of the correspondence between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables. We consider some sufficient conditions of monotonicity and boundedness for sequences of figured and ordinary approximants of even order.

УДК 517.524

ПРО ВІДПОВІДНІСТЬ В ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Оксана Баран, Наталія Гоєнко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

oksana.baran@gmail.com, hoyenko@gmail.com

У доповіді розглядається розвиток поняття відповідності в теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД). Відповідність лежить в основі багатьох алгоритмів побудови розвинень функцій однієї змінної в неперервні дроби, а також застосовується для дослідження рівномірної збіжності одержаних розвинень до функцій. Найбільш загальне означення відповідно-сті послідовності мероморфних функцій до деякого формального ряду Лора-на (ФРЛ) та принцип відповідності наведені в монографії [1]. Ці результати застосовано до дослідження розвинень функцій у неперервні дроби, де в якості послідовності мероморфних функцій розглянуто послідовність підхідних дробів розвинення у неперервний дріб деякої функції, а ФРЛ – розвинення цієї функції у ФРЛ в початку координат. На основі відповідності будуються алгоритми розвинень для функцій багатьох змінних у ГЛД, наприклад, розвинення подвійних степеневих рядів у двовимірні неперервні дроби [2], розвинення кратних степеневих рядів у ГЛД [3]. Відповідність та принцип відповідності узагальнено для послідовностей раціональних функцій бага-тьох змінних до формальних кратних степеневих рядів [4]. Ці результати застосовано до дослідження збіжності розвинень гіпергеометричних функцій багатьох змінних у ГЛД.

1. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. – Cambridge University Press, 1980. – 428 p.
2. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Інститут прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
3. *Боднар Д. І.* Багатовимірні С-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 39–46.
4. *Гоєнко Н. П.* Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 42–48.

ON CORRESPONDENCE IN THEORY OF CONTINUED AND BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

We consider the development and application of correspondence in the analytic theory of continued fractions and their multidimensional generalizations.

УДК 517.524

ПРО ОЦІНКУ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Дмитро Боднар, Ірина Біланик, Віктор Чорний

Тернопільський національний економічний університет,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

bodnar4755@ukr.net, i.bilanyk@ukr.net, vzch@ukr.net

Об’єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_0, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in I$, $I = \{ i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k : i_k \le i_{k-1} \le \ldots \le i_0, i_0 = N \}$, N – фіксоване натуральне число.

Для даного дробу доведено, що кутова область

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \ne 0, |\arg z| < \theta, \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

є множиною умовної збіжності.

При накладанні додаткової умови, а саме, що $b_{i(k)} \in G_1$, $i(k) \in I$, де

$$G_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \ne 0, |\arg z| < \theta, \theta < \frac{\pi}{4} \right\},$$

з використанням оцінок швидкості збіжності неперервних дробів Ван Флека [1], встановлена оцінка швидкості збіжності ГЛД (1) у випадку, коли $N = 2$.

1. *Gragg W. B., Warner D. D.* Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20**, №6. – P. 1187–1197.

ON TRUNCATION-ERROR BOUNDS FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM

Truncation-error bounds for the continued fraction of special form whose elements lie in angular domains are established.

УДК 517.98

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ ТА СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ПРОСТОРАХ ВИМІРНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ ФУНКЦІЙ

Тарас Василишин

Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

taras.v.vasylyshyn@gmail.com

Нехай Ω – вимірний простір. Позначимо Ξ_Ω множину всіх вимірних бієкцій Ω, які зберігають міру. Розглянемо довільний банахів простір $X(\Omega)$ вимірних функцій, заданих на Ω, який має таку властивість: із того, що функція x належить простору $X(\Omega)$ випливає, що функція $x \circ \sigma$ також належить простору $X(\Omega)$ для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_\Omega$. Функцію f, задану на просторі $X(\Omega)$, називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для всіх $x \in X(\Omega)$ і всіх $\sigma \in \Xi_\Omega$.

В даній роботі вивчаються алгебраїчні базиси алгебр неперервних симетричних поліномів і спектри алгебр симетричних аналітичних функцій на наступних комплексних банахових просторах: $L_\infty[0,1]$ (простір суттєво обмежених вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій на $[0,1]$), $L_1[0,+\infty) \cap L_\infty[0,+\infty)$ (простір суттєво обмежених інтегровних вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій на $[0,+\infty)$), а також на просторі $(L_p[0,1])^n$ (n-тий декартів степінь банахового простору $L_p[0,1]$ інтегровних у степені $p \in [0,+\infty)$ вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій на $[0,1]$).

SYMMETRIC POLYNOMIALS AND SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON THE SPACES OF LEBESGUE MEASURABLE FUNCTIONS

We investigate algebraic bases of algebras of continuous symmetric polynomials and spectra of algebras of symmetric analytic functions on the following complex Banach spaces: $L_\infty[0,1]$, $L_1[0,+\infty) \cap L_\infty[0,+\infty)$ *and* $(L_p[0,1])^n$.

УДК 517.5

ГРІДІ-АЛГОРИТМИ НА КЛАСАХ $L^{\psi}_{\beta,p}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ L_q

Ганна Власик, Вікторія Шкапа

Державний університет телекомунікацій

annawlasik@gmail.com, vshkapa@ukr.net

Розглядається наближення періодичних функцій однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ було введено О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, с.25]). Зазначимо, що у випадку $\psi(|k|)=|k|^{-r}$, $r>0$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ вони співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{\beta,p}$ (див., наприклад, [1, с.25]).

Нехай L_q – простір вимірних 2π-періодичних функцій f зі стандартною нормою.

Через B позначимо множину додатних і незростаючих функцій $\psi(\cdot)$, для кожної з яких існує стала $C>0$ така, що $\psi(t)/\psi(2t)\le C$, $t\in\mathbb{N}$.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f\in L_1$, впорядковані у порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))|\ge|\hat{f}(k(2))|\ge\ldots$$

Позначимо для $f\in L_q$

$$G_m(f,x):=\sum_{l=1}^{m}\hat{f}(k(l))e^{ik(l)x}$$

і розглянемо величину

$$\sup_{f\in F}\|f(\cdot)-G_m(f,\cdot)\|_q .$$

Для функціонального класу $F\subset L_q$ покладемо

$$G_m(F)_q=\sup_{f\in F}\|f(\cdot)-G_m(f,\cdot)\|_q . \qquad (1)$$

Величину (1) називають гріді-алгоритмом (від англ. greedy algorithm). З історією дослідження даної величини для деяких важливих функціональних класів можна ознайомитися в роботі [2].

Мають місце такі твердження:

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q \le 2$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t) t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження. *Поклавши у теоремах 1, 2* $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, *отримаємо відповідні результати для величин* $G_m(W^r_{p,\beta})_q$, *які раніше отримано В. М. Темляковим у роботі [2].*

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наукова думка. – 1987. – 286 с.
2. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2011. – 418 p.

GREEDY ALGORITHMS OF THE CLASSES $L^{\psi}_{\beta,p}$ OF PERIODIC FUNCTIONS IN THE SPACE L_q

We obtain the exact order estimates for approximations by greedy algorithms of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ *of periodic functios in the space* L_q *for some relations between parameters p and* q .

УДК 517.98

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБР, ПОРОДЖЕНИХ ПОСЛІДОВНІСТЮ ПОЛІНОМІВ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Світлана Галущак

Державний вищий навчальний заклад
"Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

sv.halushchak@ukr.net

Нехай X – банахів простір. Позначимо $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ – послідовність алгебраїчно незалежних поліномів таких, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ P_n є неперервним n-однорідним поліномом на X. Нехай $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ – це алгебра усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Кожен елемент алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ можна подати у вигляді

$$P = P(0) + \sum_{n=1}^{M} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_n^{k_n} .$$

Позначимо $H_{\mathbb{P}}(X)$ замикання алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ відносно метрики, породженої системою норм

$$\|f\|_r = \sup\left\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \le r\right\},$$

де r пробігає множину всіх додатних раціональних чисел.

В даній роботі вивчаються деякі властивості алгебр $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ і $H_{\mathbb{P}}(X)$.

SOME PROPERTIES OF ALGEBRAS GENERATED BY THE SEQUENCE OF POLYNOMIALS ON A BANACH SPACE

Let X be a Banach space. Let $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ be a sequence of algebraically independent polynomials such that P_n is a continuous n-homogeneous polynomial on X. Let $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ be the algebra generated by elements of $\mathbb{P}$. Let $H_{\mathbb{P}}(X)$ be the completion of $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ with respect to the metric, generated by the system of norms

$$\|f\|_r = \sup\left\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \le r\right\},$$

where $r \in \mathbb{Q}^+$. We establish some properties of the algebras $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ and $H_{\mathbb{P}}(X)$.

УДК 517.526

МНОЖИНИ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДОДАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Володимир Гладун, Олександра Манзій

Національний університет “Львівська політехніка”

v_hladun@yahoo.com, lesly@ukr.net

Об’єктом дослідження є нескінченні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД)

$$a_0\left(b_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $N\in\mathbb{N}$ – кількість гілок розгалуження, $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ – мультиіндекс. Нехай $I_0=\{0\}$, $I_k=\{i(k):i_p=1,2,\ldots,N,\ p=1,2,\ldots,k\}$, $k=1,2,\ldots$. Нехай $\{\Omega_{i(k)}\}$, $\varnothing\neq\Omega_{i(k)}\subset\mathbb{R}^2$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, – послідовність множин елементів ГЛД (1), тобто $(a_{i(k)},b_{i(k)})\in\Omega_{i(k)}$.

Теорема. *Нехай відносні похибки елементів ГЛД (1) задовольняють умови*

$$\left|\alpha_{i(k)}\right|\le\alpha,\ \left|\beta_{i(k)}\right|\le\beta,\ i(k)\in I_k,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\alpha_{i(2k)}\le 0,\ i(2k)\in I_{2k},\ \alpha_{i(2k+1)}\ge 0,\ i(2k+1)\in I_{2k+1},\ k=0,1,2,\ldots.,$$

де $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$, $\alpha+\beta\neq 0$. *Сукупність множин елементів* $\Omega_{i(k)}=\left(0,\mu_k\right]\times\left[\nu_k,+\infty\right)$, $\mu_k>0$, $\nu_k>0$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, *є послідовністю множин стійкості до збурень ГЛД (1), якщо збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\nu_{k-1}\nu_k}{N\mu_k}\right)^{-1}$. *Для відносних похибок підхідних дробів справджується оцінка* $\left|\varepsilon^{(s)}\right|\le\frac{\beta}{1-\beta}+\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{s}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\nu_{k-1}\nu_k}{N\mu_k}\right)^{-1}\right)$, $s=0,1,2,\ldots$.

THE SETS OF STABILITY TO PERTURBATIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH POSITIVE ELEMENTS

We consider the problems of the stability to perturbations of branched continued fractions with positive elements.

УДК 517.98

СПЕКТР АЛГЕБРИ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА ПРОСТОРІ $\ell_1 \oplus \ell_\infty$

Андрій Загороднюк, Вікторія Кравців

Державний вищий навчальний заклад
"Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

andriyzag@yahoo.com, maksymivvika@gmail.com

Розглянемо простір $\ell_1 \oplus \ell_\infty$, елементами якого будуть вектори

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \ldots \right),$$

де $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1$, а $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_\infty$. Норму на даному просторі введемо як

$$\|(x, y)\|_{\ell_1 \oplus \ell_\infty} = \|x\|_{\ell_1} + \|y\|_{\ell_\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sup_i |y_i|.$$

Позначимо через $P_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$, $H_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ - алгебру блочно-симетричних поліномів та алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

У доповіді буде показано, що алгебраїчний базис алгебри $P_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ утворюють поліноми $H^{p,q}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^p y_i^q$, де $p \geq 1, q \geq 0$. Також частково буде описано спектр алгебри $H_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$, який будемо позначати $M_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$.

THE SPECTRA OF THE ALGEBRA OF BLOCK-SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE ON $\ell_1 \oplus \ell_\infty$

We describe algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on the space $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ and describe the spectra of the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type on the space $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

УДК 517.98

СИМЕТРИЧНИЙ ТЕНЗОРНИЙ ДОБУТОК МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Андрій Загороднюк, Марія Марцінків

Державний вищий навчальний заклад
"Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

andriyzag@yahoo.com, mariadubey@gmail.com

Нехай X – непорожній метричний простір, зафіксуємо у ньому деяку точку θ_x. Такий метричний простір називається простором з відміченою точкою. Відображення f між метричними просторами X та Y називається ліпшицевим, якщо існує така стала c, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \le c\rho_X(x_1, x_2)$. Доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_x існує єдиний (з точністю до ізометричного ізоморфізму) банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне ліпшицеве відображення $f: X \to E$ може бути продовжене до лінійного оператора $\tilde{f}: B(X) \to E$. Позначимо через $\underline{x}$ елементи лінійної оболонки простору X. Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором.

Побудуємо множину

$$\Omega_X = \{\underline{x} - \underline{x}' \mid x, x' \in X, x \ne x'\} \cup \theta_x \subset B(X).$$

Розглянемо лінійний простір Σ формальних сум $\sum \lambda_i (x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$ і простір $\Sigma_0 = \sum_k \gamma_k (x_k, \theta_y) + \sum_j \mu_j (\theta_x, y_j)$. Позначимо через $\tilde{\Sigma}$ фактор-простір Σ / Σ_0, а через $x \circ y$ клас еквівалентності елемента (x, y). Тензорним добутком метричних просторів X та Y називатимемо множину $X \circ Y = \{x \circ y \mid x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}$. Для кожного елемента $\omega \in \tilde{\Sigma}$ визначимо норму

$$\|\omega\| = \inf \sum |\lambda_k| \cdot \left\| u_k - u_k' \right\| \cdot \left\| v_k - v_k' \right\|, \tag{1}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях елемента ω у вигляді $\omega = \sum \lambda_k (u_k - u_k')(v_k - v_k')$, де $u_k, u_k' \in X$, $v_k, v_k' \in Y$.

Теорема 1. *Поповнення простору* $\tilde{\Sigma}$ *відносно норми (1) ізометрично ізоморфне проективному тензорному добутку* $B(X)\hat{\otimes}_\pi B(Y)$.

Проективна тензорна норма простору $B(X)\hat{\otimes}_\pi B(Y)$ індукує метрику на $X \circ Y$, тому $X \circ Y$ є метричним простором з відміченою точкою $\theta_x \circ \theta_y$.

Нехай Z – метричний простір, з відміченою точкою θ_z. Аналогічно як для випадку двох просторів тензорним добутком метричного простору $(X \circ Y)$ та метричного простору Z назвемо множину класів еквівалентності елемента $(x \circ y) \circ z$, тобто

$$(X \circ Y) \circ Z = \{(x \circ y) \circ z \mid x \circ y \in \Omega_{X \circ Y}, z \in \Omega_Z\}.$$

Аналогічно можна побудувати множину $X \circ (Y \circ Z)$.

Теорема 2. *Простори* $(X \circ Y) \circ Z$ *та* $X \circ (Y \circ Z)$ *є ізометрично ізоморфними.*

Аналогічно можна ввести поняття тензорного добутку n метричних просторів $\circ^n X$. Тензорний добуток метричних просторів введений у [1].

Введемо поняття симетричного тензорного добутку

$$\circ_s^n X = \{x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega_X\},$$

де $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \circ x_{\sigma(2)} \circ \ldots \circ x_{\sigma(n)}$ і S_n – множина всеможливих перестановок. Зауважимо, що $\circ_s^n X \subset \circ^n X$. Доведено, що $B(\circ_s^n X) = \hat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X)$ і $B'(\circ_s^n X) = L(^n B(X))$ – простір всіх n-лінійних відображень на $B(X)$.

1. *Дубей М. В., Загороднюк А. В.* Лінеаризація ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних функцій // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, №1. – С.40–48.

SYMMETRIC TENSOR PRODUCT OF METRIC SPACES

We introduce and study analogues of tensor and symmetric tensor products of metric spaces with fixed point. Some properties of tensor and symmetric tensor product are proved.

УДК 517.51 + 511.7

СТРУКТУРА НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ЦЕНТРАЛЬНУ ЦИФРУ У Q_3-ЗОБРАЖЕННІ ЧИСЕЛ

Ірина Замрій, Олена Негоденко

Державний університет телекомунікацій

irinafraktal@gmail.com, negodenkoav@i.ua

Нехай $A_3 = \{0,1,2\}$ – алфавіт, $L = A_3 \times A_3 \times A_3 \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ – фіксована множина додатних дійсних чисел, причому $q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Відомо [1], що для довільного $x \in [0,1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Ряд $\beta_{\alpha_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right]$ називається Q_3-представленням числа x, а скорочений запис $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – його Q_3-зображенням. Період у Q_3-зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках.

Розглядаються неперервні на відрізку $[0;1]$ функції f, визначені рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},$$

де цифра γ_n Q_3-зображення числа y задовольняє умови:

1) $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$;

2) якщо цифра γ_n відмінна від 1, то вона залежить від перших n цифр Q_3-зображення аргумента x, тобто: $\gamma_n = \gamma_n(x) = \phi_n(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)),\ n \in \mathbb{N}$.

Означення ([1]). *Якщо у Q_3-зображенні аргумента $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і Q_3*

-зображенні значення функції $y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ *цифра 1 знаходиться на тих самих місцях, тобто* $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$, *то казатимемо, що функція* f *зберігає цифру 1 (без примноження) у* Q_3*-зображенні чисел відрізка* $[0;1]$.

Прикладом такої функції є:

$$I(x) = I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$$

Теорема. *Кожна неперервна функція* $f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots}$, *що зберігає цифру 1 (без примноження) у* Q_3*-зображенні чисел відрізка* $[0;1]$, *визначається системою*

$$f(x) = \begin{cases} a_k \cdot I(\frac{x}{a'}) + b_k \quad \text{при} \quad x \in \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}, \\ c_k \cdot x + d_k \quad \text{при} \quad x \in \Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_k}, \end{cases}$$

де

$$\nabla^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k} \neq \nabla^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_k},\ a'_k = \prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i},\ a_k = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},\ b_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\gamma_t}\prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}),$$

$$c_k = \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}},\ d_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\gamma_t}\prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}) - \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}}(\beta_{\alpha_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\alpha_t}\prod_{i=1}^{t-1} q_{\alpha_i})), k \in \mathbb{N}.$$

Причому, якщо функція має один або два нескінченні рівні (множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$ *називається множиною рівня* y_0 *функції* f*), то для неї справджується рівність:* $f(\Delta^{Q_3}_{(i)}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n(i[2-i])}$ *при* $i, \gamma_j \in \{0, 2\}$.

Крім того, якщо $q_0 \neq q_2$, *то функція* f *є сингулярною на відрізках, де вона визначається* $f(x) = a_k \cdot I(x / a'_k) + b_k$.

1. *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3-зображення числа // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 142–159.

STRUCTURE OF CONTINUOUS FUNCTIONS THAT SAVED THE CENTRAL DIGIT IN Q_3-REPRESENTATION OF NUMBERS

It is proved that for $q_0 \neq q_2$ all continuous functions f are piecewise singular, that is, they are distinct from constant continuous functions of bounded variation, the derivative of which is almost zero (in the sense of Lebesgue measure) is zero. A method is proposed for identifying an arbitrary continuous function f, which stores a digit 1 (without multiplication) in Q_3-representation.

УДК 517

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НЕКВАЗІАНАЛІТИЧНИХ КЛАСІВ УЗАГАЛЬНЕНИМИ РЯДАМИ ТЕЙЛОРА

Юрій Іванов

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського “Харківський авіаційний інтситут”

iwanow@3g.ua

Назвемо клас

$$H_{\rho}(\bar{M}) = \left\{ f \in C^{\infty}[-1,1] : \left| f^{(n)}(x) \right| < C(f)\rho^{n} M_{n} \right\}. \qquad (1)$$

неквазіаналітичним, якщо його представника неможливо відновити за значеннями похідних в нулі.

В. О. Рвачов запропонував відновлювати функції таких класів за значеннями похідних на кінцевих множинах X_n, тобто знайти множини X_n такі, що кожна функція класу $H_{\rho}(\bar{M})$, $\rho < \rho_0$, може бути зображеною узагальненим рядом Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t \in X_n} f^{(n)}(t)\varphi_{n,t}(x)dx . \qquad (1)$$

де $\varphi_{n,t}(x)$ – так звані базисні функції узагальненого ряду Тейлора. $\varphi_{n,t}(x) \in H_1(\bar{M})$, $\varphi_{n,t}^{(k)}(x) = 0$ для $x \in X_k$, $t \in X_n$, $k = 0,1,\ldots$, $n = 0,1,\ldots$ за винятком випадку $k = n$ і $x = t$: $\varphi_{n,t}^{(n)}(t) = 1$. Такі ряди було побудовано для класів $H_{\rho} = H_{\rho}\left(\left\{2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}\right)$ і $H_{\rho,3} = H_{\rho}\left(\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n} 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}\right)$ (див. [2], [3]).

Базисні функції узагальнених рядів Тейлора в свою чергу будуються на основі атомарної функції, що є розв’язком диференціально-функціонального рівняння. Для класу H_{ρ} це функція $up(x)$ – розв’язок рівняння

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1) .$$

Для класу $H_{\rho,3}$ це функція $h_3(x)$ – розв’язок рівняння

$$y'(x) = \frac{9}{4}(y(3x+2) - y(3x-2)) .$$

Формули для швидкого обчислення цих функцій наведені в роботі [1]. У доповідь представлено зручні для обчислень формули для базисних функцій узагальнених рядів Тейлора. Статті [2], [3] містять формули для базисних функцій, але ці формули не є оптимальними для обчислень. Тут ми стверджуємо, що на відрізках $[-1,t]$ та $[t,0]$ базисні функції $\varphi_{n,t}(x)$ $(t \le 0)$ можна зобразити лінійними комбінаціями n зсувів фукції $v(x) = up(x)$ для класу H_ρ або $v(x) = h_3(x)$ для класу $H_{\rho,3}$, тобто

$$\varphi_{n,t}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k v(x-\alpha_k) & \text{для } -1 \le x \le t, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_k v(x-\beta_k) & \text{для } t < x \le 0, \end{cases}$$

де a_k і b_k – раціональні числа, α_k і β_k – прості дроби зі знаменниками 2^n для H_ρ та 3^n для $H_{\rho,3}$. Наприклад, формули для $\varphi_{n,0}(x)$, $x \le 0$, класу $H_{\rho,3}$ виглядають так:

$$\varphi_{n,0}(x) = 3^{-\frac{n(n-1)}{2}} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n h_3\left(x - 1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-2} J_k h_3\left(x - 1 + \frac{1}{3^{n-k-1}}\right) \right),$$

де J_k – раціональні числа. Функції $h_3(x)$ є багаточленами майже всюди на відрізку $[-1,1]$, тому і $\varphi_{n,t}(x)$ майже всюди багаточлени.

1. *Рвачов В. О.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 139 с.
2. *Рвачов В. О.* Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения. // Успехи математических наук. – 1990. – **45**, вып 1(271). – С. 77–103.
3. *Іванов Ю. О.* Представление неквазианалитических функций обобщёнными рядами Тейлора. // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1990. – № 7. – С. 11-14.

ABOUT THE APPROXIMATION OF THE FUNCTIONS OF NONQUASIANALYTICAL CLASSES BY GENERALIZED TAYLOR SERIES

The report contains a convenient formula for computing basis functions for generalized Taylor-Rvachev series, which is the expansion of functions of a nonquasianalytical class.

УДК 517.51

ПРО ОДИН КЛАС СИНГУЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

Світлана Климчук

Інститут математики НАН України

svetaklymchuk@imath.kiev.ua

В роботах [1, 2] досліджувався клас неперервних строго зростаючих сингулярних функцій залежних від параметра $0<a<1$, які мають трійкове зображення. Автори побудували геометричну конструкцію таких функцій і показали, що залежно від значення параметра функція є або ніде не диференційовною, або недиференційовною майже скрізь (у розумінні міри Лебега), або сингулярною.

У роботі [3] вивчались приклади немонотонних неперервних на відрізку [0;1] функцій, похідна яких майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю, визначених в термінах s-ого та його узагальнення – Q_s-зображення дійсних чисел, досліджувались властивості їх графіків.

Ми досліджуємо клас неперервних функцій f, означених в термінах Q_s^*-зображення, що є узагальненням Q_s-зображенння дійсного числа, означених на відрізку [0;1] рівністю

$$f(x)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-2}g_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\|q_{ik}\|$ – нескінченна стохастична додатна матриця ($i=0,1,2; k\in\mathbb{N}$); $\beta_{0k}=0$, $\beta_{1k}=q_{0k}$, $\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}$; (ε_k) – задана послідовність чисел, де $0\le\varepsilon_k\le1$; $g_{0k}=\dfrac{1+\varepsilon_k}{2}=g_{2k}$, $g_{1k}=\dfrac{1-2\varepsilon_k}{2}$, $\delta_{0k}=0$, $\delta_{1k}=g_{0k}$, $\delta_{2k}=g_{0k}+g_{1k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Така функція є коректно означеною і набуває значень з відрізка [0;1], причому $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Якщо $\varepsilon_k=\dfrac{1}{2}$, то функція $f(x)$ є сталою на циліндричному інтервалі $\nabla^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, суміжному з множиною $C\left[V,Q_3^*\right]$. Сума довжин всіх циліндричних інтервалів $\nabla^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, суміжних з множиною $C\left[V, Q_3^*\right]$ дорівнює 1, $c_i \in V$, $i = 0,1,\ldots m-1$, $m \in \mathbb{N}$.

Функція f, будучи сталою на кожному з інтервалів $\nabla^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}}$, де $c_i \in V$, $i = 0,1,\ldots m-1$, $m \in \mathbb{N}$, має на кожному з них похідну рівну 0. Отже, є сингулярною.

Позначимо приріст μ_f функції f на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ через μ_m, тобто

$$\mu_m = \mu_f\left(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}(x).$$

Лема. *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях. Причому, якщо $\mu_m > 0$, то*

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right), \min f(x) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right).$$

Якщо ж $\mu_m < 0$, то

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right), \min f(x) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right).$$

Теорема (Властивості графіка Γ_f функції).

Якщо $\varepsilon_k = const$ і $\prod_{i=0}^{2} g_i \neq 0$, то графік функції f і його частина $\Gamma_f \equiv \left\{(x;y): x \in \Delta_i^{G_3^*}, y = f(x)\right\}$ афінно-еквівалентні, причому $\Gamma^i_f = \varphi_i\left(\Gamma_f\right)$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} x' = q_{ix} + \beta_i \\ y' = g_{iy} + \delta_i \end{cases}, i \in \{0,1,2\}.$$

1. *Okamoto H.* A remark on continuous, nowhere differentiable functions // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2005. – Vol. 81, No 3. – P. 47–50.
2. *Okamoto H., Wunsh M.* A geometric construction of continuous stricly increasing singular functions // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2007. – Vol. 83, No 7. – P. 114–118.

3. *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2011. – № 12. – С. 24–36.

ON ONE CLASS OF NONMONOTONIC SINGULAR FUNCTIONS OF CANTOR'S TYPE

We study one class of continuous functions f defined on segment [0,1].We found criteria of strict monotonicity, non monotonicity and nowhere monotonicity, non-differentiability and singularity of the functions. We pay attention to properties of the level sets of the functions and its graph.

УДК 517.98

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-ЛАПЛАСА ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ω-УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ

Віра Лозинська

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

vlozynska@yahoo.com

Розвитку нового підходу до дослідження дуальної пари, що складається з просторів функцій нескінченної кількості змінних та відповідних просторів поліноміальних розподілів та ультрарозподілів присвячені праці [2, 3, 4].

У роботі розглядаємо мультиплікативну алгебру $P(E'_\omega)$ неперервних скалярних поліномів на просторі E'_ω ω-ультрарозподілів [1] а також сильно спряжену до неї алгебру $P'(E'_\omega)$. Елементи простору $P'(E'_\omega)$ називаємо поліноміальними ω-ультрарозподілами. Алгебра $P(E'_\omega)$ є щільно вкладена в $P'(E'_\omega)$. Досліджуємо властивості операції диференціювання на алгебрах $P(E'_\omega)$, $P'(E'_\omega)$ за допомогою їх тензорного представлення. Побудуємо поліноміальне розширення перетворення Фур'є-Лапласа. Описуємо зв'язок між диференціюванням поліномів і поліноміальним розширенням перетворення Фур'є-Лапласа у формі операторного числення.

1. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Mathematics. – 1990. – **17**. – P. 206–237.
2. *Lopushansky O.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publications IM PAN. – 2010. – **88**. – P. 195–209.
3. *Lopushansky O., Sharyn S.* Polynomial ultradistributions on R_+^d // Topology. – 2009. – **48**. – P. 80–90.
4. *Sharyn S. V.* Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2016. – **22**. – P. 62–73.

FOURIER-LAPLACE TRANSFORM OF POLYNOMIAL ω-ULTRADISTRIBUTIONS

The multiplicative algebra $P(E'_\omega)$ of continuous scalar polynomials on the space E'_ω of ω- ultradistributions as well as its strong dual $P'(E'_\omega)$ are considered. The operation of differentiation on these algebras is investigated. The polynomially extended Fourier-Laplace transformation and its connections with the differentiation are studied.

УДК 517.98

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ПО АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ТА РІВНОМІРНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ПІДМНОЖИНАХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

Михайло Митрофанов

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

mishmit@rambler.ru

Запланований огляд стосується основних результатів апроксимації неперервних функцій на банахових просторах, просторах Фреше зі зліченною системою норм та нормованих просторах. Для відкритих підмножин дійсного банахового простору, Я. Курцвейлом у праці [2] питання апроксимації неперервних функції за допомогою аналітичних було розв'язане при деяких додаткових умовах, зокрема від простору вимагалася сепарабельність та існування відокремлювального полінома. Пізніше, для рівномірно неперервних функцій М. Босіо і П. Гаєк у праці [1] отримали сильніший результат при підсилені додаткових умов. У праці [3] автором апроксимовано неперервні та рівномірно неперервні функції на відкритих підмножинах сепарабельних комплексних банахових просторів. У праці [4] автору разом з Равським О. В. вдалося дати часткову відповідь на питання апроксимації у просторах Фреше зі зліченною системою норм.

1. *Boiso M. C., Hájek P.* Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – Vol. 256, – P. 80–98.
2. *Kurzwei J.* On approximation in real Banach spaces // Studia Math. – 1954. – Vol.14, – P. 214–231.
3. *Митрофанов М. А.* Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах // Математические заметки – 2009. – т.86, – №4 – С. 557–570.
4. *Митрофанов М. А. Равський О. В.* Апроксимація неперервних функцій на просторах Фреше // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2011. – **54**, №3 – С. 33–40.

MAIN RESULTS ON APPROXIMATION OF CONTINUOUS AND UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS ON SUBSETS OF INFINITE DIMENSIONAL SPACES

We are going to talk about last results and open questions that arose during the research of approximation of continuous and uniformly continuous functions on Banach spaces, Fréchet spaces with countable system of norms and normed spaces.

УДК 539.3

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В АЛГЕБРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ, ПОРОДЖЕНИХ ПОСЛІДОВНІСТЮ ПОЛІНОМІВ

Зоряна Новосад, Василь Фуштей

Львівський торговельно-економічний університет,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

zoryana.math@gmail.com, f.v.1214.for.friends@gmail.com

Нехай X – комплексний банахів простір і $P=(P_1,P_2,\ldots,P_n,\ldots)$ – деяка послідовність n-однорідних поліномівна X. Розглянемо алгебру аналітичних функцій обмеженого типу $H_P(X)$ на просторі X, яка єпоповненням у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах алгебри поліномів, поропродженої послідовністю P. $H_P(X)$ є алгеброю Фреше і складається з цілих функцій обмеженого типу на X.

У доповіді буде розглянуто оператори диференціювання алгебри $H_P(X)$, умови неперервності та умови гіперциклічності цих операторів, оператори зсувів пов’язані з відповідними диференціюваннями. Зокрема, ми покажемо, що у багатьох випадках, якщо оператор диференціювання визначений і неперервний на всій алгебрі $H_P(X)$, то він гіперциклічний. Нагадаємо, що гіперциклічним оператором на просторі Фреше Y називається такий неперервний лінійний оператор $A:Y\to Y$ для якого існує вектор з Y, такий, що орбіта цього вектора під дією оператора A є щільною в Y.

Результати буде проілюстровано на конкретних алгебрах, зокрема на прикладі алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі абсолютно збіжних послідовностей.

DIFFERENTIATION IN ALGEBRASOF ANALYTIC FUNCTIONS OF A BANACH SPACE WHICH ARE GENERATED BY SEQUENCES OF POLYNOMIALS

We consider operators of differentiation in algebras of analytic functions of bounded type on a complex Banach space which are generated by some given sequences of homogeneous polynomials. We establish some conditions of continuity and hypercyclicity of such operators and related translations. In particular, we represent example of differentiation in algebra of symmetric entire functionsof bounded type on absolutely convergent sequence space.

УДК 517.5

ОЦІНКИ ЕНТРОПІЙНИХ ЧИСЕЛ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Катерина Пожарська

Інститут математики НАН України

kate.shvai@gmail.com

Отримано порядкові оцінки величин $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right)$ – ентропійних чисел [1] класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [2] періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці. Дані класи при певному виборі Ω, мажорантної функції для мішаного модуля неперервності, співпадають з відомими класами Нікольського–Бєсова $B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$.

Наведемо один із отриманих нами результатів у двовимірному випадку.

Теорема. *Нехай* $d = 2$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\mathbf{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умови Барі-Стєчкіна* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1/2$ *і* $\left(S_l\right)$ *[3]. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n *таких, що* $M = M(n) \asymp 2^n n$, *виконується співвідношення*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \asymp \omega\left(2^{-n}\right)(\log M)^{1-1/\theta}.$$

1. *Hollig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quantitative approximation. – New York Acad. Press. – 1980. – P. 163–176.
2. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1997. – **219**. – P. 356–377.
3. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.

ESTIMATES OF ENTROPY NUMBERS FOR THE CLASSES OF PERIODIC MULTIVARIATE FUNCTIONS

Order estimates are obtained for entropy numbers of the classes of periodic multivariate functions in the uniform metric. These classes with a certain choice of the function Ω*, a majorant function for the mixed moduli of smoothness, coincide with the Nikol'skii–Besov classes.*

УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В МЕТРИКАХ ПРОСТОРІВ L_p НА КЛАСАХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко

Інститут математики НАН України

serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і $L_p, 1 \le p \le \infty,$ – простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Позначимо через $W^r_{\overline{\beta},1}, r>1,$ класи 2π-періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(k(x-t)-\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\varphi(t)dt,$$

в якій $a_0\in\mathbb{R}, \beta_k\in\mathbb{R}, \varphi\perp 1, \|\varphi\|_1\le 1.$

Якщо послідовності $\overline{\beta}=\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є стаціонарними послідовностями, тобто $\beta_k=\beta, k\in\mathbb{N}, \beta\in\mathbb{R},$ то класи $W^r_{\overline{\beta},1}$ є відомими класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,1}$.

При $r\in\mathbb{N}$ і $\beta=r$, класи $W^r_{\beta,1}$ є класами W^r_1 - 2π-періодичних функцій, що мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і такі, що їх r-та похідна належить одиничній кулі простору L_1 (тобто $\left\|f^{(r)}\right\|_1\le 1$).

Нехай $f\in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)}=\dfrac{2k\pi}{2n-1}, \quad k\in\mathbb{Z},$ тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x_k^{(n-1)})=f(x_k^{(n-1)}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Розглянемо величину

$$\varepsilon_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \sup_{f\in W^r_{\beta,1}} \left\| f(\cdot) - \tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)\right\|_p .$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді має місце рівномірна по всіх параметрах оцінка*

$$\varepsilon_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\left(\frac{1}{n} + e^{-\frac{r}{n+1}}\left(1+\frac{n}{r-1}\right)\right)\right). \qquad (1)$$

Зазначимо, що при $r \ge n+1$ оцінка (1) набуває вигляду

$$\varepsilon_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}}\|\cos t\|_p^2 + O(1)\left(\frac{1}{n} + e^{-\frac{r}{n+1}}\right)\right)$$

і у випадку, коли $r / n \to \infty$ при $n \to \infty$, є асимптотичною рівністю.

APPROXIMATION BY INTERPOLATION TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS IN METRICS OF SPACE L_p ON CLASSES OF DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS

We conside the problem of finding the exact upper bounds of approximations by interpolation trigonometric polynomials with uniform distribution of interpolation nodes in metrics of the spaces L_p *on classes of differentiable* 2π*-periodic functions.*

УДК 517.53

ПРО РІВНІСТЬ КАРЛЕМАНА ДЛЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ПЕРІОДИЧНОЇ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ

Марія Сокіл, Наталія Сокульська, Андрій Христіянин

Національний університет "Львівська політехніка",
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
Львівський національний університет імені Івана Франка

sokil_b_i@ukr.net, natalya.sokulska@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

Рівність Карлемана [2] для мероморфних функцій є достатньо відомою в теорії розподілу значень мероморфних функцій і має настільки багато застосувань, що їй присвячені цілі монографії [1]. Різновиди формул такого типу для різноманітних областей отримувалися в різний час різними авторами.

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [4]. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними, адже у випадку недійсного q точки, у яких така функція приймає одне і те ж значення, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими (λοξοζ – кривий, δρομοζ – шлях). В log-полярних координатах це прямі лінії.

Зважаючи на можливість різноманітного застосування таких об’єктів, постало питання вивчення різних класів мультиплікативно періодичних відображень довільних однорідних просторів. Зокрема, одна з останніх робіт в цьому напрямку присвячена вивченню властивостей мультиплікативно періодичних мероморфних функцій в проколеному замиканні верхньої півплощини [3]. В нашій роботі ми доводимо рівність типу Карлемана (формулу Карлемана) для таких функцій.

Нехай $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ і $H^* = \overline{H} \setminus \{0\}$. Зафіксуємо $q : 0 < q < 1$. Позначимо $A_t = \left\{z \in \overline{H} : qt < |z| \le t\right\}$, $t > 0$. Зауважимо, що $\bigcup\limits_{t>0} \overline{A_t} = H^*$.

Означення 1. *Функція f називається мероморфною в H^*, якщо вона мероморфна в замиканні кожного півкільця A_t.*

Означення 2. *Мероморфна H^* функція f називається мульти–плікативно періодичною з мультиплікатором $q : 0 < q < 1$, якщо для всіх $z \in H^*$ виконується рівність*

$f(qz) = f(z)$.

Клас таких функцій позначимо через M_q.

Нехай f мультиплікативно періодична мероморфна функція в H^*. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай $z_0 \in H^*$. $f(z_0) \neq 0, \infty$, і $\log f(x)$ визначений співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з’єднує точки z_0 та z у H^* з радіальними розрізами від нулів та полюсів функції f.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $f \in M_q$, $f \neq const$ і $f(z) \neq 0,\infty$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай, крім того, точки $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ є a-точками функції f, $a \in \mathbb{C}$, та $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ – полюси f в $A_t = \left\{z \in \overline{H} : qt < |z| \leq t\right\}$. Тоді*

$$\int_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{r_n^k} - \frac{r_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt = \int_{qr}^{r} \sum_{qt<\rho_n\leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{\rho_n^k} - \frac{\rho_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\beta_n dt, \qquad (1)$$

при кожному $r > 0, k \in \mathbb{Z}$.

Співвідношення (1) – це рівність Карлемана для мультиплікативно періодичної мероморфної функції в проколеному замиканні верхньої півплощини.

1. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1990. – 246 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Khoroshchak V. S., Sokulska N. B.* Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane // Mat. Stud. – 2014. – **42,** N 2. – P. 143–148.
4. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln. – Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884. – 470 p.

ABOUT CARLEMAN EQUALITY OF MULTIPLICATIVELY PERIODIC MEROMORPHIC FUNCTIONS

Carleman equality for multiplicatively periodic meromorphic functions in the punctured closure of the upper half-plane is proved.

УДК 517.524

ПРО ВІДНОСНУ СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Ольга Сусь, Тамара Антонова, Світлана Возна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Національний університет "Львівська політехніка"

olja_sus@ukr.net, tamara_antonova@ukr.net, svitlanavozna@gmail.com

Однією з фундаментальних властивостей неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень, зокрема, двовимірних неперервних дробів (ДНД), є стійкість до збурень їх елементів. Аналіз похибок підхідних дробів ДНД, що виникають при збуренні їх елементів, показав, що вони залежать не лише від похибок елементів, але й від самих елементів. Тому встановлення множин стійкості до збурень ДНД є актуальною задачею.

У даній роботі досліджено умови відносної стійкості до збурень ДНД з комплексними елементами, що належать до деякої кутової множини правої півплощини.

Розглянемо ДНД вигляду

$$\mathop{D}_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b_{k,k}+\Phi_k},\quad \Phi_k=\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{k+j,k}}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{k,k+j}},\ k=0,1,\ldots\ . \tag{1}$$

Означення 1. *Скінченні ДНД вигляду*

$$f_n=\mathop{D}_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{b_{k,k}+\Phi_k^{(n-2k-1)}},\ n=1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_k^{(0)}=0,\ \Phi_k^{(p)}=\mathop{D}_{j=1}^{p}\frac{1}{b_{k+j,k}}+\mathop{D}_{j=1}^{p}\frac{1}{b_{k,k+j}},\ k=0,1,\ldots,\quad p=1,2,\ldots, \tag{3}$$

називаються n *-ми фігурними наближеннями або* n *- ми фігурними підхідними дробами ДНД (1).*

Означення 2. *ДНД (1) називається правильним ДНД типу Ван Флека, якщо його елементи належать множині*

$$G_\theta = \left\{ z : |\arg z| < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{4}$$

Означення 3. *Множина елементів G називається множиною відносної фігурної стійкості до збурень ДНД (1), якщо існує дійсна додатна константа C, залежна від G і незалежна від n, для якої виконується нерівність $|\delta_n| \le C\gamma$, де $\gamma = \max\left(|\beta_{i+j,i}|, |\beta_{i,i+j}|, |\beta_{i,i}|,\ i = \overline{\left[0, \frac{n-1}{2}\right]},\ j = \overline{1, n-2i-1} \right)$, $\beta_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots,$ – відносні похибки елементів ДНД (1), δ_n – відносна похибка n-го фігурного підхідного дробу (2).*

Використовуючи методику, описану у [1], отримано наступний результат.

Теорема. *Нехай елементи ДНД (1) та збуреного до нього ДНД належать множині (4), і відносні похибки елементів ДНД (1) є рівномірно обмеженими:*

$$|\beta_{i+j,i}| \le \beta, |\beta_{i,i+j}| \le \beta, |\beta_{i,i}| \le \beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad i = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots .$$

Якщо існують послідовності $\{\mu'_\ell\}, \{\mu''_\ell\}, \{\mu_\ell\}$, $\ell = 1,2,\ldots,$ додатних чисел таких, що

$$\mu'_{k+1} \le \operatorname{Re} b_{i+k,i} \operatorname{Re} b_{i+k+1,i}, \quad \mu'_{k+1} \le \operatorname{Re} \widehat{b}_{i+k,i} \operatorname{Re} \widehat{b}_{i+k+1,i}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,$$

$$\mu''_{k+1} \le \operatorname{Re} b_{i,i+k} \operatorname{Re} b_{i,i+k+1}, \quad \mu''_{k+1} \le \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i+k} \operatorname{Re} \widehat{b}_{i,i+k+1}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,$$

$$\mu_{2k-1} \le \operatorname{Re} \widehat{b}_{2k-2,2k-2} \operatorname{Re} \widehat{b}_{2k-1,2k-1}, \quad \mu_{2k} \le \operatorname{Re} b_{2k-1,2k-1} \operatorname{Re} b_{2k,2k}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

де $\widehat{b}_{i,j}$, $i, j = 0,1,\ldots,$ – елементи збуреного ДНД, а також збіжними є ряди

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu_j + \cos\theta}, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\mu'_j + \cos\theta}, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\mu''_j + \cos\theta}, \tag{5}$$

то для відносної похибки n-го фігурного підхідного дробу ДНД (1) справджується оцінка

$$|\delta_n| \le \frac{1}{\cos\theta}\big(S + S(S' + S'')\big)\frac{\beta}{1-\beta},$$

де S, S', S'' – суми рядів (5) відповідно.

1. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про абсолютну стійкість до збурень двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника / під заг. ред. Кушніра Р. М., Пелиха В. О. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 8–21.

ON RELATIVE STABILITY TO PERTURBATIONS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

Some sufficient conditions of relative figured stability to perturbations for regular two-dimensional continued fraction of Van Vleck type are established. Estimate of relative errors for figured approximants is obtained.

УДК 517.98

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ПРО ОСЦИЛЯЦІЇ ДЛЯ РІВНЯНЬ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З ЕНЕРГОЗАЛЕЖНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

Наталія Терлич

Інститут прикладних проблем механіки та математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

nataliya.pronska@gmail.com

У доповіді будуть обговорені осциляційні властивості власних функцій задач Штурма-Ліувілля з енергозалежними потенціалами, що задані рівняннями

$$-y''+2\lambda py+qy=\lambda^2 y\,, \tag{1}$$

(тут p – дійснозначна функція з $L_2(0,1)$, $q=r'$, де r – дійснозначна функція з $L_2(0,1)$, тобто q – дійснозначний розподіл з простору Соболєва $W_2^{-1}(0,1)$, і λ – спектральний параметр) та деякими крайовими умовами. А саме, ми розглядаємо крайові умови Діріхле

$$y(0)=y(1)=0$$

та крайові умови змішаного типу

$$y(0)=y^{[1]}(1)=0\,,$$

де $y^{[1]}:=y'-ry$ – квазі-похідна функції y.

У доповіді наведемо формули для визначення кількості внутрішніх нулів власних функцій розглядуваних спектральних задач. Дослідимо умови, за яких твердження, аналогічне до класичної теореми Штурма про осциляції, виконується для рівнянь Штурма-Ліувілля з енергозалежними потенціалами, та розглянемо випадок, коли такі умови не виконані. Суттєвим інструментом у дослідженні є кут Прюфера, відповідно введений для розглядуваних рівнянь.

SOME RESULTS ON OSCILLATIONS FOR ENERGY-DEPENDENT STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Oscillations properties of eigenfunctions of spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations will be discussed. Formula determining the number of interior zeros of these eigenfunctions will be given. We will also obtain the condition which guarantees that the statement analogous to that of classical Sturm oscillation theorem holds true for energy-dependent Sturm-Liouville problems. The main tool in this research is a Prüfer angle, properly defined for considered equations.

УДК 517.548

ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ольга Трофименко

Донецький національний університет імені Василя Стуса

odtrofimenko@gmail.com

Розглядаються гладкі функції $f(z)$, визначені в крузі $B_R:\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ $(R>0)$, які для заданих чисел $m\in\mathbb{N}:=\{1, 2, \dots\}$ та $s\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $s<m$, задовольняють співвідношення вигляду

$$\sum_{p=s}^{m-1}\frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!\,p!}\partial^{p-s}\overline{\partial}^{p}f(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta-z|\le r}f(\zeta)(\zeta-z)^{s}\,d\xi d\eta, \qquad (1)$$

де $r\in(0,R)$, $z\in B_{R-r}$, $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ ($x,y,\xi,\eta\in\mathbb{R}$).

Теорема. *Нехай* $0<r<R$, $f\in C^{\infty}(B_R)$, *і нехай при кожному* $z\in B_{R-r}$ *виконується рівність (1), а* $f(z)=0$ *для всіх* $z\in B_r$. *Тоді* $f\equiv 0$ *в* $z\in B_R$.

Якщо $m=1$ і $s=0$, то рівність (1) набуває вигляду $f(z)=\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|\zeta-z|\le r}f(\zeta)\,d\xi d\eta$, і тоді твердження теореми є частинним випадком результату В. В. Волчкова, що узагальнює на випадок розв'язків однорідних рівнянь згортки з радіальним розподілом із компактним носієм класичний результат Ф. Йона про сферичні середні.

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными – М.: ИЛ, 1958. – 160 с.
3. *Trofymenko O. D.* Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – **229**, № 1. – P. 96–107.

MEAN VALUE THEOREMS FOR SOLUTIONS OF LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

We characterize solutions of homogeneous linear partial differential equations with constant coefficients in the complex plane whose left hand side is represented in the form of the product of some non-negative integer powers of the formal Cauchy derivatives.

УДК 517.9

МАТРИЦІ ЯКОБІ І СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Ганна Тугай

Національний авіаційний університет

ttugay@ukr.net

Нехай $A \geq 1$ напівобмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D(A)$ в сепарабельному гільбертовому просторі H, $H_1 \subset H \subset H_{-1}$ – частина A-шкали гільбертових просторів.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається чисто сингулярно збуреним відносно A, якщо множина $D = \left\{ \varphi \in D(A) \bigcap D(\tilde{A}) \middle| A\varphi = \tilde{A}\varphi \right\}$ є щільною в H. Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається слабко сингулярно збуреним рангу n ($\tilde{A} \in P_{ws}^{n}(A)$), якщо $\operatorname{ran}\left[\left(\tilde{A} - z \right)^{-1} - \left(A - z \right)^{-1} \right] \subset D\left(A^{1/2} \right)$, і різниця резольвент є оператором рангу n. У цьому випадку збурений оператор записується у вигляді узагальненої суми $\tilde{A} = A \tilde{+} T$, де $T : H_1 \to H_{-1}$ – оператор рангу n, причому $\operatorname{ran} T \bigcap H = \{0\}$.

Нехай $E_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots,$ – довільна послідовність дійсних чисел та $\psi_j \in H_1 \setminus D(A)$ – довільна ортонормована в H послідовність векторів таких, що $\operatorname{span}\left\{ \psi_j, j \geq 1 \right\}^{\mathrm{cl}} \bigcap D\left(A \right) = \left\{ 0 \right\}$. Для кожного скінченного n існує єдиний сингулярно збурений оператор A_n, який розв'язує задачу на власні значення

$$A_n \psi_j = E_j \psi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оператори A_n будуються індуктивно з використанням на кожному кроці збурення рангу 1:

$$A_n = A_{n-1} \tilde{+} \alpha_n \left\langle \cdot, \omega_n \right\rangle \omega_n, \quad A_0 \equiv A,$$

де

$$\omega_n = (\mathbf{A}_{n-1} - E_n) \psi_n,$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{\langle \psi_n, \omega_n \rangle} = -\cfrac{1}{b_n - \cfrac{a_{n-1}^2}{b_{n-1} - \ldots - \cfrac{a_2^2}{b_2 - \cfrac{a_1^2}{b_1}}}} = -\frac{\det J_{n-1}}{\det J_n},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – дуальний скалярний добуток між H_1 та H_{-1}, $\mathbf{A}_j$ – замикання оператора $A_j : H_1 \to H_{-1}$, $b_n := \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_n \rangle - E_n$, $a_{n-1} = \left| \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_{n-1} \rangle \right|$,

$$J_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & 0 \\ & a_2 & b_3 & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & & & \bullet & \bullet & a_{n-1} \\ & 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином отримуємо послідовність матриць Якобі, яка збігається у сенсі сильної граф-границі до матриці $J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 \\ & a_2 & b_3 & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$

Ми можемо, виходячи з необмеженого самоспряженого оператора $A \geq 1$ у гільбертовому просторі H, та матриці Якобі J, заданої в деякому ортонормованому базисі $\{\varphi_j, j = 1, 2, \ldots\}$ підпростору $N \subset H_1, N \cap D(A) = \{0\}$ відновити неєдиним чином послідовності $E_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in H_1 \setminus D(A), j = 1, 2, \ldots$ такі, що при послідовному розв'язанні за ними оберненої задачі на власні значення в класі операторів $A_n \in P_{ws}^n(A)$ виникає послідовність асоційованих матриць Якобі J_n рангу n, для якої J є сильною граф-границею.

1. *Дудкін М. Є., Кошманенко В. Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1269–1276.
2. *Koshmanenko V.* A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory//Methods of Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 49–69.

3. *Кошманенко В. Д., Тугай Г. В.* Матриці Якобі, асоційовані з оберненою задачею на власні значення в теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів // Укр. мат. журн. – 2006. – № **58** – С. 1651–1662.

THE JACOBI MATRICES AND SINGULAR PERTURBATIONS SELF-ADJOINT OPERATORS

The connection between the inverse eigenvalue problem and the Jacobi matrices is established in the framework of the theory of singular perturbations of unbounded self-adjoint operators.

УДК 517.98

АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Ірина Чернега

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

icherneha@ukr.net

Дослідження спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах розпочалось наприкінці двадцятого століття. Однією з перших у цьому напрямку була робота [1], де автори досліджували властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$-слабко неперервними лінійними функціоналами. У роботах [2, 3] автори вивчали алгебру комплекснозначних цілих функцій на банаховому просторі, які є обмежені на обмежених множинах, її спектр, а також рівномірну алгебру обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору. У роботі [4] описано спектр цієї алгебри у вигляді прямої суми послідовності банахових просторів, поповненій в топології Гельфанда. У роботах [5, 6] вивчався спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу.

У доповіді ми продовжуємо вивчення алгебр симетричних аналітичних функцій на просторі абсолютно збіжних послідовностей.

1. *Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W.* A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**, № 2. – P. 639–659.
2. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine angew. Math. – 1991. – **415.** – P. 51–93.
3. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Weak-star continuous analytic funtions // Can. J. Math. – 1995. – **47**, № 4. – P. 673–683.
4. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134,** № 9. – P. 2559–2569.
5. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**, № 01. – P. 125–142.
6. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395.** – P. 569–577.

ALGEBRAS OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON BANACH SPACES

Some algebras of symmetric analytic function on Banach spaces and their spectra are considered.

UDC 517.51, 517.982, 515.12

SW-REGULAR TOPOLOGICAL SPACES

Taras Banakh, Bogdan Bokalo

Ivan Franko National University

t.o.banakh@gmail.com, b.m.bokalo@gmail.com

Recall that function f from a topological space X into a topological space Y is scatteredly continuous [1] (resp., weakly discontinuous [6] if for each non-empty subspace A of X the set $C(f|_A)$ of continuity points of the restriction $f|_A$ is not empty (and has non-empty interior in A).

Weakly discontinuous functions were introduced in [1] and appear naturally in analysis [3, 4, 5] under the names semi-continuous functions, Baire one star functions, stably Baire-1 functions [3], ets.

Obviously, each weakly discontinuous function is scatteredly continuous. Also it is known that each scatteredly continuous function into a regular topological space is weakly discontinuous [1, 2].

We call a topological space Y sw-*regular* if each scatteredly continuous function from an arbitrary topological space X into the space Y is weakly discontinuous. In the talk we shall discuss the properties of sw-regular space and the place of the sw-regularity among other known regularity properties of topological spaces. The sw-regularity is preserved by finite products, but we do not know if it is preserved by Tychonoff products.

1. *Arkhangelskii A.V., Bokalo B.M.* Tangency of topologies and tangential properties of topological spaces// Tr. Mosk. Mat. Obs. – 1992. – **54**. – P. 160–185 (in Russian); (English transl.: Trans. Moscow Math. Soc. **54** (1993) 139–163.)
2. *Banakh T., Bokalo B.* On scatteredly continuous maps between topological spaces // Topology and Appl. – 2010. – **157**. – P. 108–122.
3. *Banakh T., Kutsak S., Maslyuchenko V., Maslyuchenko O.* Direct and inverse problems of the Baire classifications of integrals dependent on a parameter // Ukrain. Mat. Zh. – 2004. – **56,** No. 11. – P. 1443–1457 (in Ukrainian).
4. *Chaatit F., Rosenthal H.* On differences of semi-continuous functions // Quaest. Math. 2000. – **23,** No. 3. – P. 295–311.
5. *Haydon R., Odell E., Rosenthal H.* On certain classes of Baire-1 functions with applications to Banach space theory, in: Functional Analysis, Austin, TX 1987/1989, in: Lecture Notes in Math., vol. **1470**, Springer, Berlin, 1991, P. 1–35.
6. *Vinokurov V.A.* Strong regularizability of discontinuous functions // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1985. – **281**, No. 2. – P. 265–269 (in Russian).

UDC 517.5

ON THE GENERALIZED ATOMIC WAVELETS

Iryna Brysina, Victor Makarichev

N. Ye. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"

iryna.brysina@gmail.com, victor.makarichev@gmail.com

Atomic wavelets, which are nonstationary infinitely differentiable wavelets with a compact support, were introduced in [1, 2]. These functions were constructed using atomic functions

$$Fup_{s,n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left(\frac{\sin\frac{t}{2(2s)^n}}{\frac{t}{2(2s)^n}}\right)^n F_s\left(\frac{t}{(2s)^n}\right)dt,$$

where $F_s(t)$ is the Fourier transform of the function $mup_s(x)$ that is a solution with a compact $[-1,1]$ of the functional differential equation

$$y'(x) = 2\sum_{k=1}^{s}\left(y(2sx+2s-2k+1) - y(2sx-2k+1)\right).$$

In this paper we consider a problem of construction of wavelets using generalized Fup-functions [3].

Consider the function $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ such that $\operatorname{supp} f(x) = [-1,1]$, $f(-x) = f(x)$, $f(x) \geq 0$ for any $x \in [-1,1]$ and $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. We shall say that $f(x)$ is a mother function.

Let

$$v_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\cdot V_k(t)dt, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

where

$$V_k(t) = \frac{\sin\frac{2^k t}{N}}{\frac{2^k t}{N}}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\cos\frac{2^j t}{N}\cdot F\left(\frac{t}{N}\right),$$

$N > 0$ and $F(t)$ is the Fourier transform of the mother function $f(x)$. The function $v_k(x)$ is a generalized Fup-function [3].

By L_k denote the space of functions

$$g(x)=\sum_{j\in I(g)} c_j \cdot v_k\left(x-\frac{2^{k+1}j}{N}\right),$$

where $I(g)$ is a subset of integers. It can be easily shown that $L_k \supset L_{k+1}$ for any k.

Further, we define the inner product of two functions as the integral

$$(g,h)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot h(x)dx .$$

Denote by W_k the orthogonal complement to L_k in the space L_{k-1}. It follows that $L_0 = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n \oplus L_n$.

Theorem 1. *For any natural* k *there exists the function* $w_k(x)$ *such that*

1) the system of functions $\left\{ w_k\left(x-\frac{2^{k+1}j}{N}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *constitutes a basis of the space* W_k*;*

2) $\operatorname{supp} w_k(x) \subseteq \left[0, \frac{6\cdot 2^k}{N}\right]$*;*

3) $\int_{-\infty}^{\infty} w_k(x)dx = 0$.

We say that $w_k(x)$ is a generalized atomic wavelet and the space W_k is a space of generalized atomic wavelets.

It was proved in [4] that the space L_0 has good approximation properties. Hence, the system of functions

$$\left\{ w_k\left(x-\frac{2^{k+1}j}{N}\right), v_n\left(x-\frac{2^{n+1}j}{N}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z},k=1,\ldots,n}$$

also has good approximation properties.

1. *Makarichev V. A.* On the nonstationary system of infinitely differentiable wavelets with a compact support // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”. – 2011. – **967**. – P. 63–80.
2. *Brysina I. V., Makarichev V. A.* Atomic wavelets // Radioelectronic and computer systems. – 2012. – **53**, no. 1. – P. 37-45.
3. *Brysina I. V., Makarichev V. A.* On the asymptotics of the generalized Fup-functions // Adv. Pure Appl. Math. – 2014. – **5**, no. 3. – P. 131–138.
4. *Brysina I. V., Makarichev V. A.* Approximation properties of the generalized Fup-functions // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”. – 2016. – **84**. – P. 61–92.

UDC 519.1

DRAWING GRAPHS ON FEW LINES AND FEW PLANES

Steven Chaplick, Krzysztof Fleszar, Fabian Lipp,
Alexander Ravsky, Oleg Verbitsky, Alexander Wolff

Julius-Maximilians-Universität, Würzburg, Germany,
Universidad de Chile,
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine

first.last@uni-wuerzburg.de, kfleszar@dim.uchile.cl,
alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de, verbitsk@informatik.hu-berlin.de

We shall consider only finite graphs, which are simple, that is have no multiple edges and loops. The general frame of our talk is to formalize mathematically intuitive notions of visual complexity of a graph drawing, which we understand as a number of geometrical primitives needed to represent a graph, for instance, slopes, segments or arcs, straight lines or circles, and (in space) planes and spheres. It has an immediate application for a user-friendly representation of a graph data. Given a formalization, we investigate ideas generated by it, for instance, we are trying to find algorithms to draw a graph with a small visual complexity, to investigate a complexity of related algorithmic problems, to determine bounds for the worst cases at least for special graph classes. In some cases we are able to determine exact values or to obtain asymptotically tight bounds. In the present talk we consider only straight-line edges and crossing-free drawings. It is well known that each graph admits such a drawing in space. Also a planar graph admits such a drawing in a plane, by Wagner-Fáry-Stein theorem. Our talk is devoted to the investigation of the problem of drawing graphs in a plane and space such that their edges (or only their vertices) can be covered by a few lines or planes. This problem has many relations to other challenging graph-drawing problems such as small-area or small-volume drawings, layered or track drawings. While some facts about our problem are implicit in previous work, this is the first treatment of the problem in its full generality. Also we relate our parameters to standard combinatorial characteristics of graphs (such as the chromatic number, treewidth, or arboricity) and to parameters that have been studied in graph drawing (such as the track number or the number of segments appearing in a drawing).

1. *Chaplick S., Fleszar K., Lipp F., Ravsky A., Verbitsky O., Wolff A.* Drawing Graphs on Few Lines and Few Planes // http://arxiv.org/abs/1607.01196
2. *Chaplick S., Fleszar K., Lipp F., Ravsky A., Verbitsky O., Wolff A.* The Complexity of Drawing Graphs on Few Lines and Few Planes // http://arxiv.org/abs/1607.06444

UDC 539.3

ON REGULAR M-WEAKLY COMPACT OPERATORS

Ömer GÖK

Yildiz Technical University, Turkey

gok@yildiz.edu.tr

Let E and F be Banach lattices. A linear operator T from E into F is said to be order bounded if it maps order bounded subsets in E into order bounded sets in F. T is called positive operator if $Tx \geq 0$ whenever $x \geq 0$. A linear operator T from E into F is called a regular operator if it is a linear span of the positive operators. We denote by $L^r(E,F)$ the set of all regular operators from E into F. $L(E,F)$ denotes the space of all bounded linear operators from E into F. By $L^b(E,F)$ we denote the space of all order bounded operators from E into F. It is well-known that $L^r(E,F) \subset L^b(E,F) \subset L(E,F)$. By E' we denote the topological dual of E. Topological dual and order dual of a Banach lattice coincide. A Banach lattice E is called KB-space if every increasing norm bounded sequence in E is norm convergent. A subset A of a Banach lattice E is called *b*-order bounded in E if it is order bounded in the second order dual E'' of E. A Banach lattice E is said to have *b*-property if every subset A of E is order bounded whenever A is order bounded in E''. A linear operator T from E into F is called *M*-weakly compact if $\lim_n \|Tx\| = 0$ for every norm bounded disjoint sequence (x_n) in E. $W_M^r(E,F)$ denotes the linear span of the positive M-weakly compact operators from E into F. In this study, we show that $L^r(E,F)$ has *b*-property if and only if F has *b*-property. $W_M^r(E,F)$ is a *KB*-space if and only if F is a *KB*-space.

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators. – New York: Academic Press, 1985.
2. *Alpay Ş., Altin B., Tonyali C.* On property (b) of vector lattices // Positivity. – 2003. – № 7. – P. 135–139.
3. *Alpay Ş., Altin B., Tonyali C.* A note on Riesz spaces with property –b // Czechoslovak Math.J. – 2006. – 56(131). – P. 765–772.
4. *Bayram E., Wickstead A. W.* Banach lattşices of L-weakly and M-weakly compact operators // Arch.Math. – 2017. – 108. – P. 293–299.
5. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices. – Berlin: Universitext, Springer, 1991.

UDC 517.5

TRACE FORMULAE FOR SCHRÖDINGER OPERATORS

Rostyslav Hryniv, Yaroslav Mykytyuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Ukrainian Catholic University,
Lviv Ivan Franko National University

rhryniv@ucu.edu.ua, yamykytyuk@yahoo.com

For a real-valued function $q \in L_1(\mathbb{R})$, denote by T_q the self-adjoint Schrödinger operator in the Hilbert space $L_2(\mathbb{R})$ given by the differential expression

$$t_q(f) := -f'' + qf$$

on the maximal domain. The spectrum of T_q consists of the absolutely continuous part coinciding with the positive half-line $\mathbb{R}_+$ and the discrete part consisting of at most countably many negative eigenvalues. We denote these eigenvalues by $-k_j^2$, $1 \le j \le N$, with $N = 0$ when the discrete spectrum is empty and $N = \infty$ when it is countable. Moreover, for real non-zero k the equation $t_q(f) := k^2 f$ possesses the right and left Jost solutions, and this allows one to introduce the right and left scattering coefficients $r_\pm$.

When q is of the Schwarz class, then the operator T_q enjoys the famous Faddeev–Zakharov trace formulae [1]. The first two of these formulae can be written in the following form:

$$-4\sum_{j=1}^{N} k_j + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log(1-|r(k)|^2)^{-1}\,dk = \int_{\mathbb{R}} q(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\frac{16}{3}\sum_{j=1}^{N} k_j^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} k^2 \log(1-|r(k)|^2)^{-1}\,dk = \int_{\mathbb{R}} q^2(x)\,dx, \tag{2}$$

with $r = r_-$ and $N < \infty$. One of the results proved by Gesztesy and Holden in [2] is that formula (1) holds for all real-valued potentials q from the set $\bigcup_{\varepsilon>0} L_1(\mathbb{R}, (1+|x|)^{\varepsilon}\,dx)$, while (2) is valid for all real-valued q from the Sobolev space $H_2^1(\mathbb{R})$.

The aim of this talk is to extend the above trace formulae to a largest possible class of potentials. In particular, we shall show that formula (1) remains true for all real-valued q in the space $L_1(\mathbb{R})$, while (2) holds for all real-valued q in the space $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

1. *Zakharov V. E., Faddeev L. D.* The Korteweg-de Vries equation is a fully integrable Hamiltonian system // Funkcional. Anal. i Prilozen. – 1971. – **5**, no. 4. – P. 18–27. (in Russian)
2. *Gesztesy F., Holden H.* Trace formulas and conservation laws for nonlinear evolution equations// Rev. Math. Phys. – 1994. – **6**, no. 1. – P. 51–95.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

УДК 517.36

ФОРМУЛА ЛИУВИЛЛЯ-ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Иван Атамась

Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого

atamas_v@ukr.net

Пусть $\mathrm{conv}\mathbb{R}^2$ – метрическое пространство непустых выпуклых компактов пространства $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим уравнение

$$D_H X(t) = A(t)X(t),\ X(0) = X_0 \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Здесь $D_H X(t)$ – оператор производной Хукухары [1], $X(t) \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^2$, $A \in C(\mathbb{R}; L(\mathbb{R}^2))$, $L(\mathbb{R}^2)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов. $S[X]=S[X,X]$ – площадь выпуклого компакта X.

Теорема 1. *Пусть* $A(t)=A$, *при некотором* $m \in \mathbb{N}$ $A^m = I$, $X(t)$ – *решение задачи Коши (1) с начальным условием* $X(0)=X_0$. *Тогда для нечетных* m, $m \geq 3$ *справедлива формула*

$$S[X(t)]=\frac{1}{m}\left(e^{2t}+2\sum_{q=1}^{[m/2]} e^{2t\cos\frac{2\pi q}{m}}\right)S[X_0]+$$

$$+\frac{2}{m^2}\sum_{p=1}^{m-1}\left((m-p)e^{2t}+2\sum_{q=1}^{[m/2]}\left[(m-p)\cos\frac{2\pi pq}{m}+2t\sin\frac{2\pi pq}{m}\sin\frac{2\pi q}{m}\right]e^{2t\cos\frac{2\pi q}{m}}\right)\times$$

$$\times S[X_0, A^p X_0].$$

При четных m, $m \geq 4$ *справедлива формула*

$$\mathrm{S}[\mathrm{X}(t)]=\frac{1}{m}\left(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+2\sum_{\mathrm{q}=1}^{(m-2)/2}\mathrm{e}^{2t\cos\frac{2\pi q}{m}}\right)\mathrm{S}[\mathrm{X}_0]+$$

$$+\frac{2}{m^2}\sum_{p=1}^{m-1}\left((m-p)\left(\mathrm{e}^{2t}+(-1)^p\mathrm{e}^{-2t}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{q=1}^{(m-2)/2}\left[(m-p)\cos\frac{2\pi pq}{m}+2t\sin\frac{2\pi pq}{m}\sin\frac{2\pi q}{m}\right]\mathrm{e}^{2t\cos\frac{2\pi q}{m}}\right)\mathrm{S}[\mathrm{X}_0,\mathrm{A}^p\mathrm{X}_0].$$

Теорема 2. *Предположим, что* $\mathrm{A}(t)=\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$ *и выполняется неравенство* $\mathrm{tr}^2\mathrm{B}\text{-}4\det\mathrm{B}<0$. *Для площади решения* $\mathrm{X}(t)$ *дифференциального уравнения с производной Хукухары (1) справедлива формула*

$$\mathrm{S}[\mathrm{X}(t)]=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{S}[\mathrm{X}_0,\mathrm{A}(s)\mathrm{X}_0]\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\chi_0(t)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\chi_n(t)}\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\alpha s}\cos\omega ns\,\mathrm{S}[\mathrm{X}_0,\mathrm{A}(s)\mathrm{X}_0]\mathrm{d}s,$$

где $\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathrm{B}$, $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4\det\mathrm{B}-\mathrm{tr}^2B}:=\frac{2\pi}{\theta}$, $\chi_n(t)=\frac{2}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)$, *при* $n=0$ *и* $\chi_n(t)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2\omega^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(n\omega t)+\frac{n\omega}{\alpha}\sin(n\omega t)\right)-1\right)$, *при* $n\neq 0$.

Для получения аналога формулы Лиувилля-Остроградского используем метод векторных функций Ляпунова [2].

1. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2001. – 372 с.
2. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – К.: Наукова думка. – 1991. – 243 с.

FORMULA OF LIOUVILLE-OSTROGRADSKY FOR SOME CLASSES DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HUKUHARA DERIVATIVE

The generalization of the classical Liouville-Ostrogradsky formula for this class of equations, under certain additional restrictions is considered.

УДК 517.956

КРАЙОВА ЗАДАЧА З УМОВАМИ ТИПУ НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ярослав Баранецький, Петро Каленюк

Національний університет «Львівська політехніка»

baryarom@ukr.net, pkalenyuk@gmail.com

Основи теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними було закладено в працях багатьох математиків у другій половині минулого століття.

Для випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами врахування симетрії крайових умов та області, де вивчаються задачі, дозволяє уточнити та покращити властивості розв'язків досліджуваних задач.

Нехай $G \equiv \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m :\ 0 < x_j < X_j < \infty,\ j = 1, ..., m \right\}$, $\mathbb{Z}_0^m \equiv \left\{ k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : k_j \geq 0,\ j = 1, ..., m \right\}$, $|k| \equiv k_1 + ... + k_m$, D_j – оператор диференціювання за змінною x_j, $D^{2s} \equiv D_1^{2s_1} ... D_m^{2s_m}$, $W^s(G) \equiv \left\{ y \in L_2(G) : D^r y \in L_2(G),\ |r| \leq s \right\}$, $\mu_{k,j} \equiv \left((2k_j - 1)\pi X_j^{-1} \right)^2$, $\mu_k^s \equiv \prod_{j=1}^m \mu_{k_j}^{s_j}$.

Вивчається несамоспряжена крайова задача

$$L\left(-D^2\right) y \equiv \sum_{|s| \leq n} (-1)^{|s|} a_s D^{2s} y = f\ , \qquad (1)$$

$$l_{p,j} y \equiv D_j^{2p-2} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2p-2} y\big|_{x_j=X_j} = 0\ ,\ j = 1, ..., m\ ,\ \ p = 1, ..., n\ , \qquad (2)$$

$$l_{n+p,j} y \equiv D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=X_j} + \sum_{r=0}^{1} \sum_{q=0}^{m_p} b_{q,r,p,j} D_j^q y\Big|_{x_j=rX_j} = 0, \qquad (3)$$

$$j = 1, ..., m\ ,\ \ p = 1, ..., n\ .$$

Припущення $P_1 : b_{q,r,p,j} = (-1)^q\, b_{q,1-r,p,j}$, $q = 0,1,...,m_p$, $m_p \leq 2n-1$, $r = 0,1$, $j = 1, ..., m$, $p = 1, ..., n$.

Припущення $P_2 : m_p \leq 2p - 1$, $p = 1, ..., n$.

Припущення $P_3 : \left|\lambda_k\right| \geq C_1 \left|k\right|^{2n} > 0$, $\lambda_k \equiv \sum_{|s|\leq n} \mu_k^s$, $C_1 > 0$, $k \in \mathbb{Z}_0^m$.

Припущення $P_4 : L\left(-D^2\right)$ – сильно карлеманівський вираз, тобто $\left|L\left(-\rho^2\right)\right| \geq C_2 \left|\rho\right|^b > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $C_2 > 0$.

Нехай L – оператор задачі (1) – (3), $Ly \equiv L\left(-D^2\right)y$, $y \in D(L)$, $D(L) \equiv \left\{ y \in W^{2n}(G) : l_{s,j}\, y = 0,\ s = 1,\ldots,2n,\ j = 1,\ldots,m \right\}$.

Теорема 1. *Нехай для будь-яких* $a_s \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\beta| \leq n$, $q = 0,1,\ldots,m_p$, $r = 0,1$, $p = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *справджується припущення* P_1 *.Тоді оператор* L *має власні значення* λ_k, $k \in \mathbb{Z}_0^m$, *та повну і мінімальну в просторі* $L_2(G)$ *систему власних функцій.*

Теорема 2. *Нехай справджуються припущення* $P_1 - P_3$*.Тоді оператор* L *має систему власних функцій, яка є базисом Рісса простору* $L_2(G)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення теореми 2. Тоді для будь якої функції* $f \in L_2(G)$ *існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3).*

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення* P_1, P_2, P_4*.Тоді існує таке число* $s \in \mathbb{N}$*, що для будь-якої функції* $f \in W^s(G)$ *задача (1) – (3) має єдиний розв'язок.*

1. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наукова думка, 1993. – 230 с.
2. *Баранецький Я. О.* Нелокальна крайова задача для рівнянь з постійними коефіцієнтами // Вісн. держ. університету ” Львівська політехніка ” ПМ. – 1997. – 320. – С. 13–15.
3. *Baranetskij Ya. O., Basha A. A.* Nonlocal multipoint problem for differential-operator equations of order 2n // J. Math. Sci. – 2016. – V. 217. No. 2. – P. 176–186. DOI 10.1007/s10958-016-2965-0.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NEUMAN CONDITIONS FOR THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Spectral properties and conditions for the existence of a solution of the boundary value problem for a partial differential equation with constant coefficients of even order are studied.

УДК 517.927.6

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З КРАТНИМ СПЕКТРОМ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПАРНОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРОМ ІНВОЛЮЦІЇ

Ярослав Баранецький, Петро Сохан

Національний університет «Львівська політехніка»

baryarom@ukr.net, sokhanp@gmail.com

При побудові розв'язків багатьох нестаціонарних задач методом Фур'є або його аналогами важливою є властивість базисності системи кореневих функцій відповідних спектральних (за просторовими змінними) задач.

У випадку однієї просторової змінної, коли крайові умови регулярні, але не посилено регулярні за Біркгофом, у праці [1] було встановлено, що система кореневих підпросторів, які відповідають кратним або близьким власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$, із підпросторів. Самоспряженими випадками таких умов є періодичні та антиперіодичні крайові умови, яким відповідають самоспряжені в $L_2(0,1)$ оператори із двократними власними значеннями, що не рівні нулю.

У повідомленні пропонуються результати досліджень спектральних властивостей несамоспряжених збурень рівняння та крайових умов самоспряженої задачі, які при $\beta = 1$ співпадають з умовами антиперіодичності [2,3].

Нехай

$W_2^{2n}(0,1) \equiv \left\{ y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in C[0,1],\ y^{(2n)} \in L_2(0,1),\ m = 0,1,\dots,2n-1 \right\}$,

$I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор інволюції, $Iy(x) \equiv y(1-x)$.

Вивчається багатоточкова задача

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(I) y^{(2p-1)}(x) = f(x)\ ,\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$l_j y \equiv y^{(2n-j)}(0) + (-1)^j y^{(2n-j)}(1) + \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{k_j} b_{j,q,s} y^{(q)}(x_s) = 0,$$

$$j = 1,\dots,n\ , \tag{2}$$

$$l_{n+j} y \equiv y^{(n-j)}(0) + (-1)^j y^{(n-j)}(1) = 0, \quad j = 1,\dots,n\ , \tag{3}$$

$b_{j,q,s} \in \mathbb{R}$, $\alpha_p(I) y \equiv a_p\left(y(x) + y(1-x)\right)$, $a_p \in \mathbb{R}$, $b_{j,q,s} \in \mathbb{R}$,

$0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_r \le 1$, $q = 0,1,\ldots,k_j$, $k_j < 2n$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Нехай L – оператор задачі (1) – (3), $Ly \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x)$, $y \in D(L) \subset W_2^{2n}(0,1)$, $D(L) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : l_j y = 0, j = 1,\ldots,2n \right\}$, L_0 – частковий випадок оператора L, коли $b_{q,s,j} = 0$, $a_p = 0$.

Припущення $P_1 : n = 2\beta - 1$.

Припущення $P_2 : b_{q,s,j} = (-1)^q b_{q,1+r-s,j}$, $x_s = 1 - x_{r+1-s}$, $s = 0,1,..,r$, $q = 0,1,\ldots,m_j$, $r = 0,1$, $j = 1,\ldots,n$.

Припущення $P_3 : k_j \le 2n - j$, $j = 1,\ldots,n$.

Теорема 1. *Усі, не рівні нулю, власні значення самоспряженого оператора* L_0 *є двократними.*

Теорема 2. *Нехай для будь-яких* $a_p \in \mathbb{R}$, $b_{j,q,s} \in \mathbb{R}$, $x_s \in [0,1)$, $q = 0,1,\ldots,k_j$, $k_j < 2n$, $s = 0,1,..,r$, $j, p = 1,\ldots,n$, *виконуються припущення* P_1, P_2. *Тоді власні значення операторів* L_0, L *співпадають та система кореневих функцій оператора* L *є повною і мінімальною в просторі* $L_2(0,1)$.

Теорема 3. *Нехай справджуються припущення* $P_1 - P_3$. *Тоді система кореневих функцій оператора* L *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

1. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**. № 5. – С. 235–236.
2. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наукова думка, 1993. – 230 с.
3. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Крайові задачі з регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом умовами для оператора двократного диференціювання // Мат. методи та фіз. - мех. поля. 2016. – **59**. № 4. – С. 7–25.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MULTIPLE SPECTRA FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EVEN ORDER WITH THE INVOUTION OPERATOR

We investigate the spectral properties of nonselfadjoint operators generated by perturbations of boundary conditions by multipoint and perturbations of the differential equation by a differential expression containing the involution operator.

The eigenvalues and root functions are defined. It is established that the system of root functions contains an infinite number of associated functions, as well as the conditions under which this system is a Riesz basis.

УДК 524.35

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯРИЗАЦІЙНИХ КАРТ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР

Василь Бешлей, Олег Петрук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

beshley.vasyl@gmail.com

Залишки наднових зір (ЗН) вважаються основними джерелами, що прискорюють Галактичні космічні промені (елементарні частинки) до енергій $\sim 10^{15}$ еВ. Вони є астрофізичними прискорювачами, які здатні генерувати енергію співрозмірну чи й вищу за максимальну енергію, отриману у Великому адронному колайдері. Завдяки розвитку спостережуваних методів в астрономії ці об’єкти на сьогоднішній день спостерігаються у всьому електромагнітному діапазоні енергій від радіо – до високоенергетичного гама-випромінювання. Дані, що містять інформацію про прискорення елементарних часток, можна отримати не лише зі спектрів випромінювання, але й карт поверхневої яскравості ЗН.

Окрім просторово розділених карт поверхневої яскравості, важливим джерелом спостережуваної інформації є також карти поляризації ЗН. Такі карти отримані для значної кількості відомих ЗН.

У роботі розроблено теоретичну модель для побудови карт поляризації ЗН з урахуванням ефекту Фарадея (обертання площини поляризації) та випадкового магнітного поля. Розроблено ряд програмних засобів для моделювання розподілів параметрів Стокса в ЗН, які еволюціонують в однорідному та неоднорідному середовищах та магнітних полях. Показано вплив ефекту Фарадея та випадкового магнітного поля на поверхневий розподіл характеристик поляризованого синхротронного випромінювання.

NUMERICAL SIMULATIONS OF POLARIZATION MAPS OF SUPERNOVA REMNANTS

The theoretical model for simulation of radio polarization maps is developed. Maps of Stokes parameters are simulated for different models of supernova remnants in uniform and nonuniform media.

УДК 517.957

ГРУПОЇДИ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Олена Ванєєва

Інститут математики НАН України

vaneeva@imath.kiev.ua

Допустимим перетворенням у класі диференціальних рівнянь називають впорядковану трійку, що складається з двох рівнянь заданого класу та невиродженого точкового перетворення, що переводить перше з цих рівнянь у друге. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда відносно бінарної операції композиції перетворень та називається групоїдом еквівалентності. Клас диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності якого породжено відповідною групою еквівалентності, називають нормалізованим. Такі класи є найбільш зручними для дослідження [1].

Допустимі перетворення дозволяють суттєво спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема, класифікації різних типів симетрій, пошуку локальних законів збереження і точних розв’язків, а також дослідження інтегровності [3]. Отже, важливою задачею є пошук групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, що є цікавими для застосувань, та дослідження їх на нормалізованість (див., наприклад, роботу [4], де вичерпно описано групоїд еквівалентності ненормалізованого класу рівнянь Кортевега–де Фріза).

У цій роботі розглянуто загальний клас (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку

$$u_t = H(t,x,u,u_x,u_{xx}),$$

де $H_{u_{xx}} \neq 0,$ нормалізованість якого доведено у [2]. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу та знайдено відповідні групи еквівалентності. Так, нормалізованими є класи квазілінійних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} &u_t = G(t,x,u,u_x)u_{xx} + F(t,x,u,u_x),\\ &u_t = G(t,x,u)u_{xx} + F(t,x,u,u_x),\\ &u_t = G(t,x,u)u_{xx} + \sum_{k=0}^{n} F^k(t,x,u){u_x}^k, n \geq 1,\\ &u_t = (G(t,x,u)u_x)_x + K(t,x,u)u_x + P(t,x,u). \end{aligned} \tag{1}$$

Довільні елементи G, F, K, P є гладкими функціями своїх аргументів, $G \neq 0$ в усіх випадках. Зауважимо, що підклас класу (1) з $K = 0$ не є нормалізованим.

Оскільки при моделюванні реальних процесів часто виникають еволюційні рівняння зі змінним коефіцієнтом біля u_t, доцільно також розглянути клас

$$S(t,x)u_t = (G(t,x,u)u_x)_x + K(t,x,u)u_x + P(t,x,u), \quad SG \neq 0. \tag{2}$$

Цей клас є нормалізованим, в той час як його підклас з $K=0$ – ні.

Групоїд еквівалентності класу (2) породжений групою еквівалентності цього класу, перетворення з якої мають вигляд

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(t,x), \quad \tilde u = U(t,x)u + V(t,x), \quad \tilde S = Z(t,x,S), \quad \tilde G = \frac{X_x^2}{T_t}\frac{Z}{S}G,$$

$$\tilde K = \frac{X_x}{T_t}\frac{Z}{S}\left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2\frac{U_x}{U}\right)G - 2\frac{U_x u + V_x}{U}G_u - \frac{X_t}{X_x}S\right] - G\frac{X_x}{T_t}\left(\frac{Z}{S}\right)_x,$$

$$\tilde P = \frac{Z}{T_t S}\left[UP + \frac{(U_x u + V_x)^2}{U}G_u - (U_x u + V_x)(K + G_x) + (U_t u + V_t)S + \right.$$

$$\left. + \left(2\frac{U_x}{U}(U_x u + V_x) - U_{xx}u - V_{xx}\right)G\right].$$

Тут T, X, U, V та Z – довільні гладкі функції своїх аргументів, $T_t X_x U \neq 0,$ а також $ZZ_S \neq 0.$

Отримані результати в подальшому буде застосовано, зокрема, для дослідження класу нелінійних рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної

$$f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u), \quad fgA_u \neq 0.$$

1. *Popovych R. O., Bihlo A.* Symmetry preserving parameterization schemes // J. Math. Phys. – 2012. – **53**, № 7. – 073102, 36 p.
2. *Popovych R. O., Samoilenko A. M.* Local conservation laws of second-order evolution equations // J. Phys. A – 2008. – **41**, № 36. – 362002, 11 p.
3. *Vaneeva O. O., Popovych R. O., Sophocleous C.* Equivalence transformations in the study of integrability // Phys. Scr. – 2014. – **89**, № 3. – 038003, 9 p.
4. *Vaneeva O., Pošta S.* Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations // J. Math. Phys. – 2017. – **58**, № 10. – 101504, 12 p.

EQUIVALENCE GROUPOIDS OF CLASSES OF NONLINEAR SECOND-ORDER EVOLUTION EQUATIONS

We study transformational properties of the general class of (1+1)-dimensional second-order evolution equations. The chain of nested normalized subclasses of this class is constructed. The equivalence groupoids of the respective normalized subclasses are found, for certain subclasses that are not normalized the equivalence groups are derived.

УДК 539.3

ОСОБЛИВОСТІ ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ЕКСПОНЕНЦІЙНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Зоряна Васюник

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

z-vasjunyk@ukr.net

Для дослідження характеру галуження розв'язків системи рівнянь реакції-дифузії, яка в загальному випадку описується двома рівняннями виду:

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \Delta\theta - q(\theta, \eta, A), \tag{1}$$

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \Delta\eta - Q(\theta, \eta, A)\,, \tag{2}$$

де $\tau_{\theta,}$ τ_η і l, L – характерні часи і довжини зміни змінних θ і η, A – біфуркаційний параметр, використано метод малого параметра.

Простіший варіант дослідження характеру галуження неоднорідних розв'язків в симетричній плазмі низької густини був проведений у [2]. В роботі [1] здійснено дослідження типу галуження розв'язків для нелінійних рівнянь реакції-дифузії загального вигляду.

В даній роботі на предмет галуження розв'язків досліджено систему рівнянь реакції-дифузії (1)-(2) з експоненційними нелінійностями:

$$q(\theta, \eta, A) = \eta - ch\theta, \qquad Q(\theta, \eta, A) = \eta(\eta - \exp(\theta) + A). \tag{3}$$

Умова, за якої відбувається біфуркація Тьюрінга для цієї системи і яка задає криву нейтральної стійкості, дається нерівністю:

$$\mathrm{sh}(\theta) > \left(\frac{l}{L}\right)^2 \left(2\eta - e^\theta + \grave{A}\right) + 2\frac{l}{L}\left(\eta e^\theta - (2\eta - e^\theta + \grave{A})\,\mathrm{sh}(\theta)\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Відомо, що сценарій переходу через точку біфуркації буває м'яким і жорстким. За м'якого сценарію втрати стійкості коливний періодичний режим встановлюється поступово. Таке галуження розв'язків називають закритичним. У випадку жорсткої втрати стійкості система переходить на новий режим стрибком, тобто реалізується докритичне галуження розв'язку.

Ввівши відхилення $\tilde{\theta} = \theta - \theta_c$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_c$, $\mu = A - A_c$ за умови $\tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \mu \ll 1$ і розкладаючи функції $q(\theta, n, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ в ряд за степенями даного відхилення до третього порядку малості:

$$q(\theta,\eta,A)=\sum_{i,j=0}^{i+j=3} q_{ij}\tilde{\theta}^i\tilde{\eta}^j+q_A\mu+q_{1A}\mu\tilde{\theta}+q_{A1}\mu\tilde{\eta}, \quad (5)$$

$$Q(\theta,\eta,A)=\sum_{i,j=0}^{i+j=3} Q_{ij}\tilde{\theta}^i\tilde{\eta}^j+Q_A\mu+Q_{1A}\mu\tilde{\theta}+Q_{A1}\mu\tilde{\eta}, \quad (6)$$

де q_{ij}, Q_{ij} відповідні коефіцієнти розвинення, отримано наближений розв'язок системи (1)-(2) з нелінійностями (3) та побудовано криву розділу типу галуження розв'язків (див. рис. 1).

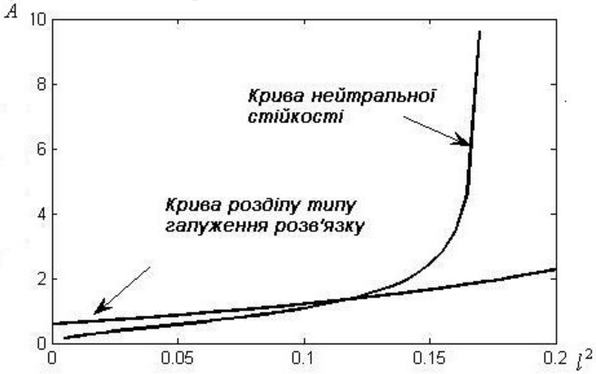


Рис. 1

Отримана крива в деякій точці перетинається з кривою нейтральної стійкості. Якщо значення біфуркаційного параметра A знаходиться нижче від цієї точки, то галуження розв'язку в точці біфуркації буде докритичним. В іншому випадку біфуркація закритична.

1. *Гафійчук В. В., Дацко Б. Й., Васюник З. І.* Метод малого параметра в нелінійних системах реакції-дифузії: умови застосування, побудова розв'язків, аналіз біфуркацій. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Л., 2014. – т.57, №2 - С. 51.
2. *Гафийчук В. В., Кернер Б. С., Осипов В. В.* Квазигармонические стационарные структуры в разогретой электрическим полем электронно-дырочной плазме. // Физические явления в приборах электронной и лазерной техники. – М.: Изд. МФТИ, 1981. – С. 65-69.
3. *Sattinger D.* Topics in stability and bifurcation theory. – Berlin. Springer Verlag. – 1973. – 136 p.

FEATURES OF BRANCHING OF SOLUTION FOR THE REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH EXPONENTIAL NONLINEARITIES

A small parameter method is used to study the nature of nonuniform solution branching for the reaction-diffusion system with exponential nonlinearities. The curve for such branching solution is built.

УДК 517.956.4

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Ольга Возняк, Ігор Мединський

Тернопільський національний економічний університет,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»

voznyak.o.g@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

Нехай n, n_1 і n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq 1$, $n_1 + n_2 = n$. Просторова змінна $x \in R^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in R^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in R^{n_2}$, де $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in R^{n_j}$, $j \in \{1,2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. α і β є неперервними на $[0,T]$ функціями й такими, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і для будь-яких $t \in (0,T]$: $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, причому функція β – монотонно неспадна. $\Pi_T := (0,T] \times R^n$, $\overline{\Pi}_T$ – замикання Π_T.

Доповідь присвячена викладу останніх результатів з побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова та виродженням на початковій гіперплощині, тобто рівняння вигляду

$$\alpha(t)\partial_t u(t,x) - \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) - a_0(t,x)u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi_T, \qquad (1)$$

де коефіцієнти a_{jl}, a_j, $\{j,l\} \subset \{1, n_1\}$ і a_0 є комплекснозначними функціями заданими на $\overline{\Pi}_T$, які задовольняють відповідні умови з праці [3]. За цих умов для рівняння (1) в [3] побудовано класичний ФРЗК і встановлено точні оцінки похідних ФРЗК за просторовими змінними. Встановлені тут оцінки приростів похідних ФРЗК за просторовими змінними доповнюють результати з праці [3] і узагальнюють результати, які одержані у праці [6] для рівнянь ультрапараболічного типу Колмогорова без виродження на початковій гіперплощині.

Для рівнянь, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження і таких, що не мають виродження на початковій гіперплощині подібні результати отримані в [1], а для рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині в [2]. Ці результати отримані за допомогою модифікованого методу Леві, який запропоновано в [4] і розвинуто в працях [5–6] для рівнянь ультрапараболічного типу Колмогорова без виродження на початковій гіперплощині.

Отримані результати доповнюють відповідні результати з [7] для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині.

1. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв’язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2-3. – С. 94–106.
2. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв’язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 43–51.
3. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв’язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Серія: Фіз.-мат. науки. – № 871. – Львів: Видавництао Львівської політехніки, 2017. – С.46–64.
4. *Івасишен С., Мединський І.* Про класичний фундаментальний розв’язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів: Ін-тут прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 36–38.
5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв’язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
6. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв’язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 28–42.
7. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

FUNDAMENTIAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FORULTRAPARABOLIC EQUATION OF KOLMOGORV TYPE WITHDEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

For an ultraparabolic equation of Kolmogorov type with two groups of spatial variables and with degenerations on the initial hyperplane the estimates of increments with respect to spatial variables for the fundamental solution of the Cauchy problem and its derivatives are established.

УДК 517.956.25

ПОТОЧКОВА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПІДСИЛЕНОЮ ЕЛІПТИЧНІСТЮ В ТЕРМІНАХ ПОТЕНЦІАЛА ВОЛЬФА

Михайло Войтович

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

voitovichmv76@gmail.com

Розглядається квазілінійне рівняння четвертого порядку з частинними похідними у дивергентному вигляді

$$\sum_{|\alpha|=1,2} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

де Ω – обмежена відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f \in L^1(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – n-вимірний мультиіндекс з цілими невід'ємними компонентами α_i, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ і $\nabla_2 u = \{D^{\alpha} u : |\alpha| = 1, 2\}$.

Припускаємо, що коефіцієнти A_{α} рівняння (1) є функціями Каратеодорі, що задовольняють умову підсиленої еліптичності та відповідну умову зростання [4]. У модельному випадку це означає, що для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-якого $\xi = \{\xi_{\alpha} \in R : |\alpha| = 1, 2\}$ виконуються нерівності:

$$\sum_{|\alpha|=1,2} A_{\alpha}(x, \xi) \xi_{\alpha} \geq c_1 \{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_{\alpha}|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_{\alpha}|^p \}, \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_{\alpha}(x, \xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \xi)|^{p/(p-1)} \leq c_2 \{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_{\alpha}|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_{\alpha}|^p \}, \tag{3}$$

де $c_1, c_2 > 0$, $1 < p < n/2$, $2p < q \leq n$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком рівняння (1) за умов (2)−(3) називається функція u з простору Соболєва* $W^{1,q}_{2,p}(\Omega) = W^{1,q}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ *така, що* $\sum_{|\alpha|=1,2} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) D^{\alpha} v dx = \int_{\Omega} f v dx$, $\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Основним результатом цієї доповіді є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *– узагальнений розв'язок рівняння (1) за* *умов (2)−(3),* $x_0 \in \Omega$ *– точка Лебега функції* u *і* $\Omega \supset B(x_0, 2\rho)$ *– куля з центром в точці* x_0 *радіуса* 2ρ. *Нехай* $q-1<\gamma<n(q-1)/(n-q+1)$. *Тоді з деякою сталою* $c=c(n,p,q,c_1,c_2,\gamma)>0$ *виконується нерівність:*

$$|u(x_0)| \leq c\left(\rho^{-n}\int_{B(x_0,\rho)}|u(x)|^{\gamma}\,dx\right)^{1/\gamma} + cW_{1,q}^{f}(x_0;2\rho) + c\rho^{(q-2p)/(q-p)}, \quad (4)$$

де $W_{1,q}^{f}(x_0;2\rho)=\int_0^{2\rho}\left\{r^{q-n}\int_{B(x_0,r)}|f(z)|\,dz\right\}^{1/(q-1)}\frac{dr}{r}$ *– потенціал Вольфа [5] правої частини* f *рівняння (1).*

Нерівність (4) є аналогом відомої оцінки Кілпелайнена-Мали [1] для розв’язків рівняння з q-лапласіаном: $\Delta_q u = f$. Такі оцінки цікаві тим, що дозволяють вивчати властивості розв’язків квазілінійних рівнянь [2], аналізуючи поведінку відповідних потенціалів Вольфа, які самі по собі є дієвим інструментом у вивченні тонких властивостей функцій з просторів Соболєва і, загалом, у теорії нелінійного потенціалу [3, 5].

Для рівнянь вищих порядків, зокрема четвертого, з умовою підсиленої еліптичності на коефіцієнти результат Теореми 2 є новим. Його встановлено за допомогою відповідної модифікації методу Кілпелайнена-Мали [1].

Представлена доповідь містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України за конкурсним проектом № 0116U007160, № 0117U006053. *Автор висловлює вдячність член-кореспонденту НАН України І. І. Скрипніку за низку корисних порад і зауважень.*

1. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. – 1994. – **172**, № 1. – P. 137–161.
2. *Kovalevsky A. A., Skrypnik I. I., Shishkov A. E.* Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations. – Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. – 435 p.
3. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала // УМН. – 1972. − **27**, № 6 (168). – С. 67–138.
4. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1118.
5. *Hedberg L. I., Wolff Th. H.* Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1983. – **33**, № 4. – P. 161–187.

POINTWISE ESTIMATE OF SOLUTIONS TO QUASILINEAR FOURTH-ORDER EQUATIONS WITH STRENGTHENED ELLIPTICITY VIA THE WOLFF POTENTIAL

Using an analog of the Kilpeläinen-Malý technique, we obtain a pointwise estimate of solutions to fourth-order quasilinear equations with strengthened ellipticity via the Wolff potential of the right-hand side of the equations. Some examples and applications of the obtained result are given.

УДК 517.9

ІНТЕГРОВНІ СУПЕРКОНФОРМНІ АНАЛОГИ РЕДУКЦІЙ РІВНЯННЯ АЛОНСО-ШАБАТА ТА РІВНЯНЬ ТИПУ ЛІУВІЛЛЯ

Оксана Гентош, Ярема Прикарпатський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Інститут математики НАН України

ohen@ukr.net, yarpry@gmail.com

У статті [1] був розвинений загальний підхід до конструювання інтегровних за Лаксом-Сато (Л-С) систем "небесного" типу на основі класичної теорії Адлера-Костанта-Саймза (АКС) й R-операторних структур, асоційованих з петельною алгеброю Лі векторних полів на торі $\mathbf{T}^n$ та алгеброю Лі голоморфних відносно "спектрального" параметра $\lambda \in \mathbf{S}^1_{\pm} \subset \mathbf{C}$ векторних полів на $\mathbf{T}^n \times \mathbf{C}$. Авторами доповіді для випадку $n=1$ було запропоноване узагальнення цієї Лі-алгебраїчної схеми, пов'язаної з петельною алгеброю Лі $\tilde{g}$ суперконформних векторних полів на суперторі $\mathbf{T}^{1|N} \simeq \mathbf{S}^1 \times \Lambda_1^N$, де $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – алгебра Грассмана над полем $\mathbf{C}$. У доповіді розбиття алгебри Лі $\tilde{g}$ у пряму суму двох підалгебр Лі в околах особливих точок її елементів використано для конструювання інтегровних за Л-С супераналогів редукцій "небесного" рівняння Алонсо-Шабата (А-Ш).

Петельну алгебру Лі $\tilde{g}$ утворюють векторні поля вигляду $\tilde{a} := a\,\partial/\partial x + <Da, D>/2$, де $a \in C^{\infty}(\mathbf{T}^{1|N} \times \mathbf{C}; \Lambda_0)$, $a := a(x, \vartheta; \lambda)$, $(x, \vartheta) \in \mathbf{T}^{1|N}$, $D_{\vartheta_i} := \partial/\partial\vartheta_i + \vartheta_i\,\partial/\partial\vartheta_i$, $\vartheta_i^2 = 0$, $i = \overline{1, N}$, $\vartheta := (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N)^{\mathrm{T}}$, $D := (D_{\vartheta_1}, \ldots, D_{\vartheta_N})^{\mathrm{T}}$, комутатор яких діє за правилом $[\tilde{a}, \tilde{b}] := c\,\partial/\partial x + <Dc, D>/2$, де $c = a\,\partial b/\partial x - b\,\partial a/\partial x + <Da, Db>/2$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{g}$. На її дуальному просторі $\tilde{g}^* \simeq \Lambda^1(\mathbf{T}^{1|N})$ відносно згортки $(\tilde{l}, \tilde{a})_s := \mathrm{res}_{\lambda \in \mathbf{C}}\, \lambda^{-s} \int_{\mathbf{T}^{1|N}} la\, dx d^N \vartheta$, $\tilde{l} \in \tilde{g}^*$, $\tilde{l} := l dx$, $s \in \mathbf{Z}$, градієнт кожного функціонала Казимира $h \in I(\tilde{g}^*)$ справджує рівняння $-(-1)^N < Dl, D\nabla h(l) >/2 + (4-N) l (\nabla h(l))_x /2 + l_x \nabla h(l) = 0, \quad \nabla := \nabla_{-1}.$

Для елементів алгебри Лі $\tilde{g}$ з полюсами довільного порядку у нулі в межах АКС-теорії за допомогою асимптотичного розвинення

$\nabla h(l) \cong \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} \nabla h_j \lambda^j$ генеруючого функціонала Казимира $h \in I(\tilde{g}^*)$ при $|\lambda| \to 0$ та R-деформованої дужки Лі-Пуассона побудовано ієрархію гамільтонових потоків на $\tilde{g}^*$:

$$d\tilde{l} \big/ dt_p = ad_{\nabla h_-^{(p)}(l)} \tilde{l}, \quad \nabla h^{(p)}(l) = \lambda^{-p} \nabla h(l), \quad p \in \mathbf{Z}_+. \qquad (1)$$

де нижній індекс "-" позначає поліноміальну частину ряду Лорана за параметром $\lambda^{-1} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Показано, що умова комутування двох різних потоків з ієрархії (1) еквівалентна зображенню Л-С для інтегровних супераналогів "небесних" рівнянь. Інтегровний за Л-С супераналог другої редукції "небесного" рівняння А-Ш виникає з умови комутування потоків d/dt_1 та $-d/dt_2$, якщо $h_0 = -w_y$, $h_1 = w_t$, $y := t_1$, $t := -t_2$, де $w \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^{1|N}; \Lambda_0)$.

З метою отримання інтегровного за Л-С супераналогу першої редукції рівняння А-Ш розглядаються елементи алгебри Лі $\tilde{g}$, які мають ще один полюс у т. -1, і будується інша ієрархія гамільтонових потоків:

$$d\tilde{l} \big/ d\tau_q = ad_{\nabla \bar{h}_-^{(q)}(l)} \tilde{l}, \quad \nabla \bar{h}^{(q)}(l) = \mu^{-q} \nabla \bar{h}(l), \quad q \in \mathbf{Z}_+,$$

де $\nabla \bar{h}(l) \cong \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} \nabla \bar{h}_j \mu^j$ – асимптотичне розвинення функціоналу $h \in I(\tilde{g}^*)$ при $|\mu| \to 0$, $\mu = \lambda + 1$. Супераналог першої редукції рівняння А-Ш знаходимо з умови комутування потоків d/dt_1 та $d/d\tau_1$, якщо $h_0 = w_y$, $\bar{h}_0 = w_t$, $h_1 = \bar{h}_1 = 0$, $y := t_1$, $t := \tau_1$, де $w \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^{1|N}; \Lambda_0)$.

За допомогою алгебри Лі голоморфних відносно параметра $\lambda \in \mathbf{C}$ суперконформних векторних полів на $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{1|N}$ та дифеоморфного перетворення незалежних змінних отримано інтегровні за Л-С супераналоги рівнянь типу Ліувілля.

1. *Hentosh O. E. et al.* Lie-algebraic structure of Lax-Sato integrable heavenly equations and the Lagrange-d'Alembert principle // J. Geom. Phys. – 2017. – 120. – С. 208–227.

INTEGRABLE SUPERCONFORMAL ANALOGS FOR REDUCTIONS OF THE ALONSO-SHABAT EQUATION AND FOR LIOUVILLE TYPE EQUATIONS

The loop Lie algebra of the superconformal vector fields on an $1|N$-dimensional supertorus is used for constructing the Lax-Sato integrable superanalogs of some Alonso-Shabat heavenly equation reductions. The Lax-Sato integrable superanalogs of the Liouville type equations are found by means of the Lie algebra of the holomorphic in a "spectral" parameter superconformal vector fields on an $1|N$-dimensional complex supertorus.

УДК 517.956.223

ПРОЦЕС ПОШИРЕННЯ ПОЧАТКОВИХ КВАНТОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ В ГРАНИЦІ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

Віктор Герасименко, Вікторія Кречко

Інститут математики НАН України

gerasym@imath.kiev.ua, vi.kre4ko@gmail.com

У доповіді розглядається проблема строгого опису еволюції кореляцій початкових станів квантових систем багатьох частинок в границі самоузгодженого поля.

Із цією метою встановлено асимптотичну поведінку непертурбативного розв’язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ для послідовності маргінальних операторів густини для початкових станів, які описуються одночастинковим оператором густини та кореляційними операторами. Побудовані граничні маргинальпі оператори густини описуються за допомогою кінетичного рівняння з початковими кореляціями, а саме, немарковського квантового кінетичного рівняння Власова.

Доведення отриманих результатів ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів та використанні явного вигляду для твірних операторів розкладу в ряд маргінальних операторів густини [1], [2].

1. *Gerasimenko V. I., Krechko V. V.* On non-perturbative solution of quantum BBGKY hierarchy // Proc. Inst. Math. NASU – 2016. – **13**, No.2. – P. 7–26.
2. *Gerasimenko V. I.* The evolution of correlation operators of large particle quantum systems // Methods Funct. Anal. Topology – 2017. – **23**, No.2, – P. 123–132.

PROCESS OF PROPAGATION OF INITIAL QUANTUM CORRELATIONS IN MEAN FIELD LIMIT

The talk deals with the problem of a rigorous description of the evolution of correlations of initial states of quantum many-particle systems in a mean field limit.

For this purpose we establish asymptotic behavior of a non-perturbative solution of the Cauchy problem of the quantum BBGKY hierarchy for a sequence of marginal density operators in case of initial states specified by a one-particle density operator and correlation operators. The constructed limit marginal density operators are determined by the kinetic equation with initial correlations, namely in terms of the non-Markovian quantum Vlasov kinetic equation.

The proof of obtained results is based on the suitable limit formulas for the cumulants of asymptotically perturbed semigroups of operators and on using of an explicit structure of generating operators of the series expansions of marginal density operators

УДК 518.968

СУМІСНІСТЬ ТА ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Катерина Геселева

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

geseleva1702@gmail.com

Інтегро-функціональні рівняння мають широке застосування в різних областях науки та природознавства. В ряді випадків про розв'язки цих рівнянь буває відома додаткова інформація. Тому важливим є не тільки питання розв'язку такого рівняння, а й встановлення умов сумісності відповідної задачі. Встановленню умов сумісності задач такого типу стосовно операторних рівнянь та розробці методів побудови їх розв'язків присвячено низку наукових праць, зокрема [1-3].

Розглянемо в просторі $L_2[a,b]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt+\int_a^b H(x,t)\,y(h(t))\,dt,\ x\in[a,b], \tag{1}$$

з умовою та обмеженнями

$$y(x)=\psi(x),\ x\notin[a,b],\ \int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx=\gamma_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

де $f(x),\psi(x)$ – задані відповідно на $[a,b]$ та за його межами функції, а $y(x)$ – шукана функція. Лінійно незалежна система функцій $\{\Phi_i(x)\}$ та числова множина $\{\gamma_i\}$, $i=\overline{1,m}$ – відомі. До рівняння (1) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x)=x-\Delta$.

Задачу (1)-(2) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову та обмеження (2).

Ідея варіанту ітераційного методу стосовно задачі (1)-(2) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)\,y_{k-1}(t)\,dt+\int_a^b H(x;t)\,y_{k-1}(h(t))\,dt,\ x\in[a;b], \tag{3}$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x),\ x \notin [a;b], \tag{4}$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)\,dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))\,dt,\ x \in [a;b], \tag{5}$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0,\ x \notin [a,b], \tag{6}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x) y_k(x)dx = \gamma_i,\ i = 1,m,\ y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \tag{7}$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m},$$

де a_{ij} знаходять певним чином через величини $K(x,t)$, $H(x,t)$, $h(t)$, а

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x)dx - \gamma_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Можна прийти до висновку, що метод (3)–(7) буде збіжним, якщо матриця $\Lambda = (a_{ij})$ – невироджена, задача (1)–(2) сумісна і $\rho(M) < 1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (1)–(2), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

1. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1501–1509.
2. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. – 1996. – №3. – С. 82–96.
3. *Лучка А. Ю., Кучерук Т. А.* Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 472–482.

COMPATIBILITY AND CONSTRUCTION OF APPROPRIATE DISPLAYS OF INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH RESTRICTIONS

The conditions of compatibility of integro-functional equations with constraints are investigated. One variant of the iterative method of solving the equation is considered.

УДК 517.938

ЗНАКОЗМІННІ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

Іван Грод

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

igrod@ukr.net

Одним із важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1]. Ця задача тісно зв'язана з властивостями певного виду систем лінеаризованих за частиною змінних. Такі системи диференціальних рівнянь в теперішній час прийнято називати лінійним розширенням динамічної системи. Якщо праві частини таких систем є періодичними залежними від багатьох змінних, то їх прийнято називати лінійними розширеннями динамічної системи на торі. Важливим завданням для таких систем є вивчення питання існування функції Ґріна, у випадку багатовимірного тору функції Ґріна-Самойленка [1]. Виявляється [2], існування функції Ґріна є тісно зв'язаним з теорією функцій Ляпунова. Такі функції розглядаються у вигляді квадратичних форм, які не тільки можуть змінювати знак, а й вироджуватись у певних точках. При цьому їх похідна в силу лінійного розширення є знаковизначеною. Часто лінійне розширення має єдину функцію Ґріна, а функцій Ляпунова завжди існує безліч. Зв'язок між матрицями проектування в структурі функції Ґріна і функціями Ляпунова і дотепер не слабо досліджений. Запропонована доповідь присвячена цьому питанню.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)\,y, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_m(x)\right)$ – вектор-функція, визначена при всіх $x \in \mathbb{R}^m$, локально задовольняє умові Ліпшиця. Крім того, будемо припускати, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє нерівності $\left\| f(x) \right\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2. Простір таких функцій $f(x)$ коротко будемо позначати через $C_{Lip}\left(\mathbb{R}^m\right)$

Приведені припущення дозволяють стверджувати, що задача Коші $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$,

$x\big|_{t=0} = x_0$ має єдиний розв'язок $x = x(t; x_0)$ для кожного фіксованого $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і цей розв'язок визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$. Матриця $A(x)$ в системі (1) є квадратною $n \times n$ -вимірною, елементами якої є дійсні скалярні функції, визначені, неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^m$.

Будемо надалі використовувати наступні позначення: $\Omega_\tau^t(x)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи $\frac{dy}{dt} = A(x(t;x))y$ нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x)\big|_{t=\tau} = I_n$, $C'(\mathbb{R}^m; f)$ – підпростір простору $C^0(\mathbb{R}^m)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F(x(t;x))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, причому за означенням $\frac{d}{dt}F(x(t;x))\Big|_{t=0} \overset{df}{=} \dot{F}(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Означення. *Нехай існує* $n \times n$ *-вимірна матриця* $C(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ *така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau;x)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(x)\left[C(x(\tau;x)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

виконуться оцінка

$$\|G_0(\tau, x)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} \tag{3}$$

з деякими додатніми сталими K, γ. *Тоді функцію (2) прийнято називати функцією Ґріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи (1).*

Теорема 1. *Нехай система (1) має єдину функцію Ґріна (2) з оцінкою (3), тоді кожна симетрична матриця* $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, *для якої виконується умова* $\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)\right]y, y \right\rangle \ge \|y\|^2$, *буде задовольняти нерівність:*

$$\left\langle S(x)y, \left[I_n - 2C(x)\right]y \right\rangle \ge \beta\|y\|^2,$$

де $\beta = \dfrac{1}{2\left\|A + A^T\right\|_0}$, $\quad \left\|A + A^T\right\|_0 = \sup\limits_{x \in R^m} \left\|A(x) + A^T(x)\right\|$.

1. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems // Taylor& Francis Inc, London, 2003. – 367 c.
2. *Грод І. М., Кулик В. Л.* Про зв'язок функції Ґріна і Ляпунова в лінійних розширеннях динамічних систем // Укр.мат.журн., – 2014. – **66**, №4. – С. 551–557.

THE USE SIGN-VARIABLES FUNCTIONS OF LIAPUNOV FOR EXPANSIONS OF DYNAMIC SYSTEMS ON MANIFOLDS

Using the method of sign-variables o f Liapunov functions, the questions of regularity of linear extensions of dynamical systems on manifolds have been studied.

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ДОВІЛЬНИМ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Надія Гузик

Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного

hryntsiv@ukr.net

У прямокутнику $\Omega_T = \{(\mathrm{x},\mathrm{t}): 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача одночасного визначення двох залежних від часу коефіцієнтів $a = a(t),\ a(t) > 0, t \in [0,T], b = b(t)$ у параболічному рівнянні

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in [0,h]$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T],$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ t \in [0,T], \qquad \int_0^h u(x,t)dx = \mu_4(t), t \in [0,T].$$

Відомо, що $\psi = \psi(t)$ – така монотонно зростаюча функція, що $\psi(t) > 0,\ t \in (0,T],\ \psi(0) = 0$. Досліджується випадок слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to+0} \int_0^t \psi^{-1}(\tau)d\tau = 0.$

За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови існування розв'язку задачі (1)-(5). Доведення єдиності розв'язку зводиться до дослідження інтегрованості ядер системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

DETERMINATION OF THE UNKNOWN PARAMETERS IN THE PARABOLIC EQUATION WITH WEAK POWER DEGENERATION

We establish conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for simultinuous determination of two coefficients in the degenerate parabolic equation. The degeneration of the equation is caused by the function at the derivative with respect to time, which vanishes at the initial moment of time. The case of weak degeneration is investigated.

УДК 534.1

ДИНАМІКА ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ – МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЇХ ОСОБЛИВОСТІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Анатолій Дем'яненко

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

anatdem@ukr.net

Пам'яті професора Горошко О. О.

З часу виникнення проблеми дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, приводом до чого було руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року, минуло 170 років. За цей період розглянуто і досліджено багато задач з урахуванням впливу рухомих навантажень різних за природою і характером дії на самі різноманітні конструкції, системи і споруди. У динамічному XX-XXI сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи в свою чергу появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик руху таких систем. Щораз більший інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач в рамках певних аналогій можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підіймальних машин [2, 3]. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різні варіанти постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [4, 8]. Найбільш складним з точки зору дослідження є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції так і сили інерції рухомого навантаження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху таких об'єктів зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot q(x,t) \tag{1}$$

з відповідними крайовими та початковими умовами, де при сталій швидкості руху

$$q\left(x,t\right) = -\frac{q_0+q_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по-перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q(x,t)$, який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить, як від інтенсивности $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x,y,t)$, причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x,y,t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x,y,t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x,y,t)$. Тобто в такого роду системах силова дія не є заздалегідь визначеною, а обумовлена поточним деформованим станом системи і є слідкуюча за ним. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора (2) зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу, причому швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50-80 м/с, газів 200-250 м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60% від загальної кількості відмов [5]. Задачі динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та суттєву значимість для практики, складають самостійний напрямок у будівельній механіці МТДТ. У зв'язку з неможливістю прямого застосування методу Фур'є, до цих задач у загальному випадку зроблені спроби його модифікації та узагальнення [9]. Саме в розвиток цього напрямку професор Горошко О. О. започаткував метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О. О. Горошко [1]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки [2-4], загальний розв'язок диференціального рівняння руху (1) отримуємо у вигляді суми двох рядів $w\left(x,t\right)=\sum_{i=1}^{n} a_n \varphi_n\left(x\right)\cos\left(\omega_n t+\beta_n\right)+\sum a_n \psi_n\left(x\right)\sin\left(\omega_n t+\beta_n\right)$, – один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, а саме, інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження або інших чинників системи [2-3]. Згодом розвиток таких методів з практичної площини перейшов у чисто фізико-математичну та набув узагальнень у працях школи Каленюка П. І. [6-7], які знаходять і, без сумніву, знайдуть своє подальше застосування. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню цього класу задач динаміки пружних систем методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології, чого не було раніше, не кажучи вже про часи G. W. Housner, Я. Г. Пановко та інших. В доповіді наведено результати досліджень методом двохвильового подання руху деяких задач динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження.

1. *Горошко О. А.* Собственные и сопровождающие колебания в системах с подвижными инерционными нагрузками // Тр. V междунар. конф. по нелинейным колебаниям. 1970, т.3, с.215-220
2. *Горошко О. А.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О. А. Горошко, Г. Н. Савин. - К: Наукова думка, 1973. с.32-40
3. *Горошко О. О.* Двохвильові процеси в механічних системах/ О. О. Горошко, А. Г. Дем'яненко, С. П. Киба. - К.: Либідь, 1991. с.83-94
4. *Дем'яненко А. Г.* Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження/ А. Г. Дем'яненко / Вібрації в технінці та технологіях.- 2014.- № 2(74). с. 12-22.
5. *Доценко П. Д.* Динамика трубопроводных систем / П. Д. Доценко. – Харьков.: Основа, 1998. с.10-15
6. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. К., 1977,-122 с.
7. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002.- 292с.
8. *Пановко Я. Г.* Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1987.с.277-294
9. *Housner G. W.* Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. / G. W. Housner // Trans ASME – 1952. - vol.19, №2, p. 205-209.

DYNAMICS OF ELASTIC OBJECTS UNDER MOVABLE LOADING - MECHANCAL, MATHEMATICAL MODELS, FEATURES AND METHOD FOR RESEARCH

This paper describes some features of the mathematical models for the elastic elements with movable load. In these systems two forms of own oscillations – the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. The accompanying component is caused by the mobile inertia load and they are not trivial only when this factor exists.

УДК 517.956.4

ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ ПОХІДНИХ ВІД ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Віталій Дронь

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

vdron@ukr.net

Нехай b, n_1, n_2, n_3 – натуральні числа, $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2 + n_3$; $x := (x_1, x_2, x_3) \in R^n$, $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in R^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; $T-$ задане додатне число; $k_1 := (k_{11}, \dots, k_{1n_1})$ – n_1-вимірний мультиіндекс, $|k_1| := k_{11} + \dots + k_{1n_1}$, $\partial_{x_1}^{k_1} := \partial_{x_{11}}^{k_{11}} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_{1n_1}}^{k_{1n_1}}$.

Розглядаються інтеграли типу

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{R^n} M(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in (0,T] \times R^n, \tag{1}$$

де комплекснозначна функція M має властивості похідних від фундаментального розв'язку задачі Коші G для рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1} \right) u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in (0,T] \times R^n. \tag{2}$$

У рівнянні (2) диференціальний вираз $\partial_t - \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1}$ – параболічний за І. Г. Петровським, а коефіцієнти a_{k_1} – неперервні на $[0,T]$ функції.

Рівняння (2) належить до класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку $2b$ та узагальнює відоме рівняння А. М. Колмогорова дифузії з інерцією. У [1] встановлено структуру і властивості функції G та її похідних.

Припускаємо, що функція M має вигляд

$$M(t,x;\tau,\xi) := (t-\tau)^{-\nu-N} \Omega(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset R^n,$$

де $\nu \in (0,1] \cup \{1 + 1/(2b)\} \cup \{2b + 1/(2b)\}$, $N := (n_1 + (2b+1)n_2 + (4b+1)n_3)/(2b)$ та існують сталі $\gamma \in (0,1]$, $C > 0$ і $c > 0$ такі, що

$$| \Omega(t, x; \tau, \xi) | \le C \exp\{-c\rho(t-\tau, x, \xi)\},$$

$$| \Omega(t, x; \tau, \xi) - \Omega(t, x'; \tau, \xi) | \le$$

$$\le C(d(x; x'))^{\gamma} (\exp\{-c\rho(t-\tau, x, \xi)\} + \exp\{-c\rho(t-\tau, x', \xi)\}),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x, x', \xi\} \subset R^n.$$

Тут $\rho(t, x, \xi) := t^{1-q} \sum_{j=1}^{n_1} | x_{1j} - \xi_{1j} |^q + t^{1-2q} \sum_{j=1}^{n_2} | x_{2j} + t x_{1j} - \xi_{2j} |^q + t^{1-3q} \sum_{j=1}^{n_3} | x_{3j} +$

$+ t x_{2j} + (t^2/2) x_{1j} - \xi_{3j} |^q$, $q := 2b/(2b-1)$, $d(x; x') := \sum_{j=1}^{3} | x_j - x'_j |^{1/(2b(j-1)+1)}$.

Отримані властивості інтеграла (1) описуються належністю функції u до гельдерових просторів, які певним чином необмежено зростають при $| x | \to \infty$.

У дослідженнях використано методику з [2]. Їх результати можна використати для встановлення коректної розв’язності задачі Коші для рівняння (2).

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhaűser Verlag. – 2004. – 390 p.
2. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Мат. Студії. – 2000. – **13**, №1. – С. 33-46.

PROPERTIES OF INTEGRALS OF THE TYPE OF DERIVATIVES OF VOLUME POTENTIAL FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV EQUATION OF ARBITRARY ORDER

The work is devoted to study of properties of integrals, which have the type of derivatives of volume potential generated by fundamental solution of the Cauchy problem for an ultraparabolic equation of arbitrary order. The equation is generalized Kolmogorov equation for diffusion with inertia.

The properties are described by that the integral belongs to Hölder spaces, which are in a certain way unlimited increased as $| x | \to \infty$. *The results might be applied to establish the well-posedness of the Cauchy problem.*

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКОЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Олександр Зернов, Юлія Кузіна

Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського, Військова академія (м. Одеса)

zernov.o@gmail.com, yuliak@te.net.ua

Розглядається задача Коші

$$\alpha(t)x'(t) = at + b_1 x(t) + b_2 x(g(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))),$$
$$x(0) = 0,$$

де $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ – невідома функція, a, b_1, b_2 – сталі, $\alpha:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовна функція, $\lim\limits_{x\to+0}\alpha(t)=0$, $\lim\limits_{x\to+0}\alpha'(t)=0$, $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$, $h:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервні функції, $g(t)\le t$, $h(t)\le t$ при $t\in(0,\tau)$, $\varphi: D\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Послідовно розглядаються випадки:

$$1)\ \int_0^\tau \frac{dr}{\alpha'(t)} = +\infty; \qquad 2)\ \int_0^\tau \frac{dr}{\alpha'(t)} < +\infty.$$

Отримано достатні умови, при виконанні яких задача Коші, що досліджується, має непорожню множину неперервно диференційовних розв'язків $x:(0,\rho)\to\mathbb{R}$ (ρ – достатньо мале), кожен з яких має властивість:

або $x(t) = O\left(\left(\int_t^\tau \frac{dr}{\alpha'(t)}\right)^{-1}\right),\quad t\to+0$ у першому випадку,

або $x(t) = O\left(\int_0^t \frac{dr}{\alpha'(t)}\right),\quad t\to+0$ у другому випадку.

При дослідженні використано методи функціонального аналізу і якісної теорії диференціальних рівнянь.

ON SOLUTIONS OF A SOME SINGULAR INITIAL VALUE PROBLEM

Some singular initial value problem is under consideration. Nonempty set of solutions was found.

УДК 517.956.4

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГОГ РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Степан Івасишен, Галина Пасічник

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ivasyshen.sd@gmail.com, pasichnyk.gs@gmail.com

Доповідь присвячена задачі Коші для одного ультрапараболічного рівняння, яке містить виродження на початковій гіперплощині, а коефіцієнти в групі молодших членів необмежено зростають на нескінченності.

Рівняння, яке розглядається, має вигляд

$$\begin{gathered}\alpha(t)\partial_t u-\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}u+\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}u+\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}u+\\ +b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\big(x_{1j}u\big)\Big)-au=0,\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n,\end{gathered}\tag{1}$$

де $n_3\le n_2\le n_1$; $n:=n_1+n_2+n_3$; $x=(x_1,x_2,x_3)$, $x_l:=(x_{l1},\ldots,x_{ln_l})\in\mathbb{R}^{n_l}$, $l\in\{1,2,3\}$; α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(0)\beta(0)=0$, функція β монотонно неспадна; a_{js}, b і a – дійсні сталі, причому $a_{js}=a_{sj}$, $\{j,s\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\delta>0\quad\forall\sigma_1:=(\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}:\ \sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s}\ge\delta|\sigma_1|^2.$$

Для рівняння (1) знайдено явну формулу для фундаментального розв’язку задачі Коші, за допомогою якої встановлено його різні властивості та досліджено розв'язність задачі Коші у випадку слабкого виродження.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH INCREASING COEFFICIENTS AND DEGENERATIONS ON THE INITIAL HYPERPLANE

A fundamental solution of the Cauchy problem for same ultraparabolic equation with increasing at the infinity coefficients and with degenerations on the initial hyperplane is investigated.

УДК 517.95

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ В УТОЧНЕНІЙ ШКАЛІ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА ФУНКЦІЙ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Володимир Ільків, Наталія Страп

Національний університет «Львівська політехніка»

ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua

Розглянуто задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною

$$\sum_{|\hat{s}|\le n} a_{\hat{s}} A_1^{s_1} \ldots A_p^{s_p} d_t^{s_0} u(t) = \varepsilon f(u), \tag{1}$$

$$\mu\, d_t^m u\Big|_{t=0} - d_t^m u\Big|_{t=T} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$, $a_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_t = d/dt$; $A_j : X \to X$, $i = 1,\ldots, p$, – лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення, тобто існує повна ортонормована система елементів $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, таких, що виконуються рівності

$$A_i x_k = \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1,\ldots, p, \quad k \in \mathbb{N},$$

для деяких комплексних чисел α_{ik}; X – сепарабельний гільбертів простір.

Розв'язність даної задачі досліджено в уточненій шкалі просторів Соболєва функцій дійсних змінних, а саме у шкалі гільбертових просторів $X_{d,r,\varphi,\psi}(\Omega)$, $d, r \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in M$, $\Omega \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, функцій

$$u(t,\Omega) = \sum_{(k,m)\in\Omega} u_{m,k} x_k e^{\tau(m)t},$$

де $\tau(m) = -\ln\mu / T + i\, 2\pi m / T$, $\ln\mu$ – головне значення логарифма, зі скалярним добуком, що індукує норму

$$\|u(t,\Omega)\|_{d,r,\varphi,\psi}^2 = \sum_{(k,m)\in\Omega} \left(1 + \|\alpha_k\|^2\right)^d \left(1 + m^2\right)^r \left|\varphi(k)\psi(m) u_{m,k}\right|^2,$$

M – множина повільно змінних на нескінченності функцій [3].

У шкалі $\left\{X_{d,r,\varphi,\psi}(\Omega)\right\}_{d,r\in\mathbb{R},\,\varphi,\psi\in M}$ числові параметри (d,r) визначають основну (степеневу) гладкість, а функціональні параметри (φ,ψ) – допоміжну гладкість функцій з простору $X_{d,r,\varphi,\psi}(\Omega)$. Іншими словами, параметри (φ,ψ) уточнюють основну гладкість (d,r).

Розв'язок задачі (1), (2) знайдено у вигляді границі послідовності гладких (аналітичних) функцій зі скінченно-вимірних (зростаючої розмірності) підпросторів просторів $X_{d,r,\varphi,\psi}(\Omega)$. Доведення розв'язності задачі і побудова послідовності проведено за схемою Неша-Мозера [1, 2, 3].

Найбільш важливим моментом у цій схемі є отримання оцінок норм лінійних операторів, що виникають при обертанні лінеаризованих операторів у кожній ітерації алгоритму, і основна трудність, яка з цим пов'язана – це їх діагональні елементи, які можуть бути як завгодно малими.

Отже, розв'язність задачі (1), (2) залежить від проблеми малих знаменників, для подолання якої використано метричний підхід [3, 4]. Саме тому розв’язки задачі відповідної гладкості побудовано на множині тих параметрів задачі, для яких власні значення лінаеризованих операторів відокремлені від нуля і якщо наближаються до нього, то не надто швидко.

1. *Berti M., Bolle P.* Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations // Duke Math. J. – 2006. – 134, № 2.– С. 359-419.
2. *Berti M., Bolle P.* Sobolev Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations in Higher Spatial Dimensions // Arch. Rational Mech. Anal. – 2010. – 195, № 2. – С. 609-642.
3. *Il'kiv V. S., Strap N. I.* Solvability of a nonlocal boundary-value problem for the operator-differential equation with weak nonlinearity in a refined scale of Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. – October 2016. – 218, № 1. – P. 1-15.
4. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

SOLVABILITY CONDITIONS OF A NONLOCAL PROBLEM FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION WITH WEAK NONLINEARITY IN A REFINED SCALE OF SOBOLEV SPACES OF FUNCTIONS OF REAL VARIABLES

The nonlocal boundary-value problem for the operator-differential equation with weakly nonlinear right-hand side is investigated in the Hilbert Hörmander spaces that are forming a refined Sobolev scale of spaces of functions of several real variables. The proof of the theorems is carried out within the Nash–Moser iterative scheme. In this work, the crucial point is the construction of estimates of the norms of inverse linearized operators in each iteration. The estimation is related to the problem of small denominators, which is solved within a metric approach on the set of parameters of the problem.

УДК 517.95

УМОВИ КОРЕКНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ТРИТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ПЛОСКІЙ ОБЛАСТІ

Петро Каленюк, Ірина Волянська, Володимир Ільків, Зіновій Нитребич

Національний університет «Львівська політехніка»

pkalenyuk@gmail.com, i.volyanska@i.ua, ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Досліджено задачу з триточковими умовами за часовою змінною t для безтипного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами у двовимірному циліндрі $D=[0,T]\times\Omega$, де $T>0$, Ω – одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$Lu=\partial_t^3 u+\sum_{j=0}^{1} a_{2j}\partial_x^j\partial_t^2 u+\sum_{j=0}^{2} a_{1j}\partial_x^j\partial_t u+\sum_{j=0}^{3} a_{0j}\partial_x^j u=0,$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\quad u(\tau,x)=\varphi_2(x),\quad u(T,x)=\varphi_3(x),\quad (0<\tau<T),$$

де $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x=\partial/\partial x$, $\vec{a}=(a_{21},a_{12},a_{03},a_{20},a_{11},a_{02},a_{10},a_{01},a_{00})\in\mathbb{C}^9$, $\varphi_1=\varphi_1(x)$, $\varphi_2=\varphi_2(x)$, $\varphi_3=\varphi_3(x)$ – задані, $u=u(t,x)$ – шукана функція.

Дана робота доповнює дослідження роботи [2], у якій описаний випадок, коли триточкові умови фіксують стан процесу через однакові часові проміжки. Особливістю даної роботи є встановлення умов однозначної ров'язності триточкової задачі з нерівновіддаленими часовими вузлами у просторах періодичних функцій з коефіцієнтами Фур'є експоненційного росту, а саме:

$E_\alpha^q(\Omega)$, де $\alpha, q\in\mathbb{R}$, – гільбертів простір періодичних функцій $\psi=\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k e^{ikx}$ з нормою $\|\psi\|^2_{E_\alpha^q(\Omega)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{k}^{2q}e^{2\tilde{k}\alpha}|\psi_k|^2$, $\tilde{k}=\sqrt{1+k^2}$;

$E_\beta^{3,q}(D)$, де $\beta:[0,T]\to\mathbb{R}$, – банахів простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що похідні $\partial_t^l u(t,\cdot)$, які визначені формулою $\partial_t^l u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k^l(t)e^{ikx}$, $l=0,1,2,3$, для кожного $t\in[0,T]$ належить до просторів $E_{\beta(t)}^{q-l}(\Omega)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $E_\beta^{3,q}(D)$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{E^{3,q}_{\beta}(D)} = \sum_{l=0}^{3} \max_{[0,T]} \left\|\partial_t^l(t,\cdot)\right\|^2_{E^{q-l}_{\beta(t)}(\Omega)}.$$

При дослідженні задачі враховувалися два граничні значення (на $\pm\infty$) характеристичного многочлена вихідного рівняння та знак дійсних частин їх коренів. Характерним для задачі є одна просторова змінна та відсутність при цьому проблеми малих знаменників, як і у задачі з роботи [2], що відрізняє їх від умовно коректних задач з багатьма просторовими змінними [1, 3-7].

Отже, серед багатоточкових задач виділено і досліджено триточкові коректно поставлені за Адамаром задачі.

1. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11.– С. 1468–1476.
2. *Волянська І. І., Ільків В. С.* Умови розв’язності триточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 2. – С.74–100.
3. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ “Львівська політехніка”, 2002. – 292 с.
4. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Доповіді НАН України. – 1996. – № 3. – С. 10–14.
5. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
6. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26.
7. *Symotyuk M. M., Tymkiv I. R.* Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time // Carpathian Matchematical Publication. – 2014. – V.6, No 2. – P. 351–359.

CONDITIONS OF CORRECT SOLVABILITY OF THREE-POINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN THE PLANE DOMAIN

The problem with three-point conditions for homogeneous partial differentional equations in a plane domain is investigated. Correctness after Hadamard of the problem is shown, which distinguishes it from the conditionally correct problem with many spatial variables. We have proved the uniqueness theorem and have established the existence conditions for the solution of the problem in the spaces of periodic functions with exponential growth of Fourier coefficients.

УДК 517.9

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА ПРИ ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Володимир Колісниченко

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

v.m.kolisnychenko@gmail.com

Дослідження стійкості деяких механічних систем призводить до необхідності врахування запізнення і параметричних збурень, а також різноманітних збурень параметрів самої системи. Якщо при цьому на механічну систему діють імпульсні збурення у фіксовані моменти часу, то математичною моделлю руху такої системи є диференціальні рівняння з імпульсною дією та запізненням.

Умови стійкості диференціальних рівняння з імпульсною дією і запізненням зі сталими коефіцієнтами досліджені у [1, 2].

В даній роботі розглядається задача стійкості диференціальних рівнянь з імпульсною дією і запізненням зі змінними коефіцієнтами, зокрема розглядається стійкість математичного маятника при дії імпульсних та параметричних збурень.

Рівняння руху математичного маятника мають вигляд

$$\ddot{\phi}(t)+\frac{2\mu}{m}\dot{\phi}(t)+\frac{g}{l}\sin\phi(t)=\frac{b(t)}{ml}\sin\phi(t-\theta),\ t\neq k\theta,$$
$$\Delta\phi(t)=0,\ t=k\theta,$$
$$\Delta\dot{\phi}(t)=\frac{p}{ml}\sin\phi(t), t=k\theta.$$

Очевидно, що дана система має два положення рівноваги нижнє $\phi_1^*=0$ та верхнє $\phi_2^*=\pi$. Розглянемо питання про стійкість нижнього положення рівноваги. Лінеаризовану систему рівнянь збуреного руху в околі нижнього положення рівноваги можна представити у формі лінійної періодичної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau}=Ax(\tau)+\bar{b}(\tau)Bx(\tau-\bar{\theta}),\ \tau\neq k\bar{\theta},$$
$$\Delta x(\tau)=\bar{p}Cx(\tau),\ \tau=k\bar{\theta},$$

де $x\in R^2$, матриці A, B і C мають вигляд

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\bar{\mu}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Можна обчислити

$$e^{A\tau} = e^{-\bar{\mu}\tau}\begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix},$$

де $a_{11}(\tau) = \cos(\Omega\tau) + \dfrac{\bar{\mu}}{\Omega}\sin(\Omega\tau)$, $a_{12}(\tau) = -a_{21}(\tau) = \dfrac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega}$,

$a_{22}(\tau) = \cos(\Omega\tau) - \dfrac{\bar{\mu}}{\Omega}\sin(\Omega\tau)$, $\Omega = \sqrt{1-\bar{\mu}^2}$ (тут припускається, що $\bar{\mu} \in (0,1)$).

$$\Phi = (I + \bar{p}C)e^{A\bar{\theta}} = e^{-\bar{\mu}\bar{\theta}}\begin{pmatrix} a_{11}(\bar{\theta}) & a_{12}(\bar{\theta}) \\ \bar{p}a_{11}(\bar{\theta}) - a_{12}(\bar{\theta}) & a_{22}(\bar{\theta}) + \bar{p}a_{12}(\bar{\theta}) \end{pmatrix},$$

$$K(\tau) = \bar{b}(\tau)e^{-A\tau}Be^{A\tau} = \bar{b}(\tau)\begin{pmatrix} a_{12}(-\tau)a_{21}(\tau) & a_{12}(-\tau)a_{22}(\tau) \\ a_{22}(-\tau)a_{21}(\tau) & a_{22}(-\tau)a_{22}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Легко показати, що

$$\|K(\tau)\| = |\bar{b}(t)|\left(1 + \frac{4\bar{\mu}^2}{\Omega^4}\sin^4(\Omega\tau)\right)^{1/2}, \|\Phi\| = e^{-\bar{\mu}\bar{\theta}}\sqrt{\frac{s+\sqrt{s^2-4}}{2}},$$

$$s = 2\left(\cos^2(\Omega\bar{\theta}) + \frac{1+\bar{\mu}^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\bar{\theta})\right) - \frac{4\bar{\mu}}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\bar{\theta})\bar{p} +$$

$$+\left(\cos^2(\Omega\bar{\theta}) + \frac{1+\bar{\mu}^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\bar{\theta}) + \frac{2\bar{\mu}}{\Omega}\sin(\Omega\bar{\theta})\cos(\Omega\bar{\theta})\right)\bar{p}^2.$$

Достатні умови асимптотичної стійкості нижнього положення рівноваги математичного маятника мають вигляд

$$\sqrt{\frac{s+\sqrt{s^2-4}}{2}}\exp\left(\int_0^{\bar{\theta}}|\bar{b}(\tau)|\left(1 + \frac{4\bar{\mu}^2}{\Omega^4}\sin^4(\Omega\tau)\right)^{1/2}d\tau - \bar{\mu}\bar{\theta}\right) < 1.$$

1. *Иванов И. Л., Слынько В. И.* Критерий устойчивости автономных линейных систем с запаздыванием и периодическим импульсным воздействием // Прикладная механика. – **49**, 6. – 2013. – С. 120–131.
2. *Слынько В. И.* Об устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикладная механика. – 2005. – **41**, 6. – С.130–139.

DYNAMIC STABILITY OF A MATHEMATICAL PENDULUM UNDER THE ACTION OF IMPULSE AND PARAMETRIC PERTURBATIONS.

Dynamic stability of a mathematical pendulum under the action of impulse and parametric perturbations is considered. Sufficient conditions for the asymptotic stability of the lower equilibrium position of the pendulum are established.

УДК 517.946

ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

Іван Конет, Тетяна Пилипюк

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \left\{ (r,\phi,z) \middle| r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \phi \in [0;2\pi); z \in (0;+\infty) \right\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної ϕ класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу 2-го порядку [2]

$$\left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\phi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j - \chi_j^2 u_j = -f_j(r,\phi,z);$$

$$r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1};$$

з крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = g_j(r,\phi);\ \ \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Bigg|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0,1; \quad j = \overline{1, n+1},$$

умовами спряження [1]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Bigg|_{r=R_k} = 0;\ \ j = 1,2;\ \ k = \overline{1, n};$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку I_n^+, де a_{rj}, $a_{\phi j}$, a_{zj}, χ_j, h, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі; $\tilde{n}_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;$ $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$ $f(r,\phi,z) = \{ f_1(r,\phi,z), f_2(r,\phi,z), \ldots, f_{n+1}(r,\phi,z) \};$ $g(r,\phi) = \{ g_1(r,\phi), g_2(r,\phi), \ldots, g_{n+1}(\phi,z) \}$ – задані обмежені неперервні функції; $u(r,\phi,z) = \{ u_1(r,\phi,z), u_2(r,\phi,z), \ldots, u_{n+1}(r,\phi,z) \}$ – шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Розглянуто такі 4 канонічні випадки:

1) $R_0 \equiv 0$; $R_{n+1} \equiv +\infty$ (півпростір),
2) $R_0 > 0$; $R_{n+1} \equiv +\infty$ (півпростір з порожниною),
3) $R_0 \equiv 0$; $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (напівобмежений суцільний циліндр),
4) $R_0 > 0$; $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (напівобмежений порожнистий циліндр).

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних крайових задач одержано методом класичних інтегральних перетворень Фур'є та гібридних інтегральних перетворень (Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го роду, Ганкеля 2-го роду) у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Ґріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків стаціонарних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

1. *Конет І.М.*, *Пилипюк Т.М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. – 80 с.
2. *Самойленко В.*Г., *Конет І.М.* Рівняння математичної фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 283 с.

ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN SEMIBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL-CIRCULAR DOMAINS

Integral representations of unique exact analytic solutions of elliptic boundary value problems in semibounded piecewise-homogeneous cylindrical-circular domains are obtained.

УДК 517.9

РОБАСНА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ

Станіслав Кравчук

Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького

qkp@ukr.net

Важливою задачею теорії стійкості руху є питання збереження стійкості розв’язків при дії малих збурень. Загальний метод дослідження впливу збурень на стійкість розв’язків диференціальних рівнянь, побудований на застосуванні другого методу Ляпунова. У випадку, коли відома функція Ляпунова для незбуреної системи , застосовуючи теореми прямого методу Ляпунова можна отримати оцінки малих збурень, при яких стійкість системи зберігається. Для лінійних систем диференційних рівнянь ця задача має достатньо простий розв’язок на основі методу інтегральних нерівностей [1, 2] при умові, що відомі оцінки фундаментальної матриці.

Нехай R^n – банаховий простір, а $L(R^n)$ – банахова алгебра обмежених лінійних операторів. Визначимо рекурсивно наступні лієві елементи в $L(R^n)$ [3],

$$\left\{B, A^0\right\} = B, \quad \left\{B, A^{l+1}\right\} = \left[\left\{B, A^l\right\}, A\right], \quad l \in \mathbb{N}, \; ad_x^l\left(y\right) = \left(-1\right)^l \left\{y, x^l\right\}$$

де $[A, B] = AB - BA$ – комутатор двох елементів $A, B \in L(R^n)$.

Розглянемо лінійну систему диференційних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A(t) + \delta A(t)\right) x(t). \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $A : R \to L(R^n)$ – кусково-неперервне θ-періодичне відображення, $\delta A : R \to L(R^n)$ – кусково-неперервне неперіодичне відображення,

$$\hat{A}\left(t\right) = \int_0^t A\left(s\right) ds, \; A_0 = \frac{1}{\theta}\hat{A}\left(\theta\right), \; B_0 = F\left(\theta\right),$$

де $F\left(t\right)$ розв’язок задачі Коші

$$\frac{dF\left(t\right)}{dt} = ad_{A(t)} F\left(t\right) + F\left(t\right)\Psi\left(t\right) + \Psi\left(t\right), \quad F\left(0\right) = 0,$$

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left\{ A(t),\ \hat{A}^k(t) \right\}.$$

Відносно матриці збурень $\delta A(t)$ зробимо наступні припущення: існують позитивні сталі

$$\alpha_n = \max_{t \in [n\theta,\ (n+1)\theta]} \left\| \delta A(t) \right\|,\ \beta_n = \max_{t \in [n\theta,\ (n+1)\theta]} \left\| \int_{n\theta}^{t} \delta A(s)\, ds \right\|.$$

Введемо позначення:

$$\chi_n = \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \left(\left\| ad_{F(s)} \right\| \alpha_n + \left(1 + \left\| F(s) \right\|\right) \eta_n(s) \right) ds \times$$

$$\times \exp\left(\int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \left(\left\| ad_{A(s)} \right\| + 2\alpha_n + \left\| \Psi(s) \right\| + \eta_n(s) \right) ds \right).$$

Асимптотична стійкість лінійної системи зі збуренням (1) еквівалентна асимптотичній стійкості лінійній системі диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} = \left(A_0 + \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \delta A(s)\, ds \right) y(t), \quad t \in \left(n\theta,\ (n+1)\theta\right), \\ \Delta y(t) = \left(B_0 + \delta F_n \right) y(t), \quad t = (n+1)\theta, \end{gathered} \tag{2}$$

де $y \in R^n$, а для функції δF_n справедлива оцінка $\left\| \delta F_n \right\| \le \chi_n$.

Теорема 1. *Нехай для матриці* A_0 *виконується умова* $\max\limits_{\lambda \in \sigma(A_0)} \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ *і існує додатна стала* $\delta > 0$ *така, що для будь яких* $n \in N$ *виконуються нерівності*

$$\beta_n < \frac{\lambda_{m(Q)}}{2\left\| P \right\|},$$

$$\ln\left(1 - \Lambda(R,\ P) + \frac{\left\| P \right\| \chi_n \left(2\left\| I + B_0 \right\| + \chi_n \right)}{\lambda_m(P)} \right) - \frac{\lambda_m(Q) - 2\beta_n \left\| P \right\|}{\lambda_M(P)} \theta < -\delta,$$

де P *– розв'язок матричного рівняння Ляпунова* $A_0^T P + P A_0 = -Q$. *Тоді лінійна система диференціальних рівнянь (1) асимптотично стійка.*

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Кравчук С. В., Слынько В. И.* Робастная устойчивость линейных периодических систем // Автоматика и телемеханіка (в друці).
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

ROBUST STABILITY OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS

New conditions of robust stability of linear periodic systems of differential equations were obtained.

УДК 517.9

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НАД ПОЛЕМ *P*-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Антон Кузь, Михайло Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

kuz.anton87@gmail.com, quaternion@ukr.net

Розглядається така задача:

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j} A^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\right)u(t,x)=0, \quad t\in\mathbb{Z}_p, \quad x\in\mathbb{Q}_p, \tag{1}$$

$$\mu_j \left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - \sum_{q=1}^{m}\lambda_{jq}\left.\frac{\partial^{j-1}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_q} = \varphi_j(x), \quad j=1,\dots,n, \tag{2}$$

у якій $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$ – множини, відповідно, p-адичних та цілих p-адичних чисел, де p – деяке просте число; $a_j, \mu_j, \lambda_{jq} \in \mathbb{Q}_p$, $t_q \in \mathbb{Z}_p$, $j=1,\dots,n$, $q=1,\dots,m$; $|a_1|_p+\dots+|a_n|_p \neq 0$, де $|\cdot|_p$ – p-адична норма, $t_j \neq t_q$, $j \neq q$. Оператор $A(\partial/\partial x)$ у рівнянні (1) визначений рівністю

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2x\frac{\partial}{\partial x}, \quad A^q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = A\left(A^{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right), \quad q\in\mathbb{N};$$

$\varphi_j(x), j=1,\dots,n,$ – задані достатньо гладкі p-адичнозначні функції.

Інтерес до дослідження таких задач упродовж останніх десятиліть зумовлений активним розвитком p-адичної математичної фізики, у якій дійсні просторово-часові змінні замінюються p-адичними [1,3]. Цей розділ математичної фізики виник у 1984 р., коли В. С. Владіміров та І. В. Воловіч запропонували використати p-адичні числа для опису простору на малих відстанях порядку 10^{-33} см. Ідея В. С. Владімірова та І. В. Воловіча полягає у тому, що на планківських відстанях структура простору-часу повинна описуватися неархімедовим полем p-адичних чисел. Одним із важливих напрямків p-адичної математичної фізики є дослідження p-адичних моделей квантової механіки, теорії гравітації, що, в свою чергу, стимулює вивчення властивостей розв'язків рівнянь із частинними похідними з p-адичними змінними за допомогою p-адичного аналізу Фур'є. Зауважимо, що розв'язність таких задач (особливо нелокальних) над полем дійсних (як і p-адичних) чисел часто пов'язана з проблемою малих знаменників [2].

Запровадимо простори функцій над полем $\mathbb{Q}_p$ [3], в яких досліджуватимемо розв'язність задачі (1), (2). Позначимо: $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \left(d/dx\right)^k e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – поліноми Ерміта; $L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$, $w(x) = e^{-x^2}$, – простір усіх рядів $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x)$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \left|f_k\right|_p \sqrt{|\,k!2^k\,|_p} = 0$ із нормою $\left\|f; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\right\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \left|f_k\right|_p \sqrt{\left|k!2^k\right|_p}$; $A\left(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\right)$ – простір усіх рядів вигляду $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) H_k(x)$, де $u_k(t)$ – аналітичні функції на $\mathbb{Z}_p$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{t\in\mathbb{Z}_p} \left|u_k(t)\right|_p \sqrt{\left|k!2^k\right|_p} = 0$ із нормою $\left\|u; A\left(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\right)\right\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \max\limits_{t\in\mathbb{Z}_p} \left|u_k(t)\right|_p \sqrt{\left|k!2^k\right|_p}$.

У роботі встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі (1), (2) в просторі $A\left(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\right)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j \in L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx), j = 1,\ldots,n.$

1. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-адический анализ и математическая физика. – М.: Физматлит, 1994, – 352 с.
2. *Пташник Б. Й. Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002, – 416 с.
3. *Хренников А. Ю.* Математические методы неархимедовой физики // УМН. – 1990. – **45**, № 4. – С. 79-110.

NONLOCAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OVER P-ADIC FIELD

We have investigated correctness of the problem with nonlocal multipoint conditions for linear partial differential equations over p-adic number field. Criterion of uniqueness and sufficient conditions for existence of the solution in corresponding nonarchimedian functional spaces is established.

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНА ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Антон Кузь, Михайло Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

kuz.anton87@gmail.com, quaternion@ukr.net

В області $D := \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$ розглядається така задача:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 A\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)u = 0, \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$U_j[u] := \left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{j-1}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 1,2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

у якій $a, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi_j(x) \in L_2(\mathbb{R}), j = 1,2,$ оператор $A(\partial/\partial x, x)$ у рівнянні (1) визначений рівністю

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2.$$

Задачі з умовами вигляду (2) для рівнянь із частинними похідними назагал є некоретними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників [1]. Метою цієї роботи є встановити умови коректності задачі (1), (2).

Запровадимо такі позначення:

$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (d/dx)^k e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – поліноми Ерміта;

$\psi_k(x) = e^{-x^2/2} H_k(x) \Big/ \sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – функції, що є власними функціями оператора $A(\partial/\partial x, x)$, що відповідають власним значенням $\lambda_k = 2k+1$ та утворюють повну ортогональну систему функцій в $L_2(\mathbb{R})$;

$HS_\alpha, \alpha > 0$, – простір функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ таких, що $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \psi_k(x)$, де $f_k = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi_k(x)dx$, та $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 (1+\lambda_k)^{2\alpha} < \infty$ із нормою $\|f;HS_\alpha\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^2\left(1+\lambda_k\right)^{2\alpha}$;

$C^m\left(\left[0,T\right],HS_\alpha\right)$ – простір функцій $v(t,x)$, визначених в області D, таких, що для кожного $t\in[0,T]$ усі похідні $\partial^j v/\partial t^j\in HS_\alpha$, $j=0,1,\ldots,m,$ і є неперервними за t у нормі HS_α. Норму в цьому просторі визначаємо так:

$$\left\|v;C^m\left(\left[0,T\right],HS_\alpha\right)\right\|=\sum_{j=0}^{m}\left\|\partial^j v/\partial t^j;HS_\alpha\right\|.$$

Розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\psi_k(x),$ у якому кожна з функцій $u_k(t)$ є розв'язком задачі, $L\left(d/dt,\lambda_k\right)[u]=0,$ $U_j[u]:=\varphi_{jk}$, де $\varphi_{jk}=\int_{\mathbb{R}}\varphi_j(x)\psi_k(x)dx,\ \ j=1,2.$

Нехай ξ_{1k},ξ_{2k} – корені рівняння $L\left(\xi,\lambda_k\right)[u]=0,\ \ k\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема. *Якщо* $|\mu|\neq 1$, *для кожного* $k\in\mathbb{Z}_+$ *виконується умова* $\operatorname{Re}\xi_{1k}\neq\operatorname{Re}\xi_{2k}\neq 0$ *і* $\varphi_1,\varphi_2\in HS_{\alpha+\beta}$, *то існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) у просторі* $C^2\left(\left[0,T\right],HS_\alpha\right)$, *причому,*

$$\left\|u;C^2\left(\left[0,T\right],HS_\alpha\right)\right\|\le C\sum_{j=1}^{2}\left\|\varphi_j;HS_{\alpha+\beta}\right\|.$$

де $C>0$ *– деяка стала, що не залежить від* k.

1. *Пташник Б. Й. Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002, – 416 с.

NONLOCAL TWOPOINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

We have investigated correctness of the problem with nonlocal two point conditions for linear partial differential equations with variable coefficients. Criterion of uniqueness and sufficient conditions for existence of the solution in corresponding functional spaces is established. The solution is built in the form of Hermite polynomials series.

УДК 52-782

ТРИВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ СИЛЬНИХ УДАРНИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Тарас Кузьо, Олег Петрук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

kuzyo.taras@gmail.com

Еволюція ударних хвиль у міжзоряному середовищі описується рівняннями магнітної гідродинаміки, розв'язок яких у загальному випадку не можна отримати аналітично. Основним джерелом ударних хвиль у астрофізиці є спалахи наднових зір, в результаті чого виникають протяжні дифузні об'єкти, які поширюються у міжзоряний простір – залишки наднових. У процесі поширення залишку в навколозоряному середовищі, структура течії за фронтом ударної хвилі зазнає суттєвої перебудови. Така перебудова веде до переходу на нову еволюційну стадію і, відповідно, зміни домінуючих фізичних процесів. Ми досліджуємо особливості еволюції залишків наднових на різних її етапах шляхом тривимірного магніто-гідродинамічного моделювання на різних часових та просторових масштабах. Наявність неоднорідності густини дозволяє дослідити взаємодію ударної хвилі з середовищем, в якому присутній додатній градієнт густини. Така ситуація виникає, коли на шляху поширення залишку знаходиться густа молекулярна хмара.

Результати моделювання дають змогу прослідкувати залежність динаміки ударної хвилі від орієнтації магнітного поля і градієнта густини. Отримано еволюцію параметрів течії за фронтом ударної хвилі та особливості їх перебудови при зміні етапів еволюції.

THREE-DIMENSIONAL SILULATIONS OF STRONG BLAST WAVE EVOLUTION IN THE NON-UNIFORM MEDIUM

We simulate a large span of supernova remnant evolution from early free expansion stage up to the well-developed radiative stage into a medium with increasing density gradient. The simulations show the dynamics of the forward shock and post-shock flow properties while interacting with the non-uniform interstellar medium.

УДК 517.956

ПРО ПАРАБОЛІЧНІ ЗА ШИЛОВИМ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Владислав Літовченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

v.litovchenko@chnu.edu.ua

У [4] Г. Є. Шилов сформулював нове означення параболічності систем рівнянь із частинними похідними, яке узагальнює поняття параболічності за Г. І. Петровським [2] і веде до істотного розширення класу Петровського систем вигляду

$$\partial_t u(t;x) = P(t;i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]} := (0;T] \times \mathrm{R}^n, \tag{1}$$

де i – уявна одиниця, u – невідома вектор-функція розмірності m, а $P(t;i\partial_x)$ – матричний диференціальний вираз порядку $p \in \mathbb{N}$ із залежними від часу t коефіцієнтами.

У випадку, коли коефіцієнти (1) сталі, тобто $P(t;i\partial_x) \equiv P(i\partial_x)$, h-параболічність за Шиловим означується подібно до параболічності за Петровським – шляхом накладання умов на дійсні частини характеристичних чисел $\lambda_j(\cdot)$ матричного символу $P(\sigma), \sigma \in \mathrm{C}^n$, диференціального виразу системи (1):

$$\exists h > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \; \exists \delta_0 \geq 0 \; \forall \xi \in \mathrm{R}^n : \quad \max_j \mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \leq -\delta_1 \|\xi\|^h + \delta_0. \tag{2}$$

Якщо ж коефіцієнти системи (1) залежать від t, то вже, на відміну від параболічності за Петровським, параболічність за Шиловим цієї системи з показником параболічності h означає виконання для матриціанта $\theta_\tau^t(\cdot), \tau < t$, відповідної двоїстої за Фур'є системи, наступної оцінки [1]:

$$|\theta_\tau^t(\xi)| \leq c(1 + \|\xi\|^{(m-1)(p-h)})e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}, \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}. \tag{3}$$

Зазначимо, що для параболічних за Петровським систем (1) умова (3) – характерна властивість, яка є прямим наслідком із відповідної умови параболічності типу (2). Для параболічних систем (1) із залежними від t коефіцієнтами при $p \neq h$ підтвердити цей факт класичними засобами теорії параболічних систем, взагалі кажучи, не вдається, через параболічну нестійкість таких систем до зміни своїх коефіцієнтів [3]. Тому важливою є інформація про запас класу Шилова систем із коефіцієнтами, залежними від t, зокрема, про приклади таких систем, які не є параболічними за Петровським.

Дана доповідь присвячена дослідженню цих питань.

Розглянемо систему (1) із

$$P(t;i\partial_x) = \{P_0(i\partial_x) + P_1(t;i\partial_x)\}, \tag{4}$$

де $P_0(i\partial_x)$ і $P_1(t;i\partial_x)$ – матричні диференціальні вирази порядків p і p_1 відповідно: $p > p_1$, причому відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

є параболічною за Шиловим із сталими коефіцієнтами, з показником параболічності h, при цьому величини р, p_1 і h підпорядковані наступній умові:

$$0 \le p_1 + (m-1)(p-h) < h. \tag{A}$$

Правильне таке твердження.

Теорема. *Нехай (1) – система із виразом $P(t;i\partial_x)$ вигляду (4), для якої виконується умова (А). Тоді для матриканта $\theta_\tau^t(\cdot)$ відповідної двоїстої за Фур'є системи на множині $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$, виконується оцінка (3).*

Наслідок. *Система (1) із виразом $P(t;i\partial_x)$ вигляду (4) та умовою (А) є параболічною за Шиловим системою із змінними коефіцієнтами.*

Зауваження. *Кожна параболічна за Петровським система (1) зі сталими коефіцієнтами групи старших членів є системою, для якої виконуються умови з попередньої теореми.*

Висновок. *Клас Шилова параболічних систем зі змінними коефіцієнтами достатньо широкий і не вичерпується класом Петровського.*

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Матем. и мех. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
3. *У. Хоу-синь.* Об определении параболичности системы уравнений в частных производных // Успехи матем. наук. – 1960. – **15**, № 6. – С. 157–161.
4. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи матем. наук. – 1955. – **10**, № 4. – С. 89–101.

ABOUT SHILOV TYPE PARABOLIC SYSTEMS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

New class of linear parabolic systems with the first order by time partial derivatives and time dependent coefficients is considered. It covers the Petrovsky class systems with lower order time dependent coefficients. The main part of the differential expression of such systems is parabolic by Shilov expression with constant coefficients. We have proved their parabolicity by Shilov by using the structure of the system and conditions on the eigenvalues of symbol matrix. We conclude that Shilov class of systems is sufficiently wide class of systems with time dependent coefficients.

УДК 517.95

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ ЗА ЧАСОМ ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ

Галина Лопушанська, Андрій Лопушанський, Ольга М'яус

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Національний університет «Львівська політехніка»

lhp@ukr.net, alopushanskyj@gmail.com, myausolga2016@gmail.com.

Нехай $Q = R^n \times (0,T]$, $C^{k,(0)}(\bar{Q}) := \{v \in C^k(\bar{Q}) : (\frac{\partial}{\partial t})^s v(x,T) = 0,\ s = \overline{0,k}\}$, $k \in Z_+$, $\mathsf{S}(R^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій, $S_\gamma(R^n)\ (\gamma > 0)$ – простір типу $\mathsf{S}(R^n)$ [1, с. 201]:

$$S_\gamma(R^n) = \{v \in S(R^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_\alpha e^{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ \forall\ x \in R^n,\ \forall\ \alpha\}$$

при деяких додатних сталих $C_\alpha = C_\alpha(v)$ і $a = a(v)$, $\mathsf{S}(\bar{Q})$ ($\mathsf{S}_\gamma(\bar{Q})$) – простір функцій $v \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q})$ таких, що $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s v(\cdot,t) \in \mathsf{S}(R^n)$ $\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s v(\cdot,t) \in \mathsf{S}_\gamma(R^n)\right)$ для всіх $t \in [0,T]$, $s \in Z_+$.

Позначаємо через E' простір лінійних неперервних функціоналів (розподілів) на E, а символом (f,ϕ) – значення розподілу $f \in E'$ на основній функції $\phi \in E$,

$$S'_{\gamma,C}(\bar{Q}) = \{f \in S'_\gamma(\bar{Q}) : (f(\cdot,t),\phi(\cdot)) \in C[0,T]\quad \forall \phi \in S_\gamma(\bar{Q})\},$$

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} v'(\tau) d\tau\ –$$

похідна Джрбашяна-Капуто дробового порядку $\beta \in (0,1)$ (регуляризована дробова похідна).

При $\beta \in (0,1]$ вивчаємо обернені задачі

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = F_0(x)g(t),\quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = F_1(x),\ \ x \in R^n,$$

$$\int_0^{t_0} (u(\cdot,t),\phi(\cdot))dt = (F,\phi) \quad \forall\phi \in S_{\frac{2-\beta}{2}}(R^n)$$

визначення пари узагальнених функцій

$$(F_0,u) \in S'_{\frac{2-\beta}{2}}(R^n) \times S'_{\frac{2-\beta}{2},C}(\bar{Q}),$$

де F_1, F – задані розподіли типу Шварца, g – задана неперервна функція, або пари

$$(F_1,u) \in S'_{\frac{2-\beta}{2}}(R^n) \times S'_{\frac{2-\beta}{2},C}(\bar{Q}),$$

де F_0, F – задані розподіли типу Шварца, $t_0 \in (0,T]$, $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами.

Знаходимо умови однозначної розв'язності сформульованих задач.

Встановлюємо також однозначну розв'язність і коректність обернених задач відновлення відповідно початкових даних розв'язку або правої частини рівняння дифузії з дробовою похідною за часом із простору періодичних узагальнених функцій і розв’язків задач, неперервних за часом зі значеннями у просторах періодичних узагальнених функцій [2, 3].

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. Т.2. – Москва: Гостехиздат, 1958.
2. *Lopushanska H., Lopushansky A., Myaus O.* Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation // Electronic J. Diff. Equ. – 2016 (2016). – no 14. – p. 1–9. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.
3. *Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O.* An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions // Fractional differ. calc. – 2016. – V. 6, № 2. – P. 267–274.- http://dx.doi.org/10.7153/fdc-06-17.

INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS WITH A TIME INTEGRAL ADDITIONAL CONDITION

We study the inverse problem of determination of a solution's initial data for a time fractional diffusion equation with a Schwarz type distribution in the right-hand side of the equation, the inverse source problem with a Schwarz type distribution in the initial condition using a time integral additional condition.

We have found conditions for a unique solvability of these problems and also the correctness of such kind inverse problems in spaces of continuous functions with values in periodic spatial distributions.

УДК 519.217; 519.718

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОДНОГО ВИДУ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

Тарас Лукашів

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

t.lukashiv@chnu.edu.ua

Розглянемо стохастичну систему випадкової структури, задану стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), u(t))dt + b(t, \xi(t), x(t), u(t))dw(t) +$$
$$+ \int_{\mathbf{R}^m} c(t, \xi(t), x(t), u, z)\tilde{\nu}(dz, dt), \; t \in \mathbf{R}_+ \setminus K, \quad (1)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)), \; t_k \in K = \{t_n \Uparrow\}, \; n = 0,1,2,..., \quad (2)$$

і початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^m, \;\; \xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \;\; \eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Тут $\xi(t)$ − марковський процес зі значеннями в $\mathbf{Y} := \{y_1, ..., y_N\}$, $\{\eta_k, k \geq 0\}$ − ланцюг Маркова зі значеннями в $\mathbf{H}$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m$; $w(t)$ − m-вимірний стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dz, dt) = \nu(dz, dt) - \mathbf{E}\nu(dz, dt)$ – центрована пуассонова міра; процеси w, ν, ξ і η незалежні в сукупності. Траєкторії процесу $x(t), t \geq 0$, належать до простору Скорохода $\mathbf{D}$, керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0; T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ є m-вимірною функцією з класу U допустимих керувань; коефіцієнти a, b, c і функція g мають відповідні розмірності, вимірні за сукупністю змінних і за фазовою змінною задовольняють умову Ліпшиця.

Для системи (1)-(3) розв’язана проблема синтезу оптимального керування.

ABOUT OPTIMAL CONTROL OF ONE TYPE OF STOCHASTIC SYSTEMS OF THE RANDOM STRUCTURE

The problem of synthesis of optimal control for a system of random structure with Markov switchings and Poisson perturbations is solved.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Володимир Лучко, Вікторія Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vmluchko@gmail.com, vsluchko@gmail.com

Означення 1. *Числова множина* $\Xi = \{\xi\}$ *називається відносно щільною на дійсній осі* $-\infty < x < +\infty$, *якщо існує число* $l > 0$ *таке, що кожен відрізок* $a \le x \le a + l$ *довжини* l *містить хоча б один елемент нашої множини, тобто при довільному* a *маємо* $[a, a+l] \cap \Xi \ne 0$.

Розглянемо комплекснозначну функцію

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \in C(-\infty, +\infty).$$

Означення 2. *Число* $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ *називається майже періодом функції* $f(x)$ *з точністю до* ε, *якщо для довільного* $x \in (-\infty, +\infty)$ *має місце нерівність* $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$.

Означення 3. *Комплекснозначна функція* $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ *називається майже періодичною в сенсі Бора, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує відносно щільна множина майже періодів* τ *функції* $f(x)$ *з точністю до* ε, *тобто існує додатне число* $l = l(\varepsilon)$ *таке, що довільний відрізок* $[a, a+l]$ *містить принаймні одне число* τ, *для якого виконується нерівність*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } -\infty < x < +\infty$$

Основи теорії майже періодичних функцій були закладені датським математиком Г. Бором [1].

Розглянемо неоднорідне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \tag{1}$$

де a – константа, $(t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $f(t,x)$ – майже періодична функція, для якої $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$.

Будемо припускати, що функція $f(t,x) \in L(\mathbb{R})$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx < +\infty .$$

Теорема 1. *Нехай функція* $f(t,x)$ *за змінною* x *задовольняє умову Гельдера, за змінною* t *– експоненціально зростає,*

$$\left| f(t,x) - f(t,\xi) \right| \le c \left| x - \xi \right|^{\alpha} e^{pt}, \ p > 0 ,$$

то майже періодичний розв'язок рівняння (1) існує і єдиний та задається формулою

$$u(t,x) = \int_{0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi) G(t-\tau, x-\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{0} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi) G(t-\tau, x-\xi) d\xi,$$

де $G(t,x) = 1 \Big/ \left(2a\sqrt{\pi t} \right) \exp\left\{ -x^2 \big/ 4a^2 t \right\}$.

Розглянемо неоднорідну систему диференціальних рівнянь параболічного типу [2]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) D^k u(t,x) + f(t,x), \tag{2}$$

де $t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A_k(t)$ – матриця з неперервними майже періодичними функціями, $f(t,x) = colon\left(f_1(t,x), ..., f_n(t,x) \right)$ – майже періодична функція, $u(t,x) = colon\left(f_1(t,x), ..., f_n(t,x) \right)$.

Теорема 2. *Нехай система (2) параболічного типу, майже періодична функція* $f(t,x)$ *за змінною* x *задовольняє умову Гельдера, а за змінною* t *експоненціально зростає, тоді розв'язок системи (2) існує та єдиний.*

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

THE PROBLEM OF FINDING ALMOST PERIODIC SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS OF EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

This paper is devoted to the finding a time variable almost periodic solution for differential equations and systems of parabolic type with a constant matrix and free almost periodic member.

УДК 519.6:532.546:539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ФАЗ ҐРУНТОВОГО СЕРЕДОВИЩА

Ольга Марченко, Тетяна Самойленко, Тетяна Благовещенська

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

march64@ukr.net, tsamoil@i.ua, tatyana_blag@ukr.net

Проблема розрахунку та передбачення динамічного стану неоднорідного за структурою багатофазного ґрунтового масиву при ущільненні слабких водонасичених ґрунтів навколо вертикальних дрен, свердловин тощо є актуальною в рамках поглибленого дослідження динаміки взаємопов'язаних фаз ґрунтового середовища.

У кожній з підобластей Ω_1, Ω_2 області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ($\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \gamma$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$) розглядається змішана система рівнянь фільтрації та динамічної теорії пружності для ізотропного тіла у випадку осьової симетрії:

$$\bar{\mu}_i\, r\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, k_i\left(u_r, u_z\right)\frac{\partial h}{\partial r}\right) - r\frac{\partial}{\partial z}\left(k_i\left(u_r, u_z\right)\frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$\rho_i\, r\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \left(\left(\lambda_i + 2\mu_i\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - \left(\lambda_i + 2\mu_i\right)\frac{u_r}{r} + r\,\mu_i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_i\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - \lambda_i\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = f_{1,i}\left(r, z, h, t\right)\,, \quad (1)$$

$$\rho_i\, r\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \left(\lambda_i\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \left(\lambda_i + 2\mu_i\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \mu_i\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial z} + r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_i\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = f_{2,i}\left(r, z, h, t\right),\ \left(r, z, t\right) \in \Omega_{i,\tilde{T}} = \Omega_i \times \left(0, \tilde{T}\right],\ r \ge r_0 > 0\,,\ i = 1, 2\,,$$

де $h\left(r, z, t\right)$ – п'єзометричний напір, $\left(u_r\left(r, z, t\right), u_z\left(r, z, t\right)\right)^T$ – вектор зміщень; $\bar{\mu}_i$ – вологоємність, ρ_i – щільність речовини, λ_i, μ_i – коефіцієнти Ляме.

Умови спряження на ділянці контакту γ :

$$k_i\left(u_r,u_z\right)\frac{\partial h}{\partial r}\cos\left(n,r\right)+k_i\left(u_r,u_z\right)\frac{\partial h}{\partial z}\cos\left(n,z\right)=R_1\left(r,z\right)\left[h\right],\ i=1,2\ ,$$

$$\left[u_n\right]=0\ ,\ \left[\sigma_n\right]=0\ ,\ \left[\tau_s\right]=0\ ,\ \left\{\tau_s\right\}^{\pm}=R_2\left(r,z\right)\left[u_s\right],$$

$$\left(r,z,t\right)\in\gamma_{\tilde{T}}=\gamma\times\left(0,\tilde{T}\right],$$

де n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega_1$ на γ ; $\left[\chi\right]$ – стрибок функції, $R_i\left(r,z\right)\geq 0$, $i=1,2$; σ_n, τ_s – нормальна та дотична складові вектора напружень.

Крайові умови – неоднорідні змішані, початкові умови – неоднорідні.

Узагальненим розв’язком Гальоркіна початково-крайової задачі для системи (1), побудованим із застосуванням формули Ґріна, є вектор-функція $w\left(r,z,t\right)=\left(h\left(r,z,t\right),u_r\left(r,z,t\right),u_z\left(r,z,t\right)\right)^T\in Z$, яка для довільної вектор-функції $v\left(r,z\right)=\left(v_h\left(r,z\right),v_r\left(r,z\right),v_z\left(r,z\right)\right)^T\in Z_0$ (Z, Z_0 – простори методу Гальоркіна [1]) задовольняє записаним в слабкій формі початковим умовам та інтегральному співвідношенню

$$\overline{m}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},v\right)+m\left(\frac{\partial w}{\partial t},v\right)+a\left(w,v\right)=\left(F,v\right)\quad\forall t\in\left(0,\tilde{T}\right]\ \ \forall v\left(r,z\right)\in Z_0\ ,$$

$$\overline{m}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},v\right)=\iint\limits_{\Omega}\rho\left(r,z\right)r\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}v_r+\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}v_z\right)d\Omega\,,$$

$$m\left(\frac{\partial w}{\partial t},v\right)=\iint\limits_{\Omega}\overline{\mu}\,r\frac{\partial h}{\partial t}v_h\,d\Omega\ ,$$

$$a\left(w,v\right)=\iint\limits_{\Omega}r\left(k\left(u_r,u_z\right)\left(\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial v_h}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\left(\lambda+2\mu\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{u_r v_r}{r^2}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\lambda\left(\frac{u_r}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{u_r}{r}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right)d\Omega$$

$$+\int\limits_{\gamma}rR_1\left(r,z,t\right)\left[h\right]\left[v_h\right]d\gamma+\int\limits_{\gamma}rR_2\left(r,z\right)\left[u_s\right]\left[v_s\right]d\gamma,$$

$$\left(F,v\right)=\iint_{\Omega}\left(f_1\left(r,z,h,t\right)v_r+f_2\left(r,z,h,t\right)v_z\right)d\Omega+ ,$$

$$+\int_{\partial\Omega\backslash\gamma} r\left(p\left(r,z,t\right),v\left(r,z\right)\right)d\Gamma$$

$\rho\equiv\rho_i$, $\bar{\mu}\equiv\bar{\mu}_i$, $\lambda\equiv\lambda_i$, $\mu\equiv\mu_i$, $f_1\equiv f_{1,i}$, $f_2\equiv f_{2,i}$ на кожній з $\Omega_{i,\tilde{T}}$, $i=1,2$;

$p\left(r,z,t\right)$ – вектор-функція крайових умов другого роду.

Пропонується наближений розв’язок даної задачі Коші шукати методом скінченних елементів за допомогою схеми Кранка-Ніколсона [1].

1. *Марченко О. А., Самойленко Т. А.* Исследование приближеного решения квазилинейной параболо-гиперболической задачи // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №5. – С. 142-154.

INVESTIGATION OF THE AXIALLY SYMETRIC PROBLEM FOR INTERRELATED PHASES OF SOIL ENVIRONMENT DYNAMICS

Construction of the approximate solution of the initial boundary value problem for mixed system of filtration equation and dynamic theory of elasticity equations for inhomogeneous in structure soils in the case of axial symmetry is considered.

УДК 517.43

ПРО ФУНКЦІЮ ҐРІНА ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Михайло Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

perungm@ukr.net

Задачі для різних псевдодиференціальних рівнянь (ПДР) та рівнянь з фрактальними похідними були предметом досліджень багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків.

1. Задача Коші для ПДР з негладким символом

$$D_t^{\alpha} u(t,x) = \mathrm{F}_{\sigma\to x}^{-1}\left\{\left[-a_{\gamma}(\sigma)+\sum_{k_0\gamma+|\nu|<\alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)\frac{k_0}{\partial t^{k_0}}\right]\mathrm{F}_{x\to\sigma} u\right\}+f(t,x), \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x), \quad x\in R^n. \tag{2}$$

F, F^{-1} – перетворення Фур'є, $a_{\gamma}(\sigma)$, $a_{k_0\nu}$ – символи, $\gamma \ge 1$, $u_t^{(k_0)}$ – похідна Ліувілля, $\alpha\in(0,1)$, D_t^{α} – похідна Капуто.

За допомогою властивостей операцій згорток перетворень Фур'є-Лапласа задачі (1), (2) ставиться у відповідність інтегральне рівняння

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} \sum_{k_0\gamma+|\nu|<\alpha\gamma} G_{k_0\nu}(t-\tau, x-\xi)\, u(\tau,\xi)\, d\xi + F(t,x), \tag{3}$$

де

$$G_{k_0\nu}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1} i} \int_{\mathrm{Re}\, p=a} e^{pt} p^{k_0} dp \int_0^{\infty} e^{-p^{\alpha}\tau} d\tau \int_{R_n} e^{i\sigma_n x_n} a_{k_0\nu}(\sigma) e^{-a_{\gamma}(\sigma)\tau} d\sigma. \tag{4}$$

Якщо в інтегралі (4) функції $a_{k_0\nu}(\sigma)$, $a_{\gamma}(\sigma)$ однорідні і належать класу $C^{(N)}\left(R^n/0\right)$ з деяким N, то їх перетворення Фур'є оцінюється за лемою 1 [1, с. 915], а інтеграл Лапласа за схемою доведення теореми 1 [2, с. 102].

Отже, маємо, що

$$\sum_{k_0\nu+|\nu|<\alpha\gamma} \left|G_{k_0\nu}(t,x)\right| \le C\left(t^{\alpha/\gamma}+|x|\right)^{-(n+\gamma-\varepsilon_0)}, \varepsilon_0>0. \quad (5)$$

2. Задача про коливання сили струму і напруги

Телеграфному рівнянню відповідає рівняння з дробовою похідною D_t^α порядку $\alpha\in(1,2)$ з гладким символом

$$D_t^\alpha u = \Delta_x u + a_1 u_t' + a_0 u + f(t,x), \quad (6)$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_t'\,|_{t=0} = \varphi_2(x). \quad (7)$$

Задачі (6), (7) ставиться у відповідність інтегральне рівняння (3) з ядром

$$G_{10}(t,x) = \frac{1}{i(2\pi)^{n+1}} \int_{C_a} e^{pt} \frac{a_1 p + a_1}{p^{\alpha/2}} dp \int_0^\infty e^{-p^{\alpha/2}\tau} d\tau \int_{R^n} e^{ix\sigma - p^{\alpha/2}|\sigma|^2\tau} d\sigma, \quad (8)$$

яке допускає експоненціальну оцінку

$$\left|G_{10}(t,x)\right| \le Ct^{-2+\alpha-\alpha n/2}\Psi_n(\hat{x})\exp\left\{-|\hat{x}|^q\right\}, \quad \hat{x} = xt^{-\alpha/2}, \quad (9)$$

$q = 2(2-\alpha)^{-1}$; $\Psi_n(x) = |x|^{-(n-2)}, n>2$, $\Psi_2(x) = \left|\ln|x|+1\right|$, $\Psi_1(x)=1$.

Оцінки (5), (9) забезпечують існування резольвенти у ядра інтегрального рівняння (3) і розв'язок задач (1), (2) і (6), (7) знаходиться у явній формі

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{2} \int_{R^n} Z_i(t,x-\xi)\varphi_i(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{R^n} Z_3(t-\tau,x-\xi) f(\tau,\xi)d\xi. \quad (10)$$

Оцінюється компонента функції Ґріна (Z_1, Z_2, Z_3) та розв'язок (10) для функції $(\varphi_1, \varphi_2, f)$ з нормованого простору Діні.

1. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909-933.
2. *Матійчук М. І.* Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, № 3–4. – С. 101–114.

ABOUT THE GREEN FUNCTION OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

The Green's function of the Cauchy problem for pseudodifferential equations with fractional derivative is researched.

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ПОХІДНОЮ ҐЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Марія Негрич, Михайло Симотюк

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

negrychmariya@gmail.com, quaternion@ukr.net

Нехай $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ – ціла функція з ненульовими коефіцієнтами f_k, $k\geq 0$. Функції $f(t)$ відповідає оператор $D_{f(t)}$, дія якого на цілу функцію $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k t^k$ визначається рівністю $D_{f(t)}\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \frac{f_{k-1}}{f_k}t^{k-1}$. Оператор $D_{f(t)}$ називається оператором узагальненого диференціювання (див., наприклад, [1] та застосування у [2, 3]). Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі зліченною базою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ та скалярним добутком $(\cdot;\cdot)_H$. Функція $u(t):\mathbb{C}\to H$ числового аргументу $t\in\mathbb{C}$ зі значеннями в просторі H називається цілою, якщо для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $(u(t);e_k)_H$ є цілою.

Розглядаємо таку нелокальну задачу:

$$D^2_{f(t)}u(t)=A^2u(t),\ t\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

$$u(0)-\mu u(T)=\varphi_1,\ \ D_{f(t)}u(t)\Big|_{t=0}-\mu D_{f(t)}u(t)\Big|_{t=T}=\varphi_2, \tag{2}$$

де $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0$, $\varphi_1,\varphi_2\in H$, $A:H\to H$ – такий лінійний оператор, що $Ae_k=\lambda_k e_k$, $k\in\mathbb{N}$, причому $\lim_{k\to\infty}|\lambda_k|=\infty$. Для задачі (1), (2) встановлено умови її розв'язності у класах цілих за t функцій $u(t):\mathbb{C}\to H$, якщо праві частини φ_1, φ_2 нелокальних умов (2) належать до певного підпростору, породженого оператором A, простору H.

1. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – **29**, № 3. – С. 477–500.
2. *Городецький В. В., Мартинюк О. В.* Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 7–13.
3. *Громов В. П.* Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначних функцій // Матем. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 190–200.

A NONLOCAL PROBLEM FOR EQUATION WITH GELFOND-LEONTIEV DIFFERENTIATION

Correctness conditions for a nonlocal two-point problem with Gelfond-Leontiev differentiation are established. The metric theorems of small denominators estimations to the problem are proved.

УДК 517.912

ПОТЕНЦІАЛЬНА СИМЕТРІЯ ТА НЕЛОКАЛЬНА РЕДУКЦІЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Олександр Омелян

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

aomelyan@ukr.net

Розглянемо систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{1}$$

де t – часова, x – просторова змінні, $U = (u^a)$, $F = (f^{ab})$, $G = (g^a)$, $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

1. Нелокальні перетворення системи (1).

Нелокальні перетворення еквівалентності системи (1) мають вигляд:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \tag{2}$$

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{3}$$

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \tag{4}$$

де $v^a = v^a(t,x)$, $w^a = w^a(x_0,x_1)$, $z^a = z^a(x_0,x_1)$ – «нові» залежні змінні.

2. Система рівнянь хемотаксису та її алгебра інваріантності.

Розглянемо систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \dfrac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u^2)^2 \end{pmatrix}\right], \tag{5}$$

де $u^a = u^a(x_0,x_1)$, $a = \overline{1,2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Теорема. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (5) при* $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0,\ \mu \neq 0$ *є наступна алгебра диференціальних операторів:*

$$A = \Big\langle \partial_t, \partial_x, G_1 = t\partial_x + xQ_1,\ Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - \tfrac{1}{2}Q_1 - Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \tfrac{1}{2}(x^2 - t)Q_1 - tQ_2\Big\rangle,\ \text{де } Q_2 = u^2\partial_{u^2}. \tag{6}$$

3. Симетрійні властивості нелокального образу системи (5).

Подіявши на систему (5) суперпозицією перетворень (2), (3), (4), отримуємо наступну систему, яку назвемо образом системи (5):

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{(z^1)^2} & 0 \\ -\frac{(\lambda_1+\lambda_2)z^2}{(z^1)^3} & \frac{\lambda_2}{(z^1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(\frac{z^2}{z^1})^2 \end{pmatrix} \right]. \qquad (7)$$

Симетрія системи (5) значно ширша ніж симетрія системи (7). За алгеброю (6) отримали деякі Лiївські нееквівалентні анзаци системи (5):

$$u^1 = e^{\frac{m}{\lambda_1}t(x+\frac{2}{3}mt^2)}\phi^1(\omega),\ u^2 = e^{nt}\phi^2(\omega),\ \ \omega = mt^2 + x,$$

$$u^1 = e^{-\frac{1}{4\lambda_1}tx^2(t^2+1)^{-1}}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\phi^1(\omega),\ u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\phi^2(\omega),\ \omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

де $k, k_1, \ldots, k_4$ – довільні сталі.

4. Нелокальні анзаци та редукція системи (7).

Подіявши перетвореннями (2), (3), (4) на вище наведені анзаци системи (5), в результаті отримали такі нелокальні анзаци системи (7):

$$\begin{gathered} z^1 = e^{-\frac{m}{\lambda_1}x_0(\frac{2m}{3\lambda_1}x_0^2+\tau)}\psi^1(\omega),\ \ z^2 = e^{nx_0-\frac{m}{\lambda_1}x_0(\frac{2m}{3\lambda_1}x_0^2+\tau)}\psi^2(\omega), \\ \omega = mx_0^2 + \tau;\ \ \tau = \int z^1 dx_1 \end{gathered} \qquad (8)$$

$$\begin{gathered} z^1 = \sqrt[4]{x_0^2+1}\cdot e^{\frac{1}{4\lambda_1}\frac{x_0}{x_0^2+1}\tau^2}\psi^1(\omega),\quad z^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{x_0^2+1}}e^{\frac{1}{4\lambda_1}\frac{x_0}{x_0^2+1}\tau^2}\psi^2(\omega), \\ \omega = \frac{\tau}{\sqrt{x_0^2+1}};\ \ \tau = \int z^1 dx_1. \end{gathered} \qquad (9)$$

Нелокальні анзаци (8), (9), редукують систему (7) відповідно до систем:

$$\ddot\phi^1 - \frac{m}{\lambda_1^2}\omega\phi^1 = 0,\quad \lambda_2\ddot\phi^2 + 2\lambda_1(\frac{\phi^2}{\phi^1}\dot\phi^1)'_\omega - n\phi^2 = 0, \text{якщо } n \neq 0,\ \mu\dot\phi^2 = 0\ ,$$

$$\ddot\phi^1 - \frac{m}{\lambda_1^2}\omega\phi^1 = 0,\quad \lambda_2\ddot\phi^2 + 2\lambda_1(\frac{\phi^2}{\phi^1}\dot\phi^1)'_\omega + 2\mu\phi^2\dot\phi^2 = 0,\ \text{якщо } n = 0;$$

$$\ddot\phi^1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}\omega^2\phi^1 = 0,\quad \lambda_2\ddot\phi^2 + 2\lambda_1(\frac{\phi^2}{\phi^1}\dot\phi^1)'_\omega + 2\mu\phi^2\dot\phi^2 = 0\ ,$$

де $\phi^1 = \frac{1}{\psi^1(\omega)}$, $\phi^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\psi^1(\omega)}$.

THE POTENTIAL SYMMETRY AND NON-LOCAL REDUCTION OF ONE NONLINEAR SYSTEM OF CONVECTION- DIFFUSION EQUATIONS.

In this work the non-local ansatzes of system of convection-diffusion equations were found with non-local transformations.

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО БАГАТОЧАСТОТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА У КВАЗІПЕРІОДИЧНОМУ ЗА ЧАСОМ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Ігор Парасюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

pio@univ.kiev.ua

Розглядається натуральна лагранжева система, яка описує рухи твердого тіла в евклідовому просторі $\mathbf{E}^3$ під дією суперпозиції потенціальних полів двох типів. Поле першого типу має квадратичний «гравітаційний потенціал» $\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}{\bullet}B\mathbf{x}$, а друге, «електричне» поле – квазіперіодичне за часом t і породжене потенціалом $\Phi_2(t,\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(t\omega){\bullet}\mathbf{x}$. Тут $\bullet$ – операція скалярного добутку в $\mathbf{E}^3$, $B:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ – невироджений знаковизначений оператор, $\mathbf{F}:\mathbf{T}^k \to \mathbf{E}^3$ – гладке відображення k-вимірного тора $\mathbf{T}^k = \mathbf{R}^k / 2\pi\mathbf{Z}^k$, а $\omega \in \mathbf{R}^k$ – вектор частот з раціонально незалежними компонентами. Природно виникає питання про існування в зазначеній системі вимушених квазіперіодичних коливань з вектором частот ω.

Насамперед показуємо, що рух тіла є суперпозицією поступального руху, при якому залежність $\mathbf{r}(t)$ радіуса-вектора центра інерції тіла від часу описується розв'язком інтегровної системи вигляду $\ddot{\mathbf{r}} + B\mathbf{r} = \kappa\mathbf{F}(t\omega)$ (κ – додатний параметр), та обертального руху навколо центра інерції. Рівняння обертального руху мають вигляд лагранжевої системи

$$\nabla_{\dot q}\dot q = \nabla V(q) + W(t\omega, q) \qquad (1)$$

на рімановому многовиді $\left(\mathbf{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$. Тут $\mathbf{H}_1 := \left\{q \in \mathbf{H} : |q| = 1\right\}$ – 3-вимірна сфера в кватерніонному просторі $\mathbf{H}$ (дволисне накриття групи $SO(3)$); $|q|$ – модуль кватерніона q; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – лівоінваріантна метрика на $\mathbf{H}_1$, породжена кінетичною енергією обертального руху; ∇ – зв'язність Леві – Чивіти, асоційована з лівоінваріантною метрикою; силова функція V, породжена потенціалом Φ_1, явно виражається певним чином через оператор інерції I та оператор B, а силова функція W – через $\mathbf{F}$ та «центр зарядів» у тілі $\mathbf{z}$. Позначимо через K максимальну секційну кривину ріманового многовиду

$\left(\mathbf{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$. Знайдено явний вираз цієї величини у вигляді раціональної функції головних моментів інерції твердого тіла I_1, I_2, I_3.

Квазіперіодичний розв'язок системи (1) називатимемо гіперболічним, якщо відповідна лінійна система в варіаціях є експоненціально дихотомічною. Спираючись на результати робіт [1, 2], гіперболічний квазіперіодичний розв'язок системи (1) шукався в тій зв'язній компоненті підрівневої множини силової функції V, яка містить точку p її локального мінімуму. Без обмеження загальності можна вважати, що $V(p)=0$. Позначимо через $\lambda_V(q)$ та $\Lambda_V(q)$ відповідно найменше та найбільше власні числа гессіана функції V. Нехай $l(v)$ – мінімальне значення функції $\lambda_V(q)$ на тій зв'язній компоненті множини рівня $V^{-1}(v)$, яка обмежує область D_v, що містить p. Позначивши через v_* найменший додатний корінь рівняння $l(v)=0$, знайдемо умовний екстремум $L := \max\left\{\Lambda_V(q) : V(q)=v_*\right\}$. Нарешті, покладемо $c_K := \left\{c \in [0, v_*] : l(v) \ge (c-v)K \ \forall v \in [0, v_*]\right\}$. Формулювання основного результату використовує сталу C, яку вдалося явно записати у вигляді певної раціональної функції параметрів K, c_K, I_1, I_2, I_3, L.

Теорема. *Якщо виконується нерівність* $|\mathbf{z}||\mathbf{F}(\varphi)| < C(K, c_K, I_1, I_2, I_3)$, *то система (1) в області* D_{v_*} *має єдиний квазіперіодичний розв'язок. Цей розв'язок гіперболічний і мінімізує усереднений лагранжіан*

$$\overline{L}[q(\cdot)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\frac{1}{2}\langle \dot q, \dot q\rangle + V\left(q(t)\right) + W\left(t\omega, q(t)\right)\right] \mathrm{d}t$$

в просторі диференційовних квазіперіодичних функцій із значеннями в D_{v_*}.

1. *Парасюк І. О.* Квазіперіодичні екстремалі неавтономних лагранжевих систем на ріманових многовидах // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 10. – С. 1387-1406.
2. *Parasyuk I. O.* Hyperbolic quasiperiodic solutions of U-monotone systems on Riemannian manifolds // arXiv:1703.04109 [math.DS]. – 2017. – 22 p.

EXISTENCE OF A HYPERBOLIC MULTYFREQUENCY SOLUTION FOR EQUATIONS OF RIGID BODY MOTIONS IN A TIME-QUASIPERIODIC FORCE FIELD

We consider a natural Lagrangian system which governs the motion of rigid body under the action of two potential force fields. The first one is a stationary field with quadratic potential, and the potential of the second one is space-linear and quasiperiodically time-dependent. We establish sufficient conditions under which such a system has a classical hyperbolic quasiperiodic solution.

УДК 517.911

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Ольга Поліщук (Чайчук)

Одеська Маріїнська гімназія Одеської міської ради Одеської області при ПДПУ ім. К. Д. Ушинського

olgapolchai@gmail.com

Розглядається задача Коші

$$t^r x' = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

де $r > 1$, $x:(0,\tau) \to \mathbb{R}$ – дійсна змінна, $x:(0,\tau) \to \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $\lambda_i:(0,\tau) \to (0,+\infty)$, $g:(0,\tau) \to (0,+\infty)$ і $h:(0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервні функції, $D = \{(t, y_1, y_2, y_3, y_4): t \in (0,\tau), |y_i| < \lambda_i(t), i \in \{1,2,3,4\}\}$.

Назвемо ***умовами А*** сукупність наступних умов:

1. $g:(0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h:(0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервно диференційовні функції, причому $g(t) \le t$, $h(t) \le t$ при $t \in (0,\tau)$;

2. існують неперервно диференційовні функції $\varphi:(0,\tau) \to \mathbb{R}$ та $\omega:(0,\tau) \to (0,+\infty)$, такі, що $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t)t^{1-r} = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} t\varphi'(t) = 0$ і при цьому виконується нерівність $\left|t^r \varphi'(t) - f(t, \varphi(t), \varphi(g), \varphi'(t), \varphi'(h(t)))\right| \le \omega(t)$, $t \in (0,\tau)$;

3. $|f(t, x_1, y_1, u_1, v_1) - f(t, x_2, y_2, u_2, v_2)| \le$ $\le l_2(t)|x_1 - x_2| + l_3(t)|y_1 - y_2| + l_4(t)|u_1 - u_2| + l_5(t)|v_1 - v_2|$, $(t, x_i, y_i, u_i, v_i) \in D$, $i \in \{1,2\}$, де $l_j:(0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервні функції, $j \in \{1,2,3,4\}$.

Позначимо через $U(\rho, M, q)$ множину неперервно диференційовних функцій $u:(0;\rho] \to \mathbb{R}$, що задовольняють нерівності

$$|u(t) - \varphi(t)| \le M\frac{\omega(t)}{t^{r-1}}, \quad |u'(t) - \varphi'(t)| \le (q + r)M\frac{\omega(t)}{t^r}, \quad t \in (0,\rho]; \tag{3}$$

тут ρ, q, M – додатні сталі, $\rho < \tau$.

Назвемо ***умовами B*** сукупність умов:

1. $l_2(t) = l_2 t^{r-1}$, $l_3(t) = l_3 \left(g(t)\right)^{r-1} \omega(t) / \omega(g(t))$, $l_4(t) = l_4 t^r$, $l_5(t) = l_5 \left(h(t)\right)^r, t \in (0, \tau)$, де l_i – додатні сталі, $i \in \{2,3,4,5\}$;
2. $l_2 + l_3 + (l_4 + l_5)(1 + \omega_0 + r) < \omega_0 - r + 1$;
3. $\lim\limits_{t \to +0} t\omega'(t)\omega^{-1}(t) = \omega_0, \omega_0 > r - 1$;
4. $\lim\limits_{t \to +0} tg'(t)g^{-1}(t) = g_0$, $\lim\limits_{t \to +0} th'(t)h(t) = h_0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються* ***умови A, B***. *Тоді існують сталі* M, q, ρ *такі, що задача Коші (1), (2) має хоча б один розв'язок* $x : \left(0, \rho\right] \to \mathbb{R}$, *що належить до множини* $U\left(\rho, M, q\right)$.

1. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью // Укр. матем. журн. – 2001. – Т.53. – №4. – С.455–465.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – К.: Наук. думка, 1974. – 120 с.

A QUALITATIVE INVESTIGATION FOR SOME SINGULAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQATION

Conditions for existence at least one solution to the Cauchy problem for a functional differential equation is obtained.

УДК 517.95

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ МІШАНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Іван Савка, Іван Тимків

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

s-i@ukr.net, tymkiv_if@ukr.net

Нехай $D^p = (-T,T)\times\Omega^p$ – циліндрична область змінннних $(t,x_1,\dots,x_p)$, де $T>0$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p\in\mathbb{N}$; $D_-^p = D^p\cap\{t<0\}$, $D_+^p = D^p\cap\{t>0\}$.

В області D^p для мішаного рівняння

$$\begin{cases} L_1(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u = \sum\limits_{s_0=0}^{n}\sum\limits_{|s|\le N} A_{s_0,s}\dfrac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = 0,\ (t,x)\in D_-^p, \\ L_2(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u = \sum\limits_{s_0=0}^{m}\sum\limits_{|s|\le M} B_{s_0,s}\dfrac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = 0,\ (t,x)\in D_+^p, \end{cases} \tag{1}$$

розглянемо задачу з умовами спряження при $t=0$ та локальними багато-точковими умовами

$$\lim_{t\to-0}\frac{\partial^{r-1}u(t,x)}{\partial t^{r-1}} = \lim_{t\to+0}\frac{\partial^{r-1}u(t,x)}{\partial t^{r-1}},\ r\in\{1,\dots,\theta\},\ \theta=\min\{n,m\}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(t_j,x)=\phi_j(x),\ j\in\{1,\dots,l\},\ x\in\Omega^p,\ -T\le t_1<\dots<t_l<0,\ 1\le l\le\theta, \\ u(t_{l+j},x)=\phi_{l+j}(x),\ j\in\{1,\dots,n+m-\theta-l\},\ x\in\Omega^p,\ 0<t_{l+1}<\dots<t_{n+m-\theta}\le T, \end{gathered} \tag{3}$$

де $A_{s_0,s}, B_{s_0,s}\in\mathbb{R}$, $A_{n,(0)} = B_{m,(0)} = 1$, $n,m\in N\mathbb{N}$. Припускаємо, що для кожного $k\in Z^p\setminus\{0\}$ корені рівнянь $L_1(\lambda,ik)=0$ і $L_2(\mu,ik)=0$ є простими. Позначимо їх через $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$ і $\mu_1(k),\dots,\mu_\partial(k)$ відповідно.

Для задачі (1) – (3) побудовано формальний розв’язок у вигляді ряду

Фур’є, доведено теореми існування та єдиності розв’язку в просторах експоненційного типу. Зокрема, при дослідженні розв’язності задачі виникають малі знаменники [1-3], які мають вигляд

$$\Delta(k) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{W}_\lambda(k) & \mathbf{W}_\mu(k) \\ \mathbf{E}_\lambda(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_\mu(k) \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\},$$

де

$$\mathbf{W}_\lambda(k) = \left\| (\lambda_j(k))^{q-1} \right\|_{j\in\{1,\dots,n\}}^{q\in\{1,\dots,\theta\}}, \quad \mathbf{W}_\mu(k) = \left\| (\mu_r(k))^{q-1} \right\|_{r\in\{1,\dots,m\}}^{q\in\{1,\dots,\theta\}},$$

$$\mathbf{E}_\lambda(k) = \left\| \exp(\lambda_j(k) t_q) \right\|_{j\in\{1,\dots,n\}}^{q\in\{1,\dots,l\}},$$

$$\mathbf{E}_\mu(k) = \left\| \exp(\mu_r(k) t_{l+q}) \right\|_{r\in\{1,\dots,m\}}^{q\in\{1,\dots,n+m-\theta-l\}}.$$

Величини Δ_k, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів рядів, яким зображується розв’язок задачі (1) – (3). Вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості цілих векторів k і спричиняти розбіжність вказаних рядів.

За допомогою метричного підходу встановлено твердження про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливають умови коректної розв’язності задачі (1) – (3) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з вузлів інтерполяції $(t_1, \dots, t_{n+m-\theta})$.

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
2. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26.
3. *Savka I., Symotyuk M.* Metric estimates of small denominators for one nonlocal conjugation problem // 10th International Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine). – Lviv, 2015. – P. 140.

CONJUGATE PROBLEM FOR A HIGHT ORDER MIXED EQUATION WITH MULTIPOINT CONDITIONS IN CYLINDRICAL DOMAIN

Existence and uniqueness conditions for a high order mixed equation with multipoint boundary conditions in cylindrical domain are obtained. By using of metric approach, small denominator estimates is established.

УДК 517.929

ПОБУДОВА ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЩО МІСТИТЬ ВІДХИЛЕННЯ ЗА ЧАСОМ

Лідія Сергєєва

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

sergeevalms@gmail.com

Врахування відхилення в класичних задачах математичної фізики приводить до рівнянь з частинними похідними із відхиленням тільки за часом. У багатьох випадках до цих задач може бути застосовано метод відокремлення змінних із деякими модифікаціями.

Описано алгоритм побудови глобального розв'язку та наведено умови його існування для деякого неоднорідного рівняння нейтрального типу з частинними похідними із відхиленням за часом вигляду

$$u_t(x,t) = p(t)u_{xx}(x,t+\mu) + r(t)u_t(x,t+\mu) + q(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t\in R, \tag{2}$$

де $Q = \{(x,t): 0 < x < \pi, t\in R\}, \mu \in R\setminus\{0\}$, причому функції p та r – неперервні на R, а відхилення μ – достатньо мале.

Було встановлено [1], що для відповідної однорідної задачі власні функції і власні значення мають відповідно вигляд

$$X_k(x) = sin\frac{k\pi x}{l}, \lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2, k = 1,\dots,n,$$

з деяким $n \ge 1$.

Припускається, що функція $q(x,t)$ може бути представлена у вигляді суми перших n доданків ряду Фур'є:

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) sin\frac{k\pi x}{l},\ q_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l q(\xi,t) sin\frac{k\pi\xi}{l} d\xi,\ k = 1,\dots,n.$$

Глобальний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) знайдено у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x)T_k(t),\ (x,t)\in Q, \tag{3}$$

де $T_k(t)$ – розв'язок лінійного рівняння

$$T_k'(t) + \overline{p}_k(t)T_k(t) - \overline{q}_k(t) = 0,$$

із коефіцієнтами

$$\overline{p}_k(t) = (r(t)\overline{p}_k(t+\mu) + \lambda_k p(t))e^{\int_{t+\mu}^{t}\overline{p}_k(s)ds},$$

$$\overline{q}_k(t) = q_k(t) + r(t)\overline{q}_k(t+\mu) + (r(t)\overline{p}_k(t+\mu) + \lambda_k p(t)) \int_{t+\mu}^{t} \overline{q}_k(\tau) e^{\int_{\tau+\mu}^{\tau}\overline{p}_k(s)ds} d\tau,$$

$k = 1,...,n,\ t \in R$. Для знаходження коефіцієнтів $\overline{p}_k$ та $\overline{q}_k$ було застосовано метод послідовних наближень.

Отримано умови, при виконанні яких даний метод побудови глобального розв'язку задачі (1), (2) є застосовним. Для цього доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай функції* p, r *та* q *задовольняють накладені вище умови, причому*

$$|\,p(t)\,| < \beta,\ |\,r(t)\,| < \gamma,\ \beta, \gamma = const,\ t \in R,$$

і такі, що виконуються нерівності

$$\gamma + (\gamma + \lambda_n \beta\,|\,\mu\,|)e < 1,\ \gamma < \frac{1}{e},$$

де n *– ціла частина числа* $l/\pi\sqrt{(1-\gamma e)/(e\beta\,|\,\mu\,|)}$. *Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1), (2) вигляду (3).*

Запропонований метод було використано при дослідженні деяких інших типів рівнянь [2], [3].

1. *Самойленко А. М., Сергєєва Л. М.* Побудова глобальних розв'язків рівнянь з частинними похідними, які містять відхилення по часу // Нелінійні коливання. – 2014. – 17, №4. – с. 489–502.
2. *L. M. Sergeeva.* About global solutions of partial differential equation with deviating argument in the time variable, ROMAI J., v.11, no. 2(2015), pp. 109–118.
3. *Сергєєва Л. М.* Про глобальний розв'язок деякого неоднорідного диференціального рівнянння з частинними похідними, що містить відхилення за часом/ Л. М. Сергєєва // Буковинський математичний журнал. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2017. – 5, № 1-2. – С. 123-129.

CONSTRUCTING THE GLOBAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENT IN THE TIME VARIABLE

We provide the algorithm of constructing the global solution for some nonhomogeneous partial differential equation with deviating argument in the time variable. We justify this algorithm and study existence conditions of this solution.

УДК 519.21

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Ганна Сливка-Тилищак, Михайло Михасюк

Пряшівський університет в Пряшеві,
Ужгородський національний університет

aslyvka@ukr.net, mikhasyuk.m@gmail.com

Розглянемо таку крайову задачу для рівняння коливання неоднорідної струни:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; \tag{1}$$

$$x\in[0,l],\ \ t\in[0,T],\ \ T>0;$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=\xi(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\eta(x),\ \ x\in[0,l]. \tag{3}$$

Припустимо, що початкове положення струни $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ і початкова швидкість $(\eta(x),\ x\in[0,\pi])$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси.

Розв'язок задачі (1) – (3) зображується у вигляді ряду [3]

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left[A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right], \tag{4}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ t\in[0,T];$$

$$A_k=\int_0^1\xi(x)X_k(x)\rho(x)\,dx,\ \ B_k=\int_0^1\eta(x)X_k(x)\rho(x)\,dx,\ \ \ k\ge 1,$$

де λ_k, $k\ge 1$ – власні значення, а $X_k=X_k(x)$, $x\in[0,l]$, $k\ge 1$ – відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right)-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\ \ x\in[0,l],$$

$$X(0)=X(l)=0.$$

Ряд (4), згідно з [2], є також $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадковим полем.

Теорема 1. *Нехай* $\{u(x,t),\,(x,t)\in D\}$, $D=[0,l]\times[0,+\infty)$ *– сепарабельне випадкове поле з простору* $SSub_{\varphi}(\Omega)$, *де* $\varphi(x)=|x|^p/p$, *при* $|x|>1,\ p>1$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k,b_{k+1}],\ k=0,1,\ldots$ *– сім'я таких відрізків, що* $0\le b_k<b_{k+1}<+\infty$, $k=0,1,\ldots\ D_k=[0,l]\times[b_k,b_{k+1}],\ \bigcup_k D_k=D$;

2) $c=\{c(t),\,t\in\mathbb{R}\}$ *– деяка неперервна функція, що* $c(t)>0$, $t\in\mathbb{R},\ c_k=\min_{t\in[b_k,b_{k+1}]}c(t)$;

3) $\sup_k\frac{1}{c_k}<\infty,\ \sup_k \ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\Big/c_k<\infty$;

4) Для деякого s, *такого що,* $\sup_k\frac{4\varepsilon_0}{c_k(1-\theta)}<s<\frac{\nu}{2}$, *де*

$$\varepsilon_0\le\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left[|\mathrm{E}A_kA_l|+\frac{|\mathrm{E}B_kB_l|}{ml}+\frac{|\mathrm{E}A_kB_l|}{l}\right]^{\frac{1}{2}},$$

збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}<\infty$.

Тоді для

$$\upsilon>\sup_k\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}}+\theta\varepsilon_0\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\frac{1}{c_k}\frac{4}{\theta(1-\theta)},$$

$0<\theta<1$, *виконуєтся нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in D}\frac{|u(x,t)|}{c(t)}>\nu\right\}\le 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\nu}{s}\right)^q\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}.$$

1. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* On the increase rete of random fields from space on unbounded domains// Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol.2. – P. 79–92.
2. *Slyvka-Tylyshchak A. I.* Justification of the Fourier method for equations of homogeneous string vibration with random initial conditions // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2012. – 38. – P. 211–231.
3. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964.

PROPERTIES OF SOLUTION FOR THE PROBLEM OF STRING VIBRATION WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS

Estimates for distribution of supremum for normalized hyperbolic equation solution with random initial conditions are obtained.

УДК 517.925, 517.923

МЕТОД АПРІОРНИХ ОЦІНОК В ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Віталій Слинько, Богдан Тимошенко

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

vitstab@ukr.net, tbvposhta@gmail.com

Інтегральні нерівності є ефективним методом дослідження в теорії диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь. Основним методом дослідження в теорії інтегральних нерівностей є метод порівняння, що базується на класичних результатах С. А. Чаплигіна [3] і Т. Важевського. Теорема про диференціальну нерівність та її багатовимірне узагальнення є потужними методами в теорії інтегральних нерівностей [1]. Достатньо загальним методом в теорії інтегральних нерівностей є метод В. Лакшмікантама [2].

В цій роботі запропоновано новий підхід до дослідження нелінійних одновимірних інтегральних нерівностей та їх дискретних аналогів, що застосовується у випадку, коли відповідне рівняння порівняння першого порядку не інтегрується в квадратурах.

Нехай дано інтегральну нерівність виглядуу: $u(t)\le u_0+\sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} h_k(s)u^{r_k}(s)ds$,

де $u:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$, $h_k\in C(\mathrm{R}_+,\mathrm{R}_+)$, $h_k(s)\ge 0$, $r_k\ge 0$, $u_0>0$.

Уведемо наступні позначення:

$$r^*:=\max_{k=\overline{1,m}}\{r_k\},\ \overline{r}:=\frac{r_1+\dots+r_m}{m},\ g(t):=m\left(\prod_{k=1}^{m}h_k(t)\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$f(t):=\sum_{k=1}^{m}h_k(t)\left(u_0^{1-\overline{r}}+(1-\overline{r})\int\limits_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau\right)^{\frac{r_k-r^*}{1-\overline{r}}}.$$

Теорема 1. *Функція* $u(t)$ *задовольняє оцінку:*

$$u(t) \le \left(u_0^{1-r^*} + (1-r^*)\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{1-r^*}}$$

для всіх $t \ge t_0$ *таких, що:* $u_0^{1-r^*} + (1-r^*)\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau > 0.$

Аналогічний результат одержано для дискретної нерівності:

$$u_n \le u_0 + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{l} h_{pk} u_p^{r_k},$$

де $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset R_+$, $\{h_{pk}\}_{n=0}^{\infty} \subset R_+$, $r_k > 0$, $u_0 \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

Ці результати можуть бути поширені на інтегральні нерівності на часових шкалах за допомогою методики, запропонованої в роботі [4].

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – МЦНМО, 2012. – 344 с.
2. *Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук.думка, 1989. – 270с.
3. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1950.
4. *Martynyuk A. A., Slyn'ko V. I.* On a nonlinear inequality on the time scale // Differential Equations, 2008, Vol. 44, No. 10, pp. 1482–1488

APPLICATIONS OF INTEGRAL INEQUALITIES IN THE COURSE OF THE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

New approach to study of nonlinear integral inequalities and their discrete analogues is proposed. The approach is used when corresponding first-order comparison equation is not integrated in quadratures. In this case, a comparison equation is proposed to be reduced to a pseudo-linear form. Further, using the differential inequality theorem, lower estimates of solutions of the comparison equation are derived, which are referred to a priori estimates, from which upper estimates of the comparison equation are obtained.

УДК 517.9

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ (2+1)-ВИМІРНОГО ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ АЗІЙСЬКОГО ОПЦІОНУ

Станіслав Спічак, Валерій Стогній, Інна Копась, Олена Горбунова

Інститут математики НАН України;
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

stas.math@gmail.com, stogniyvaleriy@gmail.com, innak@net.ua, 96alenagorbunova@gmail.com

У роботі [1] розглядається рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+S\frac{\partial V}{\partial A}-rV=0, \tag{1}$$

яке описує ціноутворення азійського опціону в неперервному часі $\tau\in[0;T]$, T – термін дії контракту; $V=V(\tau,S,A)$ – функція вартості опціону; S – вартість базового активу; A – усереднене значення всіх наявних цін базових активів S до моменту часу τ; r і σ – сталі, що описують безризикову процентну ставку і волатильність акції відповідно.

Рівняння (1) за допомогою заміни

$$V(\tau,S,A)=f(\tau,S,A)u(t(\tau,S,A),x(\tau,S,A),y(\tau,S,A)), \tag{2}$$

де функція $f(\tau,S,A)$ і нові незалежні змінні t,x,y визначаються відповідно формулами $f=S^{-m}e^{q\sigma^2(\tau\text{-}T)/2}$, $t=\sigma^2/2(T-\tau)$, $x=S$, $y=\sigma^2/2\,A$, $m=r/\sigma^2$, $q=m^2+m$, зводиться до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{3}$$

де $u=u(t,x,y)$.

Далі застосуємо теоретико-групові методи для інтегрування рівняння (3). Добре відомо, що якщо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними має неперервну групу симетрії, то це дає можливість використовувати диференціальні оператори алгебри Лі цієї групи для симетрійної редукції з наступною побудовою точних розв'язків цього рівняння [2; 3].

Теорема. *Максимальна алгебра Лі інваріантності рівняння (3) генерується такими диференціальними операторами:*

$$X_1 = \partial_t\,,\ X_2 = \partial_y\,,\ X_3 = u\partial_u\,,\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y\,,$$

$$X_5 = xy\partial_x + \frac{1}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2}xu\partial_u\,,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u\,.$$

В останньому операторі функція $\beta(t,x,y)$ є довільним розв'язком рівняння (3).

Зауваження. Далі ми не враховуватимемо оператор симетрії $X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням і обумовлює принцип суперпозиції.

Зазначимо, що диференціальні оператори X_i $(i = 1, \ldots, 5)$ симетрії становлять базис п'ятивимірної алгебри $L_5 = X_1 \oplus X_3 \oplus \langle X_2, X_4, X_5 \rangle$, де $\langle X_2, X_4, X_5 \rangle = sl(2,R)$.

Для побудови точних розв'язків проведено класифікацію одновимірних і двовимірних підалгебр алгебри інваріантності L_5 з точністю до дії перетворень її групи автоморфізмів. Використовуючи інваріанти, що відповідають знайденим одновимірним і двовимірним підалгебрам, здійснено редукцію цього рівняння до диференціальних рівнянь із частинними похідними з двома незалежними змінними та звичайних диференціальних рівнянь відповідно.

Ряд отриманих редукованих рівнянь вдалося проінтегрувати, що дало можливість отримати точні розв'язки рівняння (3), а використовуючи заміну (2), й рівняння (1).

1. *Barucci E., Polidoro S., Vespri V.* Some results on partial differential equations and Asian options // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2001. – **11**. P. 475-497.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.

SYMMETRY PROPERTIES AND EXACT SOLUTIONS OF (2 + 1) -DIMENSIONAL LINEAR EQUATION OF PRICING OF ASIAN OPTION

The maximum invariance algebra of the equation, which is equivalent to the pricing equation of Asian options, is found. By using the operators of these algebra, some exact solutions of the equation are constructed.

УДК 517.928

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Оксана Тарасенко

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

oxana.tarasenko@gmail.com

Розглядається задача оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,$$

де $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ – шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ – дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ – $(n\times m)$-матриця з дійсними елементами, $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0\right]$ – малий параметр: $\varepsilon_0 << 1$; $h\in N$, $t\in\left[0;T\right]$.

Розв'язується питання про знаходження оптимальної траєкторії та відповідного оптимального керування, під дією якого система переходить з одного стану в інший за фіксований проміжок часу, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T\left(D\left(t,\varepsilon\right)u,u\right)dt \to \min_u,$$

де $D(t,\varepsilon)$ – симетрична матриця m-го порядку.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, розглядалась в [2], [3], де передбачалось, що корені відповідного характеристичного рівняння уявні.

Нами розглядаються більш загальні випадки. Детально досліджуються різні випадки, пов'язані з поведінкою спектра граничної в'язки матриць.

Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна та методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь [1], [4], побудовано формальний розв'язок даної задачі і знайдено умови, за яких він має асимптотичний характер; виведено відповідні асимптотичні оцінки; розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів шуканих асимптотичних розвинень у явному вигляді.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
2. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленно меняющимися коэффициентами в случае кратных корней // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика – 1977. – Вып. 31. – С. 81–92.
3. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – №7. – С. 604–608.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.

SOME PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL

The research is devoted to construction of asymptotic solution of singularly perturbed optimal control problem

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T \big(D(t,\varepsilon)u,u\big)\,dt \to \min_u,$$

which conversions the system from state $x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon)$ *to state* $x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon)$ *over a fixed time interval T. We are considered cases where matrix* $B(t,\varepsilon)$ *is non-singular at all* $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, *where it degenerates with convergence of small parameter to zero and where it fully degenerates. We have investigated the case of the degeneration of matrix* $D(t,0)$.

УДК 517.912

ПРЯМИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФОРМ

Роман Тацій, Марта Стасюк, Олег Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

roman.tatsiy@gmail.com, marta_stasiuk@yahoo.com, opazen@gmail.com

Розглядається однопараметрична сім’я диференціальних рівнянь теплопровідності

$$c\rho\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{r^l}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^l\lambda\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right),\ l=0,1,2 \tag{1}$$

(при l=0 – багатошарова плоска конструкція; l=1 – багатошаровий порожнистий циліндр; l=2 – багатошарова порожниста куля), з крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases}\lambda\dfrac{\partial t}{\partial r}(r_0,\tau)=\alpha_0\left(t(r_0,\tau)-\psi_0(\tau)\right),\\ -\lambda\dfrac{\partial t}{\partial r}(r_n,\tau)=\alpha_n\left(t(r_n,\tau)-\psi_n(\tau)\right),\end{cases} \tag{2}$$

та початковою умовою

$$t(r,0)=\varphi(r). \tag{3}$$

Розв’язок задачі (1)-(3) шукатимемо у вигляді суми двох функцій [1, 2]

$$t(r,\tau)=u(r,\tau)+v(r,\tau). \tag{4}$$

Будь-яку з функцій $u(r,\tau)$ чи $v(r,\tau)$ можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно. Визначимо функцію $u(r,\tau)$ як розв’язок (квазістаціонарної) крайової задачі з крайовими умовами

$$\frac{1}{r^l}\left(r^l\lambda u'\right)'=0, \tag{5}$$

$$\begin{cases}\alpha_0 r_0{}^l u(r_0,\tau)-u^{[1]}(r_0,\tau)=\alpha_0 r_0{}^l\psi_0(\tau),\\ \alpha_n r_n{}^l u(r_n,\tau)+u^{[1]}(r_n,\tau)=\alpha_n r_n{}^l\psi_n(\tau),\end{cases}\quad u^{[1]}\overset{df}{=}r^l\lambda t_r{}', \tag{6}$$

У роботах [1, 2] встановлено, що на кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ розв'язок задачі має вигляд вектор-функції $\overline{U}_i(r)$

$$\overline{U}_i(r) = B_i(r, r_i) \cdot B(r_i, r_0) \cdot P_0 , \tag{7}$$

де першою координатою вектора-функції є шукана функція $u(r, \tau)$.

На основі зображення (4), з урахуванням рівнянь (5) та (1) прийдемо до неоднорідного диференціального рівняння на функцію $v(r, \tau)$ [1]

$$\tilde{n}\rho \frac{\partial v(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^l} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^l \lambda \frac{\partial v(r,\tau)}{\partial r} \right) - \tilde{n}\rho \frac{\partial u(r,\tau)}{\partial \tau}, \tag{8}$$

з крайовими умовами та початковою умовою для функції $v(r, \tau)$

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0{}^l v(r_0, \tau) - v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n{}^l v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad v^{[1]} \overset{df}{:=} r^l \lambda v_r{}', \tag{9}$$

$$v(r, 0) = f(r) \equiv \varphi(r) - u(r, 0). \tag{10}$$

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ розв'язок мішаної задачі (8)-(10) отримуємо у вигляді ряду [1, 2]

$$v_i(r,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k (\tau - s)} u_k(s)\, ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k). \tag{11}$$

1. *O. Y. Pazen and R. M. Tatsii.* General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2016. – Vol. 89, no. 2. – P. 357–368.
2. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Пазен О. Ю.* Прямий метод дослідження температурного поля в багатошаровому трубопроводі за умов пожежі // Матеріали статтей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». 2017. – С. 436–440.

DIRECT METHOD OF CALCULATION OF NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN MULTILAYER STRUCTURES OF MAIN GEOMETRIC FORMS

General scheme for researching of heat transfer process in multilayer constructions with simultaneously three basic geometric forms is offered. In this connection, one-parameter family of boundary problems is solved. The basis of implementation of this scheme is laid: method of reduction, concept of quasi-derivatives, modern theory of systems of linear differential equations, Fourier method and the modified method of eigenfunctions.

УДК 517.956.4

МАТРИЦЯ ҐРІНА МОДЕЛЬНОЇ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Наталія Турчина

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

nataturchina@gmail.com

Нехай $n, N, b_1, \ldots, b_n$ − задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s − найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $\|k\| := s\sum_{j=1}^{n} b_j k_j$ і $\|k'\| := = s\sum_{j=1}^{n-1} b_j k_j$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n)$ і $k' := (k_1, \ldots, k_{n-1})$ − відповідно n-вимірний і $(n-1)$-вимірний мультиіндекси; $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і

$$x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

$$\Pi^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, x \in \mathbb{R}^n_+\},\ \ \Pi' := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n \mid t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

В області Π^+ розглядається така крайова задача:

$$(I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k) u(t, x) = f_0(t, x),\ (t, x) \in \Pi^+, \tag{1}$$

$$\sum_{2sk_0+\|k\|=r_j} b_{jk_0k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t, x)\,|_{x_n=0} = f_j(t, x'),\ (t, x') \in \Pi', j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2}$$

$$u(t, x)\,|_{t=0} = f_{m+1}(x), x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{3}$$

де u, f_0 і f_{m+1} − матриці-стовпчики висоти N; a_k і b_{jk_0k} − сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; I_N − одинична матриця порядку N; $m = b_n N$; $f_1, \ldots, f_m$ − скалярні функції; $r_1, \ldots, r_m$ − невід’ємні цілі числа. Припускається, що система (1) є $\overrightarrow{2b}$-параболічною у сенсі С. Д. Ейдельмана, а крайові умови (2) задовольняють умову доповняльності [1].

Доповідь присвячена побудові й вивченню властивостей (структури, дивергентного зображення, оцінок) матриці Ґріна задачі (1)−(3), тобто такої матриці $G := (G_0, G_1, \ldots, G_{m+1})$, що для довільних гладких і фінітних функцій

$f_j, j \in \{0,1,...,m+1\}$, розв'язок задачі зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t-\tau, x, \xi) f_0(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') f_j(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+\int_{\mathbb{R}_+^n} G_{m+1}(t,x,\xi) f_{m+1}(\xi) d\xi, \ (t,x) \in \Pi^+ . \tag{4}$$

Якщо функції $f_j, j \in \{0,1,...,m+1\}$, не є фінітними, але вони задовольняють природні умови узгодження, то розв'язок задачі (1)−(3) виражається формулою, яка відрізняється від формули (4) тим, що в ній $G_0(t-\tau, x, \xi)$ замінено на $\tilde{G}_0(t,\tau,x,\xi)$, а $G_{m+1}(t,x,\xi)$ − на $\tilde{G}_{m+1}(t,x,\xi)$, де

$$\tilde{G}_0(t,\tau,x,\xi) := G_0(t-\tau,x,\xi) + G_0'(t-\tau,x,\xi) + G_0''(t,\tau,x,\xi),$$

$$\tilde{G}_{m+1}(t,x,\xi) := G_0(t,x,\xi) + G_0'(t,x,\xi) + G_{m+1}'(t,x,\xi).$$

Тут G_0', G_0'' і G_{m+1}' є лінійними комбінаціями похідних від дельта-функцій, які зосереджені в точках $\xi_n = 0$ і $\tau = 0$. Матриця $\tilde{G} := (\tilde{G}_0, G_1, ..., G_m, \tilde{G}_{m+1})$ називається узагальненою матрицею Ґріна задачі (1)−(3).

Зауважимо, що $\tilde{G} = G$, якщо в крайові умови (2) не входять диференціювання за t, а також диференціювання за x_n порядків, більших за $2b_n - 1$.

1. *Турчина Н. І., Івасишен С. Д.* Про модельну крайову задачу з векторною вагою // Буковинський мат. журн. – 2017.−**5**, №3−4. − С. 163−167.

GREEN\`S MATRIX FOR MODEL $\overrightarrow{2b}$-PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM

General model for boundary value problem of parabolic by Eidelman system with vector order $\overrightarrow{2b}$ is considered. Results on the structure of Green\`s matrix are given. Estimates and divergent representations for these components is obtained.

УДК 517.956.4

СПРЯЖЕНА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Галина Унгурян

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

galuna_unguryan@ukr.net

Розглянемо диференціальні рівняння [1, 2] порядку p вигляду

$$\partial_t u_\tau(t;x) = \left\{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\right\} u_\tau(t;x),\ 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

із диференціальними виразами

$$P_0(t;i\partial_x) = \sum_{|q|\le p} a_q(t) i^{|q|} \partial_x^q, \qquad P_1(t,x;i\partial_x) = \sum_{|k|\le p_1} a_k(t;x) i^{|k|} \partial_x^k,$$

причому рівняння

$$\partial_t u_\tau(t;x) = P_0(t;i\partial_x) u_\tau(t;x),\ (t;x) \in \Pi_{(\tau;\mathrm{T}]} := (\tau;\mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n,\ -$$

параболічне за Г. Є. Шиловим у смузі $\Pi_{[\tau;\mathrm{T}]}$, $\tau \in [0;\mathrm{T})$, з показником параболічності h, $0 < h \le p$, невід'ємним родом μ, зведеним порядком p_0, а порядок p_1 задовольняє умову:

$$0 \le p_1 < h - n(1 - h\mu / p_0).$$

Доповідь присвячена питанню розв'язності задачі Коші:

$$\partial_t v_\tau(\tau;\xi) = -\left\{P_0^*(\tau;i\partial_\xi) + P_1^*(t,\xi;i\partial_\xi)\right\} v_t(\tau;\xi), \quad (2)$$

$$v_t(\tau;\cdot)\big|_{\tau=t} = \varphi(\cdot),\ \varphi(\cdot) \in S_{1-\mu/p_0}, \quad (3)$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, у (2) P_0^* і P_1^* – відповідні спряжені за Лагранжем із P_0 і P_1 диференціальні вирази.

Теорема. *Нехай коефіцієнти рівняння (2) диференційовні за просторовою змінною* ξ *до порядку* $\alpha_* \ge p$ *і* $\alpha_* > n + p_1$ *включно, обмежені комплекснозначні функції на множині* $\Pi_{[0;\mathrm{T}]}$, *при цьому* $a_q(\tau)$ *і* $\partial_\xi^l a_k(\tau;\xi)$, $|l| \le \alpha_*$, *є неперервними за змінною* τ *рівномірно стосовно* ξ. *Тоді при* $0 \le \tau < t \le T$ *і* $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ *для рівняння (2) існує фундаментальний розв'язок*

$Z^*(\tau,\xi;t,x)$ *задачі Коші, диференційовний за змінною* τ *один раз, а за змінною* ξ *до порядку* α_* *включно, який разом із своїми похідними експоненціально спадає в околі нескінченно віддалених просторових точок з порядком* $p_0/p_0-\mu$, *а в околі точки* $\tau=t$, *з порядком* $\mu/p_0-\mu$. *Функція*

$$v_t(\tau;\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z^*(\tau,\xi;t,x)\varphi(x)dx,\ (\tau;\xi)\in\Pi_{[0;t)},$$

є регулярним розв'язком задачі Коші (2), (3), яка диференційовна один раз за τ, *а за* ξ *– до порядку* α_* *включно, для похідних якої виконуються оцінки:*

$$\forall\tau\in[0;t)\ \exists A>0\ \forall q\in Z_+^n,\ |q|\le\alpha_*,\ \exists c_q>0\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ \forall k\in Z_+^n:$$
$$\left|\xi^k\partial_\xi^q v_t(\tau;\xi)\right|\le c_q A^{|k|}|k|^{(1-\mu/p_0)|k|}.$$

Розв'язок задовольняє початкову умову (3) в розумінні:

$$1)\ \forall q\in Z_+^n,\ |q|\le\alpha_*:\ \partial_\xi^q v_t(\tau;\xi)\xrightarrow[\tau\to t-0]{\xi\in K}\partial^q\varphi(\xi)\ \ (\forall K\subset\mathbb{R}^n);$$

$$2)\ \forall t\in(0;T]\ \exists\varepsilon>0\ \exists A>0\ \forall q\in Z_+^n,\ |q|\le\alpha_*,\ \exists c_q>0\ \forall k\in Z_+^n$$
$$\forall\xi\in\mathbb{R}^n\ \forall\tau\in(t-\varepsilon;t):\ \left|\xi^k\partial_\xi^q v_t(\tau;\xi)\right|\le c_q A^{|k|}|k|^{(1-\mu/p_0)|k|}.$$

1. *Літовченко В. А., Унгурян Г. М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь обмеженої гладкості // Математичне і комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць. Вип. 10. – Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Камянець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2014. – С. 128–139.
2. *Літовченко В. А., Унгурян Г. М.* Задача Коші для одного класу параболічних рівнянь із регулярними початковими розподілами типу S' // Буковинський математичний журнал. – 2016 – Т. 4, № 1-2. – С. 101–107.

CONJUGATE CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Conjugate Cauchy problem for one class of parabolic by Shilov equations with coefficients of bounded smoothness and non-negative genius is considered. The question of existence of fundamental solution for the Cauchy problem is investigated. Gelfand-Shilov solvability of the problem with initial conditions from space S_α *is installed.*

УДК 517.944

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Григорій Хома, Світлана Хома-Могильська

Тернопільський національний економічний університет

sv_khoma@ukr.net

Досліджується така крайова T-періодична задача:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t \in \mathbf{R}\,, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, u(x,t+T) = u(x,t)\,,\ 0 \le x \le \pi\,,\ t \in \mathbf{R}\,. \tag{2}$$

Як і в роботах [1, 2], розглядаються оператори S_{a_1} та S_{a_2} [1, с.26, формули (9.6), (9.8)], що дає змогу одержати нові результати. Побудовано нові оператори S_a та R_2^a для дослідження T-періодичного розв'язку рівняння (1), який задовольняє умови (2).

Доведено, що за допомогою оператора R_2^a визначена функція

$$\tilde{u}^a(x,t) = \left(S_a g\right)(x,t) + \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t) \equiv \left(R_2^a g\right)(x,t)\,,$$

де $\left(\tilde{S}_{\grave{a}} g\right)(x,t) = \frac{\pi - x}{4\pi \grave{a}} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{x}{4\pi \grave{a}} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau$, не обов'язково при цьому буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1), при цьому враховуються властивості оператора $\tilde{S}_a$.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912–921.

METHOD OF STUDY T-PERIODIC SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

We investigate the existence of T-periodic solution to the boundary-value T-periodic problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $0 < x < \pi$, $t \in \mathbf{R}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$, $u(x,t+T) = u(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbf{R}$, *on the basis of operators* S_{a_1} *and* S_{a_2}.

УДК 517.36

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВРАЩЕНИЕМ ЭКСЦЕНТРИКОВОГО МАХОВИКА

Анатолий Хорошун

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины

khoroshunanatoliy@gmail.com

Спутники с двойным вращением являются одним из основных типов беспилотных космических аппаратов. Приближенно такой спутник можно представить в виде двух твердых тел, платформы и ротора, соединенных жестким валом. После доставки на орбиту, спутник движется без взаимного вращения его частей друг относительно друга, как одно твердое тело. Задача состоит в том, чтобы обеспечить невращение платформы, например, для проведения исследований или фотосъемки в заданном направлении. Для этого электродвигатель, расположенный на платформе, вращает посредством вала ротор в направлении, совпадающем с направлением начального вращения. Таким образом, угловая скорость платформы стремится к нулю, а момент импульса ротора становится равным начальному моменту системы. Известно, однако, что в ходе такого маневра спутник может “опрокинуться” из-за увеличения угла нутации или скорость вращения ротора начнет неограниченно возрастать, что приведет к значительному отклонению движения космического аппарата от желаемого. Для исследования этих негативных режимов было предложено использовать механическую модель, которая получила название TORA (Translational Oscillator with Rotating Actuator) имеющую сходную математическую природу с моделью спутника с двойным вращением.

TORA может быть отнесен к классу т.н. малоприводных механических систем (англ. underactuated mechanical system), которые характеризуются тем, что количество входов управления в них меньше, чем количество переменных, описывающих поведение системы. Системы такого класса широко используются при конструировании различных роботов, аэрокосмических и морских аппаратов, поскольку имеют преимущество в меньшем потреблении энергии и меньшей стоимости по сравнению с механическими системами с большим количеством входов управления.

В работе, используя технику Dynamic Surface Control (DSC), получен закон управления вращением эксцентрикового маховика, который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия TORA. Доказательство устойчивости проводится с помощью метода функций Ляпунова, что позволяет не разделять исходную систему дифференциальных уравнений, которая имеет вид быстро-медленной, на “быструю” и “медленную” подсистемы. Хотя данная система и допускает подобное разделение, установить устойчивость состояния равновесия “медленной” подсистемы достаточно трудно, так как она существенно нелинейна, а ее линеаризация, в контексте искомой глобальной устойчивости, смысла не имеет. Кроме того, функция Ляпунова, построенная для полной системы дифференциальных уравнений, позволяет, исходя из условий отрицательной определенности ее производной по времени в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, получить ограничение на величину параметров, которые входят в управление. Отметим относительную простоту полученного закона управления, что имеет важность для его практического применения. Этого удалось достичь, поскольку применение техники DSC позволяет избежать возрастания сложности элементов системы дифференциальных уравнений и закона управления. Также в работе указаны оценки, которые позволяют выбрать параметры управления и временные константы фильтров так, чтобы полученное управление реализовывало поставленную задачу стабилизации положения равновесия TORA. Доказана робастность такого управления и предложен способ оценки области робастности в пространстве параметров механической системы, что представляет значительный интерес, так как реальные механические системы всегда зависят от неточных параметров. Полученные результаты проиллюстрированы на примере конкретной механической модели.

1. *Hall C. D.* Resonance capture in axial gyrostats // Journal of the Astronautical Sciences. – 1995. – Vol. 43. – P. 127–138.
2. *Liu Y., Yu H. A* survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. – 2013. – vol.7, iss.7. – P. 921–935.
3. *Swaroop D., Hedrick J. K., Yip P. P., Gerdes J. C.* Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – vol. 45, №11. – P. 1893–1899.
4. *Yee R. K.* Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque // Master’s Thesis, UCLA, 1981.

ON STABILIZATION OF TRANSLATIONAL MOVEMENTS BY ROTATION OF THE EXCENTRIC FLYWHEEL

Control law of the eccentric wheel rotation which globally asymptotically stabilizes the equilibrium of TORA is proposed. It is shown that such control is robust. Estimation method of robustness region in space of parameters of mechanical system is suggested. Obtained results is illustrated on example of real system.

УДК 517.928.1

АСИМПТОТИКА ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ТРЬОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

Олена Чорненька, Олександра Цирин

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

elenagolovch@rambler.ru, sasha.thyryn.5@gmail.com

В даній роботі вивчається питання про побудову асимптотики розв'язку однорідної системи трьох лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon x\frac{dy}{dx}=A(x,\varepsilon)\,y\,, \qquad (1)$$

з регулярною особливою точкою $x=0$; де ε – малий параметр, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$; x – незалежна змінна; $y(x,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, $A(x,\varepsilon)$ – квадратна матриця третього порядку, яка задається подвійним розвиненням

$$A(x,\varepsilon)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x^s A_{sk}\,. \qquad (2)$$

Системи n лінійних диференціальних рівнянь вигляду (1) вивчались у роботі [1], проте розглядався випадок розвинення матриці $A(x,\varepsilon)$ системи (1) у ряд лише за степенями параметра ε. У роботі [2] обґрунтовано питання про побудову асимптотики системи (1) n рівнянь з розвиненням (2) для одного випадку кратного спектра головного оператора цієї системи.

У даній роботі вивчаються випадки як простого, так і кратного спектра головного оператора системи трьох диференціальних рівнянь вигляду (1). Не обмежуючи загальності, для кожного з випадків матриця A_{00} задається у канонічному вигляді. Зокрема, для випадку простого спектра $A_{00}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $\lambda_1\ne\lambda_2\ne\lambda_3$, доведено наступну теорему.

Теорема. *Якщо матриця A_{00} має різні власні значення, то система рівнянь (1) має три частинних формальних розв'язків вигляду*

$$y_i(x,\varepsilon)=u_i(x,\varepsilon)\cdot\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{x_0}^{x}t^{-1}\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right),\ i=\overline{1,3}\,, \qquad (3)$$

де $u_i(x,\varepsilon)$ – тривимірні вектори, $i=\overline{1,3}$, $\lambda_i(x,\varepsilon)$ – скалярні функції, $i=\overline{1,3}$, що задаються формальними розвиненнями

$$u_i(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^s \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \; \lambda_i(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^s \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)}, \; i = \overline{1,3}. \qquad (4)$$

При доведенні даної теореми розроблено алгоритм визначення коефіцієнтів розвинень (4). Вектори (3) є асимптотичними розв'язками системи (1) за умови $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$, $i = \overline{1,3}$.

Випадок кратного спектра вивчається за умов:

а) головна матриця A_{00} системи (1) має одне власне значення кратності три, якому відповідає один елементарний дільник такої ж самої кратності;

б) головна матриця A_{00} системи (1) має одне власне значення кратності три, якому відповідає два елементарних дільники, з яких один простий, а інший кратності два.

У таких випадках розв'язок системи (1) будується у вигляді вектора (3), де розвинення для вектор-функцій $u_i(x,\varepsilon)$ та скалярних функцій $\lambda_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$, подано за дробовими показниками параметра та відношення незалежної змінної та параметра.

Отже, у даній роботі, за допомогою розробленої у [2] методики, обґрунтовано можливості побудови асимптотичного розв'язку системи трьох диференціальних рівнянь у вигляді подвійних степеневих рядів.

1. *Завизион Г. В.* Сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений с рациональной особенностью / Г. В. Завизион // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43, № 7. – С.867–878.
2. *Чорненька О. В.* Асимптотичний аналіз лінійних систем диференціальних рівнянь з параметром та регулярною особливою точкою / О. В. Чорненька // Вісник Черкаського університету. Серія «Фізико-математичні науки». – 2016. – Вип. 1. – С. 90–99.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS FOR SINGULARLY PERTURBED LINEAR SYSTEMS OF THREE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR POINT

In this paper we study the question of constructing a general asymptotic solution of linear systems of three differential equations with small parameter and regular singular point. We study the cases: where the main matrix of the system has three different eigenvalues, where the main matrix of the system has three equal eigenvalues. We investigate possibility of constructing solutions of the system in the form of double series. In the case where the main matrix of the system has simple eigenvalues, solutions can be constructed in the form of double series with nonnegative powers of parameter and independent variable. In cases where the main matrix of the system has three equal eigenvalues, solutions can be constructed in the form of double series with fractional power parameter and ratio of independent variable and parameter of variable.

УДК 517.9

РЕЗУЛЬТАТ УСУВНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО РІВНЯННЯ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА З АБСОРБЦІЙНИМ ЧЛЕНОМ

Марія Шань

Донецький національний університет імені Василя Стуса

shan_maria@ukr.net

Розглянуто розв'язки квазілінійного параболічного рівняння, модельним випадком якого є анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбційним членом

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(|u|^{m_i - 1} u_{x_i} \right)_{x_i} + u^q = 0,$$

де частина показників $m_i > 1$ (вироджений випадок), а інша частина $m_i < 1$ (сингулярний випадок). Для розв'язків рівняння отримана достатня умова усувності ізольованої особливості, що виражається в умові на показник абсорбції q, а саме $q \geq m + \frac{2}{n}$, а також встановлена оцінка типу Келлера-Оссерамана. При доведенні застосовувався метод інтегральних і поточкових оцінок нелінійного потенціалу, розвинутий в роботах [1, 2].

1. *Nicolosi F., Skrypnik I. V., Skrypnik I. I.* Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // Commun. Partial Differ. Equ. – 2003. – **28**. – P. 677–696.
2. *Nicolosi F., Skrypnik I. I., Skrypnik I. V.* Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations // Ukrain. Math. Bull. – 2009. – **6**(2). – P. 208–234.

REMOVABILITY RESULT FOR THE ANISOTROPIC POROUS MEDIUM EQUATION WITH ABSORPTION TERM

Sufficient condition of removability of isolated singularities and Keller-Osserman estimates were obtained for the anisotropic porous medium equation with absorption term.

УДК 517.956.4

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Альона Широковських

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

a.shyrokovskykh@gmail.com

У даній роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(A)u = 0$, де $A = -d^2/dx^2 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ – гармонійний осцилятор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ ($S_{1/2}^{1/2}$ – простір типу S, який співпадає з множиною аналітичних векторів оператора A) [1]. Розв'язок задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією, яка ототожнюється з її рядом Фур'є-Ерміта $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $\tilde{n}_k = < f, h_k >$, і є елементом простору $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, топологічно спряженого з простором $S_{1/2}^{1/2}$. Визначимо функцію $f(A)$ від гармонійного осцилятора A, вважаючи, що $f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ – неперервна функція, яка монотонно зростає на $[0;+\infty)$, $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$; при цьому

$$\left(f(A)\varphi\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k(x), \quad \varphi \in D\left(f(A)\right) \subset L_2(\mathbb{R}),$$

де $D\left(f(A)\right)$ – область визначення, $f(\lambda_k)$ – власні числа оператора $f(A)$, $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad A_f \equiv f(A), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

задамо нелокальну багатоточкову за часом умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = g, \quad g \in L_2(\mathbb{R}), \tag{2}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0;\infty)$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа,

$\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$.

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u(t,\cdot) \in C^1\left((0,T], S_{1/2}^{1/2}\right)$, яка задовольняє умову (2). Має місце наступне твердження.

Теорема. *Задача (1), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою* $u(t,x) = G(t,x) * g(x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* $g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in L_2(\mathbb{R})$,

$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-tf(\lambda_k)) \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-t_n f(\lambda_k)) \right)^{-1} h_k(x)$, *при цьому* $\{G(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t \in (0,T]$ *(тут* h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ *– функції Ерміта).*

Операцію «$*$» можна розглядати і у випадку, коли $g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, при цьому, внаслідок відповідної властивості вказаної операції, $u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in (0,T]$, функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (1), але умову (2), де $g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, $u(t,\cdot)$ задовольняє в тому розумінні, що $\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = g$, $g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, де границі розглядаються в просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$.

1. *Горбачук В. И.* Граничные задачи дифференциально-операторных уравнений / *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук* // – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

ABOUT ONE NONLOCAL PROBLEM FOR EVOLUTION EQUATIONS WITH HARMONIC OSCILLATOR

Well posedness of nonlocal multipoint with respect to time problem for an evolution equation with harmonic oscillator and functions of such operator in type S *and* S' *spaces was established.*

УДК 517.956

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Богдан Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

bohdanjaschan94@gmail.com

Нехай $\eta, t_0, t_1, ..., t_N, t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа $0 \le t_0 < ... < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1,...,N\}$, Ω – деяка обмежена область в R^{n-1}, $Q_{(0)} = \{(t,x) | t \in [t_0; t_{N+1}), x \in \Omega\} \cup \{(t,x) | t = \eta, x \in R^n \setminus \bar{\Omega}\}$.

В області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ розглянуто задачу про знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $t \ne t_\lambda$, $(t,x) \notin Q_{(0)}$ рівняння

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right]u(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

та багатоточкові умови за змінною t

$$u(t_k + 0, x) = \varphi_k(x), \quad k \in \{0,1,...,\mathrm{N}\}. \quad (2)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) у точці будуть характеризувати функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t-\eta| \ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) = 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \bar{\Omega}} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^\nu = (\beta_1^{(\nu)}, ..., \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Позначимо через $l, \alpha, q^{(1)}, q^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}$ – дійсні числа $q^{(\nu)} \ge 0$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $l \ge 0$, $\mu_j^{(\nu)} \ge 0$, $j \in \{0,...,n\}$, $\alpha \in (0,1)$.

Нехай D – довільна замкнена область в R^n, $Q^{(\mathrm{k})} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $\bar{Q}^{(k)} \subset \Pi^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times R^n$. $H^l(\gamma; \beta; q; \Pi)$ – множина функцій із простору $L_1(\Pi)$, які мають неперервні похідні в $Q^{(\mathrm{k})} \setminus Q_{(0)}$ вигляду $\partial_t^i \partial_x^r u$, $2i + |r| \le [l]$

і скінченне значення норми

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l = \sup_k \left\{ \sum_{2i+|r|\le[l]} \left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\|_{2i+|r|} + \left\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)} \right\rangle_l \right\},$$

де, наприклад,

$$\| u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)} \|_{2i+|r|} = \sup_{P\in\bar{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)} + (2i+|r|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times s_2(q^{(2)} + 2i\gamma^{(2)}, x)\,|\,\partial_t^i \partial_x^r u(p)\,|\prod_{j=1}^{n} s_1(-r_j\beta_j^{(1)}, t) s_2(r_j(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}), x)].$$

Задачу (1) – (2) досліджено за таких обмежень:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$, $\forall (t,x) \in \Pi \setminus Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$c_1 |\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{n} s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) s_1\left(\beta_j^{(1)}, t\right) s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) s_2\left(\beta_j^{(2)}, x\right) A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le c_2 |\xi|^2,$$

де c_1, c_2 – фіксовані додатні сталі, $s_1(\mu_i^{(1)}, t) s_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in H^\alpha(\gamma,\beta,0,\Pi)$,

$s_1(\mu_0^{(1)}, t) s_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in H^\alpha(\gamma,\beta,0,\Pi)$, $A_0 \ge -a$, $a > 0$,

$s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^\alpha(\gamma,\beta,0,\Pi)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left(\max_i\left(1+\beta_i^{(\nu)}\right), \max_i\left(\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}\right), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2} \right),\ \nu \in \{1,2\}.$$

б) $f \in H^\alpha(\gamma,\beta,\mu_0;\Pi)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(\hat{\gamma},\hat{\beta},0;\Pi^n)$,

$\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}(\hat{\gamma},\hat{\beta},\mu_0;\Pi \cap (t = t_\lambda))$, $\tilde{\gamma} = (0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0,\beta^{(2)})$.

Встановлено умови існування, єдиності, а також оцінки для похідних розв'язку задачі (1) – (2) у просторі $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$.

MULTIPOINT CAUCHY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION

For the second order parabolic equation with degenerations in coefficients multi point-by-time Cauchy problem is considered. Conditions for the existence and uniqueness of the solution in Hölder's spaces with power weight are found.

УДК 517.9

CONDITIONS OF ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vladyslav Bivziuk, Vitalij Slyn'ko

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy

vladfromhere@gmail.com, vitstab@ukr.net

Differential equations with impulse action have important applications in control theory in models of chemical kinetics, electronics mechanics. An important task in the study of the dynamics of such systems is the problem of stability of the solutions. Despite the large number of works devoted to the problem of stability for linear impulsive differential equations, this problem has not yet received its final decision [1, 2].

Let X be a Banach space, and let $L(X)$ be a Banach algebra of bounded linear operators acting on X. Define recursively following lie elements in $L(X)$ [3],

$$\left\{B, A^0\right\} = B, \quad \left\{B, A^{l+1}\right\} = \left[\left\{B, A^l\right\}, A\right], \quad l \in \mathbb{N},$$

where $[A, B] = AB - BA$ is a commutator of two elements $A, B \in L(X)$.

Consider the following a linear impulsive differential equation in a Banach space X,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t), \quad t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= Bx(t), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x \in X$, $A \in L(X)$, $B \in L(X)$, $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a sequence of moments of impulsive action. Without loss of generality, we assume that $\tau_0 = t_0 = 0$. We denote $x(t, x_0)$ as the solution of the Cauchy problem for the differential equation (1) with initial condition $x(0+0, x_0) = x_0$. As usual, we assume that $x(t-0, x_0) = x(t, x_0)$ for all $t \geq 0$. We denote $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Suppose that there are positive constants ε_1 and ε_2 such that $\varepsilon_1 \leq T_k \leq \varepsilon_2$ for all $k = 1, 2, \dots$, and the following condition of regularity impulsive action points holds:

Theorem 1. *There are positive constants* θ *and* χ *such that*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_1 + T_2 + \ldots + T_n - n\theta| = \chi. \tag{2}$$

Definition 1. *Linear differential equation (1) is asymptotically stable, if for any* $\varepsilon > 0$ *there is* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *such that from the inequality* $\|x_0\| < \delta$ *it follows the inequality* $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ *for all* $t \geq 0$ *and* $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t, x_0)\| = 0$.

Theorem 2. *Assume that the operator* B *is invertible, the condition of regularity of moments of impulsive action (2) is performed and*

$$\left\|e^{A\theta}B\right\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_m \chi^m}{m!} < 1,$$

where $\eta_m = \left\|B^{-1}\left\{B, A^m\right\}\right\|$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Then the linear impulsive differential equation (1) is asymptotically stable.

1. *Dvirnyi A. I., Slyn'ko V. I.* Application of Lyapunov's direct method to the study of the stability of solutions to systems of impulsive differential equations. Translation of Mat. Zametki 96 (2014), no. 1, 22–35. Math. Notes 96 (2014), no. 1-2, 26–37.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. With a preface by Yu. A. Mitropol'skii and a supplement by S. I. Trofimchuk. Translated from the Russian by Y. Chapovsky World Scientific Series on Nonlinear Science.Series A: Monographs and Treatises, 14. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
3. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Communications on Pure and Applied Mathematics, VOL. VII, 649-673 (1954).

UDC 512.813+517.957.6

ON SYMMETRY REDUCTION OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vasyl Fedorchuk

Pedagogical University of Cracow,
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine

vasyl.fedorchuk@up.krakow.pl

Symmetry reduction is one of the most powerful tools to investigate PDEs with non-trivial symmetry groups. In particular, for this purpose, we can use a classical Lie method.

In my report, I plan to present a short review of the results concerning symmetry reductions of some PDEs with non-trivial symmetry groups, which were obtained using the classical Lie method.

1. *Fedorchuk V.* Symmetry Reduction and Exact Solutions of the Euler-Lagrange-Born-Infeld, Multidimensional Monge-Ampere and Eikonal Equations // Symmetry in non-linear mathematical physics (Kiev, 1995). - **1**. J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. - **2**, No. 3-4. – P. 329–333.
2. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation // Symmetry. - 2016, **8**(6), 51; doi:10.3390/sym8060051.
3. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On classification of symmetry reductions for partial differential equations // Collection of the works dedicated to 80th of anniversary of B. J. Ptashnyk, 241–255, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Matematics of NAS of Ukraine, Lviv, 2017.
4. *Grundland A. M., Hariton A.* Algebraic Aspects of the Supersymmetric Minimal Surface Equation // Symmetry. - 2017, **9**(12), 318; doi:10.3390/sym9120318.
5. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. - **25**, No. 4. – P. 791–806.
6. *Lie S.* Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipz. Berichte, I. 53. (Reprinted in Lie, S., Gesammelte Abhandlungen, **4**, Paper IX.), 1895.
7. *Nikitin A. G., Kuriksha O.* Invariant solutions for equations of axion electrodynamics // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2012. - **17**, No. 12. – P. 4585–4601.
8. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986.
9. *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. (Russian). – M.: Nauka, 1978. - 399 pp. (English translation, Academic Press, New York, 1982.)

UDC 512.813+517.957.6

ON SYMMETRY REDUCTION OF THE EIKONAL EQUATION

Volodymyr Fedorchuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

volfed@gmail.com

Let us consider the eikonal equation of the form as follows:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1,$$

where $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in M(1,3)$.

In 1982 Fushchych and Shtelen proved that the maximally extensive local (in sense of Lie) invariance group of this equation is the conformal group C(1,4) of the (4 + 1) -dimensional Poincaré-Minkowski space with the metric

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2, \; x_4 = u.$$

It is known that the group C(1,4) contains, as a subgroup, the Poincaré group P(1,4).

In my report, I plan to present some results concerning of a symmetry reduction of the eikonal equation, which were obtained using the nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group P(1,4) of dimensions one and two.

1. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On classification of the low-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group P(1,4) // Proceedings of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. – 2006. – **3,** No. 2. – P. 302–308.
2. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On Classification of Symmetry Reductions for the Eiko-nal Equation // Symmetry. – 2016, **8**(6), 51; doi:10.3390/sym8060051.
3. *Fedorchuk V., Fedorchuk V.* On classification of symmetry reductions for partial differential equations // Collection of the works dedicated to 80th of anniversary of B. J. Ptashnyk, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Matematics of NAS of Ukraine, Lviv, 2017, P. 241–255.
4. *Fushchich W. I., Shtelen W. M.* The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. Nuovo Cimento. – 1982. – **34,** No. 16. – P. 498–502.

UDC 517.95

PROBLEM WITH HOMOGENEOUS INTEGRAL CONDITIONS FOR NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Grzegorz Kuduk

Faculty of Mathematical of Nature Sciences University of Rzeszow

gkuduk@onet.eu

Let $H(R\times R_+)$ be a class of certain function, $K_{L,M}$ be a class of quasipolynomials of the form

$$f(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}P_{i,j}(t,x)\exp(\alpha_j x+\beta_j)\,, \tag{1}$$

where $P_{i,j}(t,x)$ are given polynomials, $M\subseteq C$, $\alpha\in M$, $\alpha_k\neq\alpha_l$ for $k\neq l$. Each quasipolynomial (1) defines a differential operator $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ on the class of certain function in the form

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}P_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\exp\left(\alpha_j\frac{\partial}{\partial\lambda}+\beta_j\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Bigg|_{\lambda=\nu=0} \tag{2}$$

In the strip $\Omega=\{(t,x)\in R^2 : t\in(0,T), x\in R\}$ we consider system of equations

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n}\left\{a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}+b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}U_j(t,x)=f_i(t,x)\,, \tag{3}$$

with homogeneous integral conditions

$$\int_0^T t^k U(t,x)dt=0\,,\ k=0,1\,, \tag{4}$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are differential expressions with analytical symbols.

There exists a unique solution of (3), (4) in the class of quasipolynomials $K_{L,M}$. The solution can be represented in the form

$$U_i(t,x) = f_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{P(t,\nu,\lambda)\exp[\lambda x]\}\Big|_{\lambda=\nu=0}, \qquad (5)$$

where $P(t,\nu,\lambda)$ is a solution of the problem

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n}\left(a_j(\lambda)\frac{d}{dt} + b_j(\lambda)\right)U\ (t) = \exp[\nu t], \qquad (6)$$

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad U(t)\big|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

This result continues the research of work [1, 2, 3].

1. *Kalenyuk P. I. Nytrebych Z. M.* Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method. – Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).
2. *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G.* Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions, Math. Methods and Phys.- Mech. Polia. – 2015. – Vol. 58, No 1. – P. 7–19.
3. *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G., Pukach P. Ya*. Problem with homogeneouse integral condition for nonhomogeneous evolution equation. Journal of National Univeristy ”Lvivska Politechnika”. Physical and Mathematical Sciences. - 2014. – No. 804. – P. 16–20.

ЗАДАЧА З ОДНОРІДНИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

За допомогою диференціально-символьного методу подано розв’язок задачі з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку. Цей розв’язок існує і єдиний в класі квазімногочленів.

УДК 517.91

APPLICATION OF THE GENERALIZED TAYLOR – BIRKHOFF SERIES FOR SOLVING OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tetiana Rvachova, Yevheniia Tomilova

National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute»

rvachova@gmail.com

Classical Taylor series is widely used for solving of ordinary differential equations and initial value problems for the non-stationary partial differential equations [1]. However using classical Taylor series has some restrictions in application, firstly since its radius of convergence may be insufficient.

In [2-6] so called generalized Taylor – Birkhoff series for the expanding of infinitely differentiable functions of some Roumieu spaces was introduced:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} F^{(n)}(x_{n,k}) \varphi_{n,k}(x),$$

where functions $\varphi_{n,k}(x)$ are the basic functions of generalized Taylor – Birkhoff series, which can be expressed as linear combinations of translates of atomic function [7]

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt,$$

which is a solution with a compact support of the functional-differential equation

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

The points $x_{n,k}$ are defined as follows:

for $n = 0$ $x_{0,k} = k$,

for $n > 0$ $x_{n,k} = k2^{n-1}$.

So $x_{1,k} = k$, $x_{2,k} = \frac{k}{2}$, $x_{3,k} = \frac{k}{4}$ and so on.

With the help of modified generalized Taylor – Birkhoff series method of finding antiderivatives was proposed in [8]. Namely, instead of defining the values of a function $F(x)$, represented by generalized Taylor – Birkhoff series, at the points $k \neq 0$, it is proposed to define the derivative of this function at the points

$k-1/2,\ k>0,\ k+1/2, k<0$. As a result for the modified series $N_0 = \{0\}$. This modification is made to avoid using values of F(x) at $x \neq 0$ and the necessity to calculate the definite integrals.

In this paper we propose to use this modified series for solving of the initial value problem for the ordinary differential equations of the first order

$$y(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

and systems of ordinary differential equation. This method can also be used for solving of the initial value problem for partial differential equations of parabolic type by reducing it to the system of ODE using method of lines [1].

1. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. Том II // М.: Наука, 1977. – 400 с.
2. *Rvachev V. A.* Compactly supported solutions of functional-differential equations and their applications // Russian Math. Surveys. – 1990. – V. 45:1. – P. 87–120
3. *Lemarie-Rieusset P. G.* Fonctions d'echelle interpolantes, polynomes de Bernstein et ondelettes non stationnaires / *P.G. Lemarie-Rieusset* // Revista Mat. Iberoamericana, Vol. 13, No 1. – 1997. – P. 91–188
4. *Rvachova T. V.* On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series / *T. V. Rvachova* // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No 2. – P. 262 – 268.
5. *Rvachova T. V.* On the rate of approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the generalized Taylor series / T. V. Rvachova // Visnyk KhNU, ser. «Matemayika, prykladna matematyka i mekhanika» – 2010. – No 931. – P. 93–98
6. *Rvachova T. V.* On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series // Visnyk KhNU, ser. «Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika» – 2003. – №602. – P. 94–104.
7. *Рвачев В. А.* Некоторые финитные функции и их применения // Математическая физика – К: Наукова думка – 1973. – № 13. – С. 139–149.
8. *Rvachova T. V., Tomilova Ye. P.* Finding Antiderivatives with the Help of the Generalized Taylor Series // ХАИ, "Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии" – 2016. – № 73. – С. 52-58.

ЗАСТСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ТЕЙЛОРА – БІРКГОФА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У роботі запропоновано застосування модифікованого узагальненого ряду Тейлора – Біркгофа, побудованого на основі атомарної функції $up(x)$, *для розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.*

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

УДК 512.64

КІЛЬЦЯ ЕНДОМОРФІЗМІВ БІМОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Віталій Бондаренко, Руслана Цімболинець (Динис)

Інститут математики НАН України,
Київський національний. університет імені Тараса Шевченка

vit-bond@imath.kiev.ua, ruslanadinis@ukr.net

Нехай $t \neq 0$ – необоротний елемент комутативного кільця K. Матрицю M розміру $n \times n$ над K називаємо бімономіальною, якщо вона переставно подібна матриці, яка є добутком мономіальної матриці з одиничними елементами на місцях $(2,1)$, $(3,2)$, …, $(n,n-1)$, $(1,n)$ і діагональної матриці з головною діагоналлю $(e_1,...,e_k,t_1,...,t_{n-k})$, де $1<k<n$, e_i дорівнюють одиничному елементу кільця і t_j дорівнюють елементу t.

Такі матриці досліджувалися авторами в багатьох працях і, зокрема (разом з М. Ю. Бортош і О. А. Тилищаком), в [1, 2].

Ми продовжуємо вивчати бімономіальні матриці, а саме досліджуємо їх кільця ендоморфізмів, тобто кільця, що складаються із матриць X таких, що $MX = XM$. Для бімономіальних матриць, що належать деяким класам, отримано повний опис кілець ендоморфізмів, їх твірні та визначальні співвідношення.

1. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – vol. 16, no. 2. – P. 171–187.
2. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A.* Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2016. – vol. 22, no. 1. – P. 11–20.

ENDOMORPHISM RINGS OF BIMONOMIAL MATRICES

We compute the rings of endomorphisms of bimonomial matrices belonging to some classes.

УДК 512.552.13

КІЛЬЦЯ БЕЗУ З УМОВАМИ НА РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА

Андрій Гаталевич, Анатолій Дмитрук

Львівський національний університет імені Івана Франка

gatalevych@ukr.net, tolikd1488@gmail.com

Всі кільця, які розглядаються є комутативними з $1 \neq 0$. Розглянемо приклад М. Хенріксена $R = \{z_0 + a_1 x + a_2 x + \ldots \mid z_0 \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{Q}\}$ [1]. Він був побудований як приклад комутативної області Безу, яке є кільцем елементарних дільників і не є адекватним кільцем. Відмітимо, що його радикал Джекобсона $J(R) = \{a_1 x + a_2 x + \ldots \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$ є ненульовим простим ідеалом, який не є головним ідеалом. Виникає питання про структуру областей Безу, в яких радикал Джекобсона є ненульовим говним ідеалом. **Кільцем Безу** називають кільце, в якому кожен скінченно породжений ідеал є головним. Кільце R називають **кільцем стабільного рангу 1**, якщо для довільних $a, b \in R$, таких що R, існує такий елемент $y \in R$, що $(a + by)R = R$ [2].

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій радикал Джекобсона $J(R)$ є ненульовим головним ідеалом. Тоді R є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 2. *Нехай R – комутативна область Безу, і нехай для елемента $a \in R \setminus \{0\}$ радикал Джекобсона фактор кільця $J\left(R/aR \right)$ є ненульовим головним ідеалом. Тоді елемент a міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів, які є головними.*

1. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. – 1955-1956. – **3**. – P. 159–163.
2. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // УМЖ. – 2003. – **55**, №4. – С. 550–554.

BÉZOUT RINGS WITH CONDITIONS ON JACOBSON RADICAL

It was proved that the Bezout ring with nonzero principal Jacobson radical is a ring of stable range one.

УДК 515.126

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНОГО І ОДНОСТАЙНО ПОСТУПАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Ярослав Грушка

Інститут математики НАН України

grushka@imath.kiev.ua

Нехай X і Y – топологічні векторні простори, а $(\mathrm{T}_1,\le_1)$ і $(\mathrm{T}_2,\le_2)$ – лінійно упорядковані множини.

Означення 1. *Відображення* $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to \mathrm{T}_2\times Y$ *будемо називати* ***одностайно-поступальним*** *перетворенням координат, якщо існують функції* $\Phi:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2$, $F:\mathrm{T}_2\to Y$, $g:X\to Y$, *такі, що:* ***а)*** *для довільного* $\mathrm{x}\in X$ *функція* $\Phi_{(\mathrm{x})}(t)=\Phi(t,\mathrm{x})$ ($t\in\mathrm{T}_1$) *є бієкцією між* T_1 *і* T_2, ***б)*** *функція* g *є бієкцією між* X *і* Y, ***в)*** $\forall\,(t,\mathrm{x})\in\mathrm{T}_1\times X$ *виконується рівність,* $\mathrm{U}(t,\mathrm{x})=\left(\Phi(t,\mathrm{x}),\,F\left(\Phi(t,\mathrm{x})\right)+g(\mathrm{x})\right)$.

Надалі будемо вважати, що лінійно упорядковані множини T_1 і T_2 є топологічними просторами відносно *порядкової топології*, породженої відношеннями порядку $\le_1$ і $\le_2$ відповідно (нагадаємо, що означення порядкової топології можна знайти в [1, стор. 314]). Також будемо вважати, що множини $\mathrm{T}_1\times X$ і $\mathrm{T}_2\times Y$ є топологічними просторами відносно *тихоновської* топології на декартовому добутку відповідних топологічних просторів. Для довільного відображення $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2\times Y$ покладемо $\mathrm{U}^{(t)}(\mathrm{x}):=\mathrm{U}_{(\mathrm{x})}(t):=\mathrm{U}(t,\mathrm{x})$. Будемо говорити, що відображення U є ***нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною***, якщо для довільних $t\in\mathrm{T}_1$ і $\mathrm{x}\in X$ відображення $\mathrm{U}^{(t)}:X\to\mathrm{T}_2\times Y$ і $\mathrm{U}_{(\mathrm{x})}:\mathrm{T}_1\to\mathrm{T}_2\times Y$ є неперервними.

Теорема 1. *Якщо* T_1 *є зв'язним топологічним простором (відносно порядкової топології), а відображення* $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2\times Y$ *є одностайно-поступальним перетворенням координат, нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною, то відображення* U *є неперервним за сукупністю змінних.*

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. – М.: Наука, 1984. – 567 с.
2. *Грушка Я. І.* Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках // Буковинський математичний журнал. – 2017. – **5**, № 3-4. – С. 56-70.
3. *Грушка Я. І.* Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках – Preprint: ResearchGate – 15 с. – DOI: 10.13140/RG.2.2.11087.59041. – https://www.researchgate.net/publication/322722045.

ON THE CONTINUITY OF A SEPARATELY CONTINUOUS AND SELF-CONSISTENTLY TRANSLATIONAL COORDINATE TRANSFORM

Let X, Y be topological vector spaces and $(\mathrm{T}_1,\le_1)$, $(\mathrm{T}_2,\le_2)$ be linearly ordered sets.

Definition 1. *The mapptng $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2\times Y$ is called by* ***self-consistently translational coordinate transform*** *if and only if there exist functions $\Phi:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2$, $F:\mathrm{T}_2\to Y$, $g:X\to Y$, such, that the following conditions are fulfilled:* ***a)*** *for each $\mathrm{x}\in X$ the function $\Phi_{(\mathrm{x})}(t)=\Phi(t,\mathrm{x})$ ($t\in\mathrm{T}_1$) is a bijection between T_1 and T_2,* ***b)*** *the function g is a bijection between X* and *Y,* ***c)*** *for every pair $(t,\mathrm{x})\in\mathrm{T}_1\times X$ it is performed the equality, $\mathrm{U}(t,\mathrm{x})=\big(\Phi(t,\mathrm{x}),F(\Phi(t,\mathrm{x}))+g(\mathrm{x})\big)$.*

Further we consider that the linearly ordered sets T_1 and T_2 are topological spaces relatively the order topology, generated by the order relations $\le_1$ and $\le_2$ correspondingly (definition of the order topology can be found in [1, p. 314]). Also we consider that the sets $\mathrm{T}_1\times X$ and $\mathrm{T}_2\times Y$ are topological spaces relatively the Tychonoff topology on Cartesian product of the corresponding topological spaces. For any mapping $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2\times Y$ we denote $\mathrm{U}^{(t)}(\mathrm{x}):=\mathrm{U}_{(\mathrm{x})}(t):=\mathrm{U}(t,\mathrm{x})$. We say that the mapping U is ***separately continuous relatively space and time variables*** *if and only if the mappings $\mathrm{U}^{(t)}:X\to\mathrm{T}_2\times Y$ and $\mathrm{U}_{(\mathrm{x})}:\mathrm{T}_1\to\mathrm{T}_2\times Y$ are continuous for every $t\in\mathrm{T}_1$ and every $\mathrm{x}\in X$.*

Theorem 1*. If T_1 is connected topological space (relatively the order topology), and the mapping $\mathrm{U}:\mathrm{T}_1\times X\to\mathrm{T}_2\times Y$ is separately continuous relatively space and time variables self-consistently translational coordinate transform, then the mapping U is continuous in the set of variables.*

УДК 539.3

ТРИКУТНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ $AX + YB = C$

Наталія Джалюк, Василь Петричкович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Матриці блочної структури виникають і використовуються у багатьох задачах [1, 3, 4].

Ми розглядаємо матричне лінійне рівняння

$$AX + YB = C \tag{1}$$

з матрицями коефіцієнтами із комутативної області головних ідеалів. Розв'язність цього рівняння пов'язана із еквівалентністю блочних матриць

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad i \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

На основі теореми Рота [5] і її узагальнення [2] матричне рівняння (1) розв'язне тоді і тільки, коли матриці M і N еквівалентні. Важливою є задача описання розв'язків матричного рівняння (1) у кільцях блочних матриць. Так у [6] розглядаються розв'язки блочного вигляду матричних лінійних рівнянь. Ми описуємо розв'язки трикутного вигляду матричного рівняння (1) з трикутними матрицями-коефіцієнтами A, B, C.

Нехай у матричному рівнянні (1) матриці A, B, C трикутного вигляду, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Надалі через (a,b) будемо позначати найбільший спільний дільник елементів a і b.

Якщо матричне рівняння (1) розв'язне, то воно може мати розв'язки трикутного та не трикутного виглядів. Матричне рівняння (1) може і не мати розв'язків трикутного вигляду. Ми встановлюємо умови існування трикутних розв’язків цього матричного рівняння.

Якщо матричне рівняння (1) має трикутні розв'язки, то найбільший спільний дільник (a_{ii}, b_{ii}) діагональних елементів a_{ii} і b_{ii} матриць A і B є дільником діагональних елемента c_{ii} матриці C для всіх $i = 1, \ldots, n$.

Теорема. *Нехай найбільший спільний дільник* (a_{ii}, b_{ii}) *елементів* a_{ii} *і* b_{ii} *є дільником елемента* c_{ii} *для всіх* $i = 1, \ldots, n$. *Якщо* $\left(b_{ii}, \prod_{j=i+1}^{n} a_{jj} \right) = 1$ *для усіх* $i = 1, \ldots, n-1$, *то матричне рівняння (1) розв'язне і має розв'язки трикутного вигляду.*

Наслідок. *Якщо визначники матриць-коефіцієнтів* A *і* B *матричного рівняння (1) є взаємно простими, то матричне рівняння (1) розв'язне і має трикутні розв'язки.*

1. *Bart H., Wagelmans A. P. M.* An integer programming problem and rank decomposition of block upper triangular matrices // Linear Algebra Appl. – 2000. – 305. – P. 107–129.
2. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bul. Stand. – 1976. – 80B, No 1. – P. 89–97.
3. *Martins F., Pereira E.* Block matrices and stability theory // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – 38. – P. 147–162.
4. *Petrychkovych V., Dzhaliuk N.* Factorizations in the rings of the block matrices // Bulet. Acad. de Stinte Republ. Moldova. Matematica. – 2017. – 85, № 3. – P. 23–33.
5. *Roth W. E.* The equations AX–YB=C and AX–XB=C in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No. 3. – P. 392–396.
6. *Tian Y.* Completing triangular block matrices with maximal and minimal ranks // Linear Algebra Appl. – 2000. – 321 – P. 327–345.

TRIANGULAR SOLUTIONS OF MATRIX EQUATION $AX + YB = C$

We consider a matrix linear equation $AX + YB = C$ *over commutative principal ideal rings. Matrix coefficients of this equation are triangular matrices. We describe the solutions in the triangular form of the mentioned matrix equation. In particular, we established the conditions for the existence of the triangular solutions of this matrix equation.*

УДК 512.55

PRINC КІЛЬЦЯ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ ОДИН

Оксана Жирак

Львівський національний університет імені Івана Франка

oksanakuzyk0309@gmail.com

Всі кільця, які розглядаються є комутативними з $1 \neq 0$. Пара елементів a, b в області цілісності R називається **ідемпотентною парою**, якщо $a(1-a) \in bR$, або $b(1-b) \in aR$. Кільце R називається **PRINC областю**, якщо всі ідеали породжені ідемпотентною парою є головними [1]. Відомо, що Дедекіндові області є PRINC кільцями, тоді і тільки тоді, коли вони є областями головних ідеалів. **Кільцем Безу** називають кільце, в якому кожен скінченнопороджений ідеал є головним. Комутативне кільце без дільників нуля, в якому кожен ненульовий скінченнопороджений ідеал є оборотним називається **Прюферовим.** Якщо область цілісності є областю Безу, або факторіальним кільцем, або проективно вільним, тоді вона є PRINC областю. Кільце R називається **кільцем стабільного рангу 1**, якщо для довільних $a, b \in R$, таких що $aR + bR = R$, існує такий елемент $y \in R$, що $(a + by)R = R$. Кільце R називається **кільцем стабільного рангу 2**, якщо для довільних $a, b, c \in R$ таких що $aR + bR + cR = R$, існують такі елементи $x, y \in R$, що $(a + cx)R + (b + cy)R = R$.

Теорема 1. *Прюферова PRINC область стабільного рангу 1 є областю Безу.*

Питання. Чи буде прюферова PRINC область стабільного рангу 2 областю Безу?

1. *Peruginelli G., Salce L., Zanardo P.* Idempotent pairs and PRINC domains, in Multiplicative Ideal Theory and Factorization Theory. Commutative and NonCommutative Perspectives. – New York: Springer, 2016. – P. 309–322.

PRINC RINGS OF STABLE RANGE ONE

It is shown that a Prufer domain of stable range one is a Bezout domain.

УДК 512.552.13

КОМУТАТИВНІ ОБЛАСТІ БЕЗУ, В ЯКИХ ДОВІЛЬНИЙ НЕНУЛЬОВИЙ ПРОСТИЙ ІДЕАЛ МІСТИТЬСЯ У СКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ МАКСИМАЛЬНИХ ІДЕАЛІВ

Богдан Забавський, Олег Романів

Львівський національний університет імені Івана Франка

zabavskii@gmail.com, oromaniv@franko.lviv.ua

Хенріксен довів, що в адекватному кільці довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі [3]. Ларсен, Левіс та Шорес [4] поставили питання, чи буде комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, адекватною. В роботі [1] наведено приклад комутативної області Безу, яка не є адекватною, проте є кільцем елементарних дільників. Гаталевич і Забавський довели, що комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є кільцем елементарних дільників [5].

Під кільцем розумітимемо комутативне асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $spec(I)$ множину всіх простих ідеалів кільця R, які містять ідеал I, через $\min spec(I)$ – множину мінімальних простих ідеалів ідеалу I (тобто власних простих ідеалів із $spec(I)$, що не містять простих ідеалів з $spec(I)$).

Кільце Безу – це кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним. Кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо для довільної матриці A над цим кільцем існують такі оборотні над R матриці P, Q відповідних розмірів, що $PAQ = diag(d_1,\ldots,d_r,0,\ldots,0)$, де d_i є повним дільником d_{i+1} $(i=1,2,\ldots,r-1)$.

Елемент a комутативного кільця R назвемо адекватним [2], якщо для кожного елемента b кільця R існують такі елементи r, s з R, що (1) $a = rs$; (2) $rR + bR = R$; (3) $s'R + bR \neq R$ для такого довільного дільника s' елемента s. Кільце R називається всюди адекватним, якщо довільний елемент цього кільця є адекватним.

Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів a, b цього кільця з умови $aR + bR = R$ випливає, що $(a+bt)R = R$ для деякого елемента t з R. Ненульовий елемент а комутативного кільця R

називається елементом майже стабільного рангу 1, якщо фактор-кільце R/aR є кільцем стабільного рангу 1. Комутативне кільце називається кільцем майже стабільного рангу 1, якщо довільний ненульовий елемент кільця є елементом майже стабільного рангу 1.

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу і a – такий ненульовий елемент R, що $\min spec(aR)$ є скінченною і довільний простий ідеал $spec(aR)$ міститься в єдиному максимальному ідеалі. Тоді фактор-кільце R/aR є прямою сумою кілець нормування.*

Теорема 2. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься у скінченній множині максимальних ідеалів. Тоді для довільного ненульового елемента a області R, такого, що множина $\min spec(aR)$ скінченна, фактор-кільце R/aR є прямою сумою напівлокальних кілець.*

Теорема 3. *Нехай R – комутативна область Безу і a – такий ненульовий елемент R, що множина $\min spec(aR)$ скінченна. Тоді фактор-кільце R/aR є всюди адекватним тоді і лише тоді, коли R є прямою сумою кілець нормування.*

Теорема 4. *Нехай R – комутативна область Безу і a – такий ненульовий елемент R, що множина $\min spec(aR)$ скінченна, причому довільний ненульовий простий ідеал $spec(aR)$ міститься у скінченній множині максимальних ідеалів. Тоді a є елементом майже стабільного рангу 1.*

Теорема 5. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій для довільного ненульового елемента a існує зображення $aR = Q_1 \ldots Q_n$, де $Q_1, \ldots, Q_n$ такі попарно комаксимальні ідеали, що радикал кожного ідеалу Q_i є простим ідеалом в R. Тоді R є кільцем майже стабільного рангу 1.*

Теорема 6. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій для довільного ненульового елемента a ідеал aR розкладається в добуток $aR = Q_1 \ldots Q_n$, де ідеали Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ – попарно комаксимальні і радикал кожного ідеалу Q_i є простим ідеалом в R. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

1. *Brewer J. W., Conrad P. F., Montgomery P. R.* Lattice-ordered groups and a conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – **43** (1). – P. 31–35.
2. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**(4). – P. 225–236.
3. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.

4. *Larsen M., Levis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
5. *Zabavsky B., Gatalevych A.* A commutative Bezout PM* domain is an elementary divisor ring // Algebra and Discrete Mathematics. – 2015. – **19** (2). – P.2 95-301.

COMMUTATIVE BEZOUT DOMAINS IN WHICH ANY NONZERO PRIME IDEAL IS CONTAINED IN A FINITE SET OF MAXIMAL IDEALS

We investigate commutative Bezout domains in which any nonzero prime ideal is contained in a finite set of maximal ideals. In particular, we have described the class of such rings, which are elementary divisor rings.

УДК 512.553.2/531/533

ПРО МАКСИМАЛЬНІ РАДИКАЛИ В КАТЕГОРІЇ ПОЛІГОНІВ

Галина Зеліско

Львівський національний університет імені Івана Франка

zelisko_halyna@yahoo.com

Нехай S – довільний моноїд з нулем, $Act-S$ – категорія правих унітарних центрованих полігонів над S.

В категорії $Act-S$ визначено напередрадикал r, якщо кожному полігону $M \in Act-S$ поставлено у відповідність його підполігон $r(M)$ так, що для довільного S-гомоморфізму $f: M \to N$ виконується $f(r(M)) \subseteq r(N)$. Зрозуміло, що r є підфунктором тотожнього функтора категорії $Act-S$.

Напередрадикал r називається радикалом, якщо $r(M / r(M)) = 0$ для довільного $M \in Act-S$. Правий полігон M називається r-радикальним, якщо $r(M) = M$ і r-напівпростим, якщо $r(M) = 0$. Правий підполігон N називається r-замкненим, якщо $r(M / N) = 0$.

Теорема. *Нехай r – радикал в категорії $Act-S$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) радикал r є максимальним;

(2) кожний ненульовий ін'єктивний об'єкт в $Act-S/r$ є котвірним;

(3) радикал r є повним і кожний ненульовий r-напівпростий ін'єктивний правий полігон є точним;

(4) радикал r є повним і $r(S)$ є максимальним в множині власних r-замкнених ануляторних ідеалів в S.

1. *Beachy J.* Some aspects of noncommutative localization // Lecture Notes in Math. – 1976. – **545**. – P. 2–31.
2. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.* Monoids, Acts and Categories. – Berlin:Walter de Gruyter, 2000. – 529 p.

ON MAXIMAL TORSION RADIALS IN THE CATEGORY OF ACTS

The properties of maximal torsion radicals in the category of acts over monoid with zero are studied.

УДК 512.643

ПРАВИЛО КРАМЕРА ДЛЯ КВАТЕРНІОНОВОГО МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ СИЛЬВЕСТРА

Іван Кирчей

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

kyrchei@online.ua

Розглядається наступне узагальнене рівняння Сильвестра

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{*}+\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{*}=\mathbf{C}, \tag{1}$$

де $\mathbf{A}\in \mathrm{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in \mathrm{H}^{m\times p}$, $\mathbf{C}\in \mathrm{H}^{m\times m}$, H – тіло кватерніонів. Виходячи з [1], загальний розвязок рівняння (1) можна подати як

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{C}(\mathbf{A}^{*})^{+}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{B}\mathbf{M}^{+}\mathbf{C}(\mathbf{A}^{*})^{+}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{S}\mathbf{B}^{+}\mathbf{C}(\mathbf{M}^{*})^{+}\mathbf{B}^{*}(\mathbf{A}^{*})^{+}-$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{L}_{M}\mathbf{B}^{*}(\mathbf{A}^{*})^{+}+\mathbf{L}_{A}\mathbf{U}+\mathbf{Z}\mathbf{L}_{A},$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{+}\mathbf{C}(\mathbf{B}^{*})^{+}+\mathbf{P}_{S}\mathbf{B}^{+}\mathbf{C}(\mathbf{M}^{*})^{+}+\mathbf{L}_{M}(\mathbf{V}-\mathbf{P}_{S}\mathbf{V}\mathbf{P}_{M})+\mathbf{W}\mathbf{L}_{B},$$

де $\mathbf{A}^{*}$, $\mathbf{A}^{+}$, $\mathbf{P}_{A}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$, $\mathbf{Q}_{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$, $\mathbf{L}_{A}=\mathbf{I}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$, $\mathbf{R}_{A}=\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$, відповідно, ермітово-спряжена, узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза та проектори індуковані матрицею $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}=\mathbf{R}_{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{S}=\mathbf{B}\mathbf{L}_{M}$, і $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{W}$ - довільні матриці відповідних розмірностей. В рамках теорії стовпцево-рядкових визначників [2, 3] отримується правило Крамера, – точне по-компонентне визначникове представлення часткового розв'язку рівняння (1), при умові що $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{W}$ – нульові матриці.

1. *Wang Q. W.* A system of matrix equations and a linear matrix equation over arbitrary regular rings with identity // Linear Algebra Appl. – 2004. – **384**. – P. 43–54.
2. *Kyrchei I. I.* The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Albert R. Baswell (Ed.): Advances in Mathematics Research 15. – N.Y.: Nova Sci. Publ., 2012. – P. 201–275.
3. *Kyrchei I. I.* Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations // Adv.Appl.Clifford Algebras.– 2018. – 28. doi:10.1007/s00006-018-0843-1.

CRAMER’S RULE FOR THE QUATERNION SYLVESTR MATRIX EQUATION

Within the framework of the theory of quaternion column-row determinants, we get explicit determinantal representation formulas (analogs of Cramer’s rule) of the partial solution to the quaternion generalized Sylvester matrix equation.

УДК 514.07

ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МАЙЖЕ ЕЙНШТЕЙНОВИХ ПРОСТОРІВ

Володимир Кіосак

Одеська державна академія будівництва та архітектури

kiosakv@ukr.net

Взаємно однозначна відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n з метричним тензором g_{ij} та $\bar{V}_n$ з метричним тензором $\bar{g}_{ij}$ називається геодезичним відображенням, якщо при ній кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$. Необхідною і достатньою умовою того, щоб V_n допускав геодезичні відображення, є існування в ньому розв'язків системи

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g g_{ik}; n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R^{\alpha}_{j} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \ \beta}_{.ij.};$$

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R^{\alpha}_{i} + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha\ \ \beta}_{.i,.} - R^{\alpha\beta}{}_{,i})$$

відносно тензора a_{ij}, вектора λ_i та інваріанта μ. Псевдоріманів простір V_n, відмінний від простору сталої кривини, називають майже ейнштейновим, якщо в ньому виконуються умови

$$E_{ij} = u_i u_j,$$

де $E_{ij} \overset{def}{=} R_{ji} - \dfrac{R}{n} g_{ij}$ – тензор Ейнштейна.

Теорема. Якщо майже ейнштейнів простір V_n сталої скалярної кривини дозволяє нетривіальні геодезичні відображення, то в ньому виконуються умови

$$\lambda_{kj} = \mu g_{kj} + \frac{R}{n(n-1)} a_{kj} + \frac{1}{c} u_k u_j, \quad \mu_{,i} = \frac{2R}{n(n-1)} \lambda_i .$$

Таким чином, нами знайдено вид системи основних рівнянь для геодезичних відображень майже ейнштейнових просторів.

GEODESIC MAPPINGS OF ALMOST EINSTEIN SPACE

The type of system of basic equations for geodesic mappings of almost Einstein space is found.

УДК 512.554.31

БУДОВА ЕЛЕМЕНТІВ В АЛГЕБРІ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ З ВЕЛИКИМ АБЕЛЕВИМ ІДЕАЛОМ

Ігор Клименко, Світлана Лисенко, Анатолій Петравчук

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

ihorKlim93@gmail.com, svetlana.lysenko.1988@gmail.com, apetrav@gmail.com

Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле характеристики нуль і A – область цілісності над $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$ – диференціюванням $\mathbb{K}$ – алгебри A називається $\mathbb{K}$ – лінійне відображення $\mathrm{D}:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ для якого виконується правило Лейбніца, тобто $\mathrm{D(ab)=D(a)b+D(b)a}$, де $\mathrm{a,b}\in\mathrm{A}$. Кожне таке диференціювання однозначно продовжується до диференціювання поля часток $\mathrm{R=Frac(A)}$. В алгебрі Лі $\mathbb{K}$ – диференціювань поля R виділимо підалгебру $\mathrm{W(A)=RDer_{\mathbb{K}}A}$, яка містить алгебру Лі $\mathrm{Der_{\mathbb{K}}A}$ всіх диференціювань області A. Для алгебри Лі $\mathrm{L}\subseteq\mathrm{W(A)}$ позначимо $\mathrm{rk}_R\mathrm{L}=\dim_R\mathrm{RL}$ – ранг L над R.

Будова підалгебр із алгебри Лі $\mathrm{W(A)}$ представляє значний інтерес, оскільки у випадку $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ поля дійсних чисел диференціювання можна розглядати як векторні поля на дійсних многовидах і вивченню таких підалгебр присвячено багато робіт (див. [1], [2], [3]). В роботі [4] було вказано достатню умову вкладеності підалгебри із $\mathrm{W(A)}$ в повну афінну алгебру Лі $\mathrm{ga}_n(\mathbb{K})$. Нагадаємо, що це напівпрямий добуток повної лінійної алгебри Лі $\mathrm{gl}_n(\mathbb{K})$ і абелевої алгебри Лі $\mathrm{V}_n, \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{V}=n$, з природною дією $\mathrm{gl}_n(\mathbb{K})$ на V_n.

Наступне твердження узагальнює результати роботи [4] про будову елементів алгебри Лі з абелевими ідеалами максимального рангу.

Теорема 1. *Нехай L – підалгебра алгебри Лі* $\mathrm{W(A)}$ *рангу* n *над* R*, яка містить абелевий ідеал I рангу* n *над* R *і* F *– поле констант для алгебри* L *в полі* R*. Якщо* L *містить елемент* D *такий, що лінійний оператор* adD *на векторному просторі* FI *має ранг* k*, то існує базис* $\mathrm{D}_1,\dots,\mathrm{D}_n$ *векторного* F *простору* FI *і елементи* $a_1,\dots,a_k\in R$ *такі, що* $\mathrm{D}_i(\mathrm{a}_j)=\delta_{ij}, i=1,\dots,n, j=1,\dots,k$*. При цьому* $\mathrm{D}=\mathrm{f}_1(a_1,\dots,a_k)\mathrm{D}_1+\dots+\mathrm{f}_n(a_1,\dots,a_k)\mathrm{D}_n$*, де* $\deg\mathrm{f}_i\le 1$*,* $i=1,\dots,n$.

Це твердження дозволяє довести вкладеність в $\mathrm{ga}_n(\mathbb{K})$ більш широких класів алгебр Лі диференціювань області цілісності.

1. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen. – Leipzig:Teubner, 1893. – Bd. 3.
2. *Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A. P.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations // Journal of Algebra. – 2014. – **401**. – P. 245-257.
3. *Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. J.* Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. – 1992. – **64**, no. 2. – P. 339–368.
4. *Клименко І. С., Лисенко С. В., Петравчук А. П.* Алгебри Лі диференціювань з абелевими ідеалами максимального рангу // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. – 2017. – вип. 2 (31). – С. 75–81.

STRUCTURE OF ELEMENTS IN LIE ALGEBRAS OF DERIVATIONS WITH LARGE ABELIAN IDEALS

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic zero, A an integral domain over $\mathbb{K}$ and R its field of fractions. Let L be a subalgebra of rank n over R of the Lie algebra $W(A) = RDer_K A$ of derivations on the field A. If L has an abelian ideal I of the same rank n and for an element D the linear operator adD is of rank k then there exists a basis $D_1,\dots,D_n$ of the vector space FI (where F is the field of constants of L in R) and elements $a_1,\dots,a_k \in R$ such that $D_i(a_j)=\delta_{ij}, i=1,\dots,n, j=1,\dots,k$. This result allows us to embed wider classes of Lie algebras of derivations into the general affine Lie algebra $ga_n(\mathbb{K})$.

УДК 519.17

ТРИКУТНІ ВКЛАДЕННЯ ПОВНИХ ГРАФІВ У ДВОВИМІРНІ ПОВЕРХНІ

Володимир Коржик

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

korzhikvp@gmail.com

Повний граф K_n має n вершин, кожна пара яких з'єднана ребром. Двоклітинне вкладення графа у орієнтовну (відп. неорієнтовну) поверхню називається орієнтовним (відп. неорієнтовним) трикутним вкладенням, якщо усі грані цього вкладення трикутні. Орієнтовне (відп. неорієнтовне) трикутне вкладення графа K_n існує для $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$ (відп. $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$). Необхідність у побудові трикутних вкладень повних графів уперше виникла у ході доведення теореми про розфарбування карт на поверхнях відмінних від сфери (ця теорема як гіпотеза була сформульована у 1890 р. Хівудом, а доведена Рінгелем та Янгсом у 1968 р.). Ця теорема для кожної поверхні відмінної від сфери дає максимальне хроматичне число графів, що вкладаються у цю поверхню.

Трикутне вкладення (ТВ) повного графа задається множиною граней цього вкладення, тобто множиною невпорядкованих трійок вершин граней цього вкладення. Зафіксуємо множину вершин повного графа. Якщо ми перепозначимо вершини деякого ТВ цього графа, то отримане ТВ цього графа може мати іншу множину граней, але по суті залишається тим же самим ТВ цього графа. Два ТВ повного графа називаються *ізоморфними*, якщо можна так перепозначити вершини цього графа у одному з цих двох ТВ, що отримане ТВ має таку ж множину граней, що і інше ТВ. У ході доведення теореми про розфарбування карт на поверхнях відмінних від сфери було побудовано одне ТВ відповідних повних графів, і виникло наступне природне питання: Якщо важко побудувати одне ТВ повного графа, то скільки взагалі існує неізоморфних ТВ повного графа? Відома верхня межа $n^{n^2/3}$ на число неізоморфних ТВ повного графа K_n є верхньою межою на число різних двократних трійок порядку n.

До 2000 року максимальне число відомих у літературі неізоморфних ТВ якогось повного графа (ці графи є K_{12}, K_{16}, K_{19} та K_{30}) не перевищувало трьох. Коржик та Фосс (2001, 2002, 2004), Коржик (2008, 2009) побудували

$a2^{bn}$ неізоморфних орієнтовних (відп. неорієнтовних) ТВ графа K_n для всіх $n \geq M$, $n \equiv 0,3,4,7 \pmod{12}$ (відп. $n \equiv 0,1 \pmod{3}$), де a,b,M – додатні константи. Бонінгтон, Греннел, Грігс та Шіран (2000, 2004) показали, що для деяких сімей таких значень n, що $n \equiv 1,3 \pmod{6}$, є щонайменше $2^{n^2/54-o(n^2)}$ неізоморфних орієнтовних та неорієнтовних ТВ графа K_n коли $n \to \infty$. Греннел, Грігс та Кнор (2008, 2009, 2010, 2012) побудували $n^{an^2-o(n^2)}$ неізоморфних орієнтовних та неорієнтовних ТВ графа K_n для деяких нескінчених сімей значень n, $n \equiv 1,9 \pmod{12}$. У 2013 році Греннел та Кнор побудували $n^{an^2-o(n^2)}$ неізоморфних неорієнтовних ТВ графа K_n для деяких лінійних класів значень n, $n \equiv 1,9 \pmod{12}$ (*лінійним класом* значень n називається нескінченна множина $\{ a+bt : t=1,2,.. \}$ значень n, де a та b – натуральні константи).

Останнім кроком у цьому напрямку досліджень є наступний результат автора.

Теорема 1 ([1]) *Є така додатня константа* a, *що для кожного* $i \in \{0,1,3,4,6,7,9,10\}$ *існує такий лінійний клас значень* n, $n \equiv i$ *(mod 12), що число неізоморфних неорієнтовних ТВ графа* K_n *є щонайменше* $n^{an^2-o(n^2)}$ *коли* $n \to \infty$.

Ця теорема доведена застосуванням рекурсивних конструкцій, що дозволяють «занурювати» ТВ одних повних графів у ТВ інших повних графів. Цей останній результат залишає мало сумнівів, що для **всіх** достатньо великих n, $n \equiv 0,1 \pmod{3}$, число неізоморфних неорієнтовних ТВ графа K_n є щонайменше $n^{an^2-o(n^2)}$ коли $n \to \infty$, але доведення цього твердження вимагає розробки нових методів побудови ТВ повних графів.

1. *Korzhik V. P.* Recursive constructions and nonisomorphic minimal nonorientable embeddings of complete graphs // Discrete Mathematics. – 2015. – 338. – P. 2186 – 2196.

TRIANGULAR EMBEDDINGS OF COMPLETE GRAPHS IN TWO-DIMENSIONAL SURFACES

Constructing triangular embeddings of complete graphs was the major step in proving the Map Color Theorem. We consider the problem of constructing nonisomorphic triangular embeddings of complete graphs, new results and some open problems.

УДК 512.548.7, 20N05, 20N15, 39B52; 08A05; 05A15, 05B07, 12K99

ПОДАННЯ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕРЕЗ ГРАФИ

Галина Крайнічук, Арсен Акопян

Донецький національний університет імені Василя Стуса

kraynichuk@ukr.net, a.akopyan@donnu.edu.ua

Ми розглянемо узагальнені квадратичні бінарні функційні рівняння на оборотних (квазігрупових) функціях, при цьому носій вважається довільною множиною, тобто функційне рівняння не має ні предметних ні функційних сталих. Отже, *функційним рівнянням* [7] є формула

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)(T_1 = T_2)\,,$$

де n – кількість різних предметних змінних, що входять в запис термів T_1 і T_2. Нагадаємо, що бінарна функція f *оборотною* називається, якщо $\forall a,b \in Q$ існують єдині розв'язки рівнянь $f(x,a)=b$, $f(a,y)=b$, при цьому пара $(Q;f)$ називається *квазігрупою* [1]. Функційне рівняння називається:

– *узагальненим*, якщо всі функційні змінні у рівнянні різні [4];

– *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має точно дві появи [4];

– *бінарним*, якщо всі функційні змінні є бінарними операціями [1];

– *квазігруповим*, якщо передбачається, що кожна функційна змінна набуває значень в множині квазігрупових операцій довільного носія [7].

Згідно з Крстичем [4], узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння можна подати у вигляді мультиграфів. *Мультиграф* – це трійка (V,E,I), де V та E – неперехресні множини, елементи яких називаються вершинами та ребрами відповідно, а I – це інцидентне відношення $I \subseteq V \times E$. Ребро називається *петлею*, якщо його кінці збігаються в одній вершині, тобто $e=\{v,v\}$. Мультиграф, який відповідає узагальненому квадратичному функційному рівнянню $w=v$ має задовольняти таким умовам 1) вершинами графа є функційні змінні рівняння $w=v$; 2) ребрами графа є підтерми з w та v, в тому числі й самі w і v, які вважаються одним ребром, тобто, будь-яка предметна змінна вважається одним ребром; 3) якщо $A(p,q)$ є підтермом w або v, то вершина F інцидентна ребрам $p,q,F(p,q)$, інших ребер немає [4]. Такий мультиграф А. Крапєж називає графом Крстича $K(w=v)$ [4].

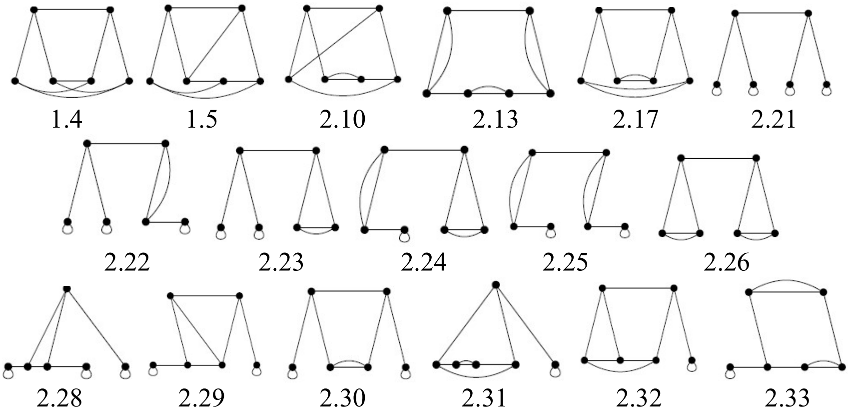
Теорема [6]. *Узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння є парастрофно рівносильними тоді і тільки тоді, коли їх графи ізоморфні*.

Бінарні квазігрупові функційні рівняння можуть бути зображені у вигляді

3-зв’язних графів. Побудова 3-зв’язних графів описана в [3]. Повний перелік неізоморфних графів Крстича від двох та чотирьох вершин дано в статтях А. Крапєжа [4-6]. Класифікація квадратичних функційних рівнянь від двох, чотирьох та шести функційних змінних з точністю до парастрофної рівносильності описана у дисертації Р. Коваль [2]. Зокрема класифіковано парастрофно нерівносильні узагальнені функційні рівняння від шести функційних змінних (1.4, 1.5, 2.10, 2.13, 2.17, 2.21-2.26, 2.28-2.33 див. [2]).

Використовуючи метод подання узагальнених квадратичних бінарних квазігрупових функційних рівнянь через 3-зв’язний мультиграф ми наводимо вигляди неізоморфних графів, що відповідають кожному отриманому Р.Коваль рівнянню від шести функційних змінних.

Теорема. *Повний перелік неізоморфних графів Крстича від шести вершин такий:*



1. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 222 с.
2. *Коваль (Юрій) Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях (дис.). – ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2005. – 133 с.
3. *Bussemaker F. C.; Cobeljic S., Cvetkovic D. M.* Computer investigations of cubic graphs. – T.H.-Report 76-WSK-Ol – 1976.
4. *Krapez A., Zivkovic D.* Parastrophically equivalent quasigroup equations. – L'institut Mathematique, 2010. – tome **87(101)** – P. 39–58.
5. *Krapez A.* Generalized quadratic quasigroup equations with three variables. – Quasigroups and Related Systems, 2009. – №17 – P. 253–270.
6. *Krapez A., Simic S., Tosic D.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations. – Aequationes Mathematicae, 2010. – P. 20.
7. *Sokhatsky Fedir M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Bulletin of Donetsk National University. Series A (Natural Sciences). – 2016. – №1-2. – P. 72–85.

REPRESENTATION OF FUNCTIONAL EQUATIONS VIA GRAPHS

Full list of Krstic non-isomorphic graphs with six vertices is given.

УДК 512.548.7, 20N05, 20N15

ПРО ЗВІДНІСТЬ НЕСКОРОТНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Галина Крайнічук, Юлія Андреєва

Донецький національний університет імені Василя Стуса

kraynichuk@ukr.net, jandreieva7@gmail.com

Алгебра $(Q; f, {}^l f, {}^r f)$ називається *бінарною квазігрупою* [2], якщо вона задовольняє таким тотожностям:

$$f({}^l f(x;y);y)=x,\ {}^l f(f(x;y);y)=x,\ f(x;{}^r f(x;y))=y,\ {}^r f(x;f(x;y))=y. \quad (1)$$

Розглянемо узагальнені квадратичні бінарні квазігрупові функційні рівняння. Під *функційним рівнянням* [1] ми розуміємо універсальну формулу рівності двох термів $v=\omega$, що складається з функційних та предметних змінних і не мають ні предметних ні функційних сталих (загальне означення див. [7]), при цьому носій вважається довільною множиною.

Два функційних рівняння $v=\omega$ називаються *парастрофно-первинно рівносильними* [5-7], якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість таких кроків: 1) застосування квазігрупових тотожностей (1); 2) перестановка частин рівняння; 3) перейменування предметних змінних; 4) перейменування функційних змінних.

Функційне рівняння називається:
- *узагальненим*, якщо всі функційні змінні у рівнянні різні [4];
- *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має точно дві появи [3];
- *врівноваженим*, якщо кожна предметна змінна має появу точно один раз в лівій і правій частині рівняння [3];
- *бінарним*, якщо всі функційні змінні є бінарними операціями [2];
- *квазігруповим*, якщо передбачається, що кожна функційна змінна набуває значень в множині квазігрупових операцій довільного носія [5].

Квазігрупове функційне рівняння називається *звідним* [7], якщо воно еквівалентне системі рівнянь, кожне з яких має меншу кількість предметних змінних. Квадратичне функційне рівняння називається *парастрофно звідним*, якщо воно парастрофно еквівалентне звідному рівнянню. Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називається *скоротним,* якщо воно має самодостатню послідовність підслів (послідовність підслів рівняння називається *самодостатньою*, якщо вона містить всі появи її предметних змінних у рівнянні). Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називається *парастрофно скоротним*, якщо воно парастрофно еквівалентне звідному рівнянню.

Теорема [6]. *Довільне узагальнене квадратичне скоротне функційне рівняння звідне. Довільне узагальнене квадратичне парастрофно скоротне рівняння парастрофно звідне.*

В [4] доведено, що серед всіх узагальнених квадратичних бінарних квазігрупових функційних рівнянь від шести предметних змінних є 14 нескоротних рівнянь. Ми розглянули кожне з цих 14-ти рівнянь та встновили, що всі вони звідні. Ми даємо приклад звідності одного із цих рівнянь.

Теорема 1. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести предметних змінних виду*

$$F_1\left(F_2\left(F_3\left(F_4\left(F_5(x;y),z\right),u\right),v\right),w\right)=F_6\left(x,F_7\left(y,F_8\left(z,F_9\left(u,F_{10}(v,w)\right)\right)\right)\right)$$

рівносильне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} F_1\left(F_2(x,y),z\right)=\gamma F_2\left(x,\rho^{-1}F_{10}(y,z)\right), \\ \gamma F_2\left(F_3(x,y),\rho^{-1}z\right)=\delta F_3\left(x,\mu^{-1}F_9(y,z)\right), \\ \delta F_3\left(F_4(x,y),\mu^{-1}z\right)=\alpha F_4\left(x,\beta^{-1}F_8(y,z)\right), \\ \alpha F_4\left(F_5(x,y),\beta^{-1}z\right)=F_6\left(x,F_7(y,z)\right), \end{cases}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\rho$ *довільні підстановки базової множини*.

Лема 1. *Всі 14 узагальнені нескоротні квадратичні бінарні квазігрупові функційні рівняння від шести предметних змінних звідні*.

Теорема 2. *Всі узагальнені квадратичні бінарні квазігрупові функційні рівняння від шести предметних змінних звідні.*

1. *Aczél J.* Lectures on functional equations and their applications. – New York, London: Academic Press, 1966. – 509 p.
2. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 222 с.
3. *Krapez A.* Stricly quadratic functional equations on quasigroups I // Publ. Inst. Math. (Beograd), 1981. – tome 29 (43) – P. 125–138.
4. *Krapez A., Simic S. K., Tosic D. V.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations // Aequationes Mathematicae. – 2010. – P. 261–280.
5. *Сохацький Ф. М.* Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах //УМЖ. – 2004. – 56, №9 – С. 1259–1266.
6. *Сохацький Ф. М.* Асоціати і розклади багатомісних операцій. – Докторська дисертація, Вінниця-Київ, 2006.
7. *Sokhatsky Fedir M.*. Parastrophic symmetry in quasigroup theory. – Bulletin of Donetsk National University. Series A (Natural Sciences), 2016. – №1-2. – P. 72–85.

ON REDUCIBILITY OF UNCANCELLABLE GENERALIZED FUNCTIONAL EQUATIONS

Reducibility of generalized quadratic binary quasigroup functional equations in six individual variables is established. As an example, a system of equations in three individual variables which is equivalent to one of 14 uncancellable functional equations in six variables is given.

УДК 512.64

ФАКТОРИЗАЦІЇ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ПОЛІНОМІВ І КВАЗІПОЛІНОМІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Марія Кучма

Національний університет “Львівська політехніка”

markuchma@ukr.net

Нехай у кільці поліномів $\mathrm{C}[x]$ чи квазіполіномів

$$\mathrm{C}[x,\, x^{-1}] = \{f(x) = \sum_{i=-l}^{p} a_i x^i,\ a_i \in \mathrm{C}\}$$

введено деяку із розглянутих у працях [1, 2, 4] інволюцію ∇, яку на кільце матриць перенесемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \| a_{ij}(x) \|^{\nabla} = \| a_{ji}(x)^{\nabla} \|.$$

Матриця $A(x)$ називають симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Факторизацією симетричної матриці $A(x)$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}. \tag{1}$$

Позначимо через S_A форму Сміта матриці $A(x)$

$$S_A = P(x)A(x)Q(x) = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)). \tag{2}$$

де $P(x), Q(x)$ – деякі оборотні над $\mathrm{C}[x]$ чи $\mathrm{C}[x,\, x^{-1}]$ матриці, $\varepsilon_i(x)$ – інваріантні поліноми (квазіполіноми), $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x),\ i = \overline{1, n}.$

У роботах [1, 2] знайдено необхідні і достатні умови існування факторизації (1), в якій $B(x)$ – унітальна матриця з формою Сміта $\Phi(x) = \mathrm{diag}\,(\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x))$, а $C(x)$ – неособлива симетрична матриця.

У наступних теоремах сформульовано необхідні і достатні умови існування факторизації (1), які еквівалентні умовам, які отримано у роботах [1, 2].

Теорема 1. *Нехай* $\Phi(x)$ – d*-матриця,* $\deg\det \Phi(x) = nr$ *і* $\Phi(x)$ *є дільником форми Сміта* S_A *матриці* $A(x) \in \mathrm{M_n}(\mathrm{C}[x])$. *Для симетричної матриці* $A(x)$ *існує факторизація (1), в якій* $B(x)-$ *унітальна поліномна матриця степеня* r *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C(x) = C(x)^{\nabla}$ − *неособлива поліномна матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця*

$$V(\Phi)S_A Q(x)^{-1} P(x)^{\nabla} V(\Phi)^{\nabla}$$

ділиться одночасно зліва на $\Phi(x)$ *і справа на* $\Phi(x)^{\nabla}$ *за деяких допустимих значень параметрів* k_{ijs} *матриці* $V(\Phi)$ *[3], для яких виконується умова*

$$\det M_{V(\Phi)P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\Phi) \neq 0,$$

де матриці $P(x), Q(x) \in \mathrm{GL_n}(\mathrm{C}[x])$ *із співвідношення (2).*

Теорема 2. *Нехай* $\Phi(x) -$ d *- матриця,* $\deg\det \Phi(x) = nr$ *і* $\Phi(x)$ *є дільником форми Сміта* S_A *матриці* $A(x) \in \mathrm{M_n}(\mathrm{C}[x, x^{-1}])$. *Для симетричної матриці* $A(x)$ *існує факторизація (1), в якій* $B(x) -$ *регулярна квазіполіномна матриця степеня* r *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C(x) = C(x)^{\nabla}$ $-$ *неособлива квазіполіномна матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця*

$$V(\Phi)S_A Q(x)^{-1} P(x)^{\nabla} V(\Phi)^{\nabla} \tag{3}$$

ділиться одночасно зліва на $\Phi(x)$ *і справа на* $\Phi(x)^{\nabla}$ *за деяких допустимих значень параметрів* k_{ijs} *матриці* $V(\Phi)$ *[3], для яких виконується умова*

$$\det M_{V(\Phi)P(x)\|E^{-r+1}, \ldots, Ex^{-1}, E\|}(\Phi) \neq 0,$$

де матриці $P(x),\ Q(x) \in \mathrm{GL_n}(\mathrm{C}[x, x^{-1}])$ *із співвідношення (2).*

Теорема 3. *У факторизації (1) симетричної матриці* $A(x)$ *унітальний множник* $B(x)$ *єдиний з формою Сміта* $\Phi(x)$ *тоді і тільки тоді, коли форма Сміта матриці* $A(x)$ *рівна добутку форм Сміта її співмножників*.

1. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**. № 4 – С. 91–95.
2. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Симетричні матриці та матричні рівняння над кільцем квазімногочленів з інволюцією // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. **11**. – С. 45–51.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. – 1973. – **14,** № 2 – С. 337–356.

FACTORIZATIONS OF SYMMETRIC MATRICES OVER RINGS OF POLYNOMIALSAND QUASIPOLYNOMIALS WITH INVOLUTION

Necessary and sufficient conditions for the existence of factorization of symmetric matrices over rings of polynomials and quasipolynomials with involution were obtained.

УДК 512.643.4

ПРО РОЗВ’ЯЗНІСТЬ МАТРИЧНИХ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Наталія Ладзоришин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Матричні діофантові рівняння, матричні рівняння типу Сильвестра над полями, кільцями поліномів, головних ідеалів тощо виникають і знаходять застосування в багатьох прикладних задачах [1, 2, 3].

Ми розглядаємо матричні діофантові рівняння

$$AX + BY = C \tag{1}$$

над квадратичними кільцями $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$. Як відомо, серед квадратичних кілець є евклідові кільця, кільця головних ідеалів, а також кільця, які не є кільцями головних ідеалів. Тому розв’язування рівнянь над такими кільцями є складною задачею.

У [4] наведено критерій існування цілочислових розв’язків та їх єдиності матричного рівняння (1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$. Розв’язування таких матричних рівнянь ми зводимо до розв’язування матричних діофантових рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Теорема. *Матричне рівняння (1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ з матрицями $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$ вигляду:*

$A = A_1 + A_2\sqrt{k}$, $B = B_1 + B_2\sqrt{k}$, $C = C_1 + C_2\sqrt{k}$, *якщо* $k \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 4)$;

$A = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right)$, $B = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\sqrt{k}\right)$, $C = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right)$, *якщо* $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$

,

де $A_i, B_i, C_i \in M\left(n, \mathbb{Z}\right)$, $i = 1, 2$ *має розв’язок* $X, Y \in M\left(n, \mathbb{K}\right)$ *тоді і тільки тоді, коли такі матриці еквівалентні над* $\mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2 k & B_1 + B_2 k & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \; і \; \begin{Vmatrix} A_1 + A_2 k & B_1 + B_2 k & A_1 & B_1 & 0 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & 0 \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 4)$;

$$\left\| \begin{matrix} A_1 + A_2 k & B_1 + B_2 k & 2A_1 & 2B_1 & 2C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 2C_2 \end{matrix} \right\| \ i \ \left\| \begin{matrix} A_1 + A_2 k & B_1 + B_2 k & 2A_1 & 2B_1 & 0 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

якщо $k \equiv 1 (\bmod 4)$.

Наслідок. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[i]$ *– кільце цілих гаусових чисел і рівняння (1) з коефіцієнтами вигляду:*

$$A = A_1 + A_2 i;\ B = B_1 + B_2 i;\ C = C_1 + C_2 i,$$

де $A_i, B_i, C_i \in M(n, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$ *має розв'язки* $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ *в тому і тільки в тому випадку, коли матриці*

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{matrix} \right\| \ i \ \left\| \begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

1. *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503p.
2. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The structure of solutions of the matrix linear unilateral polynomial equation with two variables // Carpatian Math. Publ. – 2017. – 9, № 1, 48-56, doi:10.15330/cmp.9.1.48-56.
3. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // ISRN Algebra. – 2012. Article ID205478, 14 pages, doi:10.5402/2012/205478.
4. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2015. – 58, №2. – С. 47 – 54. (Те саме: Ladzoryshyn N.B. Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // Journal of Math.Sciences – 2017. – 223, № 1, 50 – 59, doi:10.1007/s10958-017-3337-0).

THE SOLVABILITY OF DIOPHANTINE EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS

Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the matrix Diophantine equation $AX + BY = C$ *in cases where their coefficients are the matrices over a quadratic ring* $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *are established.*

УДК 512.552.1

ПРО КВАЗІПЕРВИННІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІДЕАЛИ НАПІВКІЛЕЦЬ

Іванна Мельник

Львівський національний унверситет імені Івана Франка

ivannamelnyk@yahoo.com

Диференціюванням напівкільця R [1] називають адитивне відображення $\delta : R \to R$, що задовольняє умову $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для всіх $a, b \in R$. Напівкільце R разом з диференціюванням δ називають диференціальним стосовно δ, або δ-напівкільцем. Ідеал I напівкільця R називають *диференціальним*, якщо $\delta(a) \in I$ для кожного $a \in I$. Ідеал I в R називають *k-ідеалом*, якщо з $a + b \in I$ та $a \in I$ випливає, що $b \in I$. *Первинним ідеалом* напівкільця R називають ідеал $P \neq R$, для якого з $ab \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$. Власний ідеал I напівкільця R називають *максимальним*, якщо для будь-якого такого ідеалу J в R, що $I \subset J$, $J = R$.

Нехай $A \subset R$. Диференціалом множини A називають множину $A_{\#} = \left\{ a \in R \middle| a^{(n)} \in A,\ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \right\}$, де $a^{(n)}$ – n-та похідна елемента a. Диференціальне напівкільце R називають *dmsp-напівкільцем* [2], якщо для кожного первинного ідеалу P в R ідеал $P_{\#}$ є первинним.

Непорожню підмножина S напівкільця R називають m*-системою* R якщо для кожних $a, b \in S$ існує такий $r \in R$, що $arb \in S$. Диференціальний ідеал I напівкільця R називають *квазіпервинним*, якщо він є максимальним серед диференціальних ідеалів R, що не перетинаються з деякою m-системою R. Кожний максимальний диференціальний ідеал напівкільця R є квазіпервинним.

Твердження 1. *Якщо P первинний ідеал диференціального напівкільця R, то диференціальний ідеал $P_{\#}$ є квазіпервинним.*

Твердження 2. *Якщо $\{Q_i\}_{i \in I}$ – ланцюг квазіпервинних ідеалів напівкільця R, то $\bigcap_{i \in I} Q_i$ є квазіпервинним ідеалом в R, і існує єдиний найменший квазіпервинний ідеал в R, який містить $\bigcup_{i \in I} Q_i$.*

Теорема 1. *Кожний ланцюг квазіпервинних ідеалів в R має точну верхню і точну нижню межу.*

Теорема 2. *Кожний квазіпервинний ідеал є примарним.*

Теорема 3. *Якщо* I *– диференціальний ідеал в* R, *а* Q *– такий квазіпервинний ідеал в* R, *що* $I \subseteq Q$, *то* Q *містить квазіпервинний ідеал, мінімальний серед всіх квазіпервинних ідеалів в* R, *що містять* I.

Теорема 4. *Якщо* R *– dmsp-напівкільце, то кожний квазіпервинний k-ідеал в* R *є первинним.*

1. *Golan J.* Semirings and their Applications. – Springer Netherlands, 1999 – 382 p.
2. *Melnyk I.* On the radical of a differential semiring ideal // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2016. – **82**. – P. 163173.

ON QUASI-PRIME DIFFERENTIAL IDEALS OF SEMIRINGS

Quasi-prime ideals of differential semirings are studied as maximal among differential semiring ideals not meeting some m-system. It is established that any quasi-prime differential ideal of a dmsp-semiring is prime.

УДК 512.553.2

КАТЕГОРІЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ПОЛІГОНІВ

Роман Олійник

Львівський національний університет імені Івана Франка

forvard-or@ukr.net

Нехай S – комутативний моноїд. Розглядаємо категорію лівих центрованих та унітарних $S-$ полігонів та їх гомоморфізмів [1,3].

Розглядаємо поняття мультиплікативного $S-$ полігоніва по аналогії мультиплікативного $R-$ модуля [2]. Тобто лівий $S-$ полігон A називається мультиплікативним, якщо для довільного лівого підполігону $B \subset A$ існує деякий ідеал $I \subseteq S$ такий, що $IA = B$.

Розглядаємо категорію, яка складається лише з мультииплікативних $S-$ полігонів та їх гомоморфізмів. Досліджуємо в даній категорії радикали та скрути [1, 3].

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalov A. V.* Monoids, Acts and Categories – Berlin, 2000. – 529 p.
2. *Smith P. F.* Some remarks on multiplication module// Arch. Math. – 1988. – 50. – P. 223–235.
3. *Wiegandt R.* Radicals and Torsion Theory for Acts // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312–328.

THE CATEGORY OF MULTIPLICATION ACTS

In the category of multiplication acts we research radicals and torsion theory.

УДК 539.3

ЗОБРАЖЕННЯ ПІДСТАНОВОК КОРЕНЕВИМИ ДЕРЕВАМИ

Віта Ольшевська

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

vaolshevska@gmail.com

Нагадаємо, що *кореневим деревом* T_m називається граф з виділеною вершиною, яка називається коренем дерева. Вершина дерева v називається *вершиною* i*-го рівня*, якщо довжина найкоротшого шляху між коренем v_0 і вершиною v дорівнює i [1]. Якщо дерево T_m скінченне та має m рівнів, то вершини останнього рівня мають степінь один і називаються *висячими*. n -рівневе кореневе дерево називається *бінарним* і позначається $T_{2,n}$, якщо степінь кореня дерева дорівнює двом і степінь кожної іншої вершини не останнього рівня дорівнює трьом.

Для кожної підстановки π групи S_n існує бінарне дерево з помітками, що однозначно зображає підстановку π .

Бінарне кореневе дерево $T_{2,n}^i$ будемо називати *елементарним* для дерева $T_{2,n}$, якщо в ньому зберігаються помітки дерева $T_{2,n}$ лише на i -му рівні.

Теорема. *Нехай дерево* $T_{2,n}$ *задає підстановку* t. *Розкладемо його на елементарні дерева* $T_{2,n}^i$, *кожне з яких задає підстановку* t_i, $i \in [0; n-1]$, *відповідно. Тоді*

$$t_{n-1} * t_{n-2} * \ldots * t_1 * t_0 = t,$$

де $a * b$ *– добуток підстановки* a *на підстановку* b .

1. *Grigorchuk R. I., Nekrashevich V. V., Sushchanskii V. I.* Automata, Dynamical Systems, and Groups // Steklov Institute of Mathematics. – 2000. – Vol. 231, – P. 128–203.

REPRESENTATIONS OF PERMUTATIONS BY ROOTED TREES

An algorithm of decomposition of the tree $T_{2,n}$ *into elementary trees* $T_{2,n}^i$ *is proposed. Along with this, a permutation represented by a tree* $T_{2,n}$ *is equal to the product of permutations represented by trees* $T_{2,n}^i$.

УДК 512.546

ГРАФИ-ДЕРЕВА ТА М-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

Назар Пирч

Українська академія друкарства

pnazar@ukr.net

Нагадаємо, що деревом називається зв'язний граф, що не містить циклів.

У цій роботі під деревом ми будемо розуміти топологічний простір, який є підпростором площини, кожне ребро якого є гомеморфним одиничному відрізку I . Граф який є диз'юнктною сумою дерев називається лісом.

Топологічні простори X та Y називаються M-еквівалентними (позн. $X \overset{M}{\sim} Y$), якщо їхні вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними [1].

Теорема 1. *Нехай X − ліс, що має n дерев, принаймні одне з яких є нетривіальним. Тоді простір X є M-еквівалентним простору $I \oplus D_{n-1}$ (тут D_n − скінченний дискретний простір потужності n).*

Наслідок 1. *Нехай X − нетривіальне дерево. Тоді простір X є M-еквівалентним простору I .*

Теорема 2. *Нехай X − лінійно зв'язний простір, $Y = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_n$ − ліс, що складається з дерев $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, $Y \subseteq X$. Якщо простір $X / \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ є нетривіальним, то він є M-еквівалентним простору X .*

Означення. *Нехай $Y_1 \subseteq X_1$, $Y_2 \subseteq X_2$. Скажемо, що пара (X_1, Y_1) є M-еквівалентною парі (X_2, Y_2), якщо існує топологічний ізоморфізм $i : F(X_1) \to F(X_2)$ такий, що $i(\langle Y_1 \rangle) = \langle Y_2 \rangle$.*

Означення. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ − сім'я підпросторів топологічного простору X , $\{Y_s : s \in S\}$ − сім'я підпросторів топологічного простору Y . Скажемо, що сім'я $(X, \{X_s : s \in S\})$ є M-еквівалентною сім'ї $(Y, \{Y_s : s \in S\})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$ такий, що*

$i\left(\left\langle X_s\right\rangle\right)=\left\langle Y_s\right\rangle$ *для всіх* $s\in S$.

Теорема 3. *Нехай* X, Y $-$ *лінійно зв'язні простори,*

$$X_1\to X_2\to\ldots\to X_n\to X,$$

$$Y_1\to Y_2\to\ldots\to Y_n\to Y$$

$-$ *вкладення дерев. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. сім'я $\left(X,X_1,X_2,...,X_n\right)$ *є* M*–еквівалентною сім'ї* $\left(Y,Y_1,Y_2,...,Y_n\right)$*;*

2. $X\overset{M}{\sim}Y$, $\left|X_1\right|=\left|Y_1\right|$, $\left|X_2/X_1\right|=\left|Y_2/Y_1\right|,\left|X_3/X_2\right|=\left|Y_3/Y_2\right|,\ldots,\left|X/X_n\right|=\left|Y/Y_n\right|$.

Теорема 4. *Нехай* X, Y $-$ *лінійно зв'язні простори,* $X_1,X_2,...,X_n$ $-$ *сім'я диз'юнктних дерев в* X, $Y_1,Y_2,...,Y_n$ $-$ *сім'я диз'юнктних дерев в* Y,

$$p_X:X\to X/\left\{X_1,X_2,...,X_n\right\},\ p_Y:Y\to Y/\left\{Y_1,Y_2,...,Y_n\right\}$$

$-$ R*-факторні відображення. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. сім'я $\left(X,X_1,X_2,...,X_n\right)$ *є* M*–еквівалентною сім'ї* $\left(Y,Y_1,Y_2,...,Y_n\right)$*;*

2\. *сім'я* $\left(X/\left\{X_1,X_2,...,X_n\right\},p_X\left(X_1\right),p_X\left(X_2\right),...,p_X\left(X_n\right)\right)$ *є* M*–еквівалентною сім'ї* $\left(Y/\left\{Y_1,Y_2,...,Y_n\right\},p_Y\left(Y_1\right),p_Y\left(Y_2\right),...,p_Y\left(Y_n\right)\right)$.

Теорема 5. *Нехай* $\left(X,X_1,X_2,...,X_n\right)$ $-$ *деякий набір ,* $K=\bigcap_{i=1}^{n}X_i$ *, ,* Y $-$ *дерево в* K *. Якщо* R*-факторний простір* K/Y *містить копію одиничного відрізка, то сім'я* $\left(X,X_1,X_2,...,X_n\right)$ *є* M*–еквівалентною сім'ї* $\left(X/Y,X_1/Y,X_2/Y,...,X_n/Y\right)$*;*

1. *Гуран І. Й., Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп. – М.: НМК ВО, 1991. – 76 с.

GRAPHS-TREES AND M-EQUIVALENCE

We consider the isomorphic classification of the Tychonoff spaces and their bundles concerning with graphs-trees.

УДК 515.12

МНОГОВИДИ, МОДЕЛЬОВАНІ НАД ЗЛІЧЕННИМИ ПРЯМИМИ ГРАНИЦЯМИ АБСОЛЮТНИХ ЕКСТЕНЗОРІВ

Орислава Поливода

Українська академія друкарства

shabor@ukr.net

Ми розглядаємо класи нескінченновимірних многовидів, модельованих над зліченними прямими границями деяких абсолютних екстензорів. Вони є, зокрема, узагальненнями $\mathbb{R}^\infty$-многовидів та Q^∞-многовидів (див.[1]). Прикладом модельного простору може служити пряма границя

$$I^{\tau_1} \to I^{\tau_2} \to I^{\tau_3} \to \ldots,$$

де $I = [0,1]$ і $\tau_1 \le \tau_2 \le \tau_3 \le \ldots$.

Деякі функторіальні конструкції в топології зберігають класи нескінченновимірних многовидів. Зокрема, функтори скінченного степеня зберігають класи $\mathbb{R}^\infty$-многовидів та Q^∞-многовидів при виконанні деяких додаткових умов (див.[2]). Ми досліджуємо збереження $\left(I^\tau\right)^\infty$-многовидів, де $\left(I^\tau\right)^\infty = \varinjlim \left(I^\tau\right)^n$ конструкціями гіперпростору, простору ймовірнісних мір, гіперпростору опуклих множин та ін. при незліченних кардиналах.

Крім того, розглядаємо конструкцію лінійного простору опуклих множин від просторів $\mathbb{R}^\infty$ та $\left(l^2, b_w\right)$ (останній означає гільбертовий простір у обмеженій слабкій топології).

1. *Sakai K.* On $\mathbb{R}^\infty$ - and Q^∞ - manifolds// Topol. Appl. – 1984. – **18**, N 1, – P. 69–79.
2. *Федорчук В. В.* Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q - многообразия // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып.3. – С. 177–193.

MANIFOLDS MODELED ON THE DIRECT LIMITS OF ABSOLUTS EXTENSORS

We consider classes infinite dimensional manifolds modeled on countable direct limits of some AE. As a model space we can regard the direct limit

$$I^{\tau_1} \to I^{\tau_2} \to I^{\tau_3} \to \ldots,$$

where $I = [0,1]$ *and* $\tau_1 \le \tau_2 \le \tau_3 \le \ldots$. *We establish preservation of* $\left(I^{\tau}\right)^{\infty}$*-manifolds, with* $\left(I^{\tau}\right)^{\infty} = \varinjlim \left(I^{\tau}\right)^{n}$, *by some construction: hyperspace, space probability measures, hyperspace of convex sets etc. with uncountable cardinals. And also consider the construction of the linear space of convex sets from spaces* $\mathbb{R}^{\infty}$ *and Hilbert space in bounded weak topology.*

УДК 512.624

ПРО ЕЛЕМЕНТИ ВЕЛИКОГО ПОРЯДКУ В РОЗШИРЕННЯХ АРТІНА-ШРАЄРА

Роман Попович

Національний університет «Львівська політехніка»

rombp07@gmail.com

Відомо, що мультиплікативна група скінченного поля є циклічна. Твірну цієї групи називають примітивним елементом. Ефективно побудувати примітивний елемент для заданого скінченного поля в обчислювальній теорії скінченних полів важко. Ось чому розглядають менш обмежувальне питання: знайти елемент великого мультиплікативного порядку [2, 4]. У цьому випадку не вимагають обчислити точний порядок елемента: достатньо отримати нижню межу для порядку. Елементи великого порядку потрібні для низки застосувань, які, зокрема, охоплюють криптографію, теорію кодування, генератори псевдовипадкових чисел та комбінаторику.

Через F_q позначатимемо скінченне поле з q елементів, де q – степінь деякого простого числа p.

У роботі [6] запропоновано будувати елементи великого мультиплікативного порядку в розширеннях Артіна-Шраєра F_{q^p} ($q = p^n$, p не ділить n), виходячи з такого подання

$$F_{q^p} = F_q[x]/(x^p - x - a).$$

Зауважено, що поліном $x^p - x - a$ є нерозкладним над початковим полем F_q [1] і тому дійсно задає скінченне поле. У результаті отримано оцінку знизу

$$\frac{e}{\pi p}(2n+1)^{p-1} \qquad (1)$$

для порядку елементів.

Ми пропонуємо використовувати для того ж поля подання

$$F_{q^p} = F_{p^{np}} = F_p[x]/(f(x)),$$

де $f(x)$ – нерозкладний поліном степеня np над полем F_p. Такий поліном завжди існує [1] і задає те ж скінченне поле (з точністю до ізоморфізму). У цьому разі слід використати підхід Гао-Конфлітті [4, 5] в модифікації Поповича [7]. Тоді отримаємо оцінку для порядку елементів принаймні

$$\binom{np+t-1}{t}\prod_{i=0}^{t-1}\frac{1}{d^i}. \tag{2}$$

де $d=\lceil 2\log_p(np)\rceil$, $t=\lfloor \log_d(np)\rfloor$. Якщо $n>>p$ (а переважно цікавляться власне таким випадком), то оцінка (2) краща, ніж оцінка (1).

Для реалізації підходу Гао слід знайти найменше натуральне число m та поліном $g(x)$ над F_p степеня меншого від $2\log_p(np)$ такі, що $x^{p^m}-g(x)$ ділиться на $f(x)$. Відомо, що коли таке число та поліном існують, то це можна зробити за поліноміальний час. Їх існування припускає гіпотеза, висловлена Гао в праці [4]. Гіпотезу було перевірено в [4] для $q=2$ та $n\le 300$. У [3] з використанням комп'ютерних обчислень гіпотезу підтверджено для $q=2$ та $300<n\le 400$, $q=3$ та $n\le 300$, $q=5$ та $n\le 100$.

1. *Lidl R., Niederreiter H.* Finite Fields. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 755 p.
2. *Mullen G.L., Panario D.* Handbook of Finite Fields. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 1068 p.
3. *Dunets R., Popovych B., Popovych R.* On construction of high order elements in general finite fields. // Proc. 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (Bucharest, Romania, 21-23 September 2017). – Curran Associates, USA, 2018. – P. 379–382.
4. *Gao S.* Elements of provable high orders in finite fields // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999 – **127**, № 6. – P. 1615–1623.
5. *Conflitti A.* On elements of high order in finite fields. // Proc. Workshop on Cryptography and computational number theory: (Singapore, 22-26 November 1999). – Birkhauser, Basel, 2001. – P. 11–14.
6. *Martinez F. E. B., Reis L.* Elements of high order in Artin-Schreier extensions of finite fields F_q // Finite Fields Appl. – 2016 – **41**. – P. 24–33.
7. *Popovych R.* On elements of high order in general finite fields // Algebra and Discr. Math. – 2014. – **18**, № 2. – P. 295–300.

ON ELEMENTS OF HIGH ORDER IN ARTIN-SCHREIER EXTENSIONS F_{q^p}

We suggest constructing high order elements in Artin-Schreier extensions F_{q^p}, based on Gao-Conflitti method for general finite fields in Popovych modification. This gives better lower bound on the order, than in the known Martinez-Reis approach.

УДК 539.3

СКІНЧЕННО АВТОМАТНІ РОЗШИРЕННЯ ГРУП БАУМСЛАГА-СОЛІТЕРА

Вероніка Прохорчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

proveronika145@gmail.com

Визначимо автомат $D^b_{q_0q_1}(k) = \left\langle S, \tau^{b,k}_{q_0q_1}, \rho^{b,k}_{q_0q_1} \right\rangle$ над бінарним алфавітом $X = \{0,1\}$ (рис. 1), де $S = \{q, s_0, \dots, s_{2k}\}$ – множина внутрішніх станів, $\tau^{b,k}_{q_0q_1} : S \times X \to S$ – функція переходів, $\rho^{b,k}_{q_0q_1} : S \times X \to X$ – функція виходів, $k > 0, \{q_0, q_1\} \subset S, b \in \{0,1\}$.

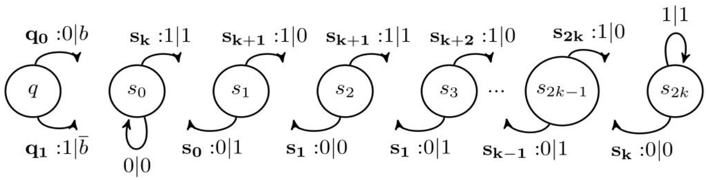


Рис. 1. Автомат $D^b_{q_0q_1}(k), k > 0, \{q_0, q_1\} \subset S, b \in \{0,1\}$

Позначимо через $\left\{G^{nc}_{q_0q_1}\right\}_{k>0}$ і $\left\{G^{c}_{q_0q_1}\right\}_{k>0}$ родину автоматних груп породжених автоматами $D^0_{q_0q_1}(k), k > 0, \{q_0, q_1\} \subset S$ і $D^1_{q_0q_1}(k), k > 0$, $\{q_0, q_1\} \subset S$, що не змінюють або змінюють своє значення в стані q відповідно.

Теорема 1 *Кожна група з* $\left\{G^{nc}_{q_0q_1}\right\}_{k>0}$ *та* $\left\{G^{c}_{q_0q_1}\right\}_{k>0}$ *містить групу Баумслага-Солітера* $BS(1, 2k+1)$ *[1]*.

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. – 1962. – **689.** – P. 199–201

FINITE AUTOMATON EXTENSION OF THE BAUMSLAG-SOLITAR GROUPS

We introduce a family of automaton groups, which generated by automata $D^b_{q_0q_1}(k)$. *Each group of such family contains the Baumslag-Solitar group.*

УДК 512.6

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА СКІНЧЕННИХ НЕАБЕЛЕВИХ *P*-ГРУПАХ

Ірина Раєвська, Марина Раєвська

Інститут математики НАН України

raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua

В статті [1] досліджувалися локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено. Ми показали, що довільна скінченна неабелева неметациклічна 2-породжена p-група ($p > 2$) з циклічним комутантом та ступенем нільпотентності рівним 2 є адитивною групою деякого майже-кільця з одиницею, зокрема, локального майже-кільця. Більш того, показано, що підгрупа необоротних елементів останнього є індексу p в його адитивній групі.

1. *Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю., Сисак Я. П.* Локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 3. – С. 39-46.

LOCAL NEARRINGS ON FINITE NON-ABELIAN *P*-GROUPS

It is proved that every non-abelian non-metacyclic 2-generated p-group ($p > 2$) with cyclic commutator subgroup is the additive group of a local nearring.

УДК 512.55

ПРО СТАБІЛЬНИЙ РАНГ КІЛЕЦЬ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

Андрій Романів, Володимир Щедрик

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

romaniv_a@ukr.net, shchedrykv@ukr.net

Поняття стабільного рангу кільця, як інструменту розв'язання деяких задач із *K*-теорії, було введене Х. Бассом у 1964 р. [1]. Стабільним рангом кільця R називається найменше натуральне число n таке, що виконується умова

$(*)_n$ *для всіх* $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in R$ *таких, що* $a_1R + \dots + a_nR + a_{n+1}R = R$ *існують такі* $r_1, \dots, r_n \in R$, *що* $(a_1 + a_{n+1}r_1)R + \dots + (a_n + a_{n+1}r_n)R = R.$

Якщо такого n не існує, то кажуть, що кільце має нескінченний стабільний ранг.

Л. Васерштейн [2], досліджуючи властивості стабільного рангу, зокрема, показав, що з умови $(*)_n$ випливає умова $(*)_{n+1}$, що у випадку кілець стабільного рангу 1 або 2 кільця матриць над ними успадковують стабільний ранг кільця над якими вони розглядаються. Він також довів, що це поняття є ліво-право симетричним.

Методи, що грунтуються на понятті стабільного рангу виявились досить ефективними і у теорії кілець, зокрема, при розв'язанні відомої проблеми кілець елементарних дільників [3]. Так доведено, що кільця елементарних дільників, зокрема, кільця головних ідеалів, мають стабільний ранг не більше 2 [4].

Через стабільний ранг елегантно вводяться такі, тепер широко досліджувані комутативні чисті кільця (clean ring), кільця з властивістю заміни (exchange ring). Більш глибокі дослідження цього поняття спонукали до введення ідемпотентного стабільного рангу, одиничного стабільного рангу, акуратного рангу.

Будемо говорити, що кільце R має **правий стабільний ранг 1,5,** якщо виконується умова

$(*)_{1,5}$ *для кожних* $a_1, a_2 \in R$ *та* $0 \neq a_3 \in R$ *таких, що* $a_1R + a_2R + a_3R = R$ *існує таке* $r \in R$, *що* $(a_1 + a_2r)R + a_3R = R.$

Прикладами таких кілець є комутативні області головних ідеалів, адекватні кільця, кільця матриць другого порядку над згаданими кільцями [5].

Теорема 1. *Виконуються імплікації*

$$(*)_1 \Rightarrow (*)_{1,5} \Rightarrow (*)_2.$$

Наступна теорема розширює клас відомих кілець правого стабільного рангу 1,5.

Теорема 2. *Нехай* R *– комутативне кільце головних ідеалів. Тоді правий стабільний ранг* R *та* $M_2(R)$ *дорівнює 1.5.*

Теореми 1 та 2 показують, що стабільний ранг 1,5 успадковує основні властивості стабільного рангу Басса. У зв’язку з цим виникає задача, яку ми сформулюємо у вигляді гіпотези.

Гіпотеза. *Поняття стабільного рангу 1,5 є право-ліво симетричним. Тобто якщо кільце* R *має правий стабільний ранг 1,5, то воно має і лівий стабільний ранг 1,5: для кожних* $b_1, b_2 \in R$ *та* $0 \neq b_3 \in R$ *таких, що*

$$Rb_1 + Rb_2 + Rb = R$$

існує таке $\rho \in R$ *, що*

$$R(b_1 + \rho b_2) + Rb_3 = R.$$

Зауважимо, що кільця матриць другого порядку над комутативними кільцями головних ідеалів мають правий та лівий стабільний ранг 1,5.

1. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5–60.
2. *Vaserstein L .N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Functional Anal. Appl. –1971. – **5.** – P. 102–110.
3. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956 – **82**. – P. 362–365.
4. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. Мат. Журн. – 2003. – **55**, №4. – С. 550–554.
5. *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, – № 6. – С. 849–860.

ON STABLE RANGE OF MATRIX RINGS OVER COMMUTATIVE PRINCIPAL IDEAL RINGS

It is shown that the stable range of commutative principal ideal rings and 2×2 *matrix rings over them is equal to 1.5.*

УДК 539.3

НАПІВГРУПА ЧАСТКОВИХ КОСКІНЧЕННИХ ІЗОМЕТРІЙ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Анатолій Савчук, Олег Гутік

Львівський національний університет імені Івана Франка

asavchuk1@meta.ua

Вся необхідна термінологія може бути знайдена в [1-3]. Нехай $I\mathbb{N}_\infty$ позначає напівгрупу всіх коскінченних ізометрій множини натуральних чисел. Ми описуємо відношення Ґріна на напівгрупі $I\mathbb{N}_\infty$, її в'язку та доводимо, що $I\mathbb{N}_\infty$ - проста E-унітарна F-інверсна напівгрупа. Описано найменшу групову конгруенція $\wp_{mg}$ на напівгрупі $I\mathbb{N}_\infty$, та доведено, що фактор-напівгрупа $I\mathbb{N}_\infty / \wp_{mg}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$. Наведено приклад конгруенції на напівгрупі $I\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою. Також наведено достатні та необхідні умови того, щоб конгруенція на $I\mathbb{N}_\infty$ була груповою.

1. *Гутік О., Савчук А.* Про напівгрупу ID_∞ // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2017. – **83**. – С. 5–19.
2. *Gutik O., Repovš D.* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having coffinite domain and image // Stud. Sci. Math. Hungar. – 2011. – **48**:3 – P. 342–353.
3. *Lawson M.* Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries. – Singapore: World Scientific, 1998.

THE SEMIGROUP OF CO-FINITE ISOMETRIES OF POSITIVE INTEGERS

We prove that $I\mathbb{N}_\infty$, the semigroup of all partial co-finite isometries of positive integers, is a simple E-unitary F-inverse semigroup. We describe the minimum group congruence $\wp_{mg}$ on $I\mathbb{N}_\infty$ and it prove that the quotient-semigroup $I\mathbb{N}_\infty / \wp_{mg}$ is isomorphic to the additive group of integers. An example of a non-group congruence on the semigroup $I\mathbb{N}_\infty$ is presented. Also we prove that a congruence on the semogroup $I\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence if and only if its restriction onto a copy of the bicyclic semigroup in $I\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence.

УДК 512.552.13

ПРО МАЙЖЕ ω-ЕВКЛІДОВІ ОБЛАСТІ

Андрій Саган

Львівський національний університет імені Івана Франка

andrijsagan@gmail.com

В даній роботі під R розумітимемо комутативну область з відмінною від нуля одиницею.

Нехай k − фіксоване натуральне число, $a,b \in R$, причому $b \neq 0$. Якщо існують такі елементи $q_i, r_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,k$, що

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \quad \ldots, \quad r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k, \tag{1}$$

де $r_k = 0$, то послідовність рівностей (1) називають *скінченним ланцюгом подільності* для пари елементів a,b.

Область R називається майже областю Безу, якщо для довільних ненульових $x, y \in R$ існує $n \in \mathbb{N}$, де (x^n, y^n) є головним ідеалом [1]. Всі інші необхідні означення та приклади можна знайти в роботах [1,2,3,4].

Означення 1. *Область R називатимемо майже ω–евклідовою областю, якщо для довільних ненульових елементів $x, y \in R$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що для елементів x^n, y^n існує скінченний ланцюг подільності.*

Твердження 1. *Майже ω–евклідова область є майже областю Безу.*

Твердження 2. *Нехай R – майже ω–евклідова область і I ненульовий простий ідеал з R. Тоді R/I – майже ω–евклідова область.*

Твердження 3. *Нехай R – майже ω–евклідова область і $S \subset R$ мультиплікативно замкнена множина. Тоді $S^{-1}R$ – майже ω–евклідова область.*

Твердження 4. *Нехай D – майже ω–евклідова область цілісності, Q – поле часток. Тоді $R = D + xQ[[x]]$ – майже ω–евклідова область.*

1. *Anderson D. D., Zafrullah M.* Almost Bezout domains // J. Algebra. – 1991. – **142**. – P. 285–309.
2. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Eclideans // These de Docteur Troisieme Cycle, 1976. – 67 p.
3. *Salce L., Zanardo P.* Products of elementary and idempotent matrices over integral domains // Linear Algebra Appl. – 2014. – **452**. – P. 130–152.

4. *Samuel P.* About Euclidean Rings // J. Algebra – 1971. – **19**. – P. 282–301.

ABOUT ALMOST ω-EUCLIDEAN DOMAINS

In the given paper the concept of almost ω-euclidean domain. It is show that commutative almost ω-euclidean domain is almost Bezout domain. Proved that $R = D + xQ[[x]]$ is almost ω-euclidean domain, where D be an almost ω-euclidean integral domain, Q its field of fractions and x an indeterminate.

УДК 512.4

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ОДНОГІЛКОВИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ КРИВИХ

Руслан Скуратовський

Міжрегіональна Академія управління персоналом

rqout@ukr.net

Встановлено необхідні і достатні умови того, що плоска особливість алгебраїчної кривої з одною гілкою має як максимум двопараметричні сімейства ідеалів. Нагадаємо, що плоска особливість алгебричної кривої над полем k – це k-алгебра вигляду $R = k\left[\left[x, y\right]\right] / \left(f\right)$. Вона зветься одногілковою, якщо R не має дільників нуля. Кажуть, що R домінує особливість R', якщо $R \supseteq R'$.

Теорема. *Нехай* R *є одногілковою особливістю. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) R *має як максимум двопараметричні сімейства ідеалів.*

2) Якщо $\operatorname{char} k \neq 2$*, то* R *домінує одну з наступних особливостей:*

$$E_{30},\, E_{32}, W_{24}, W^{\#}_{2*}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}\,;$$

2a) Якщо $\operatorname{char} k = 2$*, то* R *домінує одну з наступних особливостей:*

$$E_{30},\, E_{32}, W_{18}, W^{\#}_{1,*}, N_{20}, N_{24}\,.$$

1. *Skuratovskii R. V.* Ideals of one branch curve singularities of type W // UMJ – 2010. – **62**, No. 4. – P. 530–536.
2. *Drozd Y. A., Skuratovskii R. V.* Cubic rings and their ideals // UMJ – 2010. – **62**, № 11– P .464–470. (in Ukranian)
3. *Drozd Y., Skuratovskii R.* One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideal // Algebra and Discrete Math. – 2012. – **13**, no. 2. – P. 209–219.

ONE BRANCH CURVE SINGULARITIES WITH AT MOST 2-PARAMETER FAMILIES OF IDEALS

Sufficient and necessary conditions of possessing of one branch curve singularities at most 2-parameter families of ideals were researched.

УДК 512.547.25

ДЕЯКІ НЕРОЗКЛАДНІ МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЦИКЛІЧНОЇ *p*-ГРУПИ НАД ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

Олександр Тилищак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Ужгородський національний університет

alxtlk@gmail.com

Добре відомо, що у випадку, коли характеристика p поля ділить порядок скінченної групи, група має скінченне число нерозкладних зображень (з точністю до еквівалентності) тоді і тільки тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. Проблема класифікації всіх нерозкладних зображень над полем розглядається в [1]. Нехай $G=\langle a\rangle$ – циклічна p-група, K – комутативне локальне кільце характеристики p, радикал якого tK, $t^l=0$, $t^{l-1}\neq 0$, $l>1$, E – одинична матриця порядку n, $0\le s_i<l$ і ε_i – оборотні елементи кільця K $(i=1,\ldots,n)$. Нескінченну серію нерозкладних матричних K-зображень груп G побудовано в [2]. Розглядаються відображення

$$\Gamma : a\to E+\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_n t^{s_n} \\ \varepsilon_1 t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1}t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

та з’ясовується коли вони є матричними K-зображеннями групи G, критерій їх нерозкладності та еквівалентності. Також обчислюється число зображень вигляду (1) з точністю до введеного відношення еквівалентності.

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
2. *Гудивок П. М., Чухрай І. Б.* Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної *p*-групи над комутативними локальними кільцями характеристики p^s // Наук. віс. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інф. – 2000. – Вип. 5. – С. 33–40.

SOME INDECOMPOSABLE MODULAR REPRESENTATIONS OF CYCLIC *p*-GROUP OVER LOCAL RINGS OF FINITE LENGTH

Some series of indecomposable modular representations of cyclic p-group over local rings of finite length has been constructed. The number of representations of this series up to given relation of equivalence has been calculated.

УДК 512.548

ОРТОГОНАЛЬНІ ДОПОВНЕННЯ БІНАРНИХ ОПЕРАЦІЙ

Ірина Фриз

Донецький національний університет імені Василя Стуса

iryna.fryz@ukr.net

Бінарна операція f, яка визначена на множині Q, називається *лівооборотною*, якщо рівняння $f(x,b)=c$ має єдиний розв'язок для будь-яких $b,c\in Q$ і *правооборотною*, якщо рівняння $f(a,y)=c$ має єдиний розв'язок для будь-яких $a,c\in Q$. Операція f називається *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона ліво і правооборотна одночасно.

Через ${}^{\sigma}f$ будемо позначати σ-парастроф операції f, який визначається співвідношенням

$$ {}^{\sigma}f(x_{1\sigma},x_{2\sigma})=x_{3\sigma} :\leftrightarrow\ f(x_1,x_2)=x_3, $$

де $\sigma\in S_3:=\{\varepsilon,s,l,r,sl,sr\}$ і ε є тотожньою перестановкою, $s:=(12)$, $l:=(13)$, $r:=(23)$.

Нагадаємо, що дві бінарні операції g і h, які визначені на множині Q, називаються *ортогональними*, якщо для будь-яких $a,b\in Q$ система

$$ \begin{cases} g(x,y)=a, \\ h(x,y)=b \end{cases} $$

має єдиний розв'язок.

Підстановка φ множини Q називається *повною* для квазігрупи h, якщо відображення φ', яке визначається рівністю

$$ \varphi' x := h(x,\varphi x), $$

також є підстановкою множини Q.

Ортогональним доповненням операції g називається така операція h, що операції g і h є ортогональними.

Проблема існування та знаходження ортогональних доповнень є найбільш дослідженою для бінарних квазігруп. Доведено, що кожна квазігрупа має ортогональне доповнення, яке є не обов'язково квазігруповим [1]; квазігрупа має ортогональне квазігрупове доповнення тоді і тільки тоді, коли вона є цілком допустимою [1]; операція має ортогональне доповнення тоді і тільки тоді, коли вона є повною [2]. Деякі уточнення цих результатів представлено у [3].

Теорема 1. *Квазігрупа* h *є ортогональним доповненням квазігрупи* f *тоді і тільки тоді, коли всі праві трансляції квазігрупи* ${}^r f$ *є повними підстановками для* h .

Розглянемо методи знаходження ортогональних доповнень операції, які випливають із праці [2]. Щоб знайти доповнення за цими методами достатньо, щоб операція була оборотною на одному місці.

Теорема 2. *Якщо* f_1 *є лівооборотною і* f_2 *є правооборотною, то операції* g_1 *і* g_2*, які побудовані за формулами*

$$\begin{cases} g_1(x,y) = f_1(x,y), \\ g_2(x,y) = f_2(f_1(x,y),y), \end{cases}$$

є ортогональними.

Теорема 3. *Якщо* f_1 *є правооборотною і* f_2 *є лівооборотною, то операції* g_1 *і* g_2*, які побудовані за формулами*

$$\begin{cases} g_1(x,y) = f_1(x,y), \\ g_2(x,y) = f_2(x, f_1(x,y)), \end{cases}$$

є ортогональними.

Метод побудови, який визначається формулами (1), називатимемо *лівим рекурсивним алгоритмом*, а метод побудови, який визначається формулами (2), називатимемо *правим рекурсивним алгоритмом*.

Наслідок 1. *Пара ортогональних операцій є побудовною за лівим (правим) рекурсивним алгоритмом тоді і тільки тоді, коли принаймні одна із ортогональних операцій є ліво(право) оборотною.*

Приклад. Усі повні бінарні булеві операції є ліво або правооборотними. Кожна із цих операцій має чотири ортогональні доповнення відповідно до теореми 1 і теореми 2. До того ж, кожне із цих доповнень є побудовним за лівим або правим рекурсивним алгоритмом.

Теорема 4. *Дві впорядковані пари ортогональних операцій, одна з яких є побудовною за лівим рекурсивним алгоритмом, а інша – за правим рекурсивним алгоритмом, є* s*-парастрофними тоді і тільки тоді, коли вхідні пари операцій є* s*-парастрофними.*

1. *Keedwell A. D., Denes J.* Latin Squares and their Applications, second edition. – Amsterdam: North Holland, 2015. – 440 p.

2. *Belyavskaya G., Mullen G. L.* Orthogonal hypercubes and *n*-ary operations // Quasigroups Related Systems. – 2005. – **13**, № 1. – P. 73–86.
3. *Фриз І. В.* Про побудову *n*-арних квазігруп // Вісник ДонНУ, Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1-2. – С. 89–96.

ORTHOGONAL COMPLEMENTS FOR BINARY OPERATIONS

Every quasigroup is known to have an orthogonal complement. If the quasigroup is admissible, then it has an orthogonal quasigroup complement. Here, the specified criterion is given. The methods for orthogonal complementing of an operation are considered.

УДК 512.64

УТОЧНЕНА ТРИКУТНА ФОРМА 3×3-МАТРИЦЬ З ОДНИМ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМ КОРЕНЕМ У КЛАСІ НАПІВСКАЛЯРНО ЕКВІВАЛЕНТНИХ МАТРИЦЬ

Богдан Шаваровський

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

bshavarovskii@gmail.com

Відомо [1], що поліноміальні матриці, які переводяться одна в одну множенням зліва і справа відповідно на числову неособливу і поліноміальну оборотну матриці, називаються *напівскалярно еквівалентними*. Встановлена в [1] трикутна форма відносно вказаної еквівалентності визначаться неоднозначно. Тому питання класифікації матриць стосовно такої еквівалентності є відкритим. В [2] знайдені умови напівскалярної еквівалентності 2×2-матриць. У цьому повідомленні уточнена трикутна форма для одного класу 3×3-матриць і вказані її інваріанти щодо напівскалярно еквівалентних пертворень.

Нехай $F(x) \in M(3, \mathbf{C}[x])$. Обмежимся випадком, коли $\det F(x)$ має лише один корінь. Без обмеження загальності вважатимемо його нульовим, а перший інваріантний множник матриці $F(x)$ – одиничним. Можна довести, що у класі напівскалярно еквівалентних матриць $\{PF(x)Q(x)\}$ існує матриця вигляду

$$G(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1(x) & x^{k_1} & 0 \\ g_3(x) & g_2(x) & x^{k_2} \end{Vmatrix},$$

де $\deg g_1 < k_1$, $\deg g_2, \deg g_3 < k_2$, $g_1(0) = g_3(0) = 0$, $g_2(x) = x^{k_1}, g_2'(x) = 0$, $g_2'(0) = 0$.

Твердження. НСД $(g_1(x), g_3(x), x^{k_1})$, $(g_2(x), g_3(x), x^{k_2})$ *є інваріантами* $G(x)$ *у класі напівскалярно еквівалентних матриць.*

Молодшим степенем полінома $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, $f(x) \neq 0$, назвемо найнижчий степінь монома (з ненульовим коефіцієнтом) цього монома. Позначення:

$co\deg f$. Моном степеня $co\deg f$ назвемо *молодшим членом*, а його коефіцієнт – *молодшим коефіцієнтом* полінома $f(x)$. Молодший степінь полінома $f(x)=0$ позначатимемо символом $+\infty$.

Доводиться, що $G(x)$ в класі $\{PF(x)Q(x)\}$ можна вибрати з умовами $co\deg g_3 \neq co\deg g_1$, $co\deg g_3 \neq co\deg g_2'$, якщо $co\deg g_3 < co\deg g_2$. Якщо $co\deg g_3 \geq co\deg g_2$, то в $\{PF(x)Q(x)\}$ існує $G(x)$ така, що $co\deg g_3 \neq 2co\deg g_1 + co\deg g_2'$ і в $g_1(x)$ відсутній моном степеня $2co\deg g_1$. Крім цього, якщо $g_1(x), g_2(x) \neq 0$, то можемо вважати молодші коефіцієнти в $g_1(x), g_2(x)$ одиничними. Якщо ж один із поліномів $g_1(x), g_2(x)$ є тотожній нуль, то вважаємо молодші коефіцієнти ненульових піддіагональних елементів матриці $G(x)$ одиничними. Таку матрицю $G(x)$ називатимемо *зведеною*. Вказано метод побудови для довільної $F(x)$ зведеної матриці. Розроблено алгоритм побудови перетворювальних матриць.

Теорема. *У зведеній матриці* $G(x)$ *наступні величини* $co\deg g_1$, $co\deg g_2$, $co\deg g_3$, *а також* $co\deg(g_1(x)g_2'(x) - g_3(x))$, *якщо* $co\deg(g_1(x)g_2'(x) - g_3(x)) < k_2 - k_1$, *є інваріанттами відносно напівскалярно еквівалентних перетворень.*

Наслідок. *Тотожна рівність нулеві кожного з піддіагональних елемента зведеної матриці є інваріантом відносно напівскалярної еквівалентності.*

Отримані результати можна використати в задачі класифікації скінченних наборів числових матриць з точністю до подібності та при розв'язуванні матричних різнобічних рівнянь над кільцем поліномів.

1. *Казімірський П. С, Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ: Наукова думка, 1977. – С. 61–66.
2. *Shavarovskii B. Z.* Toeplitz Matrices in the Problem of Semiscalar Equivalence of Second-Order Polynomial Matrices // International Journal of Analysis. – 2017. –Vol. 2017. – Article ID 6701078, 14 pages.

IMPROVED TRIANGULAR FORM OF THE 3-BY-3-MATRICES WITH ONE CHARACTERISTIC ROOT IN THE CLASS OF SEMISCALARLY EQUIVALENT MATRICES

In this report the semiscalar equivalence of polynomial matrices of three-order is investigated. In particular, the systems of invariants of reduced matrices have been found.

УДК 512.547.2

ПРО МОДУЛЯРНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ

Ігор Шапочка

Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет»

ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua

Нами вивчаються деякі модулярні зображень знакозмінної групи степеня 4, з точністю до, так званої, узагальненої еквівалентності. Термін «узагальнена еквівалентність зображень» був введений у роботі [1]. Нагадаємо матричні зображення $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ і $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ скінченної групи G над деяким полем F натурального степеня n називаються узагальнено еквівалентними, якщо існують автоморфізм φ групи G та оборотна матриця C з повної лінійної групи $\mathrm{GL}(n, F)$ такі, що

$$C^{-1}\Gamma(g)C = \Delta(\varphi(g))$$

для довільного елемента g групи G.

Нехай A_4 — знакозмінна група степеня 4, а $\mathbb{F}_2$ — поле Галуа характеристики 2. В [2] описані з точністю до еквівалентності всі нерозкладні матричні зображення групи A_4 над полем $\mathbb{F}_2$. Використовуючи роботу [2], нами доведено наступну теорему

Теорема. *Нерозкладні матричні зображення* $\Gamma{:}A_4 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)$ *і* $\Delta{:}A_4 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)$ *знакозмінної групи* A_4 *над полем Галуа* $\mathbb{F}_2$ *є узагальнено еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони є еквівалентними зображеннями.*

1. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские *p*-группы и целочисленные *p*-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №26. – С. 742–753.
2. *Dlab V., Ringel C. M.* On modular representations of A_4 // Journal of Algebra. – 1989. – **123**. – P. 506–522.

ON MODULAR MATRIX REPRESENTATIONS OF ALTERNATING GROUP OF DEGREE FOUR

We study the so-called weak equivalence of modular matrix representations of alternating group of degree four over a Galois field of characteristic 2.

УДК 512.554.31

ПРО МАКСИМАЛЬНІ ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНІ ПІДАЛГЕБРИ ЛІ $W_3(K)$

Ольга Шевчик

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Oshev4ik@gmail.com

Нехай K – довільне поле характеристики нуль і $A = K[x_1, x_2, x_3]$ – кільце многочленів над K. Алгебра Лі $W_3(K) = Der_K A$ всіх K-диференціювань алгебри A містить трикутну підалгебру $u_3(K)$, яка складається з диференціювань вигляду $D = f_1(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + f_3\frac{\partial}{\partial x_3}$, $f_3 \in \mathrm{K}$.

Алгебра Лі $u_3(K)$ локально нільпотентна, але не нільпотентна (див. [1]), її будова і вкладення в $W_3(K)$ представляють значний інтерес, оскільки елементи із $u_3(K)$ визначають автоморфізми кільця многочленів $K[x_1, x_2, x_3]$. В роботі доведено, що $u_3(K)$ є максимальною (за включенням) локально нільпотентною підалгеброю із $W_3(K)$ (зауважимо, що нільпотентні і локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань вивчалися в роботах [2-4]). Також побудована ще одна максимальна локально нільпотентна підалгебра $s_3(K)$ із $W_3(K)$, яка містить не локально нільпотентні диференціювання алгебри A і тому не є спряженою з $u_3(K)$. Як наслідок, використовуючи попередні результати в цьому напрямі, доведено, що кожна максимальна (за включенням) локально нільпотентна підалгебра L рангу 3 над A з $\dim_K L > 3$ ізоморфна або $u_3(K)$ або $s_3(K)$.

1. *Bavula V.* Lie algebras of triangular polymomial derivations and an isomorphism criterion for their factor algebras // Izv. RAN. Ser.Mat. – 2013. – **77**, is. 6. – P. 3–44.
2. *Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A. P.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations // Journal of Algebra. – 2014. – **401**. – P. 245–257.
3. *Петравчук А. П., Сисак К. Я.* Про локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань комутативних кілець // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Серія Математика і інформатика. – 2016. – **29**, Вип. 2. – С. 97–103.

4. *Petravchuk A. P., Shevchyk O. M., Sysak K. Ya.* On locally nilpotent Lie algebras of derivations of integral domains //Appl. Problems of Mech. and Math. – 2017. – **15**. – P. 7–15.

ON MAXIMAL LOCALLY NILPOTENT SUBALGEBRAS OF THE LIE ALGEBRA W_3(K)

Let K be a field of characteristic zero, $A = K\left[x_1, x_2, x_3\right]$ the polynomial ring and $W_3(K) = Der_K A$ the Lie algebra of all derivations of the ring A. We prove that the triangular subalgebra $u_3(K)$ of the Lie algebra is a maximal locally nilpotent subalgebra in $W_3(K)$. An another maximal locally nilpotent subalgebra $s_3(K)$ is pointed out and it is proved that every maximal locally nilpotent subalgebra of rank 3 over A is isomorphic either to $u_3(K)$ or to $s_3(K)$.

UDC 512.64 + 512.56

ON COEFFICIENTS OF TRANSITIVENESS OF POSETS CRITICAL WITH RESPECT TO THE POSITIVITY OF THE QUADRATIC TITS FORM

Vitaliy Bondarenko, Maryna Styopochkina

Institute of Mathematics of NAN of Ukraine,
Zhytomyr National University of Agriculture and Ecology

vit-bond@imath.kiev.ua, StMar@ukr.net

The quadratic Tits form, introduced by P. Gabriel for a finite quiver, is naturally generalized to a finite poset $0 \notin S$:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i \,.$$

In [1] it is introduced the notion of *P*-critical posets as posets critical with respect to the positivity of the quadratic Tits form. So the *P*-critical posets are analogs of the extended Dynkin diagrams. All such posets are classified in [1].

We study combinatorial properties of *P*-critical posets.

Let S be a finite poset and $S_<^2 := \{(x,y) \mid x, y \in S, x < y\}$. If $(x,y) \in S_<^2$ and there is no z satisfying $x < z < y$, then one says that x and y are neighboring. We put $n_w = n_w(S) := \left|S_<^2\right|$ and denote by $n_e = n_e(S)$ the number of pairs of neighboring elements. On the language of the Hasse diagram $H(S)$ (that represents S in the plane), n_e is equal to the number of all its edges and n_w to the number of all its paths, up to parallelity, going bottom-up (two path is called parallel if they start and terminate at the same vertices). The ratio $k_t = k_t(S)$ of the numbers $n_w - n_e$ and n_w we call the coefficient of transitiveness of S. If $n_w = 0$ (then $n_e = 0$), we assume $k_t = 0$.

An element of a poset T is called nodal, if it is comparable with all elements of T. Obviously, each element of T is nodal iff T is a chain. It follows from the results of [2] that any *P*-critical poset S is uniquely represented in the form $S = S_0^- \cup S_1 \cup S_0^+$ where S_0^-, S_0^+ are chains (maybe empty), S_1 does not contain nodal elements and $S_0^- < S_1 < S_0^+$ ($X < Y$ means that $x < y$ for any $x \in X, y \in Y$). Then $S_0 = S_0^- \cup S_{.0}^+$ is the set of all nodal elements of S.

We calculate the coefficients of transitiveness k_t for each of the 75 critical posets (see the list in [2]). All the coefficients are written up to the second decimal place.

Theorem 1. *The following holds for P-critical posets 1 – 75* :

N	k_t	N	k_t	N	k_t	N	k_t	N	k_t
1	0,00	16	0,61	31	0,00	46	0,63	61	0,42
2	0,50	17	0,61	32	0,33	47	0,60	62	0,53
3	0,55	18	0,53	33	0,29	48	0,50	63	0,65
4	0,45	19	0,53	34	0,00	49	0,57	64	0,59
5	0,67	20	0,50	35	0,33	50	0,50	65	0,42
6	0,61	21	0,68	36	0,58	51	0,45	66	0,36
7	0,57	22	0,64	37	0,50	52	0,36	67	0,61
8	0,50	23	0,64	38	0,38	53	0,40	68	0,56
9	0,50	24	0,64	39	0,40	54	0,33	69	0,46
10	0,73	25	0,64	40	0,40	55	0,56	70	0,38
11	0,69	26	0,58	41	0,25	56	0,46	71	0,30
12	0,69	27	0,58	42	0,55	57	0,42	72	0,53
13	0,70	28	0,50	43	0,68	58	0,50	73	0,43
14	0,65	29	0,47	44	0,63	59	0,36	74	0,38
15	0,67	30	0,00	45	0,63	60	0,46	75	0,00

Theorem 2. *Let* S *be a P-critical poset. Then the following conditions are equivalent:*

a) $k_t(S) \geq k_t(T)$ *for any P-critical poset T;*

b) $|S_0| \geq |T_0|$ *for any P-critical poset* T *, and* S_0^- *or* S_0^+ *is empty.*

1. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. Problems of Analysis and Algebra. – 2005. – **2**, No. 3. – P. 18–58 (in Russian).

ПРО КОЕФІЦІЄНТИ ТРАНЗИТИВНОСТІ Ч. В. МНОЖИН, КРИТИЧНИХ ВІДНОСНО ДОДАТНОСТІ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ТІТСА

Ми вводимо інваріант скінченної ч. в. множини, названий коефіцієнтом транзитивності, і обчислюємо його для всіх P-критичних ч. в. множин.

UDC 512.54

INTEGRAL GROUP RING OF THE SUZUKI SPORADIC SIMPLE GROUP

Victor Bovdi

United Arab Emirates University; Al Ain, United Arab Emirates

vbovdi@math.klte.hu

Using the Luthar–Passi method, we investigate the classical Zassenhaus conjecture for the normalized unit group of the integral group ring of the Suzuki sporadic simple group Suz. As a consequence, for this group we confirm the Kimmerle's conjecture on prime graphs.

UDC 519.41/47

ON SHUNKOV GROUPS WITH COMPLEMENTED NON-ABELIAN SUBGROUPS

Nikolay Chernikov

Institute of mathematics of NAS of Ukraine

chern@imath.kiev.ua

The known Theorem of P. P. Baryshovets [1, 2] gives a description of the locally finite non-abelian groups with complemented non-abelian subgroups. Further, remind that the group G is called Shunkov, if for each its finite subgroup K every subgroup of the factor group $N_G(K)/K$, generated by two conjugate elements of prime order, is finite (V. D. Mazurov, 1998). The class of periodic Shunkov groups is wide and includes, for instance, all binary and locally finite groups, all 2-groups. The following new proposition holds.

Theorem (N. S. Chernikov, 2018). *Non-abelian periodic Shunkov groups with complemented non-abelian subgroups are locally finite.*

1. *Baryshovets P. P.* On infinite groups with complemented non-abelian subgroups // UMJ – 2013. – **65**, № 11. – P. 1443–1455 (in Russian).
2. *Baryshovets P. P.* Infinite groups with complemented non-abelian subgroups // Ukrain. Mat. Zh. – 2015. – **67**, № 4. – P. 447–455 (in Russian).

ПРО ГРУПИ ШУНКОВА З ДОПОВНЮВАНИМИ НЕАБЕЛЕВИМИ ПІДГРУПАМИ

Наведено нову теорему автора про локальну скінченність деяких періодичних груп Шункова.

UDC 539.3

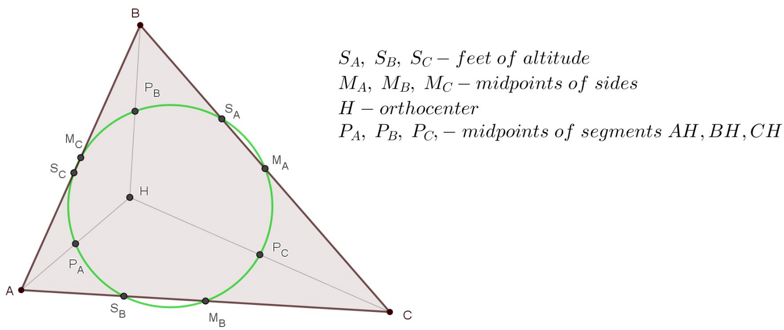
TWELVE-POINT SPHERE

Ilona Drzymała

Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków, Poland

drzymala.ilona@gmail.com

In 1822 Karl Wilhelm Feuerbach proved that feet of altitudes and midpoints of sides in a triangle lie on one circle. It was later proved that three other special points also lie on this circle, which we now call nine-point circle. It has many nice properties and generalizations.



For instance, consider a three-dimensional counterpart of a triangle, a tetrahedron. It seems there must be a sphere that corresponds to nine-point circle. Let us consider an orthogonal tetrahedron. It can be proved that the centers of gravity of its faces, the orthocenters of each face and the points dividing segments from orthocenter of the tetrahedron to vertices in the ratio 1:2 belong to one sphere. We call it twelve-point sphere. One of the proofs is to use a homothetic transformation.

1. *Coxeter H.* Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, Warszawa 1967.
2. *Kieza M.* Okrąg dziewięciu punktów i pewne dwa fakty// http://www.deltami.edu.pl (27.03.2018).
3. *Ślęzak M., Tkacz M.* Sfera dwunastu punktów // Koktajl matematyczny, czyli… uczniowie piszą matematykę. – Kraków: Wydawnictwo Szkolne Omega, 1999.

СФЕРА ДВАНАДЦЯТИ ТОЧОК.

В 1822 р. Карл Вільгельм Фейербах довів, що основи висот та середини сторін трикутника належать одному колу. Пізніше було доведено, що три інші спеціальні точки також лежать на тому ж колі, яке ми тепер називаємо колом дев'яти точок. Воно має багато цікавих властивостей і узагальнень.

Наприклад, розглянемо, тривимірний аналог трикутника, тетраедр. Здається, що повинна бути куля, яка відповідає колу дев'яти точок. Розглянемо ортогональний тетраедр. Може бути доведено, що центри масс та ортоцентри граней і точки, що ділять відрізків, які з'єднують ортоцентр тетраедра з вершинами у співвідношенні 1:2, належать до однієї сфери. Ми назвємо її сферою дванадцяти точок. Одне з доведень цього факту використовує гомотетичну трансформацію.

UDC 539.3

GEOMETRY IN MUSIC?

Paulina Fraś

34-143 Lanckorona, Lanckorona 623, Poland

paulinka77710@gmail.com

The paper tries to explore the common ground between mathematics and art, more specifically music.

It has been repeatedly shown that mathematics is connected with the wide range of phenomenon dealt by science and informatics. We can also use mathematic methods to study nature and biology. But does mathematics, or more specifically geometry, have anything to do with music? Is it possible to connect these seemingly different branches in any consistent way? Is it possible to overcome the differences between them resulting for example from using distinct languages and specific sets of symbols and signs?

The main goal of this presentation will be to show various similarities between these two areas. The core analysis will show several examples of how patterns found in music can be studied and described with the use of strictly mathematical terms. Among other interesting examples, the argument will milarities between these two areas include a fascinating description of a musical piece by one of the Viennese classics carried out in the language of geometry. What is more, a close look at the pattern used by that piece of music will lead us to the conclusion that the composer must have used those mathematical properties in a very conscious way.

1. *Gołąb Maciej.* Dodekafonia. – Bydgoszcz: wyd. Pomorze, 1987.
2. *Kordos Marek.* Wykłady z historii matematyki – Warszawa: WSiP, 1994.
3. *James Jeans*. Science and Music. – Dover, 1968. – 155 p.

ГЕОМЕТРІЯ В МУЗИЦІ?

У роботі досліджується загальна межа між математикою та мистецтвом, а саме музикою.

Неодноразово доведено, що математика пов'язана з широким спектром явищ, що розглядаються наукою та інформатикою. Ми також можемо використовувати математичні методи вивчення природи та біології. Але чи має математика, а точніше геометрія, щось спільне із музикою? Чи можна послідовно поєднати ці, здавалося б, різні напрямки? Чи можна подолати розбіжності між ними в результаті, наприклад, використання різних мов та специфічних наборів символів та знаків?

Головна мета цієї презентації – показати подібності між цими двома напрямками. Грунтовний аналіз покаже кілька прикладів того, як можна *досліджувати та описати в музиці закономірності з використанням чітких математичних термінів. Серед інших цікавих прикладів, як аргумент, буде захоплюючий опис музичного твору однгог з віденських класиків, виконананий на мові геометрії. Більше того, уважний перегляд моделі, використовуваної цим музичним твором, приведе нас до висновку, що композитор повинен цілком свідомо використовувати ці математичні властивості.*

UDC 539.3

DESCARTES' METHOD OF DIVIDING AN ANGLE

Marta Giza

Institute of Mathematics, Pedagogical University of Cracow, Poland

mrtgiza@gmail.com

In 1637 René Descartes trisected an angle using a compass, a ruler and a given parabola $y = x^2$. Descartes claimed that we can similarly divide an angle into five equal parts.

During my presentation I will present Descartes' method of angle trisection and my results of finding formula (maybe an algorithm, beacause a formula is trivial) to divide an angle into an odd number of parts.

1. *Błaszczyk P., Mrówka K.,* Kartezjusz GEOMETRIA. – Kraków: Universitas, 2016.

UDC 539.3

CONFIGURATIONS OF LINES IN THE PROJECTIVE PLANE

Małgorzata Gołąb

Institute of Mathematic, Pedagogical University of Cracow, Kraków, Poland

malgoska.golab@gmail.com

We shall consider configurations of lines in the projective plane. We shall focus on the maximum and minimum number of points determined as intersection points by a given number of lines. The main theme will be the Erdős - de Bruijn theorem in the dual version. It has been published in the article "On a combinatorial problem". The problem presented by these mathematicians was uttered as a combinatorial theorem about sets and points of their elements. Only as a remark, the authors proposed to identify elements with points and sets with lines of the projection plane. We shall show that this result and the duality in the projective geometry leads to the dual version of the Erdős - de Bruijn theorem.

Next, we shall focus on configurations in the real projective plane. We shall look for lower bounds on the number of points determined by n lines, not all in a pencil and not a quasi-pencil. Finaly we shall present lower bounds on the number of a points in arrangements satisfying some assumptions. This result is a sharpened version of the dual of the classical theorem of Erdős and de Bruijn.

I think there is a sense to state your own results a bit more concretely.

1. *de Bruijn N. G., Erdős P.* On a combinatorial problem // Indagationes Mathematicae. – 1948. – **10**. – P. 421–423.
2. *Kelly L. M., Mosser W. O. J.* On the number of ordinary lines determined by n points // Canad. J. Math. – 1958. – **10**. – P. 210–219.
3. *Klee V., Wagon S.* Old and new unsolved problems in Plane Geometry and number theory // The Mathematical Association os America. – 1991. –P. 29–35.

UDC 539.3

LINE ARRANGEMENTS, PSEUDOLINE ARRANGEMENTS AND BÖRÖCZKY CONFIGURATIONS FROM THE FEW POINTS OF VIEW

Jakub Kabat

Institute of Mathematics, Pedagogical University of Cracow, Poland

xxkabat@gmail.com

In the talk we will remind a family of examples of the line arrangements called Böröczky configurations and present some pseudoline arrangements. The connection of Böröczky configurations of lines and pseudoline arrangements will be also presented.

1. *Bokowski J., Pokora P.* On the Sylvester-Gallai and the orchard problem for pseudoline arrangements // Periodica Math. Hungarica.
2. *Furedi Z., Palasti I.* Arrangements of lines with a large number of triangles // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **92**, N 4. –P. 561–566.

UDC 512.4

MODULES WITH BOOLEAN LATTICES OF RADICAL FILTERS

Yuriy Maturin

Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University

yuriy_maturin@hotmail.com

All rings are considered to be associative with $1 \neq 0$. Let R be a ring and let M be a left R-module. Let $Gen(M)$ be a class of all R-modules K for which there exists an exact sequence

$$M^{(A)} \to K \to 0$$

for some set A.

Let E be some non-empty collection of submodules of M. We consider the following conditions:

(1) $L \in E \,\&\, L \leq N \leq M \Rightarrow N \in E$;

(2) $L \in E \,\&\, f \in End(M) \Rightarrow f^{-1}(L) \in E$;

(3) $N \in E, N \in Gen(M) \,\&\, L \leq N \leq M \,\&\, (\forall g \in Hom(M,N) : g^{-1}(L) \in E)$
$\Rightarrow L \in E.$

A collection E satisfying conditions (1), (2), (3) is called a radical filter of M.

Theorem. *For a semisimple module M with a finite number of homogeneous components the poset of all its radical filters is a Boolean lattice if and only if M is finitely generated.*

MODULES WITH BOOLEAN LATTICES OF RADICAL FILTERS

Radical filters in modules are considered. Classes of modules with Boolean lattices of radical filters are given.

УДК 512.715, 512.554.31

NILPOTENT MODULES OVER POLYNOMIAL RINGS

Anatoliy Petravchuk, Yevhenii Chapovskyi

Taras Shevchenko National University of Kyiv

apetrav@gmail.com, safemacc@gmail.com

Let $\mathbb{k}$ be an algebraically closed field of characteristic zero, $\mathbb{k}[X]$ the polynomial ring in n variables. The vector space $T_n = \mathbb{k}[X]$ is a $\mathbb{k}[X]$-module with the action $x_i v = v'_{x_i}$ for $v \in T_n$. Every finite dimensional submodule V of T_n is nilpotent, i.e. every $f \in \mathbb{k}[X]$ acts nilpotently on V.

$\mathbb{k}[X]$-modules are important because of numerous applications and have been extensively studied (see [3,4]). However, in case of higher dimensions their structure is quite complicated and their classification have been established to be a wild problem (see [2]). Putting a natural condition on modules to have a one-dimensional socle, i.e. to have the only minimal submodule of dimension one, the following result was obtained.

Theorem 1. *Every nilpotent* $\mathbb{k}[X]$*-module* V *of finite dimension over* $\mathbb{k}$ *with one-dimensional socle can be isomorphically embedded in the module* T_n.

The group of automorphisms of the module T_n and its finite dimensional monomial (i.e. spanned by monomials) submodules was found. In one dimensional case $\mathbb{k}[X]$-modules endomorphisms were studied in [1].

Theorem 2. *The algebra* $\operatorname{End} T_n$ *of* $\mathbb{k}[X]$*-module* T_n *is isomorphic to the algebra of formal power series in* n *variables* $\mathbb{k}[[X]]$*, hence* $\operatorname{Aut} T_n$ *is isomorphic to* $\mathbb{k}[[X]]^*$.

Theorem 3. *For a finite dimensional monomial submodule* $M \subset T_n$ *of dimension* m *the group* $Aut\,M$ *is isomorphic to a product* $\mathbb{k}^* \times \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{k}^+$*, where* $\mathbb{k}^+$ *denotes the additive group of the field* $\mathbb{k}$.

1. *Best P., Gualtieri M., Hayden P.,* Orbits of the centralizer of a linear operator // J. Lie Theory. – 2012. – Vol.4. – P. 1039–1048.

2. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space // Funkc. Anal. Prilozhen. 3. – 1969. – no.4. – P. 81-82.
3. *Quillen D.* Projective modules over polynomial rings // Invent. Math. –1976. – **36**. – P. 167–171.
4. *Suslin A.* Projective modules over polynomial rings are free, Translated in "Soviet Mathematics". – 1976. – 17(4). – P. 1160–1164.

NILPOTENT MODULES OVER POLYNOMIAL RINGS

Let $\Bbbk$ be an algebraically closed field of characteristic zero, $\Bbbk[X]$ the polynomial ring in n variables. The vector space $T_n = \Bbbk[X]$ is a $\Bbbk[X]$-module with the action $x_i v = v'_{x_i}$ for $v \in T_n$. Every finite dimensional submodule V of T_n is nilpotent, i.e. every $f \in \Bbbk[X]$ acts nilpotently on V. We prove that every nilpotent $\Bbbk[X]$-module V of finite dimension over $\Bbbk$ with one-dimensional socle can be isomorphically embedded in the module T_n. The group of automorphisms of the module T_n and its finite dimensional monomial submodules is found.

UDK 512.643

ON THE SIMILARITY OF MATRICES AB AND BA

Volodymyr Prokip

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

v.prokip@gmail.com

Let F be a field and let $F_{m,n}$ denote the set of $(m \times n)$ matrices with entries from F. In what follows that $GL(n,F)$ is the group of nonsingular matrices in $F_{n,n}$, I_n is the identity $(n \times n)$ matrix and $0_{m,n}$ is the zero $(m \times n)$ matrix.

Let $A, B \in F_{m,m}$. It is well known that the characteristic polynomials of matrices AB and BA are the same (see [1, 2]). If one of the matrices (A or B) is invertible, then AB and BA are similar. If both A and B are singular then AB and BA are not always similar. For singular matrices (over the field of rationl numbers) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ we have $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. It is obvious that matrices AB and BA are not similar.

In this report we investigate the following widely known question. Let $A, B \in F_{m,m}$ be singular matrices. When are matrices AB and BA similar? We give conditions under which AB and BA are similar. It may be noted that the problem of the similarity of matrices AB and BA has attracted the attention of many mathematicians (see [2–5] and references therein).

Let $A, B \in F_{m,m}$ be singular matrices and $\operatorname{rank} A = r < m$. For $A \in F_{m,m}$ there exist matrices $U, V \in GL(m,F)$ such that $UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,m-r} \end{bmatrix}$ (see [3]). Put $V^{-1}BU^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, where $B_{11} \in F_{r,r}$ and $B_{22} \in F_{m-r,m-r}$. In view of the above we give the following description of similarity of matrices AB and BA.

Proposition 1. *Let* $A, B \in F_{m,m}$ *be singular matrices and* $\operatorname{rank} A = r < m$. *If:*

1) $\det B_{11} \neq 0$ *, or*

2) $\operatorname{rank} B_{11} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,m-r} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B_{11} & 0_{r,m-r} \\ B_{21} & 0_{m-r,m-r} \end{bmatrix}$ *, or*

3) $B_{11} = 0_{r,r}$ *and* $\operatorname{rank} B_{12} = \operatorname{rank} B_{21}$ *, or*

4) $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0_{m-r,m-r} \end{bmatrix}$ *is the symmetric matrix,*

then matrices AB *and* BA *are similar.*

Below we describe the classes of pairs of singular matrices $A, B \in F_{m,m}$ for which matrices AB and BA are similar.

Proposition 2. *Let* $A, B \in F_{m,m}$ *be singular matrices. If* $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA = 1$*, then* AB *and* BA *are similar*.

Corollary 1. *Let* $A, B \in F_{m,m}$ *be singular matrices and* $\operatorname{rank} A = 1$. *If* $AB \neq 0_{m,m}$ *and* $BA \neq 0_{m,m}$*, then matrices* AB *and* BA *are similar.*

Proposition 3. *Let* $A, B \in F_{m,m}$ *be singular matrices and* $\operatorname{rank} A = 2$. *If* $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA$*, then* AB *and* BA *are similar*.

In view of the above statements we obtain

Theorem. *Let* $A, B \in F_{m,m}$ *be singular matrices and* $\operatorname{rank} A \leq 2$. *If* $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA$*, then* AB *and* BA *are similar*.

From the Theorem it follows

Corollary 2. *Let* $A, B \in F_{3,3}$. *Matrices* AB *and* BA *are similar if and only if* $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA$.

1. *Horn R. A., Johnson C. R*. Matrix analysis: Second edition – Cambridge university press, 2013. – 643 p.
2. *Flanders H*. Elementary divisors of AB and BA // Proc. Amer. Math. Soc. – 1951. – **2**. – P. 871–874.
3. *Thompson R. C.* On the matrices AB and BA // Linear Algebra Appl. – 1968. – **1**. – P.43–58.
4. *Lippert R. A., Strang G*. The Jordan forms of AB and BA // Electron. J. Linear Algebra. – 2009. – **18.** – P.281–288.
5. *Garcia S. R., Sherman D., Weiss G.* On the similarity of AB and BA for normal matrices // Linear Algebra Appl. – 2016. – **508**. – P.14–21.

ABOUT SIMILARITYOF MATRICES AB AND BA

Let A *and* B *be singular* $m \times m$ *matrices over a field. We give conditions under which matrices* AB *and* BA *are similar.*

УДК 512.536.7+512.568.2

ON FEEBLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL SEMILATTICE $\exp_n \lambda$

Oleksandra Sobol, Oleg Gutik

Ivan Franko National University of L'viv

o.yu.sobol@gmail.com

This research is a continuation of the papers [6-7]. We shall follow the terminology of [1-5, 8-9]. By $\mathfrak{D}(\omega)$ we denote an infinite countable discrete space. For an arbitrary non-zero cardinal λ and an arbitrary positive integer n we consider a set $\exp_n \lambda = \{A \subseteq \lambda : |A| \leq n\}$ endowed with the operation $\cap$, which makes this set a semilattice.

We recall that a topological space X is said to be

- ***totally countably pracompact,*** if there exists a dense subset D of the space X such that each sequence of points of the set D has a subsequence with the compact closure (in X);
- ***sequentially pracompact,*** if there exists a dense subset D of the space X such that each sequence of points of the set D has a convergent subsequence;
- ***feebly compact,*** if each locally finite open cover of X is finite;
- Y***-compact,*** where Y is a given topological space, if for any continuous map $f : X \to Y$ a set $f(X)$ is compact.

Theorem. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then for any shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent:*

i) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *is sequentially pracompact;*

ii) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *is totally countably pracompact;*

iii) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *is feebly compact;*

iv) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *is* $\mathfrak{D}(\omega)$*-compact.*

Corollary. *Let $\{(\exp_{n_i} \lambda_i, \tau_i), i \in I\}$ be a family of non-empty feebly compact T_1-semitopological semilattices. Then the Tychonoff product $\prod\{(\exp_{n_i} \lambda_i, \tau_i), i \in I\}$ is feebly compact.*

1. *Dorantes-Aldama A., Shakhmato D.* Selective sequential seudocompactness // Topology – 2017 – Appl. 222. – P. 53–69.
2. *Dow A., Porter J. R., Stephenson R. M., Woods R. G.* Spaces whose pseudocompact subspaces are closed subsets // Appl. Gen. Topol. – 2004. – 5. –P. 243–264.
3. *Engelking R.* General Topology, 2nd ed. – Berlin: Heldermann, 1989.
4. *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M. W., Scott D. S.* Continuous Lattices and Domains. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
5. *Gutik O., Ravsky A.* On old and new classes of feebly compact spaces // https://arxiv.org/abs/1804.07454.
6. *Gutik O., Sobol O.* On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$ // Mat. Stud. – 2016. – 46, N.1. – P. 29–43.
7. *Gutik O., Sobol O.* On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$ // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. –2016. – 82. – P. 128–136.
8. *Matveev M.* A survey of star covering properties. – Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
9. *Ruppert W.* Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory, Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1984.

ON FEEBLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL SEMILATTICE $\exp_n \lambda$

We study feebly compact shift-continuous topologies τ on the semilattice $(\exp_n \lambda, \cap)$. It is proved that for any shift-continuous T_1 -topology on τ the following conditions are equivalent: (i) τ is sequentially pracompact; (ii) τ is totally countably pracompact; (iii) τ is feebly compact; (iv) $(\exp_n \lambda, \tau)$ is $\mathfrak{D}(\omega)$-compact.

UDC 512.5

ABOUT ISOMORPHISM OF TOPOLOGICAL LINEAR QASIGROUPS ON REAL NUMBERS AND THEIR SUBQUASIGROUPS

Fedir Sokhatsky, Viktor Savchuk

Vasyl' Stus Donetsk National University,
Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine

fmsokha@ukr.net, savchukvd@ukr.net

An algebra $(\mathrm{Q};\circ,\overset{l}{\circ},\overset{r}{\circ})$ is called a *quasigroup* if it satisfies identities:

$$(x\circ y)\overset{l}{\circ} y = x,\quad (x\overset{l}{\circ} y)\circ y = x,\quad x\overset{r}{\circ}(x\circ y) = y,\quad x\circ(x\overset{r}{\circ} y) = y.$$

A quasigroup $(\mathrm{Q};\circ,\overset{l}{\circ},\overset{r}{\circ})$ is called: 1) *topological* in a space $(\mathrm{Q};\mathrm{T})$ if the operations $(\circ)$, $(\overset{l}{\circ})$, $(\overset{r}{\circ})$ are continuous; 2) *linear*, if there is a group $(\mathrm{Q};+)$, its automorphisms α, β and an element $a\in\mathrm{Q}$ such that $x\circ y := \alpha x+\beta y+a$.

Lemmas 12, 13 and Corollary 30 [3] imply an algorithm for describing the linear topological quasigroups on an arbitrary topological space $(\mathrm{Q};\mathrm{T})$, namely:

Step 1: Find the set $\mathcal{G}$ of all pairwise topologically non-isomorphic topological groups on $(\mathrm{Q};\mathrm{T})$.

Step 2: For each group $(\mathrm{Q};+)$ from $\mathcal{G}$ find the set $\mathrm{At}(\mathrm{Q};+)$ of all pairs of topological automorphisms of the group $(\mathrm{Q};+)$, which are not conjugated by topological automorphisms of $(\mathrm{Q};+)$. Recall that pairs (α,β) and (φ,ψ) of automorphisms of a group G are called conjugated, if there exists an automorphism θ of G such that $\alpha=\theta^{-1}\varphi\theta$, $\beta=\theta^{-1}\psi\theta$.

Step 3: For each pair (α,β) from $\mathrm{At}(\mathrm{Q};+)$ find the set $\mathrm{Iq}(\mathrm{Q};+;\alpha,\beta)$ of all non (α,β)-isoequal elements from Q.

Definition 1. [3] *Elements* $a,b\in\mathrm{Q}$ *are called* (α,β)*-isoequal, if quasigroups* $(\mathrm{Q};\circ)$, *where* $x\circ y := \alpha x+\beta y+a$, *and* $(\mathrm{Q};*)$, *where* $x*y := \alpha x+\beta y+b$, *are isomorphic.*

Lemma 1. [3] *Elements* a *and* b *of the group* $(Q;+)$ *are* (α,β)*-isoequal if and only if there exist an automorphism* θ *of the group* $(Q;+)$ *and element* $c \in Q$ *such that*

$$\theta\alpha = \alpha\theta, \qquad \theta\beta = \beta\theta, \qquad \theta b = (\alpha+\beta-\iota)(c)+a .$$

Let Φ be the set of all quintuples $(Q;+;\alpha,\beta,a)$ such that $(Q;+)$ belongs to $\mathcal{G}$, $(Q;+;\alpha,\beta)$ belongs to $\mathrm{At}\,(Q;+)$ and a belongs to $\mathrm{Iq}\,(Q;+;\alpha,\beta)$.

Theorem 2. *Each topological linear quasigroup on a space* $(Q;T)$ *is opologically isomorphic to exactly one quasigroup* $(Q;\circ)$, *where* $x \circ y := \alpha x + \beta y + a$, *for some* $(Q;+;\alpha,\beta,a)$ *from* Φ .

Theorem 3. *In the topological space of real numbers with the usual topology, each linear quasigroup is isomorphic to exactly one of the quasigroups* $(\mathbb{R};\circ)$, $(\mathbb{R};*)$, *where*

$$x \circ y = ax + by, \tag{1}$$

$$x * y = cx + (1-c)\,y + 1, \tag{2}$$

where a, b, c *are non-zero real numbers and moreover* $c \neq 1$.

Theorem 4. *A subset* $H \subseteq \mathbb{R}$ *is a subquasigroup of* $(\mathbb{R};\circ)$ *(see (1)) if and only if* H *is a subgroup of* $(\mathbb{R};+)$ *and* $aH = H$, $bH = H$. *A subset* $H \subseteq \mathbb{R}$ *is a subquasigroup of* $(\mathbb{R};*)$ *(see (2)) if and only if there exists a subgroup* $(G;+)$ *of* $(\mathbb{R};+)$ *and a number* $d \in \mathbb{R}$ *such that* $H := G + d$, $d \circ d \in H$ *and* $aG = G$, $bG = G$.

For example, a set H of integers is a subquasigroup of $(\mathbb{R};\circ)$ (see (1)), where a and b are integers, if and only if $H = m\mathbb{Z}$, where m is a common multiple of a and b.

1. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. I // Ukrainian mathematical journal. – 1995. – 47, No. 10. – P. 1387–1398.
2. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. II // Ukrainian mathematical journal. – 1995. – 47, No. 12. – P. 1692–1703.
3. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. III // Ukrainian mathematical journal. – 1996. – 48, No. 2. – P. 251–259.

UDC 512.5

ABOUT LINEARITY OVER COMMUTATIVE GROUPS

Fedir Sokhatsky, Olena Tarkovska

Vasyl' Stus Donetsk National University

fmsokha@ukr.net, tark.olena@gmail.com

An algebra $(Q;\circ,\overset{l}{\circ},\overset{r}{\circ})$ is called a *quasigroup* if it satisfies identities:

$$(x\circ y)\overset{l}{\circ} y = x, \quad (x\overset{l}{\circ} y)\circ y = x, \quad x\overset{r}{\circ}(x\circ y) = y, \quad x\circ(x\overset{r}{\circ} y) = y.$$

A groupoid $(Q;\bullet)$ is called an *isotope of a groupoid* $(Q';*)$ iff there exists a triple of bijections (δ,ν,γ) calling an *isotopism* such that $x\bullet y := \gamma(\delta^{-1}x * \nu^{-1}y)$ for all $x, y \in Q$. An isotope of a group is called a *group isotope*.

Let $(Q;\bullet)$ be a group isotope and 0 be an arbitrary element of Q, then the right part of the formula

$$x\bullet y = \alpha x + a + \beta y \tag{1}$$

is called a 0-canonical decomposition [2], if $(Q;+)$ is a group, 0 is its neutral element and $\alpha 0 = \beta 0 = 0$.

In this case: the element 0 is dening element; $(Q;+)$ decomposition group; a its free member; α its left or 2-coefficient; β its right or 1-coefficient; $\alpha\beta^{-1}$ is its middle or 3-coefficient. Briefly the canonical decomposition will be denoted by $(0,+,\alpha,\beta,a)$. In [2] it is proved that an arbitrary element b from a group isotope uniquely denes its *b-canonical decomposition.*

Definition. *An isotope of an Abelian group with a canonical decomposition (1) is called i-linear, if the i-coefficient is an automorphism of the decomposition group, where $i = 1,2,3$, i.e. right, left and middle linear respectively; linear, if it is i-linear for all $i = 1,2,3$.*

An i-linearity of an isotope of an Abelian group means that i-coefficient is an automorphism of the its decomposition group. For example, if an isotope is left linear, then left coefficient (2-coefficient) is an automorphism of the decomposition group.

Lemma 1. *Any two from left, right and middle linearities of an Abelian group isotope imply the third one.*

Theorem 2. *Let* $i \in \{1,2,3\}$ *and* $\sigma \in S_3$. *If an isotope of an Abelian group is i-linear, then its* σ*-parastrophe is* $i\sigma^{-1}$*-linear.*

Corollary 3. *Relationships among one-sided linearity of an isotope of an Abelian group and its parastrophes are given in the following table*:

Linearity	ι	l	r	s	sl	sr
left	left	left	middle	right	right	middle
right	right	middle	right	left	middle	left
middle	middle	right	left	middle	left	right

A variety of quasigroups is called *strictly* i*-linear* if all quasigroups from this variety are i-linear and at list one of them is not j-linear for some $j \neq i$.

Theorem 4. *The identity* $(xy \cdot u)v = (xv \cdot u)y$ *defines some variety of strictly left linear quasigroups. 2. The identity* $x(y \cdot uv) = u(y \cdot xv)$ *defines some variety of strictly right linear quasigroups. 3. The identity* $x(y \overset{r}{\cdot} uv) = u(vx \overset{l}{\cdot} y)$ *defines some variety of strictly middle linear quasigroups. These varieties are pairwise parastrophic.*

1. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. I // Ukrainian mathematical journal. – 1995. – 47, No. 10. – P. 1387–1398.
2. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. II // Ukrainian mathematical journal. – 1995. – 47, No. 12. – P. 1692–1703.
3. *Sokhatskii F. N.* On isotopes of groups. III // Ukrainian mathematical journal. – 1996. – 48, No. 2. – P. 251–259.

UDC 539.3

DE BRUIJN–ERDŐS THEOREM

Zuzanna Tuleja

Institute of Mathematic, Pedagogical University of Cracow, Poland

amizade@op.pl

We will consider the de Bruijn–Erdős theorem, originally published by Nicolaas de Bruijn and Paul Erdős in 1948 which lead us to genaral theorem about lower bound of the number of lines in a configuration of *n* points. The mathematicians were considering the minimal number of subsets which are generated by all elements of the original set (at specific assumptions). The conditions assume that the elements should be combined that each two are connected and no pair is in two different subsets at the same time. Although the proof given by de Bruijn and Erdős was combinatorial, they noticed that the analogous results are a consequence of the Sylvester–Gallai theorem on the real projective plane. Based on the theorem we will consider a lower bound on the number of lines determined by *n* points in a projective plane. We focus mainly the projective space over the real numbers. First we will consider de Bruijn-Erdos theorem, then various configurations of lines and points which satisfying some assumptions. Finally we will present the lower bound of the number of lines for configurations of points different from near-pencil and collinear points.

1. *de Bruijn N. G., Erdős P.* On a combinatorial problem // Indagationes Mathematicae. – 1948. – **10**. – P. 421–423.
2. *Kelly L. M., Mosser W. O. J.* On the number of ordinary lines determined by n points // Canad. J. Math. – 1958. – **10**. – P. 210–219.
3. *Klee V., Wagon S.* Old and new unsolved problems in Plane Geometry and number theory // The Mathematical Association os America. – 1991. – P. 29–35.

UDC 512.62

TESTING OF NUMERICAL COMPUTATIONS BY THE USE OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Feodor Vainstein

Texas A&M University, Texarkana, Texas, USA

fvainstein@tamut.edu, feodor.vainstein@gmail.com

Computation of numerical functions [1] is a very common sort of computations and therefore it is important to develop methods for testing these computations.

M. Blum [3,4] and F. Vainstein [2] proposed to use functional equations to test the programs and hardware computing numerical functions.

The method proposed by M. Blum can be demonstrated by the following example.

Suppose that we have to check the computation of the function $f(x) = \exp(x)$ at the point x. We randomly select a point y, compute $f(y)$ and $f(x+y)$, and then verify the computation using the formula $f(x+y) = f(x)f(y)$. Random selection of a point can be repeated several times thus increasing reliability of the testing.

The method proposed by F. Vainstein is similar, but it does not include randomly selected points. In his paper [2] he introduced definition of polynomially checkable (PC) functions – the functions for which functional equations are polynomials, and proved that the class of PC functions is large and includes many commonly used functions.

In this paper I am going to introduce a new definition of PC functions such that it will become possible to use randomly selected points. We also prove that under certain conditions, the functional equation will "uniquely" define the function that satisfies this equation.

It will be shown, that the class of polynomially checkable functions is very big and includes most of commonly used functions. For an analytical function that is not a polynomially checkable, a PC function can be found that will approximate this function with any given accuracy.

Computation of a PC can be verified the by checking if the addition theorem is satisfied similar to the example given above.

This method can be used not only for detection, but also for correction [4] of errors caused by both software and/or hardware faults. This approach does not depend on the form of representation or the specific features of the implementation of a program or a device computing the given function and, being implemented in hardware, results in substantial reduction of the hardware overhead required for multiple error detection and correction as compared to the check sum method or other methods previously known [6].

1. *Ward Cheney E., Kincaid David R.* Numerical Mathematics and Computing. 7th edition. – Brooks/Cole, 2015.
2. *Vainstein F. S.* Error Detection and Correction in Numerical Computations by Algebraic Methods. Lecture Notes in Computer Science 539. – Springer-Verlag, 1991.
3. *Blum M., Kannan S.* Designing Programs that Check their Work. // 21st ACM Symposium on Theory of Computing. – 1989. – P. 86–97.
4. *Blum M., Luby M., Rubinfeld R.* Self-Testing and Self-Correcting Programs with applications to Numerical Problems // 22nd ACM Symposium on Theory of Computing. – 1990. – P. 73–83.
5. *Vainstein F. S.* Low Redundancy Polynomial Checks for Numerical Computations // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. – 1996. – vol. 7, No. 6. –P. 439–447.
6. *Vainstein F. S.* Self-Testing Design Procedure for Numerical Computations // VLSI Design. – 1998. – vol. 5, No. 4. – P. 385–392.

UDC 539.3

C-SYMMETRIC OPERATORS

Anna Wicher

Institute of mathematics, Pedagogical university, Krakow, Poland

ania123wch@gmail.com

In this talk, I shall present the issue of reflexivity and transitivity of C-symmetric operators in a do you mean (in)finite-dimensonal final-dimension Hilbert space. C-symmetric operators are needed to describe physical phenomena. In the sense of mathematical description appeared in the work of S. R. Garcia and M. Putinar "Complex symmetric operators and applications", Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006). I shalldiscuss my own examples of C-symmetric operators and consider? their k-transitivity and reflexivity properties. The aim of my talk is a an application of C-symmetric operators in for a canonical involution in C^n.

.

1. *Azoff E. A.* On finite rank operators and preannihilators // American Mathematical Society.
2. *Klis-Garlicka K., Ptak M.* C-symmetric operators and reflexivity // Operators and Matrices. – 2015. – **9**, No. 1. – P. 225–232.

УДК 512.552.13

DIAGONAL REDUCTION OF MATRICES OVER COMMUTATIVE SEMIHEREDITARY BEZOUT RINGS

Bogdan Zabavsky, Andrii Gatalevych

Ivan Franko National University of Lviv

zabavskii@gmail.com, gatalevych@ukr.net

All rings considered will be commutative and have identity. Recently there has been some interest in the polynomial ring $R[x]$, where R is a von Newman regular ring. Such a ring is a Bezout ring [1], semihereditary ring [1], and so Hermite ring [2]. Thus, it is natural to ask whether or not R is an elementary divisor ring. This question is answered affirmative in [3]. It is an open problem whether or not every Bezout domain is an elementary divisor ring and more generally: whether or not every semihereditary Bezout ring is an elementary divisor ring. In a recent paper by Shores [3], we obtain a complete characterization of semihereditary elementary divisor ring through its homomorphic images.

By a **Bezout ring** we mean a ring in which all finitely generated ideals are principal. Following Kaplansky [4], we say that if every matrix over R is equivalent to a diagonal matrix (d_{ii}) with the property that every d_{ii} is a divisor of $d_{i+1\,i+1}$, then R is an **elementary divisor ring.** A ring R is said to have **stable range 1** if for all $a, b \in R$ such that $aR + bR = R$, there exists element $y \in R$ such that $(a + by)R = R$. A ring R is said to have **stable range 2** if for all $a, b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$, there exists elements $x, y \in R$ such that $(a + cx)R + (b + cy)R = R$. A **von Neumann regular ring** is a ring R such that for every $a \in R$ there exists an $x \in R$ such that $axa = a$. A ring R is said to be **semiregular** if $R/J(R)$ is regular and idempotents lift modulo $J(R)$, where $J(R)$ denotes the Jacobson radical of R [5]. Let R be a Bezout ring. An element $a \in R$ is called an **adequate element** if for every $b \in R$ there exist such $r, s \in R$ that $a = rs$, $rR + bR = R$, and for each non-unit divisor s' of element s, we have $s'R + bR \neq R$. If every non-zero element of R is adequate, the ring R is called an **adequate ring**. A ring R is called a **Gelfand ring** if whenever $a + b = 1$ there are $r, s \in R$ such that $(1 + ar)(1 + bs) = 0$ [6]. An element a of a ring R is said to be a **Gelfand element** if for any elements $b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$ there exist such elements $r, s \in R$ that $a = rs$, $rR + bR = R$ and $sR + cR = R$. A ring R is said to be a **ring of Gelfand range 1** if for any elements $a, b \in R$ such that $aR + bR = R$ there exists such element $y \in R$ that $a + by$ is a Gelfand element of R. By a **regular element** we mean an element that is not a zero divisor.

Theorem 1. *Let R be a Bezout ring of stable range 2. A regular element $a \in R$ is a Gelfand element iff R/aR is a Gelfand ring.*

Theorem 2. *Let R be a Bezout ring of stable range 2. A regular element $a \in R$ is a Gelfand element iff R/aR is a Gelfand ring.*

Theorem 3. *Let R be a Bezout ring of stable range 2 and of Gelfand range 1. Then R is an elementary divisor ring.*

Theorem 4. *Let R be a semihereditary Bezout ring and any regular element of R is Gelfand. Then R is an elementary divisor ring.*

Theorem 5. *Let R a Bezout domain. Then the following statements are equivalent:*

1) R is an elementary divisor ring.

2) R is a ring of Gelfand range 1.

1. *McCarthy P. J.* The ring of polynomials over a von Neumann regular ring // Proc. Amer. Math. Soc. –1973. – **39**. –P. 253–254.
2. *Larsen M., Lewis W., Shores T.*, Elementary divisor rings and finitelypresented modules // Trans. Amer. Mat. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
3. *Shores T.* Modules over semihereditary Bezout rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – **46**. – P. 211–213.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66. –** P. 464–491.
5. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans.Amer.Math.Soc. – 1977. – **229.** – P. 269–278.
6. *McGovern W.* Neat rings // J. of Pure and Appl. Algebra. – 2006. – **205**, No. 2. – P. 243–266.

DIAGONAL REDUCTION OF MATRICES OVER COMMUTATIVE SEMIHEREDITARY BEZOUT RINGS

It is proven that every commutative semihereditary Bezout ring in which any regular element is Gelfand, is an elementary divisor ring.

UDC 539.3

ON SOME PROPERTIES OF CIRCULANT MATRICES

Anna Zborowska

Institute of Mathematic, Pedagogical University of Cracow, Poland

zborowska.anna1995@wp.pl

We discuss some interesting properties of circulant matrices, which are a special kind of Toeplitz matrix where each row vector is rotated by one element to the right with respect to the preceding row vector. In particular, we compute the eigenvalues and eigenvectors of any circulant matrices using intuitive solution. From the circulant diagonalization theorem we obtain that all circulant matrices have the same set of eigenvectors.

1. *Gray R. M.* Toeplitz and circulant matrices: A review. – USA: Now Pub.
2. *Grenander U., Szego G.* Toeplitz Forms and Their Applications. – Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1958.
3. *Geller D., Kra I., Popescu S., SImanca S.* On circulant matrices. – preprint, 2002.
4. *Horn R. A. Johnson, C. R.* Matrix Analysis. – England: Cambridge University Press, 1985.

УДК 539.3

ОДИН ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ КІЛЬКОСТІ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Богдан Подлевський, Оксана Ярошко

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка

bpodlev@gmail.com, oks.yaroshko@gmail.com

Багатопараметричні спектральні задачі виникають у багатьох сферах аналізу та в математичній фізиці і мають різноманітні формулювання. В абстрактній постановці багатопараметричні задачі з операторно значною функцією $T(\lambda): R^m \to L(H)$ ($L(H)$ – множина лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі H) записуються у вигляді системи рівнянь

$$T(\lambda)u \equiv \left(A_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{ki} \right) u_k = 0, \tag{1}$$

де $\lambda_i \in R$, $A_k, B_{ki} \in L(H)$, $k, i = 1, \ldots, m$.

Алгебраїчна двопараметрична задача на власні значення як частковий випадок спектральної задачі (1) записується у вигляді системи двох однорідних лінійних рівнянь

$$T_1(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (A_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 C_1)x = 0,$$
$$T_2(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (A_2 + \lambda_1 B_2 + \lambda_2 C_2)y = 0, \tag{2}$$

де A_i, B_i, C_i – квадратні матриці n-го порядку. Будемо визначати власні набори (у нашому випадку – власні пари (λ_1, λ_2)) такі, що система (2) має нетривіальні розв'язки $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

Очевидно, що власні пари є розв'язками системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \det(A_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 C_1) = 0,$$
$$f_2(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \det(A_2 + \lambda_1 B_2 + \lambda_2 C_2) = 0. \tag{3}$$

Розглянемо функцію

$$F_2(\lambda_1, \lambda_2) = \left(f_1(\lambda_1, \lambda_2), f_2(\lambda_1, \lambda_2) \right): D_2 \subset R^2 \to R^2$$

двічі неперервно диференційовну в області D_2. Позначимо границю області D_2 як Г, а через 0_2 – нульовий вектор. Припустимо, що розв'язки рівняння

$$F_2(\lambda,\mu)=0_2 \qquad (4)$$

не лежать на Г, і є простими, тобто якобіан визначника F_2, на цих розв'язках не дорівнює нулю, тоді топологічний ступінь F_2 для 0_2 відносно області D_2 визначається співвідношенням $\deg[F_2,D_2,0_2]=\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\operatorname{sgn} J_{F_2}(\lambda_1,\lambda_2)$, де J_{F_2} – визначник матриці Якобі, а sgn – відома знакова функція.

Визначення топологічного степеня фактично вказує на те, що його значення дорівнює числу простих розв'язків рівняння (4), для яких якобіан є позитивним, мінус число простих розв'язків, для яких якобіан є негативним. Очевидно, якщо всі вони дають однаковий знак якобіана, то загальне число m простих коренів F_2 може бути отримане за значенням $\deg[F_2,D_2,0_2]$. З цією метою розглянемо наступне розширення функції F_2 і області D_2: $F_3=(f_1,\ f_2,f_3):D_3\subset R^3\to R^3$, де $f_3=\lambda_3 J_{F_2}$ і D_3 є прямим добутком області D_2 з довільним інтервалом дійсної осі λ_3, яка містить точку $\lambda_3=0$. Тоді, загальне число розв’язків рівняння (2) дорівнює $m=\deg[F_3,D_3,0_3]$.

Топологічний ступень може бути представлений інтегралом Кронеккера:

$$\deg[F_3,D_3,0_3]=\frac{1}{\Omega_3}\int\limits_{\Gamma}\!\cdots\!\int\frac{\sum_{i=1}^{3}A_i d\lambda_1\ldots d\lambda_{i-1}d\lambda_{i+1}\ldots d\lambda_3}{\left(f_1^2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)+\ldots+f_3^2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right)^{3/2}},$$

де A_i визначається таким детермінантом

$$A_i=(-1)^{3(i-1)}\begin{vmatrix}F_3 & \dfrac{\partial F_3}{\partial\lambda_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_3}{\partial\lambda_{i-1}} & \dfrac{\partial F_3}{\partial\lambda_{i+1}} & \ldots & \dfrac{\partial F_3}{\partial\lambda_3}\end{vmatrix},\quad i=1,2,3,$$

а Ω_3 позначає поверхню сфери одиничного радіусу в R_3.

Для обчислення точних похідних детермінанта матриці використовується алгоритм, запропонований у [1].

1. *Подлевський Б. М.* Двосторонні методи розв'язування нелінійних спектральних задач / Б. М. Подлевський. – Київ: Наукова думка, 2014. – 175 с.

ONE APPROACH TO FIND THE NUMBER OF EIGENVALUES OF A TWO-PARAMETER SPECTRAL PROBLEM

One approach to calculation of number of eigenvalues of a two-parameter eigenvalue problem in a certain given domain is presented. It uses the notion of a topological degree of a function.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Акопян Арсен 210
Андреєва Юлія..........................212
Антонова Тамара..................45, 74
Атамась Иван..............................90

Б

Баран Оксана...............................48
Баранецький Ярослав...........92, 94
Бернакевич Ірина........................15
Бешлей Василь............................96
Біланик Ірина..............................49
Білущак Юрій 38
Благовещенська Тетяна............144
Боднар Дмитро 49
Бондаренко Віталій 193

В

Вагін Петро 15
Ванєєва Олена.............................97
Василишин Тарас 50
Васюник Зоряна..........................99
Власик Ганна 51
Возна Світлана......................45, 74
Возняк Ольга.............................101
Войтович Михайло...................103
Волянська Ірина 123

Г

Галущак Світлана.......................53
Гаталевич Андрій 194
Гентош Оксана 105
Герасименко Віктор 107
Геселева Катерина....................108
Гладун Володимир 54
Гоєнко Наталія 48
Горбунова Олена......................165
Григоренко Олександр 17, 19
Грод Іван 110
Грушка Ярослав 195
Гузик Надія...............................113
Гутік Олег 233

Д

Дем'яненко Анатолій 114
Джалюк Наталія 197
Дияк Іван 20
Дмитрук Анатолій....................194
Дронь Віталій 117

Ж

Жирак Оксана...........................199
Жук Петро 21

З

Забавський Богдан 200
Загороднюк Андрій..............55, 56
Замрій Ірина 58
Зеліско Галина..........................203
Зернов Олександр 119

І

Іванов Юрій................................61
Івасишен Степан 120
Ільків Володимир.............121, 123

К

Каленюк Петро...................92, 123
Кирчей Іван 204

Кіосак Володимир 205
Клименко Ігор...........................206
Климчук Світлана 63
Козій Ірина 15
Колісниченко Володимир.........125
Конет Іван 127
Копась Інна 165
Коржик Володимир..................208
Кравців Вікторія 55
Кравчук Станіслав....................129
Крайнічук Галина 210, 212
Кречко Вікторія 107
Круль Марта 23
Кузіна Юлія 119
Кузь Антон 132, 134
Кузьо Тарас 136
Кунинець Андрій.........................23
Курапов Павло 41
Кутнів Мирослав 23
Кучма Марія..............................215

Л

Ладзоришин Наталія 217
Лисенко Світлана 206
Літовченко Владислав..............137
Лозинська Віра 66
Лопушанська Галина................139
Лопушанський Андрій 139
Лукашів Тарас...........................141
Лучко Вікторія..........................142
Лучко Володимир.....................142

М

Манзій Олександра 54
Марцінків Марія 56
Марченко Ольга........................144
Матійчук Михайло 147
Мединський Ігор 101
Мельник Іванна 219
Митрофанов Михайло 67
Михасюк Михайло 161
М'яус Ольга 139

Н

Негоденко Олена........................ 58
Негрич Марія........................... 149
Несполяк Дмитро 36
Нитребич Зіновій 123
Новосад Зоряна 68

О

Олійник Роман 221
Ольшевська Віта 222
Омелян Олександр 151

П

П’янило Галина 26
П’янило Ярослав 26
Пазен Олег 169
Панкратьєв Сергій 17
Парасюк Ігор 153
Пасічник Галина 120
Петравчук Анатолій................. 206
Петричкович Василь................ 197
Петрук Олег........................ 96, 136
Пилипюк Тетяна 127
Пирч Назар 223
Пінчук Тетяна............................ 17
Пожарська Катерина 69
Подлевський Богдан................. 275
Поливода Орислава 225
Поліщук (Чайчук) Ольга 155
Попович Роман......................... 227
Прикарпатський Ярема 105
Прохорчук Вероніка 229

Р

Раєвська Ірина 230
Раєвська Марина 230
Романів Андрій 231
Романів Олег 200

С

Савенко Петро 29
Савка Іван.................................157
Савула Ярема 20, 34
Савчук Анатолій.......................233
Саган Андрій 234
Самойленко Тетяна 144
Сергєєва Лідія..........................159
Сердюк Анатолій........................70
Симотюк Михайло 132, 134, 149
Скуратовський Руслан 236
Сливка-Тилищак Ганна............161
Слинько Віталій........................163
Собко Валентина 26
Сокіл Марія................................72
Соколенко Ігор 70
Сокульська Наталія 72
Сохан Петро...............................94
Спічак Станіслав 165
Стасюк Марта 169
Стельмащук Віталій 32
Стогній Валерій........................165
Страп Наталія 121
Сусь Ольга 45, 74

Т

Тарасенко Оксана 167
Тацій Роман..............................169
Терлич Наталія 77
Тилищак Олександр 237
Тимків Іван...............................157
Тимошенко Богдан 163
Трофименко Ольга 78
Тугай Ганна................................79
Турчин Юлія 34
Турчина Наталія 171
Тучапський Роман......................36

У

Унгурян Галина 173

Ф

Фриз Ірина 238
Фуштей Василь 68

Х

Хома Григорій..........................175
Хома-Могильська Світлана 175
Хорошун Анатолий 176
Християнин Андрій 72

Ц

Цирин Олександра 178
Цімболинець (Динис) Руслана. 193

Ч

Чернега Ірина 82
Чернуха Ольга 38
Чорненька Олена......................178
Чорний Віктор 49

Ш

Шаваровський Богдан 241
Шань Марія 180
Шапочка Ігор...........................243
Шевчик Ольга 244
Широковських Альона 181
Шкапа Вікторія 51

Щ

Щедрик Володимир 231

Ю

Юзефович Роман.......................41

Я

Яворський Ігор 41

Яремченко Сергій 19
Ярошко Оксана 275
Яшан Богдан 183

B

Banakh Taras................................83
Bessmertnyi Yaroslav 43
Bivziuk Vladyslav 185
Bokalo Bogdan.............................83
Bondarenko Vitaliy 246
Bovdi Victor...............................248
Brysina Iryna................................84

C

Chaplick Steven 86
Chapovskyi Yevhenii 258
Chernikov Nikolay 249

D

Drzymała Ilona...........................250

F

Fedorchuk Vasyl 187
Fedorchuk Volodymyr 188
Fleszar Krzysztof..........................86
Fraś Paulina 252

G

Gatalevych Andrii 272
Giza Marta..................................254
GÖK Ömer 87
Gołąb Małgorzata.......................255
Gutik Oleg..................................262

H

Hryniv Rostyslav..........................88

K

Kabat Jakub 256
Kuduk Grzegorz......................... 189

L

Lipp Fabian 86

M

Makarichev Victor 84
Maturin Yuriy 257
Mykytyuk Yaroslav 88

P

Petravchuk Anatoliy 258
Prokip Volodymyr 260

R

Ravsky Alexander........................ 86
Rvachova Tetiana 191

S

Savchuk Viktor 264
Slyn’ko Vitalij 185
Sobol Oleksandra....................... 262
Sokhatsky Fedir 264, 266
Styopochkina Maryna 246

T

Tarkovska Olena 266
Tomilova Yevheniia 191
Tuleja Zuzanna 268

V

Vainstein Feodor........................ 269
Verbitsky Oleg............................. 86

W

Wicher Anna 271
Wolff Alexander............................86

Z

Zabavsky Bogdan 272
Zborowska Anna..........................274

Національна академія наук України

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

Сучасні проблеми механіки та математики

Наукові праці у трьох томах

Том 3

Комп'ютерна верстка та технічне редагування:
Кузь Антон, Тайстра Юрій

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060
тел.: +380 (32) 263-83-77, **факс**: +380 (32) 263-62-70

E-mail: confmath2018@gmail.com
Web: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018