НАЙПРОСТІШІ ТИПИ РІВНЯНЬ НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Рівняння розв'язати відносно y', після чого загальний розв'язок відшукувати відомими методами:

1) $y'^2+xy=y^2+xy'$

• $y'^2-xy'+xy-y^2=0$.

Розглянемо це рівняння як квадратне відносно y':

$\boxed{ax^2+bx+c=0}$ $\quad$ $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ $\quad$ $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}}$

$$y'_{1,2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4xy+4y^2}}{2}=\frac{x\pm(x-2y)}{2}$$

а) $y'=x-y$

$y=uv$

$$u'v+uv'=x-uv \quad\Rightarrow\quad u'=-u \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{u}=-dx \quad\Rightarrow\quad \underline{u=e^{-x}}$$

$$e^{-x}v'=x \quad\Rightarrow\quad v'=xe^{x} \quad\Rightarrow\quad v=\int xe^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C_1$$

$$y=x-1+e^{-x}C_1$$

б) $y'=y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{y}=dx \quad\Rightarrow\quad y=e^{x}+C_2$ •

2) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$

• $y'_{1,2} = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4x^2}}{2x} = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

а) $y = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$

$\dfrac{y}{x} = z$ $\qquad$ $z + xz' = z + \sqrt{z^2 - 1}$

$\dfrac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \dfrac{dx}{x}$ $\qquad$ $ln\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right| = ln|x| + ln|C_1|$

$\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1} = C_1 x$

б) $y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$

$\dfrac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -\dfrac{dx}{x}$, $\qquad$ $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1} = \dfrac{C_2}{x}$ •

3) $y'^2 + x = 2y$

• $y'^2 = 2y - x \quad \Rightarrow \quad y'_{1,2} = \pm\sqrt{2y - x}$

а) $y' = \sqrt{2y - x}$

$2y - x = z^2 \quad \Rightarrow \quad 2y' - 1 = 2zz' \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2zz' + 1}{2}$

$\dfrac{2zz' + 1}{2} = z \quad \Rightarrow \quad 2zz' + 1 = 2z \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2z}{2z - 1} dz = dx \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2z-1+1}{2z-1}dz = dx \quad \Rightarrow \quad z + \frac{1}{2}ln|2z-1| = x + C$$

$$\sqrt{2y-x} + \frac{1}{2}ln\left|2\sqrt{2y-x}-1\right| = x + C$$

б) $y' = -\sqrt{2y-x}$

$2y - x = z^2$

див. випадок **а)**:

$$y' = \frac{2zz'+1}{2} \qquad \frac{2zz'+1}{2} = -z \qquad \frac{2z-1+1}{2z+1}dz = -dx$$

$$z - \frac{1}{2}ln|2z+1| = -x + C$$

$$\sqrt{2y-x} - \frac{1}{2}ln\left|2\sqrt{2y-x}+1\right| = -x + C \bullet$$

4) $y'^3 + (x+2)e^y = 0$

$$\bullet\ y' = \sqrt[3]{-(x+2)e^y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = -(x+2)^{1/3}dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3e^{-\frac{y}{3}} = -\frac{3}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{y}{3}} = \frac{1}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} - \frac{C}{3} \bullet$$

На практиці в рідких випадках вдається розв’язати рівняння відносно похідної і ще рідше – розв’язати отримані рівняння. В таких випадках розв’язок рекомендується відшукувати в параметричному вигляді, що значно розширює клас задач, для яких вдається знайти аналітичний розв’язок.

В наступних рівняннях ввести параметр і розв’язати.

5) $y = y'^2 + 2y'^3$

• $y' = t$, $\qquad y = t^2 + 2t^3$; $\qquad x(t) = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 2t\frac{dt}{dx} + 6t^2\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{dt}{dx}(2t + 6t^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dx = (2 + 6t)dt \quad \Rightarrow \quad x = 2t + 3t^2 + C$$

Розв’язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = t^2 + 2t^3 \\ x = 2t + 3t^2 + C \end{cases} \bullet$$

6) $x = y'^3 + y'$

• $y' = t$ $\qquad x = t^3 + t$ $\qquad y(t) = ?$

$$\frac{dx}{dy} = 3t^2\frac{dt}{dy} + \frac{dt}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy}(3t^2 + 1) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dy = (3t^3 + t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C$$

Тоді розв’язок визначається рівняннями:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{t^2}{2} + C \\ x = t^3 + t \end{cases} \bullet$$

7) $x = y'\sqrt{y'^2+1}$

• $y' = t$, $x = t\sqrt{t^2+1}$, $y(t) = ?$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dt}{dy}\sqrt{t^2+1} + t\cdot\frac{1}{2}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}2t\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{dt}{dy}\left(\sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$dy = t\left(\sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt$$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{2(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}d(t^2+1)$$

$$t^2+1 = z$$

$$dy = \left(\frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)dz$$

$$y = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot z^{\frac{1}{2}} + C \qquad y = \frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - (t^2+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Розв’язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - (t^2+1)^{\frac{1}{2}} + C \\ x = t\sqrt{t^2+1} \end{cases} \bullet$$

8) $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$

• $y'-y = \pm\sqrt{(y'+1)^3} \quad\Rightarrow\quad y = y'\pm\sqrt{(y'+1)^3}$

а) $y = y'+\sqrt{(y'+1)^3}$

$$y' = t \qquad y = t + \sqrt{(t+1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{3}{2}\sqrt{t+1}\frac{dt}{dx}$$

$$t = \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{t+1}\right)\frac{dt}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{t+1}}{t}\right)dt$$

$$\| \int \frac{\sqrt{t+1}}{t}dt = \left| \begin{matrix} t+1=u^2 \\ t=u^2-1 \Rightarrow dt=2udu \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int \frac{u^2}{u^2-1}du = 2\left(\int \frac{u^2-1}{u^2-1}du + \int \frac{1}{u^2-1}du \right) = 2\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \right) = 2\sqrt{t+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| \, \|$$

$$x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| + C$$

$$\begin{cases} y = t + \sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| + C \end{cases}$$

б) $y = y' - \sqrt{(y'+1)^3}$

За аналогією з випадком **а)** маємо:

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{t+1}}{t} \right) dt = dx$$

$$\begin{cases} y = t - \sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| - 3\sqrt{t+1} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| + C \end{cases} \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y'^2 - 2xy' = 8x^2$

2) $xy'^2 = y(2y'-1)$

3) $x(y'^2 - 1) = 2y'$

4) $y = \ln(1 + y'^2)$