ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

$$\boxed{y' = p(x)y + q(x)}$$

1) $y'+2xy = xe^{-x^2}$

$\bullet$ Розв’язок будемо шукати у вигляді:

$y = u(x)v(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = u'v + uv'$

$u'v + uv'+2x(uv) = xe^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad v(u'+2xu) + uv'= xe^{-x^2}$

Одну з функцій можна обрати довільно. Підберемо її таким чином, щоб рівняння максимально спрощувалося. З цією метою вимагаємо, щоб вираз у дужках був рівним нулю. Отримаємо допоміжне дифференциальное рівняння для знаходження функції u:

$u'+ 2xu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{dy}{u} = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|u| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = e^{-x^2}}$

При знаходженні функції u досить отримати якийсь частинний розв’язок максимально простого вигляду. З цією метою при інтегруванні поклали константу $C = 0$. Повернемося в основне рівняння.

$e^{-x^2} v'= xe^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad v'= x \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v = \dfrac{x^2}{2} + C}$

Тоді загальний розв’язок прийме вигляд:

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \bullet$$

2) $y'+2y=e^{3x}$

• $(u'v+uv')+2uv=e^{3x} \quad\Rightarrow\quad v(u'+2u)+uv'=e^{3x}$

$u'+2u=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{du}{u}=-2dx \quad\Rightarrow\quad \ln|u|=-2x \quad\Rightarrow\quad \underline{u=e^{-2x}}$

$e^{-2x}v'=e^{3x} \quad\Rightarrow\quad v'=e^{5x} \quad\Rightarrow\quad \underline{v=\dfrac{1}{5}e^{5x}+C}$

$y=\left(\dfrac{1}{5}e^{5x}+C\right)e^{-2x}$ •

3) $y'=\dfrac{2y}{x+1}+e^{x}(x+1)^2$

• $(u'v+uv')=\dfrac{2uv}{x+1}+e^{x}(x+1)^2 \quad\Rightarrow\quad v\left(u'-\dfrac{2u}{x+1}\right)+uv'=e^{x}(x+1)^2$

$u'-\dfrac{2u}{x+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{du}{u}=\dfrac{2}{x+1}dx \Rightarrow \quad \ln|u|=2\ln|x+1| \quad\Rightarrow\quad \underline{u=(x+1)^2}$

$(x+1)^2v'=e^{x}(x+1)^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{v=e^{x}+C}$

$y=(x+1)^2(e^{x}+C)$ •

4) $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$

• В деяких випадках, коли початкове диференціальне рівняння не є лінійним відносно функції $y = y(x)$, його можна намагатися розглядати як лінійне відносно функції $x = x(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2, \qquad x = u(y)v(y)$$

$$u'v + uv' = \frac{uv}{y} + y^2 \quad \Rightarrow \quad v\left(u' - \frac{u}{y}\right) + uv' = y^2$$

$$u' = \frac{u}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \underline{u = y}$$

$$yv' = y^2 \quad \Rightarrow \quad v' = y \quad \Rightarrow \quad \underline{v = \frac{y^2}{2} + C}$$

$$x = \left(\frac{y^2}{2} + C\right)y \; \bullet$$

5) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

• $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{6x - y^2}{2y}, \qquad x = u(y)v(y)$

$$u'v + uv' = \frac{6uv}{2y} - \frac{y^2}{2y} = \frac{3uv}{y} - \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad v\left(u' - \frac{3u}{y}\right) + uv' = -\frac{y}{2}$$

$$u' = \frac{3u}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{3dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|y|^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = y^3}$$

$$y^3 v' = -\frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad v' = -\frac{1}{2y^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{v = \frac{1}{2y} + C}$$

$$x = y^3\left(\frac{1}{2y} + C\right) = \frac{y^2}{2} + y^3 C \; \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y' + 2y = 4x$;

2) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$;

3) $y' + y = \cos x$;

4) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$;

5) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$;

6) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.