РІВНЯННЯ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

1) $2xy'y'' = y'^2 - 1$

• Рівняння не містить в явному вигляді шукану функцію $y(x)$.

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$$

$$2xpp' = p^2 - 1$$

$$\frac{2pdp}{p^2-1} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|p^2-1\right| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - 1 = C_1 x \quad \Rightarrow \quad y'^2 - 1 = C_1 x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\int\sqrt{C_1 x + 1}dx = \pm\frac{1}{C_1}\frac{2}{3}(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2 \bullet$$

2) $y'^2 + 2yy'' = 0$

• Рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну x.

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p \cdot p'$$

$$p^2 + 2ypp' = 0$$

$$\frac{2pdp}{p^2} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|p^2\right| = \ln\left|\frac{C_1}{y}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = \frac{C_1}{y} \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{C_1}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2 \bullet$$

3) $y''' = y''^2$

• $y'' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y''' = p'$

$$p' = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^2} = dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} = x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{1}{x + C_1} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{x + C_1} \quad \Rightarrow$$

$$y' = -\ln|x + C_1| + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\int(\ln|x + C_1| - C_2)dx + C_3 =$$

$$= \left\| \begin{array}{l|l} u = \ln|x + C_1| & du = \dfrac{1}{x + C_1} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\| =$$

$$= -(x\ln|x + C_1| - \int\frac{x}{x + C_1}dx - C_2 x) + C_3 =$$

$= -x\ln|x + C_1| + x - C_1\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3 \bullet$

4) $x^2 y'' = y'^2$

$\bullet\ y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$

$x^2 p' = p^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{p^2} = \dfrac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{p} = -\dfrac{1}{x} - C_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p = \dfrac{x}{1 + C_1 x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{x}{1 + C_1 x} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = \displaystyle\int \frac{xdx}{1 + C_1 x} + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\ln\left|x + \frac{1}{C_1}\right|\right) + C_2 \bullet$

5) $yy'' + 1 = y'^2$

$\bullet\ y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$ypp' + 1 = p^2$

$\dfrac{pdp}{p^2 - 1} = \dfrac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\ln|p^2 - 1| = \ln|C_1 y| \quad \Rightarrow \quad p^2 - 1 = C_1^2 y^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 + 1} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{C_1}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{C_1^2}}\right| = \pm x + C_2 \bullet$

6) $y''^2 = y'^2 + 1$

$\bullet\ y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$(pp')^2 = p^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad (p')^2 = \dfrac{p^2 + 1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad p' = \pm\sqrt{\dfrac{p^2 + 1}{p^2}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{p^2}{p^2 + 1}}dp = \pm dy \quad \Rightarrow \quad \dfrac{pdp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \pm dy \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{d(p^2 + 1)}{\sqrt{p^2 + 1}} = \pm y + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{p^2 + 1} = \pm y + C_1 \quad \Rightarrow \quad p^2 + 1 = (C_1 \pm y)^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p^2 = (C_1 \pm y)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \pm\dfrac{dy}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d(C_1 \pm y)}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ln\left|C_1 \pm y + \sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}\right| = x + C_2 \bullet$

Домашнє завдання.

1) $y^3 y'' = 1$;

2) $y'' = 2yy'$;

3) $y''(e^x + 1) + y' = 0$;

4) $yy'' = y'^2 - y'^3$;

5) $2yy'' = y^2 + y'^2$.