Диференціювання інтегралів по параметру

Розглянемо власні інтеграли, що залежать від параметра. Нехай функція $f(t,x)$, визначена та неперервна у прямокутнику $a \leq t \leq b,\ A \leq x \leq B$, то інтеграл

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt, \tag{1}$$

називають, залежним від параметру, та є неперервною на $[A;B]$ функцією.

Інтеграл більш загального вигляду

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt. \tag{2}$$

Також є інтегралом, що залежить від параметра і є неперервною функцією на $[A;B]$, якщо $f(t,x)$, визначена та неперервна у прямокутнику $a \leq t \leq b,\ A \leq x \leq B$, а функції $\varphi(x), \psi(x)$ також є неперервними на $[A;B]$.

Якщо $f(t,x),\ f'_x(t,x)$ неперервні у прямокутнику $a \leq t \leq b,\ A \leq x \leq B$, то справедлива формула диференціювання під знаком інтеграла (формула Лейбніца):

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b f'_x(t,x)dt. \tag{3}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt = f(\psi(x),x)\psi'(x) - f(\varphi(x),x)\varphi'(y) +$$
$$+ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(t,x)dt.) \tag{4}$$

Розглянемо випадок, коли $F(x) = \int_0^x K(x,t)y(t)dt + f(x)$.

З (4) отримаємо: $\mathrm{F}'(x) = K(x,x)y(x) + \int_0^x K'_x(x,t)y(t)dt + f'(x)$. (5)