РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

$$u(x,y)=x^2y^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2$$

Повний диференціал функції двох змінних має вигляд:

$$\boxed{du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

є рівнянням в повних диференціалах, якщо виконана умова

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Тоді початкове рівняння прийме вигляд $du=0$ і його розв’язок є $u(x,y)=C$. Таким чином, задача про знаходження розв’язку диференціального рівняння зводиться до відщукання функции $u(x,y)$.

1) $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$

• $\frac{\partial P}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1;\quad \Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad \Rightarrow$ маємо рівняння в повних диференціалах.

Оскільки дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \Rightarrow \qquad u=x^2+yx+\varphi(y). \tag{1}$$

Зауваження 1. Після інтегрування виникла не константа C, а функція $\varphi(y)$, оскільки до інтегрування ми мали частину похідну по x; це ж враховується і при обчисленні інтеграла (**так обчислюються інтеграли тільки в цій темі!**).

Знайшовши частинну похідну по y від обох частин останнього рівняння, будемо мати:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y).$$

З іншого боку, оскільки дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y.$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівнянь, будемо мати:

$$x+\varphi'(y)=x+2y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y)=2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=y^2.$$

Підставивши функцію $\varphi(y)$ в (1) и прирівнюючи отриманий вираз до C, отримаємо загальний розв’язок

$$u = x^2 + yx + y^2 = C \bullet$$

2) $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$

- $10x - 8 = 10x - 8$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10xy - 8y + 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = 5x^2y - 8xy + x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 - 8x + \varphi'(y) = 5x^2 - 8x + 3 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = 3y.$$

$$u = 5x^2y - 8xy + x + 3y = C \bullet$$

3) $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$

- $\frac{\partial P}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right);$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-1}{y}e^{\frac{x}{y}} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y} - 1\right) = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^{\frac{x}{y}} \qquad \Rightarrow \qquad u = x^2 + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} + ye^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \varphi'(y) = \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = 0;$$

$$u = x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C \bullet$$

4) $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$

• $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x2\cos y(-\sin y);\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2x\sin 2y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y \quad \Rightarrow \quad u = x^2\cos^2 y + \varphi(y);$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\cos y(-\sin y)x^2 + \varphi'(y) = 2y - x^2\sin 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \varphi(y) = y^2;$

$$u = x^2\cos^2 y + y^2 = C$$ •

Домашнє завдання.

1) $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - yx^2\right)dy = 0;$

2) $\dfrac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$

3) $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0;$

4) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0;$