ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ
З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Загальний розв'язок однорідних рівнянь записується за виглядом корнів характеристичного рівняння.

1) $y'' - y = 0$

• $k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1, \; k_2 = 1; \qquad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. •

2) $y'' + 2y' + 10y = 0$

• $k^2 + 2k + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$;

$y(x) = C_1 e^{-x}\cos 3x + C_2 e^{-x}\sin 3x$. •

3) $y''' - 8y = 0$. $\quad \boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)}$

• $k^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)\left(k^2 + 2k + 4\right) = 0$;

а) $k_1 = 2$ **б)** $k^2 + 2k + 4 = 0$

$k_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. •

4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. $\quad \boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

• $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad k_{1,2,3} = 1$ – корінь кратності 3; $\qquad y(x) = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)e^{x}$. •

Зауваження. У випадку, коли корінь декілька разів повторюється в розв'язку, кажуть, що корінь кратний.

5) $y''' + y' = 0$

• $k^3 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\ k_{2,3} = \pm i; \quad y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. •

6) $y^{IV} + y'' = 0$

• $k^4 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 0$ – кратності 2; $k_{3,4} = \pm i$;

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. •

7) $y''' - 3y' + 2y = 0$

• $k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad (k-1)(k^2 + k - 2) = 0 \quad \Rightarrow$

$k^2 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = 1,\ k_3 = -2$;

$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x}$. •

ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

• Загальний розв'язок має вигляд $y(x) = y_o(x) + \bar{y}(x)$, де $y_o(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $\bar{y}(x)$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = 3;$$

$$y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Розглянутий нижче метод дозволяє будувати часткові розв'язки $\bar{y}(x)$ тільки для правих частин вигляду

$$\boxed{e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)},$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени.

Розв'язок будемо відшукувати за виглядом правої частини.

$$\bar{y} = Ae^{4x}$$

Для відшукання константи A, $\bar{y}$ підставимо в рівняння.

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових функціях справа і зліва.

$$e^{4x}\Big|\, 16A - 8A - 3A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Остаточно

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.\ \bullet$$

2) $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

- Скориставшись результатами попереднього прикладу, будемо мати:

$k_1 = -1,;\quad \boxed{k_2 = 3};\qquad y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x};$

$\bar{y} = xAe^{3x} \;\Rightarrow\; \bar{y}' = Ae^{3x} + 3xAe^{3x} \;\Rightarrow\; \bar{y}'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9xAe^{3x};$

$6Ae^{3x} + \underline{9xAe^{3x}} - 2Ae^{3x} - \underline{6xAe^{3x}} - \underline{3xAe^{3x}} = e^{3x};$

$A = \frac{1}{4};\qquad \bar{y} = \frac{1}{4}xe^{3x};\qquad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4}xe^{3x}.$ •

3) $y'' - 2y' - 3y = xe^{3x}$

- $k_1 = -1,;\ \boxed{k_2 = 3};\qquad y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x};$

$\bar{y} = x(Ax + B)e^{3x} \;\Rightarrow\; \bar{y}' = 3\left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x} + (2Ax + B)e^{3x};$

$\underline{9\left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x}} + 6(2Ax + B)e^{3x} + (2A)e^{3x} - \underline{6\left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x}} -$

$-2(2Ax + B)e^{3x} - \underline{3x(Ax + B)e^{3x}} = xe^{3x}$

$$\begin{array}{c|l} xe^{3x} & 12A - 4A = 1 \\ e^{3x} & 6B + 2A - 2B = 0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{16} \end{array}$$

$\bar{y} = x\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{3x};\qquad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16}\right)e^{3x}.$ •

4) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

- $k^2 - 3k + 2 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \;\Rightarrow\; k_1 = 1,\ k_2 = 2;$

$y_o(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x};$

$\bar{y} = A\sin x + B\cos x;$

$-A\sin x - B\cos x - 3A\cos x + 3B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$

$$\left.\begin{array}{l|l}\sin x & A+3B=1\\ \cos x & B-3A=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{10}\\ B=\dfrac{3}{10}\end{array} \qquad \bar{y}=\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x;$$

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x. \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y''-y=2e^x;$

2) $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x};$ $\qquad \bar{y}(x)=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{2x}\cdot\left(x^k\,?\right)$

3) $y''-5y'=3x^2.$ $\qquad \bar{y}(x)=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot\left(x^k\,?\right)$