ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Б. ХМЕЛЬНИЦЬКОГО
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ

ГОТУЄМОСЬ

ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Навчально-методичний посібник

ЧЕРКАСИ – 2008

АВТОРИ :

АКУЛЕНКО І. А. – кандидат педагогічних наук, доцент Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького;

АТАМАСЬ В. В. – кандидат фізико – математичних наук, доцент, завідуючий кафедрою алгебри, геометрії та методики викладання математики Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького;

КОЗЛОВА О. М. – методист з математики Черкаського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників

РЕЦЕНЗЕНТИ:

КЛЯЦЬКА Л. М. – кандидат фізико – математичних наук, доцент, декан математичного факультету Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького

ГРИШКО В. І. – вчитель – методист Першої міської гімназії

Рекомендовано до друку вченою радою ЧОІПОПП.
Протокол № 4 від 24. 12. 2003 р.

Видання друге, доповнене

ЗМІСТ

Передмова

Розв'язування задач є специфічною особливістю інтелекту, а інтелект – це особливий дар людини. Тому розв'язування задач можна вважати одним із найхарактерніших проявів людської діяльності.

Дьєрдь Пойя

Завзяття перемагає все.

Козьма Прутков

Позакласна робота з математики (гуртки, факультативи, індивідуальна робота, конкурси, турніри, олімпіади тощо) надає учням додаткові можливості для розвитку їхніх здібностей, виховує інтерес до науки математики. Головне призначення позакласної роботи - не тільки розширення і поглиблення теоретичних знань, одержаних на уроках, але і розвиток умінь використовувати знання до розв'язування нестандартних задач, виховання у школярів культури роботи над задачею.

Одним із ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного мислення є математичні олімпіади. Основна мета олімпіад полягає не стільки у тому, щоб виявити переможців, скільки у тому, щоб зацікавити всіх учасників оригінальними задачами, залучити новачків до систематичних занять математикою, самостійної роботи з книгою. Не можна думати, що невдача на олімпіаді свідчить про відсутність математичних здібностей. Після невдачі потрібно, звичайно, спробувати краще підготуватися до наступної олімпіади. Досягнення "олімпійських" вершин потребує наполегливості, працелюбності, постійних тренувань і маленьких перемог над собою щодня.

І саме для того, щоб допомогти у цій нелегкій справі навчання розв'язувати нестандартні задачі, підготовлений даний посібник. У ньому *систематизовано основні типи задач, які досить часто пропонуються на* математичних олімпіадах. До кожного типу задач даються загальні теоретичні положення, методи та зразки розв'язування. Цей матеріал виділений вертикальною лінією зліва від тексту. Задачі до кожного розділу підібрані таким чином : спочатку пропонується серія з десяти задач на безпосереднє використання певного методу чи прийому, на яких учні знайомляться з його сутністю, вони позначені символом “ ● “. При їх розв’язуванні вчитель може давати орієнтири розв’язування задачі для їх подальшого засвоєння і застосування учнями. Потім ідуть наступні десять задач, позначених символом “ ▲ “, в яких використовується принцип “ближнього” перенесення знань, тобто застосування їх у ситуаціях, аналогічних до зразка. При розв’язуванні цих задач формується узагальнений спосіб діяльності. І, нарешті, при розв’язуванні останніх десяти задач з позначкою “ ■ “ передбачається комбінування відомих методів, у цих задачах не прослідковується використання даного методу. Така структура даного посібника дає можливість використовувати його не тільки вчителям під час організації групових занять на факультативах чи гуртках, але й учням для індивідуальної самостійної роботи при підготовці до олімпіад.

Автори висловлюють щиру вдячність студентам математичного факультету Черкаського національного університету ім. Б.Хмельницького Пєвнєвій Н., Танцюрі Ю., Стернишу О., Милосердній О. за допомогу у підбірці окремих матеріалів даного посібника.

Розділ І
Принцип Діріхле

Петер Густав Лежен Діріхле (1805 - 1859) - видатний німецький математик; йому належать основні роботи в теорії чисел та інших областях математики. Найпопулярніше формулювання принципу Діріхле таке: "Якщо в n клітках сидить m зайців, причому m > n, то хоча б в одній клітці сидить принаймні два зайці". На перший погляд навіть незрозуміло, чому це зовсім очевидне зауваження є дуже ефективним методом розв'язування задач. Діло в тому, що в кожній конкретній задачі нелегко буває зрозуміти, що ж тут " зайці ", а що " клітки " і чому зайців більше, ніж кліток. Вибір зайців і кліток часто не очевидний; далеко не завжди по вигляду задачі можна визначити, що слід використати принцип Діріхле. А головне, цей метод дає неконструктивне доведення (ми, звичайно, не можемо сказати, в якій саме клітці сидять два зайці, а знаємо тільки, що така клітка є), а спроба дати конструктивне доведення, тобто доведення шляхом дійсної побудови або вказування потрібного об'єкту, може призвести до більших труднощів.

Принцип Діріхле є очевидним твердженням. Кожна, навіть не обізнана з математикою людина, розуміє, що розсадити (n + 1)-го зайця в n кліток так, щоб в кожній клітці було не більш від одного зайця, не можна. Інакше кажучи, якщо в клітках знаходиться n + 1 або більше зайців, то принаймні в одній клітці не менше від двох зайців.

Принцип Діріхле, не зважаючи на його надзвичайну очевидність і простоту, часто використовується при розв'язуванні задач у різних галузях математики. *Більш загальні формулювання принципу Діріхле*

Якщо nk + 1 предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше як k + 1 предмет.

Для доведення пронумеруємо ящики числами 1, 2, ..., n. Нехай x_i - число предметів, які знаходяться в ящику з номером і. За умовою

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = nk + 1.$$

Припустимо, що $x_1 \leq k$, $x_2 \leq k, \ldots, x_n < k$. Тоді

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n < nk.$$

Дістали суперечливу нерівність

$$nk + 1 = X_1 + X_2 + \ldots + Xn < nk.$$

Отже, наше припущення неправильне, тобто є принаймні одне x_i таке, що

$$x_i > к+1.$$

Доведення твердження можна сформулювати так:
якщо nk + 1 зайців розміщено в n клітках, то принаймні в одній з кліток знаходиться не менш як k + 1 зайців.

● **Задача 1.1**. Довести, що для кожного натурального n є число, яке записується за допомогою цифр 1, 0 і ділиться на n.

Розв'язання.

Розглянемо n + 1 число : 1, 11, 111, ..., 1...1 (останнє число записується за допомогою n + 1 одиниці). Якщо одне з цих чисел ділиться на n, то твердження задачі справедливе. Якщо це не так, то різниця двох з цих чисел ділиться на n. Залишається тільки зауважити, що різниця будь-яких чисел з розглядуваних чисел записується за допомогою цифр 1,0.

● **Задача 1.2.** Розглянемо послідовність чисел 6, 6^2, 6^3, ..., 6^n, ... і випишемо для кожного з них останні чотири цифри. Дістанемо послідовність 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, ... Довести, що, починаючи з деякого номера ця послідовність буде періодичною.

Розв'язання.

Зазначимо, що існує лише скінчене число різних наборів чотирьох чисел. Справді, застосовуючи основне правило комбінаторики, впевнюємося, що це число дорівнює 10^4, тобто, в нескінченій послідовності останніх чотирьох цифр знайдуться два однакові набори. Отже, є два натуральних числа r і *m* такі, що числа 6^m, і 6^{m+r} мають останні чотири цифри однакові. Якщо m і r такі числа, то 6^{m+r}-6^m =10^4s, де s - натуральне число. Тоді у чисел 6^{m+1} і 6^{m+r+1} останні чотири цифри теж однакові, бо 6^{m+r+1} - 6^{m+1} = $10^4 \cdot 6 \cdot s$. Таким чином, починаючи з номера *m,* набори останніх чотирьох чисел починають періодично повторюватись; при *n* > *m* набори останніх чотирьох цифр чисел 6^n і 6^{n+r} однакові.

● **Задача 1.3**. У країні жила певна кількість лицарів, кожні два з яких дружили або ворогували між собою, причому кожен мав рівно *n* ворогів *(n*-натуральне число). Серед лицарів діяв принцип: "Ворог мого друга - мій ворог". Одного разу один лицар розлютився, викликав на бій та повбивав усіх своїх ворогів, після чого у країні залишилося рівно d лицарів. Довести, що *n* ділиться на d .

Розв'язання.

З лицарського принципу випливає, що весь загал лицарів був поділений на клани, що ворогують, але всередині яких лицарі дружать. За умовою всі мали однакову кількість ворогів, отже в усіх кланах була однакова кількість лицарів, саме - d. Тепер очевидно, що *n* ділиться на d*,* бо множина ворогів складалася для лицаря з кланів, до яких він не належав.

● **Задача 1.4.** а) Деяка комісія збиралась 40 раз. Кожного разу на засіданнях були присутні по 10 чоловік, причому жодні два із членів комісії не були разом на засіданнях більше одного разу. Доведіть, що число членів комісії більше 60. б) Доведіть, що із 25 чоловік не можна скласти більше 30 комісій по 5 чоловік в кожній, щоб жодні дві комісії не мали більше одного спільного члена.

Розв'язання.

а) <u>Перший розв'язок.</u> Кожна пара членів комісії могла зустрітися не більше ніж на одному засіданні. На кожному засіданні було C_{10}^2=45 пар. Так як було 40 засідань, то із членів комісії можна утворити не менше 1800=45·40 пар. Але із 60 (або менше) чоловік можна утворити не більше C_{60}^2=60·59/2<1800 пар.Другий розв'язок. Нехай число N членів комісії не більше 60. Тоді, так як10-40/N>6, то знайдеться людина, яка побувала принаймні на семи засіданнях.Всі ті люди, з якими вона зустрічалась, - різні і їх загальна кількість $7\cdot 9>59$.Протиріччя.

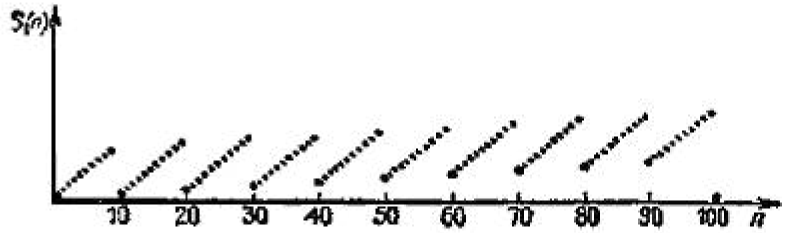
б) Ця задача розв'язується так само, як а).

Цікаво, що наведена тут оцінка являється точною: 30 комісій по 5 чоловік, які задовольняють умові задачі, скласти можна.

● **Задача 1.5.** Доведіть, що серед довільних 39 послідовних натуральних чисел обов'язково знайдеться таке, у якого сума цифр ділиться на 11.

Розв'язання.

Серед перших двадцяти з даних чисел знайдуться два , у яких остання цифра десяткового запису рівна нулю.



Тоді числа n, n+1, ..., n + 9, n+1 0 містяться серед даних 39 і мають суми цифр s, s + 1, s + 2, ..., s + 10. Але серед одинадцяти послідовних чисел хоча б одне ділиться на 11.

Взагалі, для кожного m = 2, 3, ... можна знайти найменше c_m таке, щоб серед довільних c_m послідовних натуральних чисел хоча б у одного сума цифр ділилась на m (для m < 20 досить вивчити поведінку функції "сума цифр числа п" в межах однієї сотні; графік цієї функції зображено на мал.); зокрема, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, ...,$c_{10} = 19$, $c_{11} = 39$, $c_{12} = 59$,... .

● **Задача 1.6.** Вузли нескінченного клітчатого паперу розфарбовані в два кольори. Доведіть, що існують дві горизонтальні та дві вертикальні прямі, на перетині яких лежать точки одного кольору.

Розв'язання.

Візьмемо три вертикальні прямі і дев'ять горизонтальних. Будемо розглядати тільки точки перетину цих прямих. Так як є лише $2^3 = 8$ варіантів фарбування трьох точок в два кольори, то знайдуться дві горизонтальні прямі, на яких лежать однаково розфарбовані трійки точок. Серед трьох точок, розфарбованих в два кольори, знайдуться дві однаково розфарбовані точки. Вертикальні прямі, які проходять через ці точки, разом з вибраними раніше двома горизонтальними є шуканими.

● **Задача 1.7.** Всередині рівностороннього трикутника зі стороною 1 міститься п'ять точок. Доведіть, що відстань між деякими двома з них менша за 0,5.

Розв'язання.

Середні лінії правильного трикутника зі стороною 1 розбивають його на чотири правильних трикутника зі стороною 0,5. Тому в одному з них лежать принаймні дві дані точки, причому ці точки не можуть попасти у вершини трикутника. Відстань між цими точками менша за 0,5.

● **Задача 1.8.** У квадраті зі стороною 1 знаходиться 51 точка. Доведіть, що будь-які три з них можна покрити колом радіуса1/7.

Розв'язання.

Розріжемо даний квадрат на 25 однакових квадратиків зі стороною 0,2. В один з них попадає не менше трьох точок. Радіус описаного кола квадрата зі стороною 0,2 дорівнює $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$, тому його можна покрити колом радіуса 1/7.

● **Задача 1.9.** Кожний з двох дисків розділено на 1985 рівних секторів і на кожному розфарбовано довільним чином (одним кольором) по 200 секторів. Диски наклали один на одного і один стали повертати на кути, кратні 360/1985. Доведіть, що існує принаймні 80 положень, при яких співпадає не більше 20 розфарбованих секторів.

Розв'язання.

Візьмемо 1985 дисків, розфарбованих так само, як другий з наших дисків, і покладемо їх на перший диск так, щоб вони займали всі можливі положення. Тоді над кожним пофарбованим сектором першого диска розташовано 200 пофарбованих секторів, тобто усього маємо 200^2 пару співпадаючих пофарбованих секторів. Нехай матимемо n положень другого диска, при яких збігається не менше 21 пари пофарбованих секторів. Тоді число збігів пофарбованих секторів не менше 21n. Тому $21n \le 200^2$, тобто $n \le 1904{,}8$. Так як n - ціле число, то $n \le 1904$. Отже, принаймні при 1985 - 1904 = 81 положеннях збігається не більше 20 пар пофарбованих секторів.

● **Задача 1.10.** У крузі, площа якого дорівнює 1, розміщено 1981 точку. Доведіть, що можна вибрати три з них таким чином, щоб площа трикутника з вершинами в цих точках була менша 0,0011.

Розв'язання.

Розіб'ємо круг на 990 рівних секторів з кутом $\varphi = \frac{2\pi}{990}$. Тоді хоча б в одному з секторів за принципом Діріхле виявиться не менше трьох точок (точку, яка лежить на межі двох секторів, вважаємо такою, що належить одному з них, принцип Діріхле). Розглянемо сектор, який містить не менше трьох з даних 1981 точки. Візьмемо які-небудь три точки, що потрапили до даного сектора, і розглянемо трикутник з вершинами в цих точках. Цей трикутник розміститься у секторі. Тому його площа не більша площі сектора.

$$S=\frac{1}{2}R^2\varphi=\frac{1}{2}\pi R^2\frac{\varphi}{\pi}=\frac{1}{2}S_{кр}\frac{\varphi}{\pi}=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{1}{990}.$$

Отже, площа трикутника не більша 1/990<0.0011.

● **Задача 1.11**. Дано правильний 72-кутник. Льоня та Костя грають у гру "Отримай правильний трикутник ", вони по черзі відмічають олівцем по одній ще не відміченій вершині 72-кутника: Льоня - червоним, Костя - синім. Починає гру Льоня, а виграє той, хто першим відмітить своїм кольором три вершини деякого рівностороннього трикутника. Якщо всі вершини відмічені, а такого трикутника немає, гра закінчується внічию. Довести, що Костя може грати так, щоб не програти.

Розв'язання.

Розіб'ємо вершини даного 72-кутника на 24 трійки, де кожна трійка - вершини правильного трикутника. Якщо якась точка трійки позначається червоним і в трійці немає синіх точок, Костя одразу робить хід в цю трійку. Якщо синя точка там вже є, Костя робить хід будь-куди. У Кості завжди буде можливість так ходити, до того ж не утвориться правильного трикутника з червоних вершин.

▲ **Задача 1.12**. На кожній із планет деякої системи знаходиться астроном, який спостерігає найближчу планету. Відстані між планетами попарно різні. Доведіть, що якщо число планет непарне, то яку-небудь планету ніхто не спостерігає.

Розв'язання.

Візьмемо дві найближчі одна до одної планети. Зрозуміло, що астрономи на цих планетах дивляться один на одного. Залишається ще n-2 планети і n-2 астрономи. Якщо хоча б один з них дивиться на вже вибрану планету, то на одну із n-2 планет не вистачить астрономів. Якщо ж на ці дві планети ніхто більше не дивиться, то знову можна застосувати теж судження: виберемо вже із n-2 планет дві найближчі і т.д. Оскільки n- непарне, в кінці кінців залишиться одна планета, яку ніхто не спостерігає.

▲ **Задача 1.13**. "Король-самогубець". На шаховій дошці розміром 1000×1000 стоїть ч орний король і 499 білих тур. Доведіть, що при довільному початковому положенні фігур король може стати під удар білої тури, як би не грали білі.(Ходи робляться так само, як і в звичайних шахах).

Розв'язання.

Якщо король буде рухатись з лівого нижнього кута дошки в правий верхній кут по діагоналі, то на якомусь кроці він обов'язково стане під удар білої тури. Для доведення достатньо зауважити, що після першого кроку короля усі білі тури повинні бути вище третьої горизонталі і правіше третьої вертикалі (далі король стане під удар наступним ходом). Так само перед кроком короля в правий верхній куток всі тури повинні бути нижче 998-й горизонталі і лівіше 998-й вертикалі. Разом до свого останнього кроку по діагоналі король зробить 997 кроків. При цьому кожна тура при русі короля повинна зробити 2 кроки(змінити горизонталь і вертикаль, на яких вона знаходилась на початку), але тур 499, і на це їм знадобилось би 2 • 499 = 998 > 997 кроків.

▲ **Задача 1.14.** На великому прийомі в посольстві зібралося 1998 осіб. Відомо, що серед довільної четвірки цих осіб знайдуться троє, які знайомі один з одним, або ж троє, які один з одним не знайомі. Доведіть, що серед цих людей можна знайти 999, які або знайомі один з одним, або ж один з одним не знайомі.

Розв'язання:

Доведемо методом індукції за &, що довільну компанію з £ лю дей, кожна четвірка яких містить або трьох попарно знайомих або трьох попарно незнайомих людей, можна розмістити в двох кімнатах так, щоб у одній усі були попарно знайомі, а в іншій - попарно незнайомі. Твердження задачі легко випливатиме з цього результату та принципу Діріхле.

При k = 4 твердження очевидне. Зробимо індукційний крок $k \rightarrow k+1$. Виділимо одну людину (позначимо її *А).* За припущенням індукції, тих, хто залишався можна розсадити в дві кімнати. Виберемо таке розміщення у цих двох кімнатах, щоб сумарна кількість людей з першої (де всі один одного знають), які не знайомі з А, та з другої, що знайомі з А, була найменшою можливою. Якщо А знає всіх в першій кімнаті, його можна посадити туди. Якщо він не знає нікого в другій кімнаті, то його можна посадити туди. Нехай В з першої кімнати не знайомий з А, а С з другої - знайомий з А. Тоді для довільного $D \neq B$ з першої кімнати маємо четвірку А, В, С, D. З умови отримуємо, що С і D знайомі. Аналогічно маємо, що В має бути не знайомий з кожною людиною другої кімнати, відмінною від С. Отже, В і С можна поміняти місцями, після чого сумарна кількість людей з першої кімнати, які незнайомі з А, та з другої, що не знайомі з А, зменшиться. Це протирічить вибору розміщення по кімнатах. Отже, А можна приєднати до однієї з кімнат.

▲ **Задача 1.15**. Дано нескінченний клітчатий папір і фігуру, площа якої менша за площу клітинки. Доведіть, що цю фігуру можна покласти на папір так, щоб не покрити жодної вершини клітинки.

Розв'язання.

Приклеїмо фігуру до паперу в клітинку довільним чином, розріжемо папір по клітках і складемо їх у стопку, переносячи їх паралельно і не перевертаючи. Спроектуємо цю стопку на клітку. Проекції частин фігури не можуть покрити всю клітку, адже їх площа менша. Згадаємо тепер, як була розташована фігура на папері в клітинку, і зрушимо папір паралельно, щоб її вершини потрапили в точки, що проектуються в яку-небудь непокриту точку. У результаті одержимо шукане розташування фігури.

▲ **Задача 1.16.** Всередині квадрата із стороною 1 міститься фігура А, площа якої більша від 1/2. Довести, що всередині фігури є дві точки, взаємно симетричні відносно центру квадрата.

Розв'язання.

Відобразимо фігуру А симетрично відносно центра квадрата. Дістанемо фігуру А', яка повністю лежить всередині квадрата (квадрат - фігура, симетрична відносно свого центра). Площа фігури А’ дорівнює площі фігури А. Оскільки сума площ фігур А і А’ більша за 1, то, згідно з принципом Діріхле, для площ існує точка К, яка належить обом фігурам. Розглянемо точку K_1, симетричну точці К відносно центра квадрата. Точки К і K_1 є шуканими: обидві вони належать фігурі А і є взаємно симетричними відносно центра квадрата.

▲ **Задача 1.17.** Дано правильний 45-кутник. Чи можна розставити в його вершинах цифри 0,1, ..., 9 так, щоб для довільної пари різних цифр знайшлась сторона, кінці якої занумеровані цими цифрами?

Розв'язання.

Цифра а утворює 9 пар (з кожною із дев'яти інших цифр). Щоб для всіх цих пар знайшлась сторона 45-кутника, що занумерована відповідними цифрами, необхідно підставити а хоча б в п'яти його вершинах. Так як цифр всього десять, то для їх розміщення необхідно 50 місць. Тому необхідне в умові розміщення неможливе. З другого боку, якщо n парне, то числа 0, 1, ...,n можна розмістити в вершинах правильного $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-кутника так, щоб для кожної пари цих чисел знайшлась сторона з відповідними числами на кінцях.

▲ **Задача 1.18**. На майдані вишикували колону солдат (1995 солдат), причому деякі з них стояли правильно, а деякі задом наперед. Сержант Сміт пам'ятає лише команду "Ась!". За цією командою кожен солдат, що бачить парну кількість обернених до нього облич повертається на 180°, а решта залишаються нерухомі. Всі рухи за командою виконуються одночасно. Довести, що сержант може зорієнтувати всіх солдат в один бік.

Розв'язання.

Назвемо групою підмножину солдат, що стоять поруч і однаково орієнтовані, і назвемо ключем максимальну групу. Очевидно, що ніяка група не може розділиться після руху за командою, тобто нам досить довести, що кількість ключів співпадає. Нехай це не так. Розглянемо не крайній ключ A з кількістю солдатів A . Якщо $|A|$ - непарне число, то два сусідні ключі бачать перед собою різну за парністю кількість облич, а тому після чергової команди ключ A зіллється з одним з них. Звідси маємо, що $|A|$ - парне число, а оскільки 1995 - непарне число, то один з крайніх ключів має непарну кількість солдат. Тому цей ключ бачить перед собою парну кількість облич і неодмінно повертається . Сусідній ключ, що дивиться на нього (можливо, через один крок), залишається на місці, а отже ключі неодмінно зливаються.

▲ **Задача 1.19**. У колі радіуса 16 міститься 650 точок. Доведіть, що знайдеться кільце з внутрішнім радіусом 2 і зовнішнім радіусом 3, в якому лежить не менше 10 з даних точок.

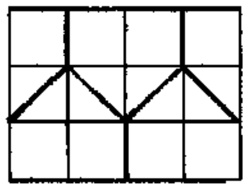
Розв'язання.

Помітимо спочатку, що точка X належить кільцю з центром O тоді і тільки тоді, коли точка O належить такому ж кільцю з центром *X*. Тому досить довести, що якщо побудувати кільця з центрами в даних точках, то одну з точок розглянутого кола покриє не менш 10 кілець. Розглянуті кільця лежать всередині кола радіуса 16 + 3 = 19, площа якого дорівнює 361 π. Залишається помітити, що $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$, а сумарна площа кілець дорівнює $650 \cdot 5\pi = 3250\pi$.

▲ **Задача 1.20**. У прямокутнику 3×4 міститься 6 точок. Доведіть, що серед них знайдуться дві точки, відстань між якими не перевищує $\sqrt{5}$.

Розв'язання.

Розріжемо прямокутник на п'ять фігур, як показано на мал. В одну з них попадуть принаймні дві точки, а відстань між довільними двома точками кожної з цих фігур не перевищує $\sqrt{5}$.



мал.

■ **Задача 1.21**. Доведіть, що серед довільних 2m+1 різних цілих чисел, що не перевищують по модулю 2m-1, можна знайти три числа, сума яких рівна 0.

Розв'язання.

Індукція по n_i: при m = 1 твердження вірне. Нехай воно вірне для m = =к - 1 (к>2). Розглянемо довільну множину A, що складається з 2к + 1 чисел, не більших 2к - 1 по модулю. Якщо серед них знайдуться 2к - 1 чисел, які не перевищують по модулю 2к - 3, то все ясно. У протилежному випадку можна вважати, що в A або містяться числа 2k - 1, 2k - 2 і -2k + 1, або 2k - 1, 2k - 2 і -2k -2.У першому випадку слід розглянути пари (1; 2к-2), (2; 2к-3), ..., (к- 1,к) і (0; -2к+ 1), (-1; -2к + 2), ..., (-к+ 1; -k). Хоча б одна пара складається з чисел, що входять в A. В другому випадку аналогічно розглядаються пари (1; 2к - 3),..., (к - 2; k) і (0; -2к + 1), (-1; -2k),..., (-к+1; -k).

■ **Задача 1.22.** 2^n простих чисел виписані в рядок. Відомо, що серед них менше n різних чисел. Доведіть, що можна вибрати групу з поряд розміщених чисел, добуток яких є повним квадратом.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі достатньо показати, що в деякій групі поряд розміщених чисел кожне просте число зустрічається парну кількість разів. Нехай в даній послідовності $\{a_1\ a_2, ..., a_{2^n}\}$ зустрічається m різних простих чисел $p_1\ p_2, ..., p_m$. За умовою $m < n$. Позначимо через C_{ij} степінь числа $p_i(1 \le i \le m)$, в якій це число входить у добуток $a_1, a_2, ..., a_j$ перших j чисел даної послідовності, $1 < j < 2^m$. Нехай d_{ij} - остача від ділення c_{ij}- на 2: c_{ij}- = 2_{ij}- + d_{ij}, ($d_{ij} \in \{0,1\}$). Кожний набір виду $(d_{1j},d_{2j},\dots d_{mj})$ складається із пі нулів і одиниць, разом таких наборів 2^n, оскільки $1 < j < 2^n$. Помітимо, що взагалі існує 2^m різних наборів $(d_1, \bullet\bullet\bullet, d_m)$, де d_i є $\{0, 1\}$. Так як $2^m < 2^n$ за умовою, то серед побудованих 2^n наборів знайдуться два однакових $(d_{1j},d_{2j},\dots d_{mj}) = (d_{1k},d_{2k},\dots d_{mk})$ для деяких $1 < j < к < 2^n$. Отже $d_{ij}=d_{ik}$, для всіх $1 <i < m$. Звідси слідує, що $c_{ik} - c_{ij} = 2(1_{ik} – 1_{ij}) + (d_{ik} - d_{ij}) = 2(1_{ik} – 1_{ij})$ ділиться на 2 при довільному $1 < i < m$. Помітимо, що за означенням c_y число р зустрічається у добутку $a_{j+1}a_{j+2}\dots a_k = \dfrac{a_1a_2...a_k}{a_1a_2...a_j}$ рівно c_{ik}-c_{ij} раз. Тому довільне число р входить у добуток $a_{j+1}a_{j+2}\dots a_k$ в парній степені, тобто $a_{j+1}a_{j+2}\dots a_k$ - точний квадрат.

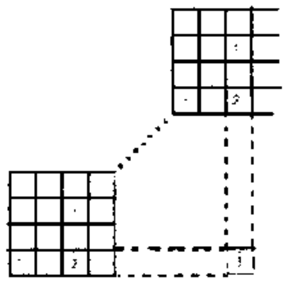
■ **Задача 1.23.** Вузли нескінченного клітчатого паперу розфарбовані в три кольори. Доведіть, що існує рівнобедрений прямокутний трикутник з вершинами одного кольору.

Розв'язання.

Припустимо, що немає рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами, паралельними сторонам кліток, і вершинами одного кольору. Для зручності можна вважати, що розфарбовано не вузли, а клітки. Розіб'ємо лист на квадрати зі стороною 4; тоді на діагоналі кожного такого квадрата знайдуться дві клітки одного кольору. Нехай число *n* більше кількості різних розфарбувань квадрата зі стороною 4. Розглянемо квадрат, що складається з n^2 квадратів зі стороною 4. На його діагоналі знайдуться два однаково розфарбованих квадрати зі стороною 4. Візьмемо, нарешті, квадрат К, на діагоналі якого знайдуться два однаково розфарбованих квадрати зі стороною *4n.*

Розглянувши квадрат зі стороною *4n і* в ньому два однаково розфарбованих квадрати зі стороною 4, одержимо чотири клітки першого кольору, дві клітки другого кольору й одну клітку третього кольору (мал.). Аналогічно, розглянувши квадрат К, одержимо клітку, що не може бути ні першого, ні другого, ні третього кольору.

Таким чином, припущення, що не існує рівнобедреного прямокутного трикутника з вершинами одного кольору, неправильне.



мал.

■ **Задача 1.24.** Доведіть, що у випуклий чотирикутник площі S і периметра P можна помістити круг радіуса S/P.

Розв'язання.

Розв'яжемо цю задачу для довільного випуклого n - кутника площі S і периметра P. Нехай довжини сторін цього многокутника a_1 a_2,..., a_n ($a_1 + a_2 + ... + a_n = P$). Розглянемо прямокутник площі S з основою P, висота його рівна , очевидно, S/P. Розріжемо тепер цей прямокутник вертикальними відрізками на п - прямокутників з основами a_1 a_2, ..., a_n і прикладемо кожний із отриманих прямокутників до відповідної сторони зсередини.
Деякі прямокутники будуть накладатися один на одного, деякі можуть "вилазити" за межі даного многокутника, і тому, оскільки їх загальна площа рівна S, а площа многокутника - теж S, не покриють його повністю. Довільна непокрита точка може служити центром необхідного круга радіуса S/P.

■ **Задача 1.25.** Дано 1995 відрізків таких, що із будь-яких 3 з них можна скласти трикутник. Довести, що, використовуючи ці 1995 відрізків, можна скласти 664 гострокутних трикутників так, щоб кожний відрізок входив до складу не більш ніж одного трикутника.

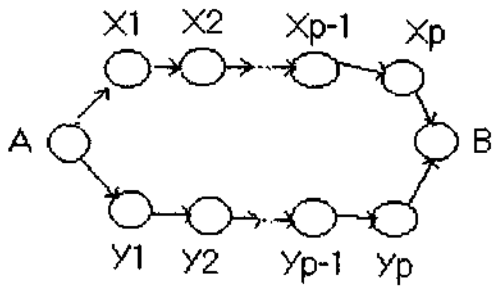
Розв'язання.

Виберемо довільні 5 відрізків. Доведемо, що серед цих 5 відрізків існують 3, з яких можна скласти гострокутний трикутник. Припустимо, що це не так. Нехай $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ - довжина цих відрізків. Оскільки з них не можна скласти гострокутний трикутник ,
то $a_5^2 \geq a_4^2 + a_3^2, a_4^2 \geq a_3^2 + a_2^2, a_3^2 \geq a_2^2 + a_1^2$ звідси випливає, що $a_5^2 \geq a_4^2 + a_3^2 \geq (a_3^2 + a_2^2) + a_3^2 + a_2^2 \geq 2(a_2^2 + a_1^2) + a_2^2 = 3a_2^2 + 2a_1^2 \geq a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_1 + a_2)^2$,
тобто $a_5 > a_1 + a_2$. Але це суперечить тому, що з відрізків довжини a_1, a_2,a_5 можна скласти трикутник . Тепер, вибравши довільні п'ять відрізків, ми з них вибираємо три, з яких складаємо гострокутний трикутник. З 1995 — 3 = 1992 , що залишилися, виконуємо таку саму операцію і т.д. нарешті з шести беремо п'ять, з який вибираємо три і складаємо гострокутний трикутник.

■ **Задача 1.26**. *Мовчання ягнят* - 2. В країні Голівудії більше ніж 3 міста. Кожні два міста з'єднані єдиною дорогою, рух якою дозволено в якомусь одному напрямку. Маніяк - убивця Ганнібал Лектор мандрує Голівудією, кожного дня змінюючи місто перебування, доки це можливо. Поліція його заарештує, як тільки знатиме, в якому місті він знаходиться. Уряд дозволив тимчасово перекрити частину доріг у країні за вибором поліції, але так, щоб для кожного міста залишалися відкритими дві дороги, які йому належать (дорога належить місту, якщо вона входить чи виходить з нього). Чи можна бути впевненим, що тепер Лектора заарештують? (В поліції Голівудії працюють хороші математики).

Розв'язання.

Лектора зловлять, якщо для кожної системи напрямків доріг існуватиме цикл вигляду, що показаний на малюнку, де $p + q + 2$ - кількість міст, $p > 0$,



Мал.

$q \geq 0$ (Поліція знатиме, що через $max\{p + q\}+1$ день Лектор буде у місті В.). Доведемо індукцією за кількістю міст, що такий цикл завжди знайдеться. Для чотирьох міст досить перебрати всі варіанти.

Нехай доведено для n міст. Покажемо, що в зображеній на малюнку цикл можна включити ще одне місто $(p + q + 2 = n\}$. Назвемо це n +1 - е місто С. Маємо $p + q = n-2\geq 2$, тож max {p,q} ≥ 1. Нехай для визначеності, $p \geq 1$.

1. Якщо дорога веде від С до А, то перекриємо AX_1 і залишимо відкритими AC та CX_1;
2. Якщо не 1) і дорога веде від B до C, то перекриємо X_pB і залишимо X_pC та CB;
3. Якщо не 1) та не 2), тоді існує $1 \leq k \leq p + 1$таке, що дорога веде від X_{k+1} до С і від С до X_k, (ми позначили $X_0 = A$, $X_{p+1} = B)$. Перекриємо $X_{k-1} X_k$ і залишимо X_k C та X_{k-1} C. У всіх випадках одержано цикл потрібного вигляду.

■ **Задача 1.27.** *Війна у місті.* Приїхавши задля встановлення миру, генерал Качур виявив, що місто Страшний має вигляд прямокутника $m\times n$, розподіленого вулицями на mn одиничних квадратів кварталів (сторони прямокутника теж є вулицями). Лінія фронту між військами уряду та повстанцями Бабаєва є ламаною, що проходить по вулицях, з'єднуючи дві протилежні вершини прямокутника, і має довжину $m + n$. Кожного дня повстанці захоплюють якісь суміжні прифронтові квартали, змінюючи лінію фронту, але залишаючи її довжину незмінною. Коли така операція стане

Мал.

неможливою, Бабаєв погодиться на перемир'я. Довести, що Качур може визначити, як проходитиме лінія фронту на момент укладання перемир'я, знаючи лише, як вона проходить на момент його приїзду.

Розв'язання.

Пофарбуємо квартали міста в шаховому порядку. Різниця *K* між кількістю чорних і білих кварталів, що належать уряду, не змінюється в результаті операції повстанців. Ситуація має вигляд, показаний на малюнку, де $0 \leq k \leq \min\{m,n\}$. Неважко показати, що для різних значень k значення *R* також різні, тому k визначається за R однозначно.

■ **Задача 1.28**. Кожна з дев'яти прямих розбиває квадрат на два чотирикутники, площі яких відносяться як 2:3. Доведіть, що принаймні три з цих дев'яти прямих проходять через одну точку.

Розв'язання.

Дані прямі не можуть перетинати сусідні сторони квадрата *ABCD,* тому що інакше утворяться не два чотирикутники, а трикутник і п'ятикутник. Нехай пряма перетинає сторони *BC* і *AD* у точках *M* й *N.* Трапеції *ABMN і CDNM* мають рівні висоти, тому їх площі відносяться як середні лінії, тобто *MN* ділить відрізок, що з'єднує середини сторін AB і CD у відношенні 2:3. Точок, що ділять середні лінії квадрата у відношенні 2:3, маємо рівно чотири. Тому що дані дев'ять прямих проходять через ці чотири точки, то через одну з точок проходять принаймні три прямі.

■ **Задача 1.29.** Всередині випуклого 2n-кутника взята точка P. Через кожну вершину і точку P проведена пряма. Доведіть, що знайдеться сторона многокутника, з якою жодна з проведених прямих не має спільних внутрішніх точок.

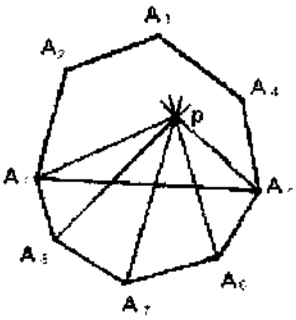
Розв'язання.

Можливі два випадки:

1. Точка *P* лежить на деякій діагоналі *AB.* Тоді прямі *PA і PB* збігаються і не перетинають сторін. Залишаються *2n-2* прямі; вони перетинають не більше *2n - 2* сторін.

2. Точка *P* не лежить на діагоналі многокутника $A_1 A_2 \dots A_{2n}$. Проведемо діагональ $A_1 \dots A_{N+1}$. По обидві сторони від неї лежить по *n* сторін. Нехай для визначеності точка *P* лежить всередині многокутника $A_1 \dots A_{n+1}$. (мал.). Тоді

прямі PA_{n+1}, PA_{n+2}, ..., PA_{2n}, PA_1, (число цих прямих дорівнює n+1) не можуть перетинати сторони A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, ..., A_{2n}, A_1 Тому прямі, що залишились, можуть перетинати не більше ніж n - 1 цих *n* сторін.

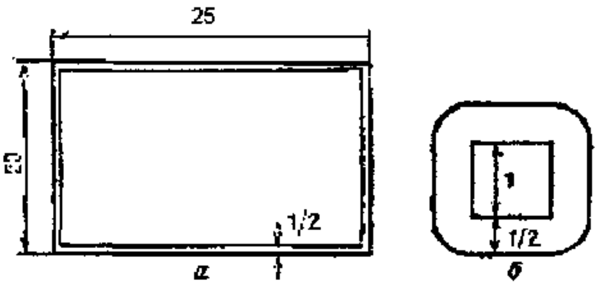


мал.

■ **Задача 1.30.** У прямокутник зі сторонами 20 і 25 кидають 120 квадратів зі стороною 1. Доведіть, що в прямокутник можна помістити круг діаметра 1, який не перетинається з жодним із квадратів.

Розв'язання.

Центр круга з діаметром 1, який цілком розміщується всередині прямокутника, повинен бути розміщений на відстані, більше 1/2, від довільної із сторін прямокутника, тобто всередині "рамки", яка зображена на мал. а.



мал. а мал. б

Площа внутрішнього прямокутника дорівнює *19*24* = 456. Крім цього, центр круга повинен бути розміщений на відстані, більше 1/2, від контуру довільного з квадратів, тобто поза кожною фігуркою площі $3+\frac{\pi}{4}$, зображеної на мал. б. Навіть якщо ці фігурки не перетинаються і не торкаються рамки, їх сумарна площа рівна $120(3 + \pi/4) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \cdot 3{,}2 = 456$.

Таким чином, цими фігурками покрити прямокутник площі 456 не можна і, відповідно, знайдеться круг з діаметром 1, який не перетинається з жодним із квадратів.

Розділ ІІ
Числа Фібоначчі

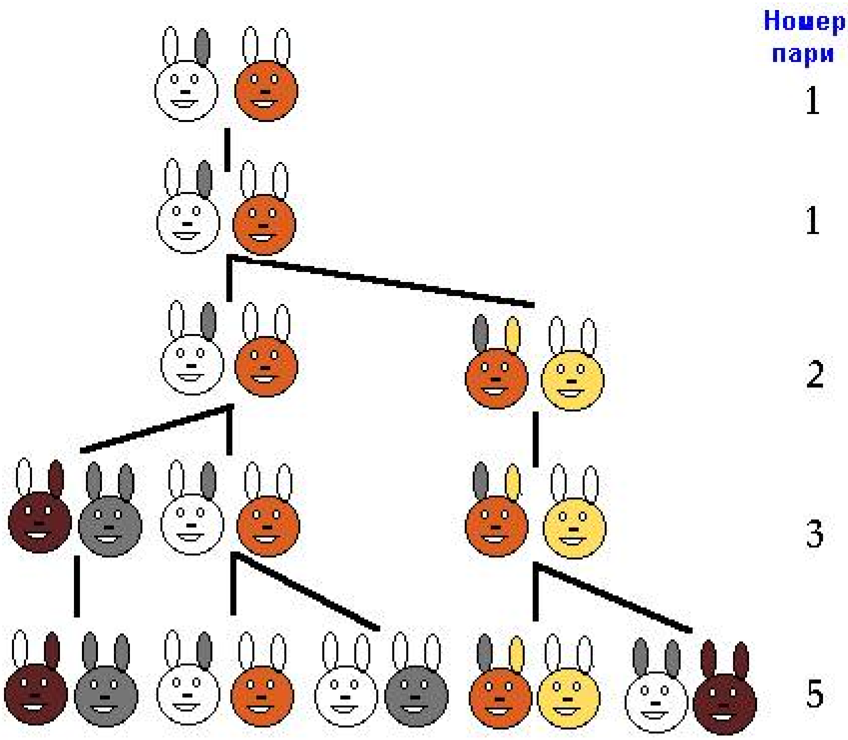
Числа Фібоначчі – це елементи послідовності натуральних чисел $U_1, U_2, \ldots$, які визначаються початковими значеннями $U_1 = U_2 = 1$ та рекурентним співвідношенням:

$$U_{n+1} = U_{n-1} + U_n, \text{ де } n > 2,$$

тобто, це числа ряду

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,34,... \quad (1)$$

Однією із задач, які приводять до чисел Фібоначчі є **задача „Про розмноження кроликів”**: „Скільки пар кроликів можна розвести протягом року маючи одну пару, якщо кожна пара кожного місяця породжує нову пару, яка з другого місяця здатна давати потомство, і при цьому кролики не гинуть”. (Рис.2.1)



(Рис.2.1)

Розглянемо інші задачі, які також приводять до чисел Фібоначчі.

▲ **Задача „Про розміщення листків на гілці”.**

Якщо листки на гілці розміщені поодинці, то вони завжди ростуть навколо стебла не по колу, а по гвинтовій лінії. При цьому для кожного виду рослин характерний свій кут розходження двох сусідніх листків, який, як стверджують ботаніки, буває більш-менш сталий в усіх частинах стебла. Цей кут звичайно подають дробом, який показує, яку частину кола він становить. Так, у липи і у в'яза кут розходження листків дорівнює $\frac{1}{2}$, у бука — $\frac{1}{3}$. Якщо скласти послідовність найбільш поширених кутів розходження (в частинах кола) для рослин, які ростуть у нашій місцевості, то ряд знаменників для такої послідовності утворює послідовність чисел Фібоначчі.

▲ Задача „ Про фарбування будинків у містечку".

Будинки у містечку потрібно пофарбувати так, щоб кожен поверх виявився пофарбованим або в білий, або в блакитний колір. З естетичних міркувань ніякі два сусідні поверхи не повинні бути пофарбованими в блакитний колір. Скількома способами можна пофарбувати будинки в містечку, дотримуючись вказаних вимог, якщо число їх поверхів визначено?

Одноповерхові будинки можна пофарбувати двома способами, двоповерхові — трьома, триповерхові — п'ятьма способами. Це означає, що із збільшенням кількості поверхів, число способів зростає так: 2, 3, 5,... Якщо в містечку є будинки з більшою кількістю поверхів, цей ряд треба продовжити. Далі, знаючи скільки в містечку одно-, дво-, три- і т. д. поверхових будинків, неважко отримати розв'язок цієї задачі.

▲ Задача про ріст дерев.

Нехай деяке дерево росте таким чином, що кожна нова гілка протягом першого року тягнеться догори або вбік, а потім (починаючи з другого року) щорічно дає по одному бічному пагону. (Рис.2.2)

Скільки гілок буде на дереві, яке виросло із саджанця без жодного бічного паростка через 1, 2, 3, 4, 5, і т.д. років?

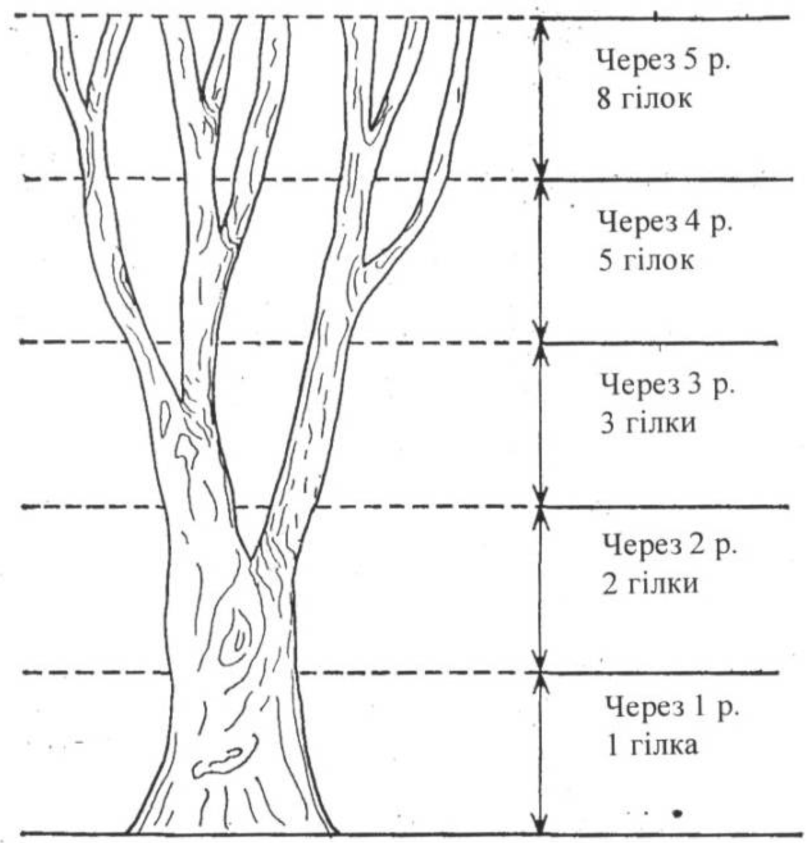


Рис.2.2

Ще деякі задачі, що приводять до поняття послідовності чисел Фібоначчі.

Нескінченна доріжка розрізана на квадратики. Перед першим з квадратиків стоїть жабка, яка вміє стрибати стрибками двох видів – довгими і короткими.

Коротким стрибком жабка перестрибує на наступний квадратик, а довгим перестрибує через квадратик. Знайти число різних маршрутів, якими жабка може дострибнути до третього квадрата; до четвертого квадрата; до сьомого квадрата.

● **Задача 2.1.** Скільки серед десятизначних чисел, які складаються з цифр 2 і 5, таких, у яких дві двійки не знаходяться поруч?

Розв'язання:

Розіб'ємо всі десятизначні числа, які задовольняють умову задачі, на 2 групи. До першої віднесемо ті числа, які закінчуються на 5, а до другої – ті, які закінчуються на 2. Закреслюючи у всіх чисел з першої групи останню цифру 5, ми отримуємо всі дев'ятизначні числа, в яких жодні дві двійки не знаходяться поруч. Закреслюючи у всіх чисел з другої групи останні дві цифри 5 і 2, ми отримуємо всі восьмизначні числа, в яких також жодні дві двійки не стоять поруч. Позначимо кількість n-значних чисел, які складаються з цифр 2 і 5, при чому в них жодні дві двійки не стоять поруч, через a_n. Наше міркування показує, що $a_{10} = a_9 + a_8$. Помітимо, що воно вірне для будь-якого $n \geq 3$, тобто, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Оскільки $a_1 = 2,$ $a_2 = 3$, то за цією формулою, маємо $a_3 = 5, a_4 = 8$ і так далі, $a_{10} = 144$. Ми бачимо, що ця послідовність – це просто занумерована з третього члена послідовність Фібоначчі.

● **Задача 2.2.** Довести, що сума перших перших n чисел Фібоначчі обчислюється за формулою:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_{n+2} - 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Розв'язання: Насправді: $U_1 = U_3 - U_2$

$$U_2 = U_4 - U_3$$

....

$$U_n = U_{n+2} - U_{n+1}$$

Додавши рівності почленно, отримаємо:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_{n+2} - U_2.$$

Але оскільки $U_2 = 1$, то

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_{n+2} - 1$$

● **Задача 2.3.** Довести, що сума чисел Фібоначчі із непарними номерами:

$$U_1 + U_3 + U_5 + ... + U_{2n-1} = U_{2n} \qquad \textbf{(2)}$$

Розв'язання: Представимо кожний член цієї суми наступним чином:

$$U_1 = U_2$$

$$U_3 = U_4 - U_2$$

$$U_5 = U_6 - U_4$$

....

$$U_{2n-1} = U_{2n} - U_{2n-2}$$

Додавши всі ці рівності почленно, ми й отримаємо необхідне.

● **Задача 2.4.** Довести, що сума чисел Фібоначчі з парними номерами:

$$U_2 + U_4 + U_6 + ... + U_{2n} = U_{2n+1} - 1 \qquad \textbf{(3)}$$

Розв'язання: Враховуючи розв'язок задачі 2.1, маємо:

$$U_1+U_2+...+U_n=U_{n+2}-1,$$

звідси

$$U_1+U_2+...+U_{2n}=U_{2n+2}-1.$$

Віднявши почленно із цієї рівності рівність (2), одержимо:

$$U_1+U_2+...+U_{2n}=U_{2n+2}-1-U_{2n}=U_{2n+1}-1$$

що і треба було довести.

● **Задача 2.5.** Довести, що вираз для знакопочережної суми чисел Фібоначчі обчислюється за формулою:

$$U_1-U_2+U_3-U_4+...+(-1)^{n+1}U_n=(-1)^{n+1}U_{n-1}+1 \qquad \textbf{(4)}$$

Розв'язання:

Із рівності (2) маємо:

$$U_1+U_3+...+U_{2n-1}=U_{2n}$$

Із рівності (3) маємо:

$$U_2+U_4+...+U_{2n}=U_{2n+1}-1$$

Віднімемо ці рівності

$$\begin{aligned}&U_1-U_2+U_3-U_4+...+U_{2n-1}-U_{2n}=-U_{2n+1}+1+U_{2n}=\\&=-U_{2n}-U_{2n-1}+1+U_{2n}=-U_{2n-1}+1\end{aligned} \qquad (5)$$

Додамо до обох частин рівності U_{2n+1}:

$$U_1-U_2+U_3-U_4+...+U_{2n-1}-U_{2n}+U_{2n+1}=U_{2n}+1 \qquad (6)$$

Якщо об'єднати рівності (5) і (6), то отримаємо рівність для знакопочережної суми чисел Фібоначчі (4).

● **Задача 2.6** Довести, що суми квадратів перших n чисел Фібоначчі:

$$U_1^2+U_2^2+...+U_n^2=U_nU_{n+1} \qquad \textbf{(7)}$$

Розв'язання: Помітимо спочатку, що:

$$U_kU_{k+1}-U_kU_{k-1}=U_k(U_{k+1}-U_{k-1})=U_k^2$$

Додавши почленно наступні рівності:

$$U_1^2=U_1\cdot U_2$$
$$U_2^2=U_2U_3-U_1U_2$$
$$U_3^2=U_3U_4-U_2U_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U_n^2=U_nU_{n+1}-U_{n-1}U_n$$

почлено, отримаємо шукану формулу.

● **Задача 2.7** Довести, що

$$U_{n+m}=U_{n-1}U_m+U_nU_{m+1} \qquad (8)$$

Розв'язання. Доведення цієї формули будемо проводити користуючись другою формою математичної індукції. Індукцію будемо проводити по m.

1) При $m=1$ формула (8) матиме вигляд

$$U_{n+1}=U_{n-1}U_1+U_nU_2$$

це очевидно.

2) При $m=2$ формула також вірна, тому що

$$U_{n+2}=U_{n-1}U_2+U_nU_3=1\cdot U_{n-1}+2\cdot U_n=U_{n-1}+U_n+U_n=U_{n+1}+U_n$$

3) Припустимо, що формула (8) справедлива при $m=k$ і при $m=k+1$.

4) Доведемо, що вона справедлива для $m = k+2$.

Нехай

$$U_{n+k} = U_{n-1}U_k + U_nU_{k+1}$$
$$U_{n+k+1} = U_{n-1}U_{k+1} + U_nU_{k+2}.$$

Додавши останні дві рівності почленно, ми одержимо :

$$\begin{aligned} &U_{n+k} + U_{n+k+1} = U_{n+k+2} = U_{n-1}\left(U_k + U_{k+1}\right) + U_n\left(U_{k+1} + U_{k+2}\right) = \\ &= U_{n-1}U_{k+2} + U_nU_{k+3} \end{aligned},$$

що і потрібно було довести.

● **Задача 2.8** Довести, що U_{2n} ділиться на U_n.

Розв'язання. Поклавши $m = n$ у формулі (5), отримаємо

$$U_{2n} = U_{n-1}U_n + U_nU_{n+1},$$

тобто

$$U_{2n} = U_n(U_{n-1} + U_{n+1}) \qquad (9)$$

З рівності (9) можна зробити висновок, що U_{2n} ділиться на U_n.

● **Задача 2.9** Довести, що різниця квадратів двох чисел Фібоначчі, номера яких відрізняються на 2, є знову число Фібоначчі.

*Розв'язання***.** Оскільки $U_n = U_{n+1} - U_{n-1}$ з означення, то формулу (9) можна переписати так:

$$U_{2n} = (U_{n+1} - U_{n-1})(U_{n+1} + U_{n-1}),$$
$$U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2,$$

Таким чином, різниця квадратів двох чисел Фібоначчі, номера яких відрізняються на 2, є знову число Фібоначчі.

● **Задача 2.10.** Довести, що $U_n^2 = U_{n-1}U_{n+1} + (-1)^{n+1}$ (10).

Розв'язання: Доведемо цю формулу методом математичної індукції по n.

1) Для $n = 2$ формула приймає вигляд:

$$U_2^2 = U_1U_3 - 1.$$

Що очевидно виконується.

2) Нехай рівність (10) виконується при $n = k$, тобто $U_k^2 = U_{k-1}U_{k+1} + (-1)^{k+1}$.

3) Доведемо, що при $n = k+1$ рівність також виконується, тобто, $U_{k+1}^2 = U_kU_{k+2} + (-1)^{k+2}$.

Додамо до обох її частин U_kU_{k+1}. Отримаємо:

$$U_k^2 + U_kU_{k+1} = U_{k-1}U_{k+1} + U_kU_{k+1} + (-1)^{k+1}$$
$$U_k(U_k + U_{k+1}) = U_{k+1}(U_{k-1} + U_k) + (-1)^{k+1}$$
$$U_kU_{k+2} = U_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$
$$U_{k+1}^2 = U_kU_{k+2} + (-1)^{k+2}.$$

Отже, наша формула істинна для будь-якого n.

▲ **Задача 2.11.** Довести, що

$$U_{2n+1} = U_n^2 + U_{n+1}^2$$

Розв'язання:

За формулою (10) маємо

$$U_n^2 = U_{n-1}U_{n+1} + (-1)^{n+1}$$
$$U_{n+1}^2 = U_n U_{n+2} + (-1)^{n+2}.$$
Додамо почленно ці рівності. Отримаємо
$$U_n^2 + U_{n+1}^2 = U_{n-1}U_{n+1} + U_n U_{n+2}.$$
З іншого боку, за результатами задачі 2.7. маємо
$$U_{2n+1} = U_{n+n+1} = U_{n-1}U_{m+1} + U_n U_{m+2}.$$
Порівнявши ці два вирази, можемо зробити висновок, що
$$U_{2n+1} = U_n^2 + U_{n+1}^2$$

▲**Задача 2.12** Довести, що $U_{3n} = U_{n+1}^3 + U_n^3 - U_{n-1}^3$.

Розв'язання: застосуємо результати задач 2.7, 2.9, 2.11.
$$U_{3n} = U_{2n+n} = U_{2n-1}U_n + U_{2n}U_{n+1} =$$
$$= (U_{2n+1} - U_{2n})U_n + U_{2n}U_{n+1} = (U_{2n+1} - U_{n+1}^2 + U_{n-1}^2)U_n + (U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2)U_{n+1} =$$
$$= U_{2n+1}U_n - U_n U_{n+1}^2 + U_{n-1}^2 U_n + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^2 U_{n+1} =$$
$$= U_{2n+1}U_n - U_n U_{n+1}^2 + U_{n+1}^3 + U_{n-1}^2 (U_n - U_{n+1}) =$$
$$= U_{2n+1}U_n - U_n U_{n+1}^2 + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3 =$$
$$= U_n (U_{2n+1} - U_{n+1}^2) + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3 =$$
$$= U_n (U_n^2 + U_{n+1}^2 - U_{n+1}^2) + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3 =$$
$$= U_n^3 + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3$$
Що і треба було довести.

▲ **Задача 2.13** Довести, що
$$U_{n+1}^2 - U_{n+1}U_n - U_n^2 = (-1)^n.$$

Розв'язання:

Рівність (10) перепишемо у виді:
$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^n.$$
Підставляємо $U_{n-1} = U_{n+1} - U_n$ у даний вираз і отримуємо:
$$U_{n+1}^2 - U_{n+1}U_n - U_n^2 = (-1)^n.$$
Отже, доведено.

▲ **Задача 2.14.** Довести, що останні цифри членів послідовності Фібоначчі. починаючи з деякого номера, періодично повторюються.

Розв'язання. Це легко доводиться шляхом почергового перерахування членів, при цьому фіксуємо, їх останні цифри. Завдяки такому переліку ми знайдемо період, через який починаються повторюватись останні цифри послідовності Фібоначчі.

▲ **Задача 2.15.** Довести, що в послідовності Фібоначчі є число, яке ділиться на 2004.

Розв'язання. Позначимо через a_i остачу від ділення U_i на 2004. Розглянемо послідовність пар остач (a_1, a_2), $(a_3, a_4), \ldots$, $(a_k, a_{k+1})\ldots$ Таких різних пар існує скінченна кількість, а саме 2004^2, а послідовність нескінченна. Тому в цій послідовності знайдуться дві однакові пари. Тобто, для деяких k і

p $(k < p)$ будуть мати місце рівності $a_k = a_p$, $a_{k+1} = a_{p+1}$. Оскільки $U_{n-1} = U_{n+1} - U_n$, то число a_{k-1} однозначно визначається числом a_k та a_{k+1}, а саме, $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ і $a_{p-1} = a_{p+1} - a_p$. Тому $a_{k-1} = a_{p-1}$, $a_{k-2} = a_{p-2}$,..., $a_2 = a_{p-k+2}$, $a_1 = a_{p-k+1}$. Оскільки $a_2 = a_1$, тому числа U_{p-k+2} та U_{p-k+1} при діленні на 2004 дають однакові остачі. Тому число $U_{p-k} = U_{p-k+2} - U_{p-k+1}$ ділиться на 2004.

▲ **Задача 2.16.** Довести, що для будь-якого цілого m серед перших $m^2 - 1$ чисел Фібоначчі знайдеться хоча б одне, яке ділиться на m.
Вказівка: використайте при розв'язуванні результат задачі 2.15.

▲ **Задача 2.16.** Доведіть, що, якщо $n \vdots m$, то $U_n \vdots U_m$.

Розв'язання: нехай $n \vdots m$, тобто, $n = mk$, доведемо, що $U_n \vdots U_m$.

Доведення проведемо індукцією по k.

1) нехай $k = 1$, тоді $n = m$, тоді $U_n = U_k$, *і* $U_n \vdots U_m$.

2) Припустимо, що при $n = mk$ $U_n \vdots U_m$.

3) Доведемо, що при $n = m(k+1)$ $U_n \vdots U_m$, тобто, $U_{m(k+1)} \vdots U_m$

$U_{m(k+1)} = U_{mk+m} = U_{mk-1}U_m + U_{mk}U_{m+1}$.

Перший доданок цієї рівності очевидно ділиться на U_m. А у другому – множник $U_{mk} \vdots U_m$ за індуктивним припущенням. Тому $U_{m(k+1)} \vdots U_m$, що і доводить дане твердження.

▲ **Задача 2.17.** Довести твердження обернене до твердження задачі 2.16.

▲ **Задача 2.18.** Довести, що число Фібоначчі:

1) парне тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 3;
2) ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 4;
3) ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 6;
4) ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 5;
5) ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 8.

Розв'язання: 1) за доведеним у задачах 2.16, 2.17 $U_m \vdots U_n$ тоді, і тільки тоді, коли $m \vdots n$, тобто, $U_{3n} \vdots U_n$ для любого натурального *n*. Оскільки $U_3 = 2$, то довільне число Фібоначчі з номером кратним трьом є парним числом, що і доводить твердження задачі. Аналогічно проводиться доведення тверджень 2) - 5).

▲ **Задача 2.19.** Довести індукцією по n, що при будь-яких натуральних n і m для чисел Фібоначчі:

1) U_{3n} ділиться на U_n

2) U_{mn} ділиться на U_n.

Вказівка: використайте результати задач 2.8 і 2.11.

▲ **Задача 2.20.** Довести, що 2 сусідніх числа в ряду Фібоначчі взаємно прості.

Розв'язання: Нехай НСД $(U_{n+1}; U_n) = d \neq 1$, тоді $(U_{n-1}; U_n) = d$ ...$(U_3; U_2) = d$, але $U_2 = 1$, що суперечить припущенню.

■ **Задача 2.21.** Довести, що 1995-е і 1997-е числа Фібоначчі взаємно прості.

Розв'язання: $U_{1997} = U_{1995} + U_{1996}$.

Нехай

$$\left(U_{1997};U_{1995}\right)=d\,,\ d\neq 1\,,$$

Тоді

$$U_{1997}=da\,;\quad U_{1995}=db$$

$$U_{1996}=da-db=d(a-b).$$

Тоді $U_{1997}\vdots d$ і $U_{1995}\vdots d$, що суперечить доведеному факту, що 2 сусідніх числа в ряду чисел Фібоначчі – взаємно прості.

■ **Задача 2.22.** Довести, що $НСД(U_m;U_n)=НСД(U_{m-n};U_n)$ якщо $m>n$.

Розв'язання: $U_m=U_{m-n+n}=U_kU_{n+1}+U_{k-1}U_n=da\,,$

$$U_n=db\,,$$

де $(a;b)=1$.

$U_kU_{n+1}=da-db\cdot U_{k-1}=d(a-b\cdot U_{k-1})$.

Маємо $U_kU_{n+1}\vdots d$, але U_{n+1} на d не ділиться. Тому $U_k\vdots d$.

До того ж $(a-b\cdot U_{n-1};b)=1$, тому

$$НСД(U_m;U_n)=НСД(U_{m-n};U_n).$$

Інший спосіб доведення ґрунтується на тому, що якщо множини спільних дільників двох чисел співпадають, то і найбільші спільні дільники також співпадають тому достатньо довести:

1) довільний спільний дільник U_m і U_n є також спільним дільником U_{m-n} і U_n.
2) довести обернене твердження.

■ **Задача 2.23.** Довести, що кожне натуральне число $n>2$ дорівнює сумі декількох різних чисел Фібоначчі.

Розв'язання. Скористаємося методом математичної індукції. Для $n=1$ твердження справедливе, оскільки 1 є число послідовності Фібоначчі.

Нехай твердження виконується для $n<m$. Доведемо, що воно виконується і для числа m. Якщо m - член послідовності Фібоначчі, то твердження задачі очевидне. В іншому випадку позначимо k- максимальний член послідовності, $k\leq m$. Тоді $m-k<n$, і для нього виконується твердження задачі. Тому $m-k$ можна представити у вигляді суми членів послідовності Фібоначчі, менших за k:

$$m-k=k_1+\ldots+k_t\,.$$

Звідси $m=k_1+\ldots+k_t+k$. Що і потрібно було довести.

■ **Задача 2.24.** Напишемо під кожним число послідовності Фібоначчі 3 останні його цифри (якщо цифр менше 3, то число доповнюється нулями): 001, 001, 002, 003, 005,.... Довести, що отримана послідовність періодична.

Розв'язання. Розглянемо послідовність чисел, утворених трьома останніми цифрами членів послідовності Фібоначчі. Серед все можливих пар сусідніх членів цієї послідовності (наприклад: (001; 001), (001;002), (002;003),...), одна повториться, оскільки різних таких пар може бути не більше, ніж $1000\cdot 1000=10^6$, а наша послідовність нескінченна. Але 3 останні цифри суми двох чисел залежать лише від 3 останніх цифр кожного із доданків, тому, як тільки повториться деяка пара сусідніх членів даної послідовності, повторяться і всі наступні члени. Цим доводиться періодичність послідовності Фібоначчі.

Ще один приклад задачі, яка приводить до появи чисел Фібоначчі.

Нехай необхідно заданий відрізок розділити на дві частини так, щоб менша відносилася до більшої, як більша до всього відрізка. Інакше, необхідно знати „золотий переріз" відрізка. (Термін „золотий переріз" вперше застосував Леонардо да Вінчі (1452 - 1519)). Існує багато формулювань і розв'язань даної задачі. Одне з них запропоновано олександрійським математиком Клавдієм Птоломеєм.

Нехай X - шукана точка. $BX = x$; $AX = 1 - x$.

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

$$x^2 = 1 - x;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Позначимо $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Так як $x_2 > 0$, то розкладемо x_2 в ланцюговий дріб.

Маємо $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, тому $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \frac{1}{q}$.

Звідси

$$q = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q}}.$$

Отже,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}.$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0;1,1,1\dots].$$

Знайдемо послідовність підхідних дробів $\frac{P_i}{Q_i}$, які нескінченно наближаються до $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
q_i	0	1	1	1	1	1	1	1	1
P_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21
Q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

$\frac{P_1}{Q_1} = 1$; $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{2}{3}$; $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{3}{5}$; $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{5}{8}$; $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{8}{13}$; $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{13}{21}$; $\frac{P_8}{Q_8} = \frac{21}{34}$ ...

Бачимо, що чисельники і знаменники підхідних дробів утворюють числа з послідовності Фібоначчі.

Якщо позначити $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (числа Фідія), то довільний член послідовності Фібоначчі можна обчислити за формулою

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} . \qquad (13)$$

Ця формула називається формулою Біне.

■ **Задача 2.25.** Довести формулу Біне.

Розв'язання: Очевидно, що

$$\alpha + \beta = 1$$
$$\alpha \cdot \beta = -1$$

Тому α і β є коренями рівняння

$$t^2 - t - 1 = 0,$$

тобто

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$
$$\beta^2 = \beta + 1.$$

Маємо

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \qquad (14)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння серед геометричних прогресій.

$$1; q; q^2 ...$$

Для того, щоб така прогресія була розв'язком рівняння (14) її члени мають задовольняти умові

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n .$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на q^{n-2} . Отримуємо $1 + q = q^2$.

Тобто α іβ є розв'язками рівняння (14). Тоді можна показати, що і послідовності виду $C_1\alpha + C_2\beta$ також буде розв'язком (14).

При цьому C_1 і C_2 повинні задовольнять умові:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\alpha + C_2\beta = U_2 \\ C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1} = U_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$$U_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} .$$

Тобто

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

■ **Задача 2.26.** Підрахувати суму кубів перших n чисел Фібоначчі .
Розв'язання.

$$U_k^3 = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5}U_{3k} - (-1)^k 3U_k = \frac{1}{5}\left(U_{3k} + (-1)^{k+1}3U_k\right)$$

$$U_1^3 + U_2^3 + \ldots + U_n^3 = \frac{1}{5}((U_3 + U_6 + \ldots + U_{3n}) + 3(U_1 - U_2 + U_3 - \ldots + (-1)^{n+1}U_n)) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{U_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1}3U_{n-1} + 3\right) = \frac{U_{3n+2} + (-1)^{n+1}6U_{n-1} + 5}{10}.$$

■ **Задача 2.27.** Довести, користуючись методом математичної індукції, що

$$\alpha^n = U_n\alpha + U_{n-1}$$
$$\beta^n = U_n\beta + U_{n-1}.$$

Розв'язання: 1) Нехай $n = 2$.

$\alpha^2 = U_2 \cdot \alpha + U_1 = \alpha + 1$ - очевидно виконується

$\beta^2 = U_2 \cdot \beta + U_1 = \beta + 1$ - очевидно виконується.

2) Нехай при $n = k$

$$\alpha^k = U_k\alpha + U_{k-1}$$
$$\beta^k = U_k\beta + U_{k-1}$$

і при $n = k+1$ твердження виконується

$$\alpha^k = U_k\alpha + U_{k-1}$$
$$\beta^{n+1} = U_{k+1}\beta + U_k \qquad (15)$$

Доведемо, що твердження виконується при $n = k+2$

Додамо рівності (15)

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (U_k + U_{k+1})\alpha + U_{k-1} + U_k = U_{k+2}\alpha + U_{k+1}$$
$$\alpha^k(1+\alpha) = U_{k+2}\alpha + U_{k+1}$$
$$\alpha^{k+2} = U_{k+2}\alpha + U_{k+1}.$$

Аналогічно доводиться і для β .

■ **Задача 2.28.** Знайти суму $U_3 + U_6 + U_9 + \ldots + U_{3n}$

Розв'язання: ми маємо

$$U_3+U_6+\ldots+U_{3n}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^3+\alpha^6+\ldots+\alpha^{3n}-\beta^3-\beta^6\ldots-\beta^{3n}\right),$$

або, додаючи геометричні прогресії, які зустрілися нам,

$$U_3+U_6+\ldots+U_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{\alpha^3-1}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{\beta^3-1}\right).$$

Але,

$$\alpha^3-1=\alpha+\alpha^2-1=\alpha+\alpha+1-1=2\alpha,$$

і аналогічно $\beta^3-1=2\beta$.

Тому

$$U_3+U_6+\ldots+U_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right),$$

або, після скорочення

$$U_3+U_6+\ldots+U_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}\left(U_{3n+2}-u_2\right)=\frac{U_{3n+2}-1}{2}.$$

■ **Задача 2.29.** Довести, що число Фібоначчі U_n є найближчим цілим числом до n-го члена геометричної прогресії (b_n), де $b_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$ і $q=\alpha$.

Розв'язання: Очевидно, нам достатньо встановити, що абсолютна величина різниці між U_n і b_n завжди менше за $\frac{1}{2}$. Але

$$\left|U_n-b_n\right|=\left|\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{\alpha^n-\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right|=\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Так як $\beta=-0{,}618\ldots$, то $|\beta|<1$, а значить, $|\beta|^n<1$ при будь-якому n, і тим більше (так як $\sqrt{5}>2$) повинно бути $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$.

Що і треба було довести.

■ **Задача 2.30.** Довести $\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}\le U_n$.

Розв'язання. Оскільки за формулою Біне

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\beta^n\right),$$

або

$$\alpha^{2n-\frac{1}{n}}\le\alpha^{2n}-1,$$

або, якщо піднести до степеня n,

$$\alpha^{2n^2-1} \le \left(\alpha^{2n}-1\right)^n \qquad (16).$$

Будемо доводити цю нерівність по індукції.

При $n=1$ вона перетворюється у

$$\alpha \le \alpha^2 - 1,$$

що дійсно має місце (саме, зі знаком рівності).

При $n=2$ (16) означає

$$\alpha^7 \le \left(\alpha^4-1\right)^2 \qquad (17)$$

Цю нерівність можна перевірити і прямим обчисленням. Однак, її можна і довести, скориставшись співвідношенням, яке ми вивели трохи раніше. В даному випадку ми маємо $\alpha^4 = 3\alpha + 2$,

$$\left(\alpha^4-1\right)^2 = (3\alpha+1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10,$$

і (17) переписується як

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \le 15\alpha + 10,$$

що очевидно. Нарешті, при $n=3$ (16) перетворюється як

$$\alpha^{17} \le \left(\alpha^6-1\right)^3,$$

що перевіряється аналогічно попередній нерівності. Припустимо тепер, що $n>2$ і (16) має місце, і доведемо, що

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \le \left(\alpha^{2n+2}-1\right)^{n+1}.$$

Для цього достатньо показати, що при збільшенні n на 1 правий бік (16) зросте швидше за лівий. Але лівий бік, очевидно, зростає у α^{4n+2} рази. Оцінимо збільшення правого боку. Ми маємо

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} = \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n.$$

Останній дріб більший, ніж α^2, і при тому на

$$\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1} - \alpha^2 = \frac{\alpha^{2n+2}-1-\alpha^{2n+2}+\alpha^2}{\alpha^{2n}-1} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-2}+\alpha^{2n-4}+\ldots+\alpha^2+1} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1} = \frac{\alpha}{\alpha^{2n}-1} > \frac{\alpha}{\alpha^{2n}} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}$$

Отже, користуючись формулою Бінома-Ньютона отримаємо

$$\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n > \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n = \alpha^{2n} + n\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}} + \ldots,$$

де крапки стоять замість додатніх доданків. Враховуючи те, що $n>2$, утворений вираз більший, ніж $\alpha^{2n}+1$. Значить

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} > \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\alpha^{2n}+1\right) =$$

$$= \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n+2} - \alpha^{2n} - 1 = \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n}\left(\alpha^2-1\right) - 1 =$$

$$= \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n+1} - 1 > \alpha^{4n+2}$$

що і треба було довести.

Розділ ІІІ

Фрактали

Фрактали - незвичайні, достатньо красиві і складні по внутрішній структурі множини, на які доволі довго дослідники не звертали особливої уваги.

Слово "фрактал" походить від латинського кореня fractus -ламаний, складений із частин, від якого походять також слова "фракція" і "фрагмент", а в англійській, французькій і німецькій мовах - слова "дріб", "дробити", "дробовий”.

Фрактали в олімпіадних задачах та задачах дослідницького характеру зустрічаються досить часто, але люди не знайомі з поняттям фракталу навіть не підозрюють, що ці задачі так тісно пов'язані з фракталами.

Термін **"фрактальний"** означає структуру, яка складається із схожих форм різних розмірів. Придивіться до природних об’єктів, і ви помітите внутрішню схожість її структури. Так гілки дерева дуже схожі на саме дерево. Форми рельєфу, на які ми дивимось зблизька, дуже схожі на рельєф, який видно з висоти пташиного польоту, а берегова лінія не втрачає своєї закрученої форми при зміні масштабу карти.

Розглянемо декілька прикладів фракталів у математиці.

Множина Кантора. Ця множина може бути отримана з відрізка $[0;1]$ за нескінченну кількість кроків, кожний з яких складається з ділення відрізків на три рівні частини і видалення середніх інтервалів. Точніше, на першому кроці відрізок $[0;1]$ ділиться на три рівні частини і викидається середній інтервал $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. З двома відрізками, які залишились, виконуються такі ж перетворення, тобто вони діляться на три частини і викидаються середні інтервали $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ та $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, і т.д.

Кожне дійсне число, як відомо, можна представити у вигляді нескінченного десяткового дробу. Побудова такого представлення є процесом нескінченного ділення відрізків на десять частин, тобто є фрактальним процесом.

Для того, щоб знайти десятковий запис дійсного числа, зобразимо його на числовій прямій. Визначимо, в який з цілочисельних відрізків попадає дане число, і запишемо відповідне ціле число. Поділимо цей відрізок на десять частин, позначивши їх цифрами від 0 до 9, і визначимо, до якого з інтервалів попало дане число. Відповідну цифру дописуємо до цілого числа після коми. Повторимо процедуру, тобто поділимо інтервал довжини $\frac{1}{10}$ на десять частин, знову позначимо їх цифрами від 0 до 9, і допишемо цифру, що відповідає інтервалу, до якого потрапило дане число, і т.д. Деякі числа мають два представлення, наприклад число 0,2 можна представити як 0,1999...

Чому ми ділимо відрізки саме на 10 частин? Тому що система числення, якою ми користуємось, – десяткова. Якби система числення мала іншу основу, то і ділення відбувалося б на відповідну кількість відрізків. Спробуйте знайти представлення деяких чисел, наприклад, у трійковій системі числення. Зрозуміло, що при цьому ви будете користуватись лише цифрами 0, 1, 2. Деякі з чисел, які до речі називаються трійково-раціональними, мають два представлення.

- **Задача 3.1.** Знайти представлення точок множини Кантора у трійковій системі числення.

Розв'язання. На першому кроці побудови множини Кантора ми викидаємо ті точки множини, у трійковому представленні яких після коми одразу стоїть 1. На другому кроці викидаються точки, у трійковому представленні яких 1 стоїть на другому місці після коми і т.д. Правда, у множині Кантора залишаються трійково-раціональні числа, наприклад, 0,1, яке по-іншому можна записати 0,0222... Таким чином, елементи множини Кантора – це всі точки, які можна записати так, щоб у їх представленні в трійковій системі числення були лише цифри 0 і 2.

- **Задача 3.2.** Знайти довжину множини Кантора.

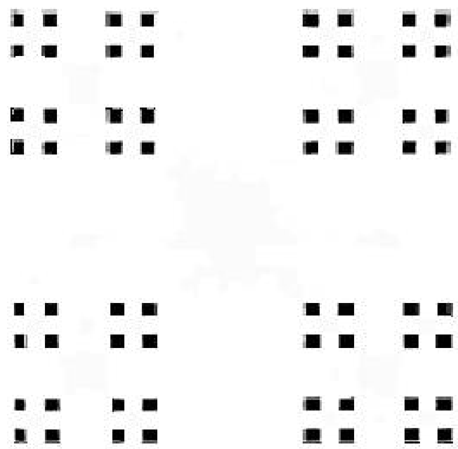
Розв'язання. Спочатку знайдемо довжину всіх викинутих інтервалів. На першому кроці викидаємо відрізок довжиною $\frac{1}{3}$, на другому кроці – два відрізка довжиною $\frac{1}{9}$, на третьому – чотири відрізка довжиною $\frac{1}{27}$, і т.д. Отримаємо суму

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+...$$

Це сума членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $\frac{2}{3}$ і першим членом $\frac{1}{3}$. Як відомо, ця сума рівна: $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$. Таким чином, сумарна довжина викинутих відрізків становить 1, значить довжина множини Кантора рівна 0.

Цікавим прикладом фрактальної множини є множина точок квадрату зі стороною 1, заданого на координатній площині, у яких обидві координати є числами з множини Кантора. Така множина називається **цвинтарем Серпінського**.

Цвинтар Серпінського можна побудувати інакше, а саме, шляхом вилучення з квадрату горизонтальних та вертикальних відкритих смуг шириною $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ... (див. мал. 3.1). Після першого вилучення відкритих смуг шириною $\frac{1}{3}$ залишаться чотири квадрати зі стороною $\frac{1}{3}$, назвемо їх квадратами першого рангу. Після другого вилучення залишиться шістнадцять квадратів другого рангу і т.д.



Мал. 3.1.

Сумою двох числових множин A і B називається множина $A \oplus B$, яка складається з усіх можливих сум чисел із цих множин

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

● **Задача 3.3.** Знайти суму двох множин Кантора.

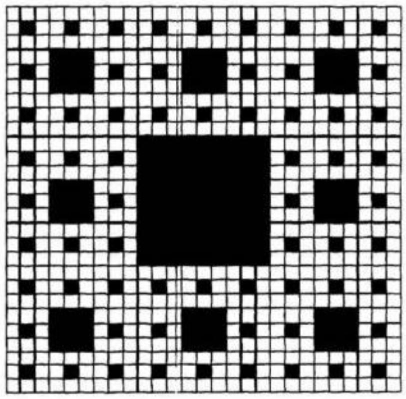
Розв'язання. Очевидно, що сума двох множин Кантора C_0 належить відрізку [0,2]. Покажемо, що кожну точку цього відрізка можна представити у вигляді суми двох чисел множини Кантора. Для цього побудуємо цвинтар Серпінського. Проведемо через довільну точку α відрізка [0,2] пряму, нахилену до осі абсцис під кутом 135^0. Зрозуміло, що ця пряма перетне принаймні один з квадратів першого рангу (див. мал. 3.1), по цій же причині пряма перетне принаймні один квадрат другого рангу, третього і т.д. Звідси випливає, що вона проходить через деяку точку (x_0, y_0) цвинтаря Серпінського. А це означає, що $\alpha = x_0 + y_0$, де $x_0 \in C_0, y_0 \in C_0$. Отже, $C_0 \oplus C_0 = [0,2]$.

Розглянемо ще декілька прикладів фракталів.

Килим Серпінського. Візьмемо квадрат із стороною 1, поділимо його на 9 рівних частин і вилучимо середню частину, залишивши сторони вилученого квадрату. Після цього поділимо кожний з квадратів, що залишилися, знову на дев'ять рівних квадратів ще меншого розміру і знову відкинемо центральні квадрати. Цей алгоритм продовжуємо нескінченно.

В кінці кінців ми отримаємо геометричну фігуру, яку називають **килимом Серпінського** (мал. 3.2).

Аналогічно можна побудувати трикутний килим Серпінського



Мал. 3.2

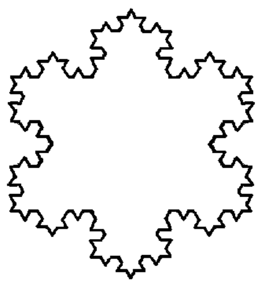
● **Задача 3.4.** Чому дорівнює площа килима Серпінського?

Розв'язання. Спочатку знайдемо довжину всіх вилучених квадратів. На першому кроці вилучаємо квадрат площею $\frac{1}{9}$, на другому кроці – вісім квадратів площею $\frac{1}{81}$ кожен, на третьому – шістдесят чотири квадрата площею $\frac{1}{729}$ кожен, і т.д. Отримаємо суму

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{81} + \frac{64}{729} + \ldots = \frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \ldots$$

Це сума членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $\frac{8}{9}$ і першим членом $\frac{1}{9}$. Як відомо, ця сума рівна: $\dfrac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1$.

Звідси слідує, що площа самого килима Серпінського рівна 0.



Мал.. 3.3

Сніжинка Коха. Візьмемо рівносторонній трикутник і будемо повторювати (до нескінченності) наступний процес: кожен відрізок розділимо на три частини, викинемо середній і на викинутій частині, як на основі, добудуємо трикутник, вершиною назовні. Інколи таку криву називають кривою Ван-дер-Вардена. Після трьох етапів побудов отримаємо фігуру, зображену на мал. 3.3.

● **Задача 3.5** Знайти периметр сніжинки Коха, якщо периметр початкового рівностороннього трикутника рівний P_0.

Розв'язання. На кожному етапі побудови сніжинки Коха довжина ламаної зростає на третину її довжини на попередньому етапі. Справді, замість трьох відрізків, на які розбивається кожна ланка ламаної, утворюється 4 відрізки тієї ж довжини. Якщо периметр початкового трикутника позначимо через P_0, то на першому етапі побудови отримаємо фігуру, периметр якої рівний $\frac{4}{3}P_0$, на другому - $\left(\frac{4}{3}\right)^2 P_0$, на n-му - $\left(\frac{4}{3}\right)^n P_0$, а члени отриманої послідовності утворюють геометричну прогресію із знаменником рівним $\frac{4}{3}$. Зрозуміло, що після нескінченного числа кроків одержимо фігуру, периметр якої рівний нескінченності. Факт дещо несподіваний, особливо, коли розв'язати наступну задачу.

● **Задача 3.6.** Обчисліть площу фігури, обмеженої кривою Коха.

Розв'язання. Нехай S_0 - площа початкового рівностороннього трикутника (нульовий крок), на першому кроці до нього добудовуємо три трикутники, площа кожного з яких рівна $\frac{S_0}{9}$ (бо сторона зменшилася в три рази). Отже, площа фігури, утвореної на першому кроці $S_1 = S_0 + 3\frac{S_0}{9}$. На другому кроці додається ще $3 \cdot 4$ трикутники, площа кожного з яких дорівнює $\frac{S_0}{9^2}$. Отже, площа фігури, одержаної на другому кроці буде $S_2 = S_0 + 3\frac{S_0}{9} + 3\cdot 4\frac{S_0}{9^2}$. На третьому кроці додаємо ще $3 \cdot 4^2$ трикутники, площа кожного з яких дорівнює $\frac{S_0}{9^3}$ і загальна площа фігури після трьох кроків побудови буде $S_3 = S_0 + 3\frac{S_0}{9} + 3\cdot 4\frac{S_0}{9^2} + 3\cdot 4^2\frac{S_0}{9^3}$, ... На n-тому кроці до побудованої фігури додамо $3\cdot 4^{n-1}$ трикутники, площа кожного з яких $\frac{S_0}{9^n}$, загальна площа фігури після n кроків побудови буде

$$S_n = S_0 + 3\frac{S_0}{9} + 3\cdot 4\frac{S_0}{9^2} + 3\cdot 4^2\frac{S_0}{9^3} + \ldots + 3\cdot 4^{n-1}\frac{S_0}{9^n}.$$

Спрямувавши кількість кроків до нескінченності одержимо площу частини площини, обмеженої кривою Коха.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=S_0+3\frac{S_0}{9}+3\cdot4\frac{S_0}{9^2}+3\cdot4^2\frac{S_0}{9^3}+\ldots+3\cdot4^{n-1}\frac{S_0}{9^n}+\ldots=$$

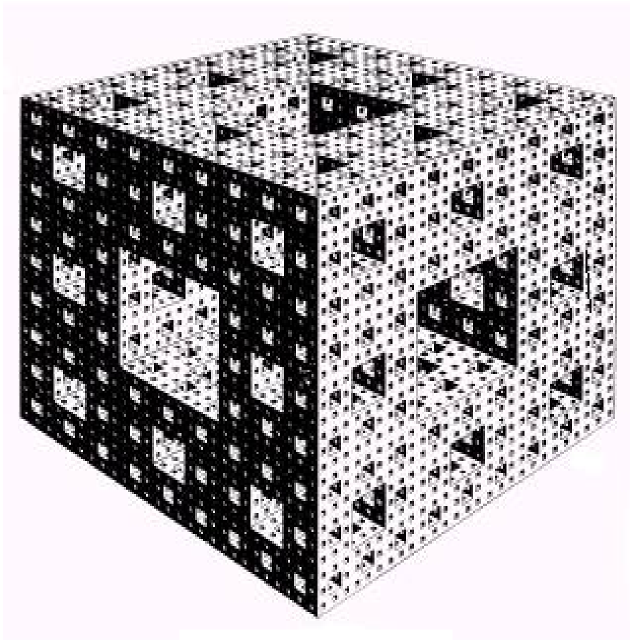
$$=S_0+\frac{S_0}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\ldots\right)=S_0+\frac{S_0}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=S_0+\frac{S_0}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{8}{5}S_0$$

Таким чином, площа фігури, обмеженої кривою Коха, рівна $\frac{8}{5}$ площі вихідного трикутника, і це при нескінченному периметрі.

Неважко помітити, що множина Кантора має багато спільного з килимом Серпінського і сніжинкою Коха. Запропонуємо ще декілька об'єктів, яких сміливо можна назвати „родичами" килима Серпінського.

Поділимо куб на 27 однакових кубів, подібно до кубика Рубіка. Внутрішню область центрального куба викинемо, а кожен з решти 26 кубів поділимо на 27 кубів і повторимо процедуру. Продовжуючи цей процес нескінченно довго, отримаємо куб, з якого викинуто нескінченно багато кубиків. Назвемо його „порожнім яблуком".

Щоб отримати інший об'єкт, який має назву губки Менгера, з кожного куба будемо викидати центральний куб разом з сусідніми (які мають спільну грань) кубами (див. мал. 3.4).



Мал.. 3.4

Викидаючи разом

з центральним кубом і ті куби, що мають з ним спільне ребро, зможемо побудувати „просторовий пил Кантора".

● **Задача 3.7.** Знайти об'єм „порожнього яблука".

Розв'язання. Підрахуємо об'єм викинутих кубів. На першому етапі викидається куб, об'єм якого дорівнює $\frac{1}{27}$ об'єму даного куба. На другому етапі викидається 26 кубів, об'єм кожного з яких рівний $\frac{1}{27^2}$. На третьому кроці вилучається 26^2 кубів, кожен з яких має об'єм $\frac{1}{27^3}$, і т.д. Ця сума є нескінченною геометричною прогресією з першим членом $\frac{1}{27}$ і знаменником $\frac{26}{27}$. Сума цієї прогресії рівна:

$$\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{26}{27}}=1.$$

Тобто об’єм викинутих кубів рівний об’єму початкового куба, а значить об’єм „порожнього яблука” – 0.

● **Задача 3.8.** Знайти площу поверхні „просторового пилу Кантора”.

Розв’язання. Нехай площа поверхні початкового куба рівна S_0, на першому етапі побудови утвориться 8 кубів, з площею поверхні у 9 разів меншою за площу поверхні початкового куба. Тобто площа поверхні становитиме $\frac{8}{9}S_0$. Неважко підрахувати, що на другому етапі побудов площа становитиме уже $\left(\frac{8}{9}\right)^2 S_0$, на n-му - $\left(\frac{8}{9}\right)^n S_0$. Отримана таким чином послідовність є геометричною прогресією із знаменником $\frac{8}{9}$, що, як відомо, прямує до 0. А це означає, що „просторовий пил Кантора” має нульову площу поверхні.

● **Задача 3.9.** Знайти площу поверхні губки Менгера.

Розв’язання. Площа поверхні початкового кубу рівна $S_0=6a^2$, де a – сторона куба. На першому з поверхні вилучається 6 квадратів, площею $\left(\frac{a}{3}\right)^2$ кожен, але при цьому всередині куба утворюються нові поверхні загальною площею $24\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2$. Отже, на першому кроці побудови губки Менгера площа поверхні S_1 буде рівною:

$$S_1=6a^2-6\left(\frac{a}{3}\right)^2+24\left(\frac{a}{3}\right)^2=6a^2+18\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{4}{3}S_0.$$

Зауважимо, що на кожному наступному кроці зростання площі поверхні буде більшим, ніж у $\frac{4}{3}$ рази. Справді, в кожному кубі наступних кроків побудови не всі грані виходять на поверхню губки, однак площа поверхні кожного куба зростає, як мінімум, на $18\left(\frac{b^2}{9}\right)$, де b – сторона куба даного етапу побудови. Тому площа губки Менгера S_n на n-му кроці побудови $S_n>\left(\frac{4}{3}\right)^n S_0$. Очевидно, що коли n прямує до нескінченності, послідовність $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ нескінченно зростає, і тому площа поверхні губки Менгера нескінченна.

Назвемо „їжаком” тіло, побудоване таким чином. Кожну грань правильного тетраедра розділимо середніми лініями на 4 трикутники, на центральному, як на основі, добудуємо правильний тетраедр, вершиною назовні. Кожну грань отриманого зірчастого многогранника знову поділимо на 4 трикутники середніми лініями, на центральному трикутнику, як на основі, добудуємо правильну трикутну піраміду, вершиною назовні. Процес добудов продовжимо нескінченно довго.

● **Задача 3.10.** Знайти площу поверхні „їжака”.

Розв’язання. На кожному кроці побудови на кожній грані виростає піраміда зі стороною вдвічі меншою за ребро вихідної грані. Нехай площа початкової грані S, тоді площа кожної грані добудованої піраміди - $\frac{S}{4}$. Це означає, що площа утвореної поверхні рівна:

$$S^* = S - \frac{S}{4} + 3 \cdot \frac{S}{4} = \frac{3S}{2},$$

тобто на кожному етапі побудови зростає в півтора рази. При нескінченній кількості добудов, зрозуміло, що площа поверхні зростатиме до нескінченності.

▲ **Задача 3.11.** Знайти об’єм „їжака”.

Розв’язання. Зауважимо спочатку, що на кожному етапі побудови „їжака” на трикутній грані „виростає” тетраедр з вдвічі меншим ребром, кількість граней многогранника збільшується у шість разів.

Нехай ребро початкового тетраедра рівне a, тоді

$$V_0 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

На першому кроці побудови з’явиться 4 нових тетраедри загальним об’ємом $\frac{4V_0}{8}$. На другому кроці додається 24 тетраедри, кожен об’ємом $\frac{V_0}{64}$. На n-му кроці таких тетраедрів буде $4 \cdot 6^{n-1}$, кожен об’ємом $\frac{V_0}{8^n}$.

Знайдемо суму об’ємів всіх тетраедрів:

$$V_0 + \frac{4}{8}V_0 + 4 \cdot \frac{6}{8^2}V_0 + \ldots + 4 \cdot \frac{6^{n-1}}{8^n}V_0 + \ldots = V_0 + 4V_0\left(\frac{1}{8} + \frac{6}{8^2} + \ldots + \frac{6^{n-1}}{8^n} + \ldots\right) =$$

$$= V_0 + 4V_0 \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{6}{8}} = V_0 + 2V_0 = 3V_0.$$

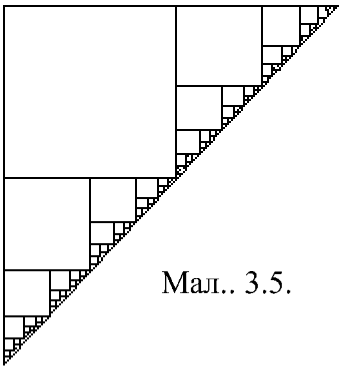
Таким чином, об’єм „їжака” дорівнює:

$$V = 3V_0 = 3 \cdot \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3.$$

Те, що одержаний об’єм рівний кубу числа $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ зовсім невипадково. Насправді, якщо склеїти модель такого „їжака”, то неважко переконатись, що ця модель матиме форму куба зі стороною рівною $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Куб цей незвичайний, адже площа його поверхні рівна нескінченності.

Одним із різновидів фракталів є деревовидні фрактали. Кожна гілка дерева схожа на саме дерево.

▲ **Задача 3.12.** Розглянемо фігуру, що складається з двох взаємно перпендикулярних відрізків довжини $\frac{1}{2}$ із спільною вершиною. Кожен відрізок розгалужується на два взаємно перпендикулярні відрізки довжиною $\frac{1}{4}$, і т.д. (див. мал. 3.5). Знайдіть сумарну довжину „гілок” отриманої фігури та довжину найдовшої „гілки”.



Мал.. 3.5.

Розв’язання. На першому етапі є дві „гілки”, довжиною $\frac{1}{2}$ кожна. Сумарна довжина рівна 1. На другому етапі таких „гілок” буде 4, довжиною $\frac{1}{4}$ кожна. Загальна довжина 1. На n-му етапі „гілок” буде 2^n, довжиною $\frac{1}{2^n}$ кожна. Загальна довжина „гілок” n-го етапу – 1. Тому зрозуміло, що сума довжин всіх „гілок” прямує до нескінченності.

Довжина найдовшої „гілки” рівна - $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$.

Цей приклад наведено неспроста. Дуже багато реальних об’єктів мають схожу будову (коріння рослин, кровоносна система людини, води басейну річки). Один німецький вчений, озброївшись пінцетом, циркулем, а головне – майже невичерпним запасом терпіння, безпосередньо виміряв (до найдрібніших розгалужень) довжину фракталоподібної структури – кореня пшениці. Результат вразив його. Всі волоски непоказного на вигляд корінця витягнулися б вздовж прямої на 510 м. Проте в наш час, застосувавши мікроскоп і сучасну обчислювальну техніку, отримали інше число – 20 км!

▲**Задача 3.13.** З точки A виходить п'ять відрізків: AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. З кожної точки B_i можуть виходити ще п'ять відрізків або жодного відрізка і т.д., причому кінці ніяких двох відрізків побудованої системи не співпадають. Чи може число вільних кінців системи побудованих відрізків дорівнювати 2004? (Під вільним кінцем ми розуміємо точку, з якої не виходить жодного відрізка).

Розв’язання. Побудувавши наступні п'ять відрізків, ми збільшуємо число вільних кінців на 4. Це означає, що на кожному кроці число вільних кінців матиме вигляд $4k+1$. Так як 2004 ділиться на 4, кількість вільних кінців не може бути рівною цьому числу.

▲ **Задача 3.14.** Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 4 частини; потім деякі з четвертинок знову розрізали на 4 частини і т.д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилося, що їх всього 2004. Довести, що підрахунок був неправильний.

Розв'язання: Очевидно, що після розрізування одного аркушу на 4 частини, загальна кількість аркушів збільшиться на 3. Отже, якщо таку операцію провести n разів, то після цього ми матимемо $4+3n$ аркушів. Якщо вважати, що підрахунок було виконано правильно, то $4+3n=2004$. Але число 2000 не ділиться на 3. Отже, підрахунок було виконано неправильно.

▲ **Задача 3.15.** В Анчурії існує служба безпеки (СБ), кожен агент якої слідкує за 10 громадянами цієї країни, в тому числі й за членами СБ. За роботою агентів служби безпеки слідкує спеціальна служба безпеки (ССБ), кожен агент якої слідкує за 10 членами СБ. За роботою 10 членів ССБ слідкує один агент секретної спеціальної служби безпеки (СССБ) і т.д. Скільки в Анчурії служб безпеки та яка кількість агентів, що в них працюють, якщо населення цієї демократичної країни складає 1 млн. чоловік?

Розв'язання. Підрахуємо кількість агентів кожної служби:

СБ	– 100 000,
ССБ	– 10 000,
СССБ	– 1 000,
ССССБ	– 100,
СССССБ	– 10,

останню службу очолює напевне сам президент Мірафлорес, тому загальна кількість службовців рівна – 111 111.

▲ **Задача 3.16.** Анчурія – бананова країна. У ній кожен чоловік або торгує бананами, або їх вирощує. В кожній сім'ї по чотири сини. Двоє синів продавця бананів і один із чотирьох синів селянина стають продавцями бананів, решта – селянами. В прадавні часи, за царя Банана I, всі були селянами. Який відсоток селян в сучасній Анчурії?

Розв'язання. Нехай a_n – частка селян у n-му поколінні анчурійців, а b_n – частка продавців бананів у тому ж поколінні. Тоді

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n,$$

причому $a_1=1$, $b_1=0$.

Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що послідовність (a_n) – спадна, а послідовність (b_n) – зростаюча. Для цього обчислимо приріст кожної з послідовностей:

При $k=1$ $\qquad \Delta a_1=a_2-a_1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4},$

$$\Delta b_1 = b_2 - b_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Припустимо, що при довільному $k = n$, $\Delta a_k < 0$, а $\Delta b_k > 0$, і покажемо, що прирости зберігають знак при $k = n + 1$. Справді:

$$\Delta a_{n+1} = \frac{3}{4}\Delta a_n + \frac{1}{2}\Delta b_n,$$

$$\Delta b_{n+1} = \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{2}\Delta b_n.$$

Адже за припущенням $\Delta a_n < 0$, а $\Delta b_k > 0$, то $\Delta a_{n+1} < \Delta b_{n+1}$. Крім того, з рівності $a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1} = 1$ слідує, що $\Delta a_{n+1} + \Delta b_{n+1} = 0$. Звідси випливає $\Delta a_{n+1} < 0$, $\Delta b_{n+1} > 0$.

Таким чином, послідовності (a_n) та (b_n) монотонні. З монотонності та обмеженості цих послідовностей слідує наявність границь кожної з послідовностей. Здійснимо граничний перехід у кожній з отриманих рівностей, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b \\ b = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Пам'ятаючи, що $a_n + b_n = 1$, знаходимо: $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.

▲ **Задача 3.17.** В країні Анчурії, де править президент Міралорес, прийшов час нових президентських виборів. В країні рівно 20 мільйонів виборців, з яких тільки один процент підтримує Міралореса (регулярна армія Анчурії). Міралорес хоче бути вибраним, але з іншого боку він хоче, щоб вибори були "демократичними". "Демократичним голосуванням" Міралорес називає от що: усі виборці розбиваються на рівні групи, кожна із цих груп знову розбивається на деяку кількість рівних груп, причому більші групи можуть розбиватися на різну кількість менших груп, потім ці групи знову розбиваються і т.д. В самих менших групах вибирають представника групи - виборця - для голосування в більшій групі. Виборці в цій більшій групі вибирають виборця в ще більшій групі і т.д. В кінці кінців, представники самих більших груп вибирають президента. Міралорес ділить виборців на групи на свій лад і інструктує своїх прибічників, як їм голосувати. Чи зможе він так організувати "демократичні" вибори, щоб його вибрали? (В кожній групі виборці вибирають свого представника простою більшістю. При рівності голосів перемагає опозиція.)

Розв'язання. В даному випадку, прибічників президента є 200 тисяч. Нехай самі маленькі групи складаються з 5 осіб, тоді для перемоги президента потрібно, щоб в групі було три його прибічники. Таким чином, 200 000 прибічників дадуть (якщо їх правильно розподілити) 66666 "виборців першого порядку" із загального числа 4 мільйони. Знову розіб'ємо ці 4 мільйони на 4 групи по 4 соби. В них для більшості потрібно теж 3 особи, і Мірафлорес зможе одержати 22222 "виборців другого порядку" із загального числа один мільйон. Далі, поділивши на групи то по 5, то по 4 особи (порядок все одно який), він одержить: 7407 виборців із 200 000; потім 2469 виборців із 50000; 823 виборці із 10000; 274 виборці із 2000; 91-го виборця із 500; 30 виборців із 100; 10 виборців із 25; 3 виборці із 4, забезпечивши таким чином собі перемогу.

▲ **Задача 3.18.** Король Людовік не довіряє деяким своїм придворним. Він склав повний перелік придворних і наказав кожному з них слідкувати за іншим. При цьому перший придворний слідкує за тим, хто слідкує за другим, другий слідкує за тим, хто слідкує за третім, і т.д., передостанній слідкує за тим, хто слідкує за першим. Довести, що у Людовіка непарне число придворних.

Розв'язання. Розташувавши придворних по колу в тому порядку, в якому вони слідкують один за одним, і припустивши, що їх кількість n -парна, отримаємо, що придворний з номером $\frac{n}{2}$ слідкує за тим, хто слідкує за першим придворним, хоч це повинен бути придворний з номером n.

▲ **Задача 3.19. У** колбі знаходиться колонія із n бактерій. У якийсь момент всередину колби попадає вірус. В першу хвилину вірус знищує одну бактерію, і зразу ж після цього і вірус, і бактерії, що залишилися, діляться навпіл. В другу хвилину нові два віруси знищують дві бактерії, а потім і віруси, і усі бактерії, що залишилися знову діляться навпіл, і т.д. Чи настане такий момент часу, коли не залишиться жодної бактерії?

Розв'язання. Число бактерій через k хвилин дорівнює $(n-k)\cdot 2^k$. Тому через n хвилин бактерій не залишиться.

▲ **Задача 3.20.** В деякий нульовий момент часу в початку прямокутної системи координат xOy в точці O знаходиться вірус грипу. Через певну одиницю часу він розпадається на чотири таких же віруси, кожний з яких переміщується на одиницю довжини: один - вище, один - нижче, один - лівіше, один - правіше в системі координат. Таке перетворення відбувається через однаковий проміжок часу з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються.

а) В який момент часу на площині буде мінімальна кількість вірусів?

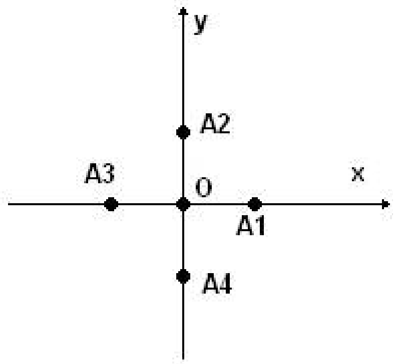
б) Скільки вірусів будуть існувати в момент часу t = 2004 (одразу після взаємознищення вірусів в цей момент часу)?

Розв'язання. а) Введемо спочатку поняття відстані між двома точками площини. Відстань $\rho(A,B)$ між двома точками з координатами $A(x_1,y_1)$ та $B(x_2,y_2)$ визначимо так: $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. Неважко переконатись, що за час $\Delta t=1$ нащадки вірусу збільшують відстань від початку координат на 1 або зменшують на 1. Тому найвіддаленіший в момент часу t вірус буде знаходитись на відстані t від початку координат.

Доведемо, що кількість вірусів буде рівною чотирьом в момент $t = 2^n$, де $n \in N_0$, причому вони будуть знаходитись на осях координат на відстані рівній 2^k від початку координат.

Доведення будемо проводити індукцією по n.

При $n = 0$ твердження справедливе: в момент $t = 2^0 = 1$ кількість вірусів буде рівною чотирьом і знаходитись вони будуть на відстані, рівній одиниці від початку координат.



Мал. 3.6

Припустимо, що твердження має місце в момент $t = 2^k$, тобто в цей момент на площині перебуватиме рівно чотири віруси (A_1, A_2, A_3, A_4), що знаходяться на осях координат на відстані 2^k від початку (мал. 3.6).

Доведемо справедливість цього твердження в момент $t = 2^{k+1}$.

Зауважимо, що відстань між будь-якими двома вірусами в момент $t = 2^k$ рівна 2^{k+1}, тому жоден з нащадків будь-якого з цих чотирьох вірусів не зустрінеться з нащадками решти трьох за час $t < 2^k$. Вважатимемо кожен з вірусів A_1, A_2, A_3, A_4 початком відліку. За припущенням індукції в момент $t = 2^k$ кожен з них дасть чотирьох нащадків, із яких чотири знаходитимуться в початку координат старої системи. По два віруси зійдуться в чотирьох точках з координатами $\left(\pm 2^k; \pm 2^k\right)$ (зауважимо, що це буде перша зустріч нащадків вірусів A_1, A_2, A_3, A_4). Залишиться чотири віруси в точках з координатами $\left(\pm 2^{k+1}; 0\right)$ і $\left(0; \pm 2^{k+1}\right)$. Отже, мінімальна кількість вірусів на площині (чотири) буде в моменти часу, які є степенями числа 2.

б) Розкладемо число $t = 2004$ за степенями числа 2:

$$2004 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2.$$

В момент $t = 1024$ на площині буде чотири віруси, нащадки жодного з яких не зустрінуться з нащадками іншого. Кожен з цих 4 вірусів ще через 512 одиниць часу дасть чотирьох нащадків, які в свою чергу через 256 одиниць часу розпадуться ще на 4 віруси і т.д. Таким чином, загальна кількість вірусів на площині буде рівна 4^k, де k – кількість одиниць в двійковому розкладі числа 2004, тобто кількість вірусів на площині в момент $t = 1024$ буде рівною – $4^7 = 16384$.

■ **Задача 3.21.** Будується числова послідовність: перший її член дорівнює 3^{1986}, а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює сумі цифр попереднього. Знайдіть десятий член цієї послідовності.

Розв'язання. Якщо число ділиться на 9, то і сума його цифр ділиться на 9, а так як число 3^{1986} ділиться на 9, то і всі члени даної послідовності діляться на 9.

З нерівності $3^2 < 10$ витікає, що $3^{1986} < 10^{993}$, тому в числі 3^{1986} не більше 993 цифри. Значить, другий член послідовності не більший, ніж $9 \cdot 993 < 10^4$. Кількість цифр третього члена послідовності не перевищує 4. Це означає, що четвертий член послідовності не перевищує 36, а всі наступні члени послідовності рівні 9 (нулю жоден член послідовності не може дорівнювати, а інших одноцифрових чисел .

■ **Задача 3.22.** Послідовність чисел будується по такому закону. На першому місці стоїть число 7, далі за кожним числом стоїть сума цифр його квадрату, збільшена на одиницю. Так, на другому місці стоїть число 14, так як 7^2=49, а 4+9+1=14. На третьому місці стоїть число 17 і т.д. Яке число стоїть на 2004-му місці?

Розв'язання. Обчислимо декілька перших членів даної послідовності:

7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5;...

П'ятірка повторилась, а це значить, що далі буде період, складений із трьох чисел: 5, 8, 1. Неважко розрахувати, що на 2004-му місці стоїть число 8.

Нижче пропонуються три задачі, процес розв'язання яких носить фрактальний характер.

■ **Задача 3.23.** Знайдіть десятицифрове число, перша цифра якого рівна кількості одиниць в цьому числі, друга – кількості двійок, третя – кількості трійок, ..., дев'ята – кількості дев'яток, десята – кількості нулів.

Відповідь. Це число 2100010006.

■ **Задача 3.24.** Присутні тут цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 зустрічаються:

цифра 0 – ... раз,
цифра 1 – ... раз,
цифра 2 – ... раз,
цифра 3 – … раз,
цифра 4 – ... раз,
цифра 5 – … раз,
цифра 6 – … раз,
цифра 7 – ... раз,
цифра 8 – ... раз,
цифра 9 – ... раз.

Вставте замість трьох крапок відповідні числа так, щоб отримати істинне твердження.

Розв'язання. Розв'язок цієї задачі такий:

„Присутні тут цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 зустрічаються:

цифра 0 – 2 рази,
цифра 1 – 2 рази,
цифра 2 – 8 раз,
цифра 3 – 4 рази,
цифра 4 – 3 рази,
цифра 5 – 2 рази,
цифра 6 – 2 рази,
цифра 7 – 2 рази,
цифра 8 – 3 рази,
цифра 9 – 2 рази".

■ **Задача 3.25.** „В цій фразі цифра 0 зустрічається ... раз,

цифри, які не перевищують 1 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 2 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 3 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 4 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 5 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 6 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 7 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 8 зустрічаються ... раз,
цифри, які не перевищують 9 зустрічаються ... раз".

Заповніть пропущені місця так, щоб отримати правильне твердження.

Розв'язання. Ви не повірите, але така фраза існує. Ось вона:

„В цій фразі цифра 0 зустрічається 2 рази,
цифри, які не перевищують 1 зустрічаються 6 раз,
цифри, які не перевищують 2 зустрічаються 14 раз,
цифри, які не перевищують 3 зустрічаються 15 раз,
цифри, які не перевищують 4 зустрічаються 18 раз,
цифри, які не перевищують 5 зустрічаються 20 раз,
цифри, які не перевищують 6 зустрічаються 22 рази,
цифри, які не перевищують 7 зустрічаються 24 рази,
цифри, які не перевищують 8 зустрічаються 27 разів,
цифри, які не перевищують 9 зустрічаються 28 разів".

■ **Задача 3.26.** Є фрази, які суперечать самі собі, наприклад: "Написане в цьому рядку речення - безсоромна брехня", "Ніколи не кажи: "Ніколи".

Є фрази, які не суперечать, а навіть слідують власним вказівкам, наприклад: "Коротше!"

Спробуйте потренуватись в написанні подібних фраз. А щоб Вам було цікавіше - невеличка казочка.

Батько і син підійшли до мосту. Перед цим син захоплено розповідав про щось батьку. Запідозривши сина в обмані, батько сказав: "Це не звичайний міст, це чарівний міст. Всі, хто заходить на нього і перед цим говорили неправду, обов'язково провалюються в воду". Хлопчина, повіривши словам батька, відразу покаявся в своєму обмані. А як тільки батько і син зайшли на середину мосту, батько провалився ...

■ **Задача 3.27.** У трикутник ABC, в якому кут при вершині A не є гострим, вписано квадрат B_1C_1DE (сторона DE якого лежить на відрізку BC, а вершини B_1 і C_1 - на відрізках AB і AC відповідно). Потім в трикутник AB_1C_1 аналогічним чином вписуємо квадрат $B_2C_2D_1E_1$ і т.д. Ця побудова проводиться декілька разів. Довести, що сума площин усіх вписаних квадратів менша половини площі трикутника ABC.

Розв'язання. Отже, якщо за умовою кут $BAC \geq 90^0$, то точка A лежить в колі з діаметром BC і центром O на ньому. Тому для висоти AH трикутника ABC маємо:

$AH \leq AO \leq BO = BC/2$,

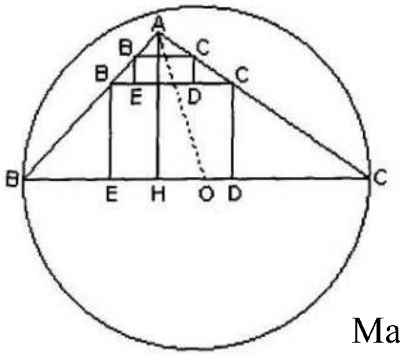
$BC \ge 2AH$. Звідси і з подібності трикутників BB_1E і BAH, а також CC_1D і CAH, отримуємо:

$$\frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}} = \frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}} = 1 + \frac{BE}{2B_1E} + \frac{CD}{2C_1D} = 1 + \frac{BH}{2AH} + \frac{CH}{2AH} = 1 + \frac{BC}{2AH} \ge 2,$$

тобто $S_{B_1C_1DE} \le S_{BB_1C_1C}$, аналогічно, маємо:

$$S_{B_2C_2D_1E_1} \le \frac{1}{2} S_{B_1B_2C_2C_1}, \ldots, S_{B_nC_nD_{n-1}E_{n-1}} \le \frac{1}{2} S_{B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}},$$

де n – число побудованих квадратів. Додаємо ці нерівності, отримуємо, що сума площ квадратів не перевищує половини площі чотирикутника BB_nC_nC, а значить, менше половини площі трикутника ABC.



Мал. 3.7

■ **Задача 3.28.** В круглий пудинг радіусом 10 см запечена перлина радіусом 3 мм. Ми хочемо її знайти. Для цього дозволяється розрізати пудинг гострим ножем по прямій на дві (однакові або різні) частини. Якщо перлина не попадає під ніж, можна одну з цих частин знову розрізати; якщо вона знову не буде знайдена, можна розрізати одну із трьох одержаних частин і т.д. Довести, що, якби ми не різали, може статися що після 32 розрізів перлина все ще не буде виявлена. Довести, що можна так зробити 33 розрізи, що перлина обов'язково буде виявлена, де б вона не знаходилась.

Розв'язання. Неможливість знаходження перлини за 32 розрізи базується на такому твердженні: як би не були проведені k розрізів, в одержані $k+1$ частин можна вписати не більше $k+1$ кругів, сумарний радіус яких дорівнює 10 см. Застосуємо індукцію. При $k=0$ це очевидно. Нехай це вірно для k розрізів і зроблений ще один розріз. Якщо він не зачіпає вписаних кругів, то вони задовольняють умові; якщо ж один з кругів виявиться розрізаним, то замінимо його двома, при цьому сумарний радіус не змінюється, і твердження доведено. Таким чином, після 32 розрізів можна буде побудувати 33 круги сумарного радіуса 10 см. І тоді радіус хоча б одного з них більше 3 мм, і якщо перлина знаходиться в ньому, вона залишиться незнайденою.

Зробивши 33 розрізи паралельними прямими, відстань між якими дорівнює $\frac{200}{34}$ мм, ми зможемо виявити шукану перлину.

■ **Задача 3.29.** В кожній із двох посудин знаходяться по A літрів води. З першої посудини переливають половину води в другу, потім із другої переливають третину води в першу, потім із першої переливають чверть води в другу і т.д. Скільки води буде в кожній із посудин після 100 переливань?

Розв'язання. Стільки ж, скільки було спочатку - по A л води в кожній.

Щоб впевнитись в цьому, покажемо, що після кожних двох наступних переливань кількість води залишається такою, як і була. Коли в посудину додають $\frac{1}{k}$-ту частин води із другого, в ньому стане $A\left(1+\frac{1}{k}\right)=A\frac{k+1}{k}$ л. Після цього, коли з неї відливають $A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}$ частину, в посудині залишається

$$A\frac{k+1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}=A \text{ л.}$$

■ **Задача 3.30.** Чоловік пив каву таким чином: спочатку він наливав повну чашку кави, випивав деяку її частину, тоді доверху доливав молоко, випивав частину суміші, знову доливав молоко доверху і т.д. Кожний раз він випивав вдвічі менше попереднього, крім останнього разу, коли він випивав чашку до дна. Чого він більше випив – кави чи молока?

Розв'язання. Зрозуміло, що в результаті чоловік випив рівно одну чашку кави, а молока випив стільки, скільки долив. Якщо першого разу він випив p-ту частину чашки, а значить і долив p-ту частину чашки, то в другий раз він долив частину $\frac{p}{2}$ і т.д. Якщо всю операцію він проробив n раз, то молока було долито:

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}+\ldots+\frac{p}{2^{n-1}}=p(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}})<2p.$$

Тому молока буде випито менше, ніж кави, якщо $p<\frac{1}{2}$.

Список літератури

1. **Васильев Н.Б., Егоров А.А.** Задачи всесоюзных математических олимпиад.-М.:Наука, 1988.

2. **Вишенський В.А. та ін.** Українські математичні олімпіади.-К.:Вища шк., 1993.

3. **Гєнкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В.** Ленінградські математичні гуртки.-К.:ТВіМС, 1997.

4. **Гальперин Г.А. Толпыго А.К.** Задачи Московских математических олимпиад.-М.:Просвещение, 1986.

5. **Конет І.М. Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В.** Обласні математичні олімпіади.-Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000.

6. **Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А.** Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування.-Львів: Євросвіт, 1999.

7. **Морозова Е.А. Петраков И.С. Скворцов В.А.** Международные математические олимпиады.-М.:Просвещение, 1976.

8. **Сборник задач Московских математических олимпиад.** /Сост.А.А.Леман.-М.:Просвещение, 1965.

9. **Страшевич С., Бровкин Е.** Польские математические олимпиады.-М.:Мир, 1978.

10. **Сарана О.А.** Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.-К.: АСК, 2004.

11. **Федак І.В.** Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики.-Чернівці: Зелена Буковина, 2002.

12. **Ядренко М.Й.** Принцип Діріхле: Бібліотечка фізико-математичної школи.-К.:Вища шк. 1985.

Видання підготовлено до друку та віддруковано
редакційно-видавничим відділом ОІПОПП.
Зам № 511. Тираж 100 прим.