Аксиоматика Вейля евклидова пространства

Основные объекты: точка, вектор

1. Аксиомы сложения векторов

Основное отношение ρ_1: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \to \bar{x} + \bar{y} \in V$

1.1. Сложение векторов коммутативно.

1.2. Сложение векторов ассоциативно.

1.3. Существует вектор $\bar{0} \in V$ такой, что для любого $\bar{x} \in V$ выполнено $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$.

1.4. Для любого $\bar{x} \in V$ существует вектор $\bar{x}' \in V$ такой, что $\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$.

2. Аксиомы умножения вектора на число

Основное отношение ρ_2: $\forall \bar{x} \in V, \forall \lambda \in R \to \lambda\bar{x} \in V$

2.1. $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\ \lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$.

2.2. $(\forall \bar{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\ (\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$.

2.3. $(\forall \bar{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\ (\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x})$.

2.4. $(\forall \bar{x} \in V)\ 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

3. Аксиома размерности

3.1. Существует три линейно независимых векторов. Любые четыре вектора линейно зависимы.

$M = \{V, \rho_1, \rho_2, 1.1 - 3.1\}$ - структура трехмерного векторного пространства

4. Аксиомы скалярного произведения

Основное отношение ρ_3: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \to \bar{x}\,\bar{y} \in R$

4.1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \bar{x}\,\bar{y} = \bar{y}\,\bar{x}$.

4.2. $(\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V)\ (\bar{x} + \bar{y})\bar{z} = \bar{x}\,\bar{z} + \bar{y}\,\bar{z}$.

4.3. $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\ \lambda(\bar{x}\,\bar{y}) = (\lambda\bar{x})\bar{y}$.

4.4. $\forall \bar{x} \in V \quad \bar{x} \neq \bar{0} \quad \bar{x}\,\bar{x} > 0, \quad \bar{x} = \bar{0} \quad \bar{x}\,\bar{x} = 0$.

$M = \{V, \rho_1, \rho_2, \rho_3, 1.1 - 4.4\}$ - структура трехмерного векторного евклидова пространства

5. Аксиомы откладывания векторов

Основное отношение ρ_4: $\forall A, B \in T \to \overline{AB} \in V$

5.1. Для любой точки $A \in T$ и любого ненулевого вектора $\bar{x} \in V$ существует единственная точка $B \in T$ такая, что $\overline{AB} = \bar{x}$.

5.2. Аксиома треугольника. Для любых трех точек $A, B, C \in T$ справедливо равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$M = \{V, T, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, 1.1 - 5.2\}$ - структура трехмерного точечно-векторного евклидова пространства