

РІВНЯННЯ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Розв'язати рівняння, претворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були повними похідними.

$$1) yy''' = y'y'' \mid : y''y$$

$$\bullet \frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y} \Rightarrow (\ln y''')' = (\ln y)' \Rightarrow \ln y''' = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = C_1 y$$

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = pp'$$

$$pp' = C_1 y \Rightarrow pdp = C_1 y dy \Rightarrow p^2 = C_1 y^2 + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{C_1 y^2 + C_2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1} \cdot \sqrt{y^2 + \frac{C_2}{C_1}}} = \pm dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{C_2}{C_1}} \right| = \pm x + C_3 \bullet$$

$$2) yy'' + y'^2 = 1$$

$$\bullet (yy')' = (x)' \Rightarrow yy' = x + C_1 \Rightarrow y dy = (x + C_1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \bullet$$

$$3) yy'' = y'(y'+1) \mid : (y'+1) : y$$

$$\bullet \frac{y''}{y'+1} = \frac{y'}{y} \Rightarrow (\ln|y'+1|)' = (\ln|y|)' \Rightarrow y'+1 = C_1 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \ln \left| y - \frac{1}{C_1} \right| = x + C_2 \bullet$$

$$4) y'y''' = 2y''^2$$

$$\bullet \frac{y'''}{y''} = 2 \frac{y''}{y'} \Rightarrow (\ln|y''|)' = (2 \ln|y'|)' \Rightarrow y'' = y'^2 \cdot C_1;$$

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$$

$$p' = p^2 C_1 \Rightarrow \frac{dp}{p^2} = C_1 dx \Rightarrow -\frac{1}{p} = C_1 x + C_2 \Rightarrow p = -\frac{1}{C_1 x + C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{C_1 x + C_2} \Rightarrow y = -\frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + C_2| + C_3 \bullet$$

$$5) 5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$$

$$\bullet 5 \frac{y'''}{y''} = 3 \frac{y^{IV}}{y'''} \Rightarrow 5(\ln|y''|)' = 3(\ln|y'''|)' \Rightarrow (y'')^5 = (y''')^3 \cdot C_1;$$

$$y'' = p(x)$$

$$p^5 = (p')^3 C_1 \Rightarrow p' = C_1^{\frac{1}{3}} p^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{dp}{p^{\frac{5}{3}}} = C_1^{\frac{1}{3}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right) p^{-\frac{2}{3}} = C_1^{\frac{1}{3}} x + C_2 \Rightarrow p^{-\frac{2}{3}} = \overline{C}_1 x + \overline{C}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = (\overline{C}_1 x + \overline{C}_2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = (\overline{C}_1 x + \overline{C}_2)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{C_1}\right) + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{(C_1)^2} (\overline{C}_1 x + \overline{C}_2)^{\frac{1}{2}} + C_3 x + C_4 \bullet$$

Означення. Диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням* p -го порядку якщо виконується рівність

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Знизити порядок диференціальних рівнянь використовуючи їх однорідність та розв'язати.

$$6) xyu'' - xy'^2 = yu'$$

$$\bullet y = e^{\int z dx} \Rightarrow y' = e^{\int z dx} \cdot z \Rightarrow y'' = (e^{\int z dx} \cdot z)' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z';$$

$$x(z^2 + z') - xz^2 = z \Rightarrow xz' = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 x;$$

$$y = e^{\int C_1 x dx} = e^{\frac{C_1}{2} x^2 + C_2} \bullet$$

$$7) (x^2 + 1)(y'^2 - yu'') = xyu'$$

$$\bullet y = e^{\int z dx}$$

$$(x^2 + 1)(z^2 - (z^2 + z')) = xz \Rightarrow -(x^2 + 1)z' = xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{xdx}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| = -\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \ln C_1 \Rightarrow y = e^{\int C_1(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx} = e^{C_1 \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C_2} \bullet$$

$$8) xyu'' + xy'^2 = 2yy'$$

$$\bullet y = e^{\int z dx}$$

$$x(z^2 + z') + xz^2 = 2z \Rightarrow x(z' + 2z^2) = 2z \Rightarrow \frac{z' + 2z^2}{2z} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{2z} + z = \frac{1}{x} \Rightarrow z' + 2z^2 = \frac{2z}{x};$$

$$z = uv$$

$$u'v + uv' + 2u^2v^2 = \frac{2uv}{x};$$

$$u' = \frac{2u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \underline{u = x^2};$$

$$x^2v' + 2x^4v^2 = 0 \Rightarrow v' + 2x^2v^2 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -2x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v} = -\frac{2}{3}x^3 - C_1 \Rightarrow v = \frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C_1};$$

$$z = \frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}; \quad y = e^{\int \frac{x^2 dx}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}} = e^{\frac{1}{2} \ln|x^3 + C_1 \cdot \frac{3}{2}| + C_2} \bullet$$

Домашнє завдання.

$$1) yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x};$$

$$3) y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2 \cdot (y')^2;$$

$$2) x^2 yy'' = (y - xy')^2;$$

$$4) y'^2 + 2xyu'' = 0.$$