

## Таблиця інтегралів

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

$$2. \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$4. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

$$5. \int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \cdot \ln a} + C.$$

$$6. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$7. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

### Підведення під знак диференціала

$$f'(x)dx = d(f(x))$$

### Інтегрування по частинам

$$\int u dv = uv - \int v du$$

### Основна тригонометрична підстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \text{ — замена,} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

## РІВНЯННЯ ІЗ ПОДІЛЕНИМИ І ПОДІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

**Означення 1.** Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну  $x$ , шукану функцію  $y(x)$  та її похідні. Символічно диференціальне рівняння записується у вигляді:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$
$$y', y'', \dots, y^{(n)}. \quad y' \approx \frac{dy}{dx} \approx \dot{y}$$

**Означення 2.** Якщо невідома функція, яка входить до диференціального рівняння, є функцією двох і більше незалежних змінних, то маємо диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$u = u(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

**Означення 3.** Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить в рівняння.

**Означення 4.** Загальним розв'язком диференціального рівняння називають вираз вигляду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

( $C_1, C_2, \dots, C_n$  – константи, кількість яких залежить від порядку диференціального рівняння), після підстановки якого в диференціальне рівняння воно обертається на тотожність.

Якщо константам  $C_1, C_2, \dots, C_n$  надати якісь певні значення, то отримаємо частинний розв'язок.

**Означення 5.** Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

$$1) \quad xydx + (x+1)dy = 0$$

$$\bullet \quad xydx = -(x+1)dy \quad | : (x+1) : y$$

$$\frac{x}{x+1} dx = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x}{x+1} dx = -\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{dx}{x+1} = -\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad x - \ln|x+1| = -\ln|y| + \ln C \bullet$$

$$2) \quad (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0 \quad | : y^2 : (x^2 - 1)$$

$$\bullet \quad \frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2 - 1} dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -\ln|x^2 - 1| + \ln C \bullet$$

$$3) \quad y' \operatorname{ctg} x + y = 2$$

$$\text{Відповідь. } -\ln|y - 2| = -\ln|\cos x| + C \bullet$$

Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c)$$

Заміна  $z = ax + by + c$ .

$$4) y' = \cos(y - x)$$

$$\bullet z = y - x, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\cos z - 1} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C;$$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} =$$

$$\| \operatorname{tg} \frac{z}{2} = t; \quad \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \cos z - 1 = \frac{1-t^2-t^2-1}{t^2+1} = \frac{-2t^2}{t^2+1}; \quad dz = \frac{2dt}{1+t^2} \|$$

$$= \int \frac{(t^2+1)}{-2t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{z}{2}} + C = \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + C.$$

Тоді

$$\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C \quad \Rightarrow \quad x + C = \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} \bullet$$

$$5) y' - y = 2x - 3$$

 $2x + y - 3 = z$  - замінаВідповідь.  $\ln|2x + y - 1| = x + C \bullet$ 

$$6) y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

 $4x + 2y - 1 = z$  - замінаВідповідь.  $x = 2 + \sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln|2 + \sqrt{4x + 2y - 1}| - C \bullet$

**Домашнє завдання.**

1)  $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy;$

4)  $z' = 10^{x+z};$

2)  $y' = 3\sqrt[3]{y^2};$

5)  $e^{-s} \left( 1 + \frac{ds}{dt} \right) = 1.$

3)  $2x^2 yy' + y^2 = 2;$