Тема 1. Основні поняття теорії нечітких множин

Визначення нечіткої множини. *Універсум* – це множина, яка містить всі можливі елементи в рамках контексту визначеної предметної області. Універсум, зазвичай, позначається літерою *X*.

Нечіткою множиною $\overline{A}$ називається множина впорядкованих пар або кортежів вигляду $< x; \mu_{\overline{A}}(x) >$, де *x* – елемент універсуму *X*, $\mu_{\overline{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$ – функція належності, яка ставить у відповідність кожному елементу *x?X* дійсне число з інтервалу [0,1], що характеризує ступінь належності елемента *x* до нечіткої множини $\overline{A}$. Чим більшим є значення функції належності $\mu_{\overline{A}}(x)$, тим більше елемент універсальної множини *x* відповідає властивостям нечіткої множини $\overline{A}$.

Скінченну нечітку множину $\overline{A}$ будемо записувати у вигляді $\overline{A}$ ={<x_1;$m_{`A}$($x_1$)>, ..., <$x_n$;$m_{`A}$(x_n)>}, або $\overline{A}$={<x;$m_{`A}$($x$)>}, де *n* – кількість елементів нечіткої множини $\overline{A}$**.** Крім даних позначень використовують такі форми запису: $\overline{A}$ ={($m_{`A}$(x_1);x_1),...,($m_{`A}$(x_n);x_n)}, $\overline{A} = \left\{ \frac{x_1}{\mu_{\overline{A}}(x_1)} + \ldots + \frac{x_n}{\mu_{\overline{A}}(x_n)} \right\}$ та $\overline{A} = \left\{ \frac{\mu_{\overline{A}}(x_1)}{x_1} + \ldots + \frac{\mu_{\overline{A}}(x_n)}{x_n} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\overline{A}}(x_i)}{x_i}$.

При цьому горизонтальна (або похила) лінії є розділовими знаками, а знак “+” позначає теоретико-множинне об'єднання окремих елементів. Неперервні нечіткі множини, як правило, записують у вигляді: $\overline{A} = \int_X \frac{\mu_{\overline{A}}(x)}{x} dx$.

Порожня нечітка множина позначається символом ? і визначає нечітку множину, функція належності якої тотожньо дорівнює нулю ($m_?$?0).

Носієм нечіткої множини $\overline{A}$ називається звичайна множина $\overline{A}s$, яка містить ті елементи універсуму *X*, значення функції належності яких не дорівнюють нулю, тобто $\overline{A}s = \{x \in X \mid \mu_{\overline{A}}(x) > 0\}$.

Нечіткі множини задаються трьома способами:

1. *У формі списку* з переліком всіх елементів нечіткої множини та відповідних їм значень функції належності: $\overline{A}$={<x_1;$m_{`A}$($x_1$))>, ..., <$x_n$;$m_{`A}$(x_n)>}. При цьому елементи з нульовими значеннями функції належності, зазвичай, не вказуються в даному списку. Цей спосіб застосовують для визначення нечітких множин, які мають скінченний дискретний носій.

Наприклад, розглянемо в якості універсума *X* множину натуральних чисел. Тоді нечітку множину $\overline{A}$, яка описує “*невелике натуральне число*”, можна визначити наступним чином: $\overline{A}$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,9>, <4;0,8>, <5;0,6>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>, <9;0,1>}.

2. *Аналітично* – у формі математичного виразу для відповідної функції належності: $\overline{A}$={<*x*;$m_{`A}(x)$>} або $\overline{A}$={x;$m_{`A}(x)$}. Цей спосіб використовують для визначення нечітких множин як зі скінченним, так і з нескінченним носієм.

Наприклад, розглянемо в якості універсума *X* множину дійсних чисел. Тоді нечітку множину *`A*, яка описує “*дійсне число, близьке до a*”, де $a \in X$, можна визначити наступним чином: `A={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$ },

де $\mu_{\overline{A}}(x) = \dfrac{1}{\left(1+(x-a)^2\right)}$ (або $\overline{A} = \int\limits_{X} \dfrac{\left(1+(x-a)^2\right)^{-1}}{x} dx$).

3. *Графічно* – у формі деякої кривої або сукупності окремих точок у двовимірному просторі. При цьому одна координата відповідає елементам універсуму *X*, а друга – значенням функції належності цих елементів.

Основні види функцій належності. Існує багато кривих для визначення функцій належності. Найбільш розповсюдженими функціями належності є трикутна, трапецієвидна, функція Гаусса та Z- (або S-) подібні.

Трикутна функція належності визначається трійкою чисел (*a,b,c*), а її значення в точці *x* обчислюється за формулою:

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

При (*b*-*a*)=(*c*-*b*) маємо симетричну трикутну функцію належності, яка однозначно задається двома параметрами з трійки (*a*,*b*,*c*).

Для визначення трапецієвидної функції належності потрібні чотири числа (*a,b,c d*), а її значення в точці *x* обчислюється за формулою:

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

При (*b*-*a*)=(*d*-*c*) ця функція належності приймає симетричний вигляд.

Функція належності Гаусса (рис. 1.1), зазвичай, описується формулою $\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$ і визначається параметрами (*c*, *s*).

Z- і S-подібні функції належності одержали свою назву у зв'язку з виглядом кривих, які зображують їхні графіки (рис. 1.2).

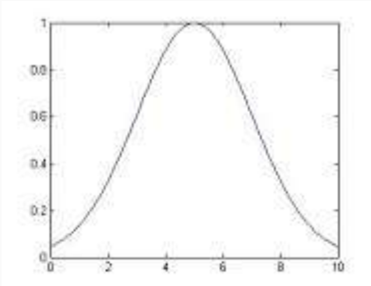
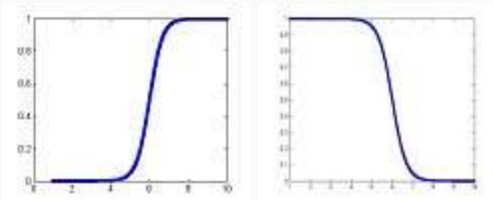


Рис. 1.1. Графік функції належності Гаусса при c=5, s =2



а) б)

Рис. 1.2. Графіки сигмоїдальної функції належності при (а) a=3, b=6; (б) a=-3, b=6

До типу Z- і S-подібних функцій належить сигмоїдальна функція належності, яка у загальному випадку описується формулою: $\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}$, де *a*, *b* – деякі числові параметри, такі, що *a*<*b*. При цьому, якщо *a*>0 маємо S-подібну функцію належності, якщо *a*<0 – Z-подібну.

Розглянемо приклади нечітких множин.

Приклад 1.1. Побудуємо нечітку множину, яка змістовно описує вихідні дні тижня. В термінології класичних множин ситуація зрозуміла: дні тижня з понеділка по п'ятницю є робочими, а субота та неділя – вихідними. Зазначимо, що мова йде про традиційний календарний тиждень. Таким чином, множина вихідних днів складається з двох елементів {субота, неділя}.

Спробуємо оцінити ступінь нашого емоційного ставлення до різних днів тижня, розглядаючи їх з точки зору можливого відпочинку. Що стосується днів з понеділка по четвер, то ставлення до них як до робочих днів навряд чи зміниться. А от п'ятниця для багатьох асоціюється з наближенням відпочинку і високим ступенем позитивних емоцій. Субота є, безумовно, вихідним днем, протягом якого можна забути всі службові турботи. Що стосується неділі, то ближче до вечора ситуація змінюється – нерідко приходить думка: “Завтра потрібно рано вставати та йти на роботу” і настрій псується.

Отже, нечітку множину $\overline{A}$, яка описує вихідні дні тижня можна задати таким чином: $\overline{A}$={<понеділок;0>, <вівторок;0>, <середа;0>, <четвер;0>, <п'ятниця;0,5>, <субота;1,0>, <неділя;0,8>}. При цьому, в якості елементів універсума розглядаються всі дні тижня, а саме: *X*={понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя}, а функція належності задається перерахуванням числових значень: чим ближчим є її значення до 1, тим більше відповідає той чи інший день тижня нашому ставленню до нього як до вихідного дня. Зобразимо нечітку множину $\overline{A}$ графічно (рис. 1.3). Для цього на горизонтальній осі відкладемо окремі значення елементів універсума *X*, а на вертикальній – відповідні їм значення функції належності $\mu_{\overline{A}}(x)$.

Зазначимо, що нечітка множина $\overline{A}$ може мати й такий вигляд: $\overline{A}$ ={<понеділок;0>, <вівторок;0>, <середа;0>, <четвер;0,1>, <п'ятниця;0,6>, <субота;1,0>, <неділя;0,7>}.

<u>Приклад 1.2.</u> Визначимо нечітку множину $\overline{B}$, яка описує “*гарячу каву*”. В якості універсума в цьому випадку, природно розглянути шкалу температур $X=\{x|0°C<x<100°C\}$. Очевидно, що окрема чашка кави, скажімо x_1, з температурою 10°C не може бути визнана гарячою, тому для неї значення функції належності множини $\overline{B}$ буде дорівнювати нулю, тобто $\mu_{\overline{B}}(x_1)$=0. З іншого боку, чашка кави x_2 з температурою 90°C цілком може бути визнана гарячою, тому для неї значення функції належності множини $\overline{B}$ буде дорівнювати 1 (тобто $\mu_{\overline{B}}(x_2)$=1).

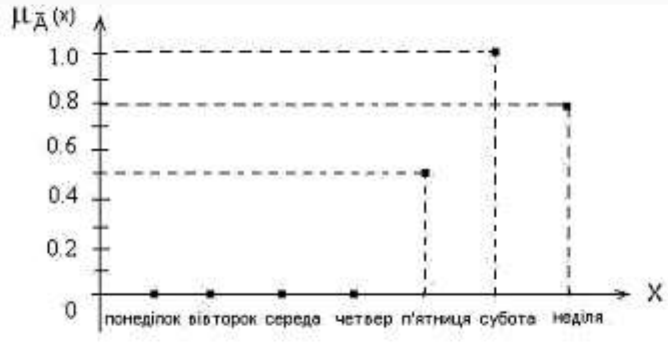


Рис. 1.3. Графічне зображення нечіткої множини $\overline{A}$

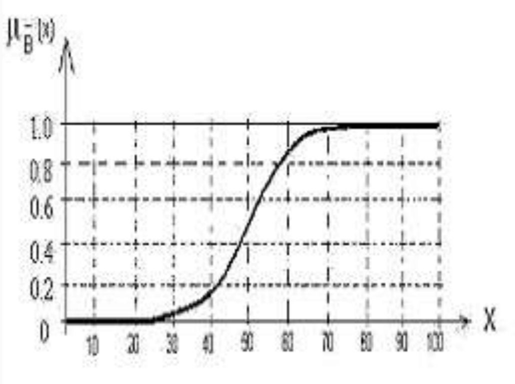
Ситуація, яка стосується температур, розташованих між значеннями 10°C та 90°C, є винятково суб'єктивною й невизначеною, оскільки, наприклад, чашка кави з температурою 55°C для однієї людини може виявитися гарячою, а для іншої – ні. Саме в цьому й проявляється “нечіткість” визначення відповідної множини. Проте можна з впевненістю стверджувати, що відповідна функція належності є монотонно зростаючою.

Отже, в якості нечіткої множини $\overline{B}=\{x;\mu_{\overline{B}}(x)\}$ можна розглянути нечітку множину, функція належності якої зображена на рис. 1.4. Такі фрази, як “висока температура”, “високий тиск”, “швидкісний автомобіль”, “високооплачувана робота”, “щедрі чайові”, “престижний район”, “смачна вечеря” породжують нечіткі множини, аналогічні прикладу 1.2.

Основні характеристики нечітких множин. Нехай $\overline{A}$ – нечітка множина, задана на універсумі *X*.

Множиною a-рівня (*a-розрізом*) нечіткої множини $\overline{A}$ називається чітка множина A_a={*x?X*| *m·A*(*x*)*?a*}, де a ?(0, 1]. Визначення α-розрізу нечіткої множини ілюструється рис. 1.5.

Приклад 1.3. Нехай *X*={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Розглянемо нечітку множину $\overline{A}$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,9>, <4;0,8>, <5;0,6>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>, <9;0,1>}, яка описує “*невелике натуральне число*”.



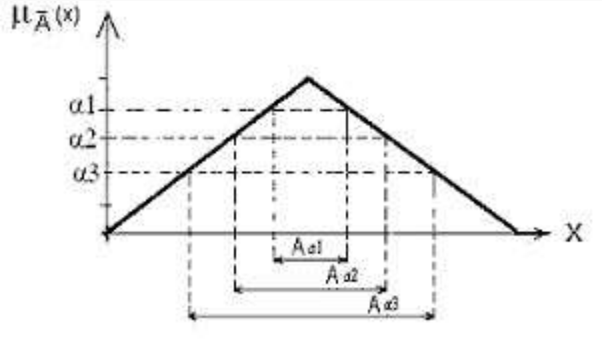


Рис. 1.4. Графік функції належності для нечіткої множини $\overline{B}$

Рис. 1.5. Приклади α-розрізів нечіткої множини $\overline{A}$

Тоді множини a-рівня, які відповідають нечіткій множині $\overline{A}$, мають вигляд: $A_{1,0}$={1, 2}, $A_{0,9}$={1, 2, 3}, $A_{0,8}$={1, 2, 3, 4}, $A_{0,6}$={1, 2, 3, 4, 5}, $A_{0,5}$={1, 2, 3, 4, 5, 6}, $A_{0,4}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, $A_{0,2}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, $A_{0,1}$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A_0={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Величина $h_{\overline{A}}=\sup_{x\in X}\{\mu_{\overline{A}}(x)\}$ називається *висотою* нечіткої множини $\overline{A}$. Наприклад, висота скінченної нечіткої множини $\overline{A}$, яка описує “*невелике натуральне число*” (див. приклад 1.3.), дорівнює 1,0 і відповідає двом елементам універсума: 1 і 2.

Приклад 1.4. Розглянемо неперервну нечітку множину $\overline{C}$, яка описує “*велике дійсне число*” і має функцію належності: $\mu_{\overline{C}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0,\ 1) \\ \dfrac{x-1}{x} \text{ для } x \in R_+ \setminus [0,\ 1) \end{cases}$

Висота нечітої множини $\overline{C}$ дорівнює 1,0, однак серед елементів універсума *X*= R_+ відсутні числа, для яких $\mu_{\overline{C}}(x) = 1$,0 (рис. 1.6).

Нечітка множина $\overline{A}$ називається *нормальною,* якщо максимальне значення її функції належності дорівнює 1, тобто

$\exists x \in X : \mu_{\overline{A}}(x) = 1{,}0$. (1.1)

Наприклад, нечітка множина $\overline{A}$, яка описує “*невелике натуральне число*” (див. приклад 1.3.), є нормальною, оскільки значення її функції належності дорівнює 1,0 на елементах 1 і 2. Нечітка множина $\overline{C}$, яка описує “*велике дійсне число*” (див. приклад 1.4.), не є нормальною.

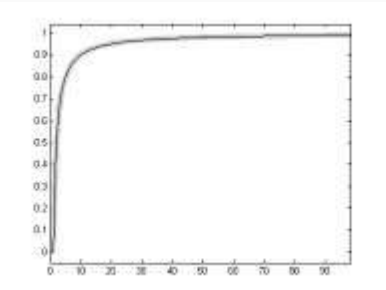


Рис. 1.6. Графік функції належності нечіткої множини `C

Нечітка множина $\overline{A}$, визначена на універсумі *X*, з функцією належності $\mu_{\overline{A}}(x)$ називається *нормалізованою,* якщо $\sup_{x \in X} (\mu_{\overline{A}}(x)) = 1$.

Нечітка множина, висота якої дорівнює одиниці, що не задовольняє умову (1.1), називається *субнормальною.* Наприклад, нечітка множина $\overline{C}$, яка описує “*велике дійсне число*” (див. приклад 1.4.), є субнормальною.

Функція належності *m*(*x*) називається *унімодальною* на відрізку [*a*,*b*]?R, якщо вона неперервна на [*a*,*b*] і для деякого відрізку [*c*,*d*]?[*a*,*b*] виконуються наступні умови:

– функція *m*(*x*) строго монотонно зростає на інтервалі [*a*,*c*] при *a*<*c*;

– функція *m*(*x*) строго монотонно спадає на інтервалі [*d*,*b*] при *d*<*b*;

– будь-яка точка $x_{\text{mod}} \in [c, d]$ є точкою максимума функції належності *m*(*x*) відносно відрізка [*a, b*]:

$$x_{\text{mod}} = \arg\max_{x\in[a,b]}\{\mu(x)\}$$. (1.2)

У випадку, коли $c=d$ відповідна функція належності називається строго унімодальною на інтервалі $[a,b]$.

Точка x_{mod} нечіткої множини $\overline{A}$, яка задовольняє умову (1.2), називається *модальним значенням* або *модою* нечіткої множини $\overline{A}$.

Нечітка множина $\overline{A}$ називається *унімодальною*, якщо її функція належності $\mu_{\overline{A}}(x)$ є унімодальною. *Ядром* нечіткої множини $\overline{A}$ називається чітка множина $A_1 = \{x \in X | \mu_{\overline{A}}(x) = 1{,}0\}$. Наприклад, ядро нечіткої множини $\overline{A}$, яка описує "*невелике натуральне число*" (див. приклад 1.3.), має вигляд $A_1=\{1, 2\}$. Нечітка множина $\overline{C}$, яка описує "*велике дійсне число*" (див. приклад 1.4.), має порожнє ядро.

Відомо, що деяка нечітка множина є нормальною тоді і тільки тоді, коли вона має непорожнє ядро. Будь-яку непорожню нечітку множину $\overline{A}$ завжди можна перетворити в субнормальну нечітку множину $\overline{A}'$ за формулою:

$$\mu_{\overline{A}'}(x) = \frac{\mu_{\overline{A}}(x)}{h_{\overline{A}}}$$. (1.3)

Крім того, якщо в нечіткій множині $\overline{A}$ існує хоча б один елемент $x?\overline{A}$, для якого $\mu_{\overline{A}}(x) = h_{\overline{A}}$, то отримана після перетворення (1.3) нечітка множина $\overline{A}'$ буде нормальною.

Приклад. Нехай на універсумі X={1, 2, 3, 4, 5, 6} задана нечітка множина $\overline{A}$={<2; 0,1>, <4; 0,5>, <6; 0,3>}, яка не є нормальною. Нормалізуємо $\overline{A}$ та одержимо $\overline{A}_N$={<2; 0,2>, <4; 1,0>, <6; 0,6>}.

Нечітка множина $\overline{A}=\{x;m_{A}(x)\}$ визначена на універсумі X називається *опуклою,* якщо: *" x, a, b ?X, a< x <b :* $\mu_{\overline{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\overline{A}}(a), \mu_{\overline{A}}(b)\}$. В іншому випадку нечітка множина $\overline{A}$ називається неопуклою.

Нечітка множина $\overline{A}$ з універсумом $X=R$ є опуклою тоді й тільки тоді, коли для довільних $x_1, x_2 \in R$, $\lambda \in [0,1]$ виконується умова:

$$\mu_{\overline{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_{\overline{A}}(x_1), \mu_{\overline{A}}(x_2)\}$$

Методи визначення функцій належності нечітких множин. Найбільшого поширення одержали прямі й непрямі методи визначення функцій належності нечітких множин.

У *прямих методах* для нечіткої множини $\overline{A}$ і для кожного елемента *x* з універсуму *X* задаються значення функції належності $\mu_{\overline{A}}(x)$. Як правило, прямі методи визначення функцій належності використовуються для даних, значення яких можна виміряти (наприклад: швидкість, час, відстань, тиск, температура).

При прямому визначенні функції належності треба враховувати те, що теорія нечітких множин не вимагає наявності точного її значення. Так, наприклад, при побудові нечіткої множини, яка описує властивість "*температура тіла приблизно дорівнює 36.6^{0}C*" на початковому етапі може виявитися, що досить визначити відповідну нечітку множину за допомогою трикутної функції належності з параметрами a=36^{0}C, b=36.6^0 і c=37^{0}C. Аналогічно, для побудови нечіткої множини, яка описує властивість "*підвищена температура тіла людини* (*що перебуває в межах 37.5–38^{0}C*)", на початковому етапі може виявитися достатнім визначити відповідну нечітку множину за допомогою трапецієвидної функції належності з параметрами *a=37^{0}C, b=37.5^{0}C, c=38^{0}C* і *d=38.5^{0}C*. Надалі функцію належності можна вдосконалити дослідним шляхом, на основі аналізу результатів вирішення конкретних задач.

Непрямі методи визначення функції належності, як правило, використовуються у випадку, коли в даних відсутні вимірні властивості. Серед непрямих методів найбільш відомим є так званий *метод попарних порівнянь*. Цей метод використовується для скінченних нечітких множин і заснований на наступному припущенні: якби значення шуканої функції належності були відомі й дорівнювали значенням $\mu_{\overline{A}}(x_i)$ для $i=1,...,n$, то результати попарних порівнянь елементів носія нечіткої множини $\overline{A}$ можна було б зобразити у вигляді матриці $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ з елементами $a_{ij}=\dfrac{\mu_{\overline{A}}(x_i)}{\mu_{\overline{A}}(x_j)}$.

Тема 2. Основні операції над нечіткими множинами

Рівність і домінування нечітких множин. Дві нечіткі множини $\overline{A}$={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$} і $\overline{B}$={*x*; $\mu_{\overline{B}}(x)$} називаються *рівними*, якщо їхні функції належності приймають однакові значення на всьому універсумі *X*, тобто

" *x? X*: $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_{\overline{B}}(x)$.

У цьому випадку використовують позначення $\overline{A}=\overline{B}$.

Нечітка множина $\overline{A}$={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$} є *нечіткою підмножиною* нечіткої множини $\overline{B}$={*x*; $\mu_{\overline{B}}(x)$}, якщо " *x? X*: $\mu_{\overline{A}}(x)$? $\mu_{\overline{B}}(x)$. У цьому випадку говорять, що нечітка множина $\overline{B}$ домінує над нечіткою множиною $\overline{A}$, а нечітка множина $\overline{A}$ міститься в нечіткій множині $\overline{B}$ і позначають $\overline{A}$?$\overline{B}$. Наприклад, для скінченних нечітких множин $\overline{A}_1$ й $\overline{A}_2$, які описують "*невелике натуральне число*" і мають вигляд: $\overline{A}_1$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,9>, <4;0,8>, <5;0,6>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>, <9;0,1>} і $\overline{A}_2$={<1;1,0>, <2;0,9>, <3;0,8>, <4;0,7>, <5;0,5>, <6;0,4>, <7;0,3>, <8;0,2>, <9;0,1>}, має місце наступне відношення домінування: $\overline{A}_2$? $\overline{A}_1$

Основні операції над нечіткими множинами. Нехай $\overline{A}$={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$}, $\overline{B}$={*x*; $\mu_{\overline{B}}(x)$} – довільні нечіткі множини, визначені на універсумі *X*.

Перетином нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на универсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \quad \mu_{\overline{C}}(x) = \min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)\} \qquad (2.1)$$

Позначають $\overline{C}=\overline{A}$?$\overline{B}$. Операцію перетину (2.1) нечітких множин іноді називають min-перетином.

Приклад 2.1. Розглянемо нечітку множину $\overline{A}$, яка описує "*невелике натуральне число*": $\overline{A}$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,9>, <4;0,8>, <5;0,6>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>, <9;0,1>}, і нечітку множину $\overline{B}$, яка описує "*натуральне число, що приблизно дорівнює двом*": $\overline{B}$={<1;0,5>, <2;1,0>, <3;0,6>, <4;0,4>, <5;0,2>, <6;0>, <7;0>, <8;0>, <9;0>}. Тоді нечітка множина $\overline{C}=\overline{A}$?$\overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$={<1;0,5>, <2;1,0>, <3;0,6>, <4;0,4>, <5;0,2>, <6;0>, <7;0>, <8;0>, <9;0>}. Змістовно нечітка множина $\overline{C}$ може описувати "*невелике натуральне число, що приблизно дорівнює двом*".

Об'єднанням нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на универсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \max\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)\} \quad (2.2)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} ? \overline{B}$. Операцію об'єднання (2.2) нечітких множин іноді називають max-об'єднанням.

Приклад 2.2. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} ? \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$ ={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,9>, <4;0,8>, <5;0,6>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>; <9;0,1>}. Змістовно нечітка множина $\overline{C}$ може описувати “*невелике натуральне число або натуральне число, що приблизно дорівнює двом*”.

Існують й інші (альтернативні) способи визначення операцій перетину/об’єднання нечітких множин, серед яких можна виділити алгебраїчний перетин/об’єднання та граничний перетин/об’єднання нечітких множин.

Алгебраїчним перетином (або алгебраїчним добутком) нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \mu_{\overline{A}}(x) \cdot \mu_{\overline{B}}(x) \quad (2.3)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} \bullet \overline{B}$.

Приклад 2.3. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} \bullet \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$ = {<1;0,5>, <2;1,0>, <3;0,54>, <4;0,32>, <5;0,12>, <6;0>, <7;0>, <8;0>, <9;0>}.

Алгебраїчним об’єднанням (або алгебраїчною сумою) нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \mu_{\overline{A}}(x) + \mu_{\overline{B}}(x) - \mu_{\overline{A}}(x) \cdot \mu_{\overline{B}}(x) \quad (2.4)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}$.

Приклад 2.4. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,96>, <4;0,88>, <5;0,68>, <6;05>, <7;04>, <8;02>, <9;01>}.

Граничним перетином нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \max\{\mu_{\overline{A}}(x) + \mu_{\overline{B}}(x) - 1, \ 0\} \quad (2.5)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} ? \overline{B}$.

Приклад 2.5. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A}$?$\overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$={<1;0,5>, <2;1,0>, <3;0,5>, <4;0,2>, <5;0>, <6;0>, <7;0>, <8;0>, <9;0>}.

Граничним об’єднанням нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \mathbf{min}\left\{ \mu_{\overline{A}}(x) + \mu_{\overline{B}}(x),\ \mathbf{1} \right\} \quad (2.6)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} \oplus \overline{B}$.

Приклад 2.6. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} \oplus \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;1,0>, <4;1,0>, <5;0,8>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>, <9;0,1>}.

Доповненням нечіткої множини $\overline{A}$ називається нечітка множина $\overline{A}'$ ={*x*;*m*`$\overline{A}'$(*x*)}, функція належності якої визначається за формулою:

"x ? X: *m*`$\overline{A}'$ = 1– *m*`A(*x*) (2.7)

Приклад 2.7. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді їхні доповнення будуть мати вигляд: $\overline{A}'$={<1;0>, <2;0>, <3;0,1>, <4;0,2>, <5;0,4>, <6;0,5>, <7;0,6>, <8;0,8>, <9;0,9>} і $\overline{B}'$={<1;0,5>, <2;0>, <3;0,4>, <4;0,6>, <5;0,8>, <6;1,0>, <7;1,0>, <8;1,0>, <9;1,0>}. Змістовно нечітка множина $\overline{A}'$ описує “*натуральне число, яке не є невеликим*”, а нечітка множина $\overline{B}'$ – “*натуральне число, яке не дорівнює приблизно двом*”.

Операцією *концентрування* CON($\overline{A}$) називається операція, результатом якої є нечітка множина $\overline{C}$, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = (\mu_{\overline{A}}(x))^2 \quad (2.8)$$

Приклад 2.8. Розглянемо нечітку множину $\overline{A}$ з прикладу 2.1. Тоді C0N($\overline{A}$)={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,81>, <4;0,64>, <5;0,36>, <6;0,25>, <7;0,16>, <8;0,04>, <9;0,01>}.

Операцією *розтягу* DIL($\overline{A}$) називається операція, результатом якої є нечітка множина`C, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = (\mu_{\overline{A}}(x))^{1/2} \quad (2.9)$$

Приклад 2.9. Розглянемо нечітку множину $\overline{A}$ з прикладу 2.1. Тоді DIL($\overline{A}$)={<1;1,0>, <2;1,0>, <3;0,949>, <4;0,894>, <5;0,775>, <6;0,707>, <7;0,632>, <8;0,447>, <9;0,316>}.

Різницею нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \mathbf{max}\{\mu_{\overline{A}}(x) - \mu_{\overline{B}}(x),\ 0\} \quad (2.10)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

Приклад 2.10. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} \setminus \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$ ={<1;0,5>, <2;0>, <3;0,3>, <4;0,4>, <5;0,4>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>; <9;0,1>}. Змістовно нечітка множина $\overline{C}$ може описувати “*невелике натуральне число, яке не є приблизно рівним двом*”.

Симетричною різницею нечітких множин $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}$, задана на універсумі *X*, функція належності якої визначається за формулою:

$$\forall x \in X: \ \mu_{\overline{C}}(x) = \left|\mu_{\overline{A}}(x) - \mu_{\overline{B}}(x)\right| \quad (2.11)$$

Позначають $\overline{C} = \overline{A} \Theta \overline{B}$, причому $\overline{A} \Theta \overline{B}$ =($\overline{A} \setminus \overline{B}$)? $\overline{B} \setminus \overline{A}$.

Приклад 2.11. Розглянемо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ з прикладу 2.1. Тоді нечітка множина $\overline{C} = \overline{A} Q \overline{B}$ має вигляд: $\overline{C}$ ={<1;0,5>, <2;0>, <3;0,3>, <4;0,4>, <5;0,4>, <6;0,5>, <7;0,4>, <8;0,2>; <9;0,1>}. Змістовно нечітка множина $\overline{C}$ може описувати “*невелике натуральне число, яке не є приблизно рівним двом*”.

Нечіткі оператори. Існують й інші способи визначення розглянутих вище операцій над нечіткими множинами. Допускається також узагальнене зображення нечітких теоретико-множинних операцій через так звані *нечіткі оператори.* Ці оператори діють на множині значень функцій належності і тому їх можна застосовувати до функцій належності довільних нечітких множин. Найбільший інтерес серед нечітких операторів викликають трикутна норма й трикутна конорма.

Довільна дійсна функція від двох змінних T:[0,1]?[0,1]?[0,1] називається *трикутною нормою* (*t-нормою*), якщо вона задовольняє наступні умови (аксіоми трикутної норми):

1. Обмеженість: T(x,0)=0; T(x,1)=x;

2. Комутативність: T(x,y)=T(y,x);

3. Асоціативність: T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z);

4. Монотонність: T(x,y) ?T(z1,z2), якщо x?z1 і y?z2.

Аксіома обмеженості забезпечує виконання граничних умов для всіх операцій перетину нечітких множин.

Аксіоми комутативності та асоціативності забезпечують відповідно комутативність та асоціативність операцій перетину нечітких множин.

Типовою трикутною нормою є операція перетину нечітких множин, яка описується формулою (2.1). Альтернативні операції перетину нечітких множин, визначені формулами (2.3) та (2.5) також є трикутними нормами.

Довільна дійсна функція від двох змінних S:[0,1]?[0,1]?[0,1] називається *трикутною конормою* (*t-конормою*), якщо вона задовольняє наступні умови (аксіоми трикутної конорми):

1. Обмеженість: S(x,0)=x; S(x,1)=1;

2. Комутативність: S(x,y)=S(y,x);

3. Асоціативність: S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z);

4. Монотонність: S(x,y)? S(z1,z2), якщо x?z1 і y?z2.

Аксіома обмеженості конорми забезпечує виконання граничних умов для всіх операцій об’єднання нечітких множин.

Типовою трикутною конормою є операція об’єднання нечітких множин, яка описується формулою (2.2). Альтернативні операції об’єднання нечітких множин, визначені формулами (2.4) та (2.6) також є трикутними конормами.

- **Тема 3. Нечіткі відношення**

1. Нечіткі відношення. Способи визначення нечітких відношень.

2. Основні характеристики нечітких відношень.

3. Основні операції над нечіткими відношеннями.

4. Композиція бінарних нечітких відношень.

5. Бінарні нечіткі відношення, визначені на одному універсумі

Нечіткі відношення. *Нечітким* (*k-арним*) *відношенням*, яке задане на універсумах $X_1,...,X_k$, називається деяка нечітка підмножина Q={$<x_1,...,x_k>$; $\mu_Q(<x_1,...,x_k>)$} декартового добутку цих универсумів. Тут $<x_1,...,x_k>$ – кортеж з *k* елементів $x_1 \in X_1,...,x_k \in X_k$, $\mu_Q(<x_1,...,x_k>)$ – функція належності нечіткого відношення, яка визначається як відображення

m_Q: $X_1 \times ... \times X_k \rightarrow [0,1]$.

Функція належності нечіткого відношення зображує рівень виконання відношення Q між елементами $(<x_1,...,x_k>)$, де $x_1 \in X_1,...,x_k \in X_k$.

У випадку *k*=2 нечітке відношення Q називається *бінарним*. Бінарне нечітке відношення Q задається на базисних множинах X_1, X_2.

Зворотним до бінарного нечіткого відношення Q, яке задане на декартовому добутку $X_1?X_2$, називається бінарне нечітке відношення Q^{-1}, задане на $X_2?X_1$, функція належності якого визначається за формулою:

" $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$: $\mu_{Q^{-1}}(x_2, x_1) = \mu_Q(x_1, x_2)$.

Бінарне нечітке відношення, задане на базисній множині (універсумі) X, визначається як нечітке відношення Q={ $<x_1, x_2>$; $\mu_Q(<x_1, x_2>)$}, де $<x_1, x_2>$ – кортеж з двох елементів $x_1, x_2 \in X$, $\mu_Q(<x_1, x_2>)$ – функція належності даного нечіткого відношення, яка визначається як відображення μ_Q : $X \times X \to [0.1]$.

Способи визначення нечітких відношень. Існують різні способи, за допомогою яких можна задати нечіткі відношення. Найбільше поширення з них одержали наступні:

1. *У формі списку* з явним перерахуванням усіх кортежів нечіткого відношення й відповідних їм значень функції належності: Q={($w_1; \mu_Q(w_1)$),…,($w_q; \mu_Q(w_q)$)}, де w_i – i-й кортеж (i=1,…,q), q – число кортежів нечіткого відношення Q. Цей спосіб можна використовувати лише для нечітких відношень зі скінченним числом кортежів q.

2. *Аналітично* – у формі деякого математичного виразу для функції належності заданого нечіткого відношення. Цей спосіб можна використати для визначення довільних нечітких відношень як зі скінченним, так і з нескінченним числом кортежів. У цьому випадку нечітке відношення записується у вигляді: Q={ $<x_1,\dots,x_k>$; μ_Q ($<x_1,\dots x_k>$)} або Q={ $w; \mu_Q(w)$ }. Якщо універсумами є числові множини, то функцію належності μ_Q зручно подати аналітично у формі деякої функції f ($x_1,\dots,x_k$), яка визначає відображення f: $X_1 \times \dots \times X_k \to [0,1]$.

Крім вище зазначених способів, бінарні нечіткі відношення також можна визначити:

1. *Графічно* – у формі деякої поверхні або сукупності окремих точок у тривимірному просторі. При цьому дві координати будуть відповідати елементам универсумів X_1 і X_2, а третя координата – відповідним значенням функції належності.

2. *У формі матриці* бінарного нечіткого відношення. Цей спосіб заснований на зображенні нечіткого бінарного відношення зі скінченним числом кортежів у формі матриці, рядки якої відповідають першим елементам кортежів даного нечіткого відношення, а стовпчики – другим. При цьому елементами матриці є відповідні значення функції належності даного відношення. Якщо бінарне нечітке відношення задане на одному універсумі, то його матриця є квадратною.

Визначену таким способом матрицю називають *матрицею бінарного нечіткого відношення* й позначають M_Q.

Різновидом матричної форми зображення бінарного нечіткого відношення є *таблична форма*.

3. *У формі нечіткого графа* G=(V, E, M_g), який задається у вигляді двох звичайних скінченних множин: V={$v_1,...,v_n$} – множини вершин, E={$e_1,...,e_m$} – множини дуг нечіткого графа і деякої функції належності дуг даного нечіткого графу M_g: E®[0, 1]. Натуральне число *n* визначає кількість вершин нечіткого графа, а натуральне число *m* – кількість його дуг. При цьому вершини нечіткого графа, як і у випадку звичайних графів, позначаються точками, а дуги – відрізками прямих ліній. Дуги орієнтованих графів мають стрілку на одному з кінців. Поруч із вершинами записуються відповідні їм умовні позначення, а поруч із кожною дугою – відповідне значення функції належності. Дуги з нульовою функцією належності в нечіткому графі, як правило, не зображують.

Розглянемо приклади нечітких відношень.

Приклад 3.1. Побудуємо скінченне бінарне нечітке відношення *Q*, задане на універсумі *X*={1, 2, 3, 4, 5}, яке описує умову *"натуральне число* x_i *приблизно дорівнює натуральному числу* x_j*"*(*i*, *j*=1,…,5).

Нечітке відношення *Q* можна визначити у формі списку: *Q*={(<1, 1>;1,0), (<1,2>;0,8), (<1,3>;0,5), (<1,4>;0,2), (<2,1>;0,8), (<2,2>;1,0), (<2,3>;0,8), (<2,4>;0,5), (<2,5>;0,2), (<3,1>;0,5), (<3,2>;0,8), (<3,3>;1,0), (<3,4>;0,8), (<3,5>;0,5), (<4,1>;0,2), (<4,2>;0,5), (<4,3>;0,8), (<4,4>;1,0), (<4,5>;0,8), (<5,2>;0,2), (<5,3>;0,5), (<5,4>;0,8), (<5,5>;1,0)}. Зазначимо, що в цьому списку відсутні кортежі з нульовим значенням функції належності. Дане бінарне нечітке відношення можна також задати у вигляді матриці:

$$M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{pmatrix},$$

графічно (у формі сукупності точок у тривимірному просторі) або у формі нечіткого графа.

Якщо X=[0,5], то дане нечітке відношення можна задати за допомогою наступної функції належності: $\mu_Q(x_i, x_j) = e^{-0,2(x_i - x_j)^2}$.

Приклад 3.2. Нехай *X*=*Y*=[0,120] – тривалість життя людини. Побудуємо нескінченне бінарне нечітке відношення Q_1, задане на універсумах *X* і *Y*, яке змістовно описує умову "*особа x значно старша за особу y*". Це нечітке відношення зручно визначити аналітично, наприклад, за допомогою функції належності вигляду:

$$\forall <x,y> \in X \times Y: \ M_{Q_1}(<x,y>) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x-y \le 0, \\ \dfrac{x-y}{30}, \text{ якщо } 0 < x-y < 30, \\ 1, \text{ якщо } x-y \ge 30. \end{cases}$$

Приклад 3.3. Побудуємо нескінченне бінарне нечітке відношення Q_2, задане на універсумі X=R+, яке змістовно описує умову "*дійсне число x_1 значно перевищує дійсне число x_2*". Це нечітке відношення зручно визначити аналітично, наприклад, за допомогою функції належності вигляду:

$$\forall <x_1,x_2> \in R_+ \times R_+: \ M_{Q_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_1 \le x_2, \\ 1-\dfrac{1}{x_1-x_2}, \text{ якщо } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Приклад 3.4. Побудуємо нечітке відношення, яке змістовно описує спрощений пошук несправності в автомобілі. З цією метою в якості першого універсума розглянемо множину передумов або причин несправності X={x_1, x_2, x_3, x_4}, де x_1 – "несправність акумулятора", x_2 – "несправність карбюратора", x_3 – "низька якість бензину", x_4 – "несправність системи запалювання". В якості другого універсума розглянемо множину висновків або проявів несправності Y={y_1, y_2, y_3}, де y_1 – "двигун не заводиться", y_2 – "двигун працює ненадійно", y_3 – "двигун не працює на повну потужність". При цьому між множиною передумов і множиною наслідків існує деякий причинний взаємозв'язок. Особливість побудови нечіткої моделі для даної ситуації полягає в тому, що цей взаємозв'язок не є однозначним. Крім того, враховуючи суб'єктивний досвід конкретного механіка, марку автомобіля, умови його експлуатації та інші фактори, цей причинний взаємозв'язок найбільш адекватно можна зобразити у вигляді бінарного нечіткого відношення P={ $<x_i, y_j>$; $\mu_P(<x_i, y_j>)$ | i=1,2,3,4; j=1,2,3}, визначеного на базисних множинах X і Y, функція належності $\mu_P(<x_i, y_j>)$ якого кількісно описує ступінь впевненості в тому, що причина несправності x_i може мати наслідок y_j.

Нечітке відношення P можна визначити у формі списку: P={(<x_1,y_1>;1,0), (<x_1,y_2>;0,1), (<x_1,y_3>;0,2), (<x_2,y_1>;0,8), (<x_2,y_2>;0,9), (<x_2,y_3>;1,0), (<x_3,y_1>;0,7), (<x_3,y_2>;0,8), (<x_3,y_3>;0,5), (<x_4,y_1>;1,0), (<x_4,y_2>;0,5), (<x_4,y_3>;0,2)}. Оскільки нечітке відношення P бінарне й скінченне, то його можна зобразити у формі таблиці 3.1, яку легко перетворити в матрицю даного нечіткого відношення M_P.

Таблиця 3.1. Нечітке відношення P діагностики несправності в автомобілі

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	y_3
x_1	1,0	0,1	0,2
x_2	0,8	0,9	1,0
x_3	0,7	0,8	0,5
x_4	1,0	0,5	0,2

Щоб визначити нечітке відношення *P* у формі нечіткого графа, зобразимо на площині його вершини, в якості яких виступають елементи множин *X* і *Y*. З'єднаємо ці вершини дугами, спрямованими від вершин, які відповідають елементам множини *X*, до вершин, які відповідають елементам множини *Y*. Поруч із кожною дугою вкажемо значення її функції належності. Одержимо нечіткий граф відношення *P* (рис. 3.1).

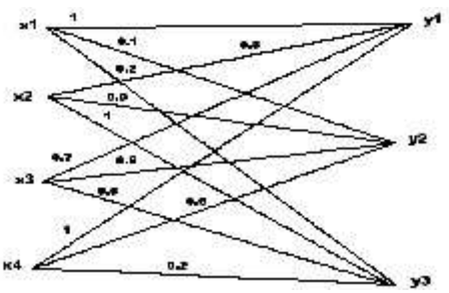


Рис. 3.1. Нечіткий граф відношення *P* (стрілки дуг, спрямованих від вершин x_i до вершин y_j, для зручності не позначені).

<u>Приклад 3.5.</u> Побудуємо скінченне бінарне нечітке відношення *Q*, задане на універсумі $X=\{0, 1, 2, 3\}$, яке описує умову *"число x_i набагато менше за число x_j ($x_i<<x_j$)"*($i, j=1,\ldots,4$). Дане бінарне нечітке відношення можна задати у вигляді матриці:

$$M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для неперервної множини X=[0, 3] це нечітке відношення можна визначити за допомогою наступної функції належності:

$$\mu_Q(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ x_i \geq x_j \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{5}{(x_i - x_j)^4}}, \ \text{якщо} \ x_i < x_j \end{cases}.$$

Основні характеристики нечітких відношень. Нехай Q={$< x_1,...,x_k >$; $\mu_Q(< x_1,...,x_k >)$} – довільне нечітке k-арне відношення, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1 \times ... \times X_k$, з функцією належності $\mu_Q(< x_1,...,x_k >)$.

Носієм нечіткого відношення Q називається звичайне відношення Q_S, визначене наступним чином:

Q_S={$< x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k$ | $\mu_Q(< x_1,...,x_k >)$>0}.

Наприклад, носієм нечіткого відношення Q, розглянутого в прикладі 3.1, є відношення Q_S ={<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <2,5>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <3,5>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>, <4,5>, <5,2>, <5,3>, <5,4>, <5,5>}.

Відношенням а-рівня (*а-розрізом*) нечіткого відношення Q називається чітке відношення Q_α, визначене наступним чином:

Q_α ={$< x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k$ | $\mu_Q(< x_1,...,x_k >)$?а}, де а?(0,1].

Прикладами відношень а-рівня (а=0,5 і а=0,8) для нечіткого відношення Q, розглянутого в прикладі 3.1, є відношення:

$Q_{0.8}$={<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,3>, <4,4>, <4,5>, <5,4>, <5,5>};

$Q_{0.5}$={<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <3,5>,<4,2>, <4,3>, <4,4>, <4,5>, <5,3>, <5,4>, <5,5>}.

Величина $h_Q = \sup_{(x_1,...,x_k) \in X_1 \times ... \times X_k} \left\{ \mu_Q(x_1,...,x_k) \right\}$ називається *висотою* нечіткого ві дношення Q. Наприклад, висота скінченного нечіткого відношення Q, розглянутого в прикладі 3.1, дорівнює 1 та відповідає елементам головної діагоналі матриці M_Q цього відношення. Висота бінарного нечіткого відношення Q_2, розглянутого в прикладі 3.3, також дорівнює 1. Однак, серед елементів універсуму $X = R_+$ відсутні числа, для яких $\mu_{Q_2}(< x_i, x_j >) = 1$.

Нечітке відношення Q називається *нормальним,* якщо

$\exists < x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k$: $\mu_Q(< x_1,...,x_k >)$=1 (3.2)

Нечітке відношення Q, розглянуте в прикладі 3.1, є нормальним, оскільки максимальне значення його функції належності дорівнює 1 і досягається на елементах головної діагоналі матриці M_Q цього відношення.

Якщо висота нечіткого відношення дорівнює 1, але умова (3.2) не виконується, то нечітке відношення називається *субнормальним.* Довільне непорожнє нечітке відношення Q можна звести до субнормального за допомогою перетворення:

$$\mu_{Q'}(<x_1,\ldots,x_k>) = \frac{\mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>)}{h_Q}.$$

Нечітке відношення Q_2, розглянуте в прикладі 3.3, є субнормальным.

Деякий кортеж $w_m \in X_1 \times \ldots \times X_k$ нечіткого відношення Q називається *модою,* якщо він є точкою локального максимума відповідної функції належності $\mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>)$, тобто $w_m = \arg\max\{\mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>)\}$, де максимум береться по елементах деякого околу кортежа w_m з області визначення функції належності. Наприклад, нечітке відношення Q, розглянуте в прикладі 3.1, має 5 мод, які відповідають елементам головної діагоналі матриці M_Q цього відношення, а нечітке відношення Q_2, розглянуте в прикладі 3.3, не має жодної моди.

Ядром нечіткого відношення Q називається звичайне відношення Q_1, визначене наступним чином:

$$Q_1 = \{<x_1,\ldots,x_k> \in X_1 \times \ldots X_k \,|\, \mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>) = 1\}.$$

Наприклад, ядро нечіткого відношення P (див. приклад 3.4) має вигляд: $P_1=\{<x_1,y_1>, <x_2,y_3>, <x_4,y_1>\}$.

Основні операції над нечіткими відношеннями. Нехай $Q = \{<x_1,\ldots,x_k> | \mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>)\}$ і $R=\{<x_1,\ldots,x_k> | \mu_R(<x_1,\ldots,x_k>)\}$ – довільні нечіткі k-арні відношення, визначені на декартовому добутку універсумів $X_1?\ldots?X_k$. Говорять, що нечітке відношення Q містить нечітке відношення R, якщо " $<x_1,\ldots,x_k> \in X_1 \times \ldots \times X_k$: $\mu_R(<x_1,\ldots,x_k>)$? $\mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>)$.

Перетином нечітких відношень Q і R називається нечітке відношення S, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1?\ldots?X_k$,, функція належності якого має вигляд:

$$\forall <x_1,\ldots,x_k> \in X_1 \times \ldots \times X_k : \mu_S(x_1,\ldots,x_k>) = \min\{\mu_Q(<x_1,\ldots,x_k>), \mu_R(<x_1,\ldots,x_k>)\}.$$

Позначають $S = Q \cap R$.

<u>Приклад 3.5.</u> Розглянемо два бінарних нечітких відношення Q і R, які визначені на одному універсумі $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Нехай нечітке відношення Q змістовно описує умову "*натуральне число* x_i *приблизно дорівнює натуральному числу* x_j" (див приклад 3.1), а нечітке відношення R – умову: "*натуральне число* x_i *значно перевищує натуральне число* x_j". Визначимо ці нечіткі відношення наступними матрицями:

$$M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}$$ і $$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,7 & 0,5 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді результат перетину цих нечітких відношень можна зобразити у вигляді матриці:

$$M_{Q\cap R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0 \end{pmatrix},$$

яка змістовно описує одночасне виконання двох умов.

Об'єднанням нечітких відношень Q і R називається нечітке відношення U**,** визначене на декартовому добутку універсумів X_1?…?X_k, функція належності якого має вигляд:

$$\forall < x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k : \ \mu_U(< x_1,...,x_k >) = \max\{\mu_Q(< x_1,...,x_k >), \mu_R(< x_1,...,x_k >)\}.$$

Позначають $U = Q \cup R$**.**

Для розглянутих у прикладі 3.5 нечітких відношень Q і R результат їх об'єднання можна зобразити у вигляді матриці:

$$M_{Q\cup R} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,8 & 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,8 & 1,0 & 0,8 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 & 0,8 & 1,0 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,5 & 0,8 & 1,0 \end{pmatrix},$$

яка змістовно описує виконання умови “натуральне число x_i приблизно дорівнює натуральному числу x_j або значно перевищує натуральне число x_j”.

Доповненням нечіткого відношення Q називається нечітке відношення $\overline{Q} = \{< x_1,...,x_k > | \ \mu_{\overline{Q}}(< x_1,...,x_k >)$, функція належності якого має вигляд:

$$\forall < x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k : \ \mu_{\overline{Q}}(< x_1,...,x_k >) = 1 - \mu_Q(< x_1,...,x_k >).$$

Для розглянутих у прикладі 3.5 нечітких відношень Q і R їх доповнення можна зобразити у вигляді матриць:

$$M_{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1,0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$ і $$M_{\bar{R}} = \begin{pmatrix} 1,0 & 1,0 & 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 0,8 & 1,0 & 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 0,5 & 0,8 & 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,8 & 1,0 & 1,0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,8 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Різницею нечітких відношень Q і R називається нечітке відношення U, визначене на декартовому добутку універсумів X_1?…?X_k, функція належності якого має вигляд:

$\forall < x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k$:

$$\mu_U(< x_1,...,x_k >) = \max\{\mu_Q(< x_1,...,x_k >) - \mu_R(< x_1,...,x_k >), 0\}.$$

Позначають $U = Q \setminus R$.

Для розглянутих у прикладі 3.5 нечітких відношень Q і R результат їх різниці можна зобразити у вигляді наступної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 1,0 & 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,6 & 1,0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 1,0 \end{pmatrix},$$

яка змістовно описує виконання двох умов “натуральне число x_i приблизно дорівнює натуральному числу x_j і одночасно натуральне число x_i не перевищує значно натуральне число x_j”.

Симетричною різницею нечітких відношень Q і R називається нечітке відношення U, визначене на декартовому добутку універсумів X_1?…?X_k, функція належності якого має вигляд:

$\forall < x_1,...,x_k > \in X_1 \times ... \times X_k$: $\mu_U(< x_1,...,x_k >) = |\mu_Q(< x_1,...,x_k >) - \mu_R(< x_1,...,x_k >|$.

Позначають $U = Q \Theta R$.

Для розглянутих у прикладі 3.5 нечітких відношень Q і R результат їх симетричної різниці можна зобразити у вигляді наступної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 1,0 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 1,0 & 0,8 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,6 & 1,0 & 0,8 \\ 0,9 & 0,5 & 0 & 0,6 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Композиція бінарних нечітких відношень. Нехай $Q=\{<x_1,x_2>;\mu_Q(<x_1,x_2>)\}$ – бінарне нечітке відношення, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1 \times X_2$, а $R=\{<x_2,x_3>;\mu_R(<x_2,x_3>)\}$ – бінарне нечітке відношення, визначене на декартовому добутку універсумів $X_2 \times X_3$.

Нечітке бінарне відношення *V*, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1 \times X_3$, називається *(max-min)-композицією* бінарних нечітких відношень *Q* і *R*, якщо його функція належності має вигляд:

$$\forall <x_1,x_3> \in X_1 \times X_3: \mu_V(<x_1,x_3>) = \max_{x_2 \in X_2}\{\min\{\mu_Q(<x_1,x_2>), \mu_R(<x_2,x_3>)\}\} \quad (3.3)$$

Позначають $V=Q \otimes R$.

<u>Приклад 3.7.</u> Розглянемо задачу вибору професії для подальшого навчання й одержання відповідної спеціальності в деякому навчальному закладі. З цією метою побудуємо нечітку модель, засновану на двох бінарних нечітких відношеннях *S* і *T*.

Нехай нечітке відношення *S* будується на універсумах *X* та *Y*, а нечітке відношення *T* – на універсумах *Y* та *Z*, де *X* описує множину спеціальностей, на які проводиться набір, *Y* – множину психо-фізіологічних характеристик особи, *Z* – множину кандидатів на вступ до навчального закладу. Тоді нечітке відношення S змістовно описує психо-фізіологічні характеристики спеціальностей, а *T* – психо-фізіологічні характеристики кандидатів на вступ до навчального закладу.

Нехай $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8,y_9,y_{10}\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$, де елементи універсумів мають наступний зміст:

x_1 – менеджер, x_2 – програміст, x_3 – водій, x_4 – секретар-референт, x_5 – перекладач;

y_1 – швидкість і гнучкість мислення, y_2 – уміння швидко приймати рішення, y_3 – концентрація уваги, y_4 – зорова пам'ять, y_5 – швидкість реакції, y_6 – рухова пам'ять, y_7 – фізична витривалість, y_8 – координація рухів, y_9 – емоційна стійкість, y_{10} – відповідальність;

z_1 – Петров, z_2 – Іванов, z_3 – Сидоров, z_4 – Васильєва, z_5 – Григор'єва.

Значення відповідних функцій належності $\mu_S(<x_i, y_j>)$ і $\mu_T(<y_j, z_k>)$ нечітких відношень *S* і *T* наведені нижче в таблицях 3.2 і 3.3.

Таблиця 3.2. Нечітке відношення *S*

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
x_1	0,9	0,9	0,8	0,4	0,5	0,3	0,6	0,2	0,9	0,8
x_2	0,8	0,5	0,9	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,5	0,5
x_3	0,3	0,9	0,6	0,5	0,9	0,8	0,9	0,8	0,6	0,3
x_4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,2	0,2	0,3	0,3	0,9	0,8
x_5	0,7	0,8	0,8	0,2	0,6	0,2	0,2	0,3	0,3	0,2

Таблиця 3.3. Нечітке відношення *T*

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	0,9	0,8	0,7	0,9	1
y_2	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6
y_3	0,5	0,2	0,3	0,8	0,7
y_4	0,5	0,9	0,5	0,8	0,4
y_5	1	0,6	0,5	0,7	0,4
y_6	0,4	0,5	1	0,7	0,8
y_7	0,5	0,8	0,9	0,5	0,4
y_8	0,5	0,6	0,7	0,6	0,5
y_9	0,8	1	0,2	0,5	0,6
y_{10}	0,3	0,5	0,9	0,6	0,8

Отже, матриці бінарних нечітких відношень *S* і *T* мають наступний вигляд:

$$M_S = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,8 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,2 & 0,9 & 0,8 \\ 0,8 & 0,5 & 0,9 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,9 & 0,6 & 0,5 & 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,8 & 0,6 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,9 & 0,8 \\ 0,7 & 0,8 & 0,8 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad M_T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,9 & 1,0 \\ 0,6 & 0,4 & 0,8 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,9 & 0,5 & 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 1,0 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 1,0 & 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,9 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до формули (3.3), результат нечіткої (max-min)-композиції відношень *S* і *T* можна зобразити у вигляді матриці нечіткого відношення $M_{S\otimes T}$, яку для наочності зобразимо в табличній формі:

Таблиця 3.4. Нечітка (max-min)-композиція відношень *S* і *T*

	Петров	Іванов	Сидоров	Васильєва	Григор'єва
Менеджер	0,9	0,9	0,8	0,9	0,9
Програміст	0,8	0,8	0,7	0,8	0,8
Водій	0,9	0,8	0,9	0,7	0,8
Секретар	0,8	0,9	0,8	0,6	0,8
Перекладач	0,7	0,7	0,8	0,8	0,7

Розглянемо алгоритм знаходження одного зі значень функції належності композиції $S\otimes T$, наприклад, значення $\mu_{S\otimes T}(<x_1, y_1>) = 0,9$. Спочатку знайдемо мінімальні значення функції належності всіх пар елементів першого рядка табл.3.2 і першого стовпчика табл. 3.3, а саме: min{0,9;0,9}=0,9, min{0,9;0,6}=0,6, min{0,8;0,5}=0,5, min{0,4;0,5}=0,4, min{0,5;1,0}=0,5, min{0,3;0,4}=0,3, min{0,6;0,5}=0,5, min{0,2;0,5}=0,2, min{0,9;0,8}=0,8, min{0,8;0,3}=0,3. Після цього знайдемо максимальне з 10 отриманих значень. Це значення й буде шуканим значенням функції належності:

$\mu_{S\otimes T}(<x_1, y_1>)$=max{0,9;0,6;0,5;0,4;0,5;0,3;0,5;0,2;0,8;0,3}=0,9.

Інші значення функції належності знаходяться аналогічно.

Аналіз максимальних значень функції належності композиції $S\otimes T$ показує, що:

– кандидатам на вступ до навчального закладу можна порекомендувати навчання за наступними спеціальностями: Петров – *менеджер, водій*; Іванов

– *менеджер, секретар*; Сидоров – *водій*; Васильєва – *менеджер*; Григор'єва – *менеджер.*

– для навчання за фахом *менеджер* найбільше відповідають кандидати Петров, Іванов, Васильєва та Григор'єва; за фахом *програміст* – ті ж кандидати; за фахом *водій* – Сидоров; за фахом *секретар* – Іванов; за фахом *перекладач* – Сидоров і Васильєва.

Альтернативні операції композиції двох бінарних нечітких відношень. Нечітке бінарне відношення *U*, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1 \times X_3$, називається *(max-*)-композицією* бінарних нечітких відношень *Q* і *R*, якщо його функція належності має вигляд:

$\forall < x_1, x_3 > \in X_1 \times X_3$: $\mu_U(<x_1, x_3>) = \max\limits_{x_2 \in X_2} \{\mu_Q(<x_1, x_2>) \cdot \mu_R(<x_2, x_3>)\}$.

Позначають *U*=$Q * R$. Якщо в цьому виразі замість операції множення використати операцію алгебраїчного множення, то одержимо визначення *(max-prod)-композиції.* Проілюструємо результат (max-prod)-композиції нечітких відношень з прикладу 3.7, зобразивши його у вигляді табл. 3.5.

Таблиця 3.5 Нечітка (max-prod)-композиція відношень *S* і *T*

	Петров	Іванов	Сидоров	Васильєва	Григор'єва
Менеджер	0,81	0,90	0,72	0,81	0,90
Програміст	0,72	0,64	0,56	0,72	0,80
Водій	0,90	0,72	0,81	0,63	0,64
Секретар	0,72	0,90	0,72	0,48	0,64
Перекладач	0,63	0,56	0,64	0,64	0,70

Аналіз табл. 3.5 показує, що:

- кандидатам на вступ до навчального закладу можна порекомендувати навчання за наступними спеціальностями: Петров – *водій*; Іванов – *менеджер, секретар*; Сидоров – *водій*; Васильєва – *менеджер,* Григор'єва – *менеджер.*

- для навчання за фахом *менеджер* найбільше підходять кандидати Іванов і Григор'єва; за фахом *програміст* – Григор'єва; за фахом *водій* – Петров; за фахом *секретар* – Іванов; за фахом *перекладач* – Сидоров і Васильєва.

Нечітке відображення та принцип узагальнення в теорії нечітких множин. Нечітке відношення F={$<x_1,...,x_k,x>$; $\mu_F(<x_1,...,x_k,x>)$}, визначене на декартовому добутку універсумів $X_1?...?X_k?X$, називається *нечітким відображенням*, якщо для будь-якого кортежа $<x_1,...,x_k>$?$X_1\times...\times X_k$ існує не більше одного елемента $x?X$ такого, що $\mu_F(<x_1,...,x_k,x>)>0$. В цьому випадку говорять, що відображення F діє з декартового добутку універсумів $X_1?...?X_k$ в універсум X, тобто F: $X_1?X_2$?...?X_k®X.

Якщо в якості універсумів $X_1,...,X_k$ і X виступають числові множини, то нечітке відображення F називають нечіткою функцією.

Нехай задано звичайне відображення f:$X_1?...?X_k$®X, де $X_1,...,X_k,X$ – звичайні множини. Припустимо, що на кожній з множин $X_1,...,X_k$, які розглядаються як універсуми, задано відповідно нечіткі множини $\overline{A}_1$={<x;$m_{`A1}(x)$>},..., $\overline{A}_k$={<$x$;$m_{`Ak}(x)$>}.

Принцип узагальнення стверджує, що відображення f і сукупність нечітких множин $\overline{A}_1,...,\overline{A}_k$ однозначно породжує нечітке відображення F:$X_1?...?X_k$®X, функція належності якого має вигляд:

$\forall<x_1,...,x_k,x>$?$X_1?...?X_k?X$: $\mu_F(<x_1,...,x_k,x>)=\min\left\{\mu_{\overline{A}1}(x_1),...,\mu_{\overline{A}k}(x_k)\right\}$, де

$x=f(<x_1,...,x_k>)$

Бінарні нечіткі відношення, визначені на одному універсумі

Властивості. Бінарне нечітке відношення Q= $\{<x_1,x_2>;\mu_Q(<x_1,x_2>)\}$, визначене на одному універсумі X, називається:

– *рефлексивним*, якщо "$x?X$: $\mu_Q(<x,x>)=1$; *антирефлексивним*, якщо "$x?X$: $\mu_Q(<x,x>)=0$;

– *симетричним,* якщо "<x_1,x_2>?X?X: $\mu_Q(<x_1,x_2>)=\mu_Q(<x_2,x_1>)$; *асиметричним*, якщо "<x_1,x_2>?X?X: $\min\{\mu_Q(<x_1,x_2>),\mu_Q(<x_2,x_1>)\}=0$; *антисиметричним*, якщо

"<x_1, x_2>?X?X, x_1? x_2: $\min\{\mu_Q(<x_1,x_2>),\mu_Q(<x_2,x_1>)\}=0$;

– *транзитивним* (*max-min транзитивним*), якщо:

"x_1, x_2, x_3?X: $\mu_Q(<x_1,x_3>)\geq\max_{x_2\in X}\left\{\min\left\{\mu_Q(<x_1,x_2>),\mu_Q(<x_2,x_3>)\right\}\right\}$ (3.4)

– *контранзитивним*, якщо:

"x_1, x_2, x_3?X: $\mu_Q(<x_1,x_3>)\leq\max_{x_2\in X}\left\{\min\left\{\mu_Q(<x_1,x_2>),\mu_Q(<x_2,x_3>)\right\}\right\}$ (3.5)

Наприклад, бінарне нечітке відношення Q, розглянуте в прикладі 3.1, є рефлексивним (всі елементи головної діагоналі матриці нечіткого відношення дорівнюють 1) та симетричним (матриця нечіткого відношення є симетричною), а бінарне нечітке відношення Q_2, розглянуте в прикладі 3.3, є антирефлексивним (всі елементи головної діагоналі матриці нечіткого відношення дорівнюють 0), асиметричним (всі елементи головної діагоналі матриці нечіткого відношення дорівнюють нулю, а також один або два елементи матриці з двох симетричних відносно головної діагоналі дорівнюють 0), антисиметричним (один або два елементи матриці із двох симетричних відносно головної діагоналі дорівнюють 0), транзитивним (оскільки функція належності нечіткого відношення Q_2 монотонно зростає відносно різниці $x_1 - x_2$).

Безпосередня перевірка властивостей транзитивності та контранзитивності конкретних нечітких відношень є відносно важкою процедурою, оскільки потребує великої кількості попарних порівнянь вигляду (3.4) і (3.5). Більш конструктивним є спосіб емпіричного встановлення цих властивостей на основі виконання операції нечіткого транзитивного замикання, про яку йдеться далі. Зазначимо, що визначення max-min транзитивності (3.4) базується на (max-min)-композиції. Але можливі й альтернативні визначення нечіткої транзитивності, які основані на інших t-нормах і t-конормах.

Операція нечіткого транзитивного замикання. Нехай скінченне бінарне нечітке відношення $Q=\{<x_i,x_j>;\mu_Q(<x_i,x_j>),\ i,j=1,\dots,n\}$ визначене на одному універсумі X, що містить n елементів (n=card(X)).

Транзитивним замиканням бінарного нечіткого відношення Q ((*max-min*)-*транзитивним замиканням*) називається бінарне нечітке відношення Q^T= $\{<x_i,x_j>;\mu_Q^T(<x_i,x_j>),\ i,j=1,\dots,n\}$, визначене на універсумі X, функція належності якого має вигляд: $\forall <x_i,x_k>\in X\times X, k=1,\dots,n:$

$$\mu_Q^T(<x_i,x_k>)=\max_{x_{j1},\dots,x_{j(k-1)}\in X}\left\{\min\left\{\mu_Q(<x_i,x_{j1}>),\dots,\mu_Q(<x_{j(k-1)},x_k>)\right\}\right\}.$$

Для практичного виконання операції транзитивного замикання бінарного нечіткого відношення Q зручно використовувати зображення даного відношення у формі матриці M_Q. В цьому випадку результат операції транзитивного замикання також зображується в формі матриці M_Q^T, яку можна одержати за формулою: $M_Q^T = M_Q \cup M_{Q^2} \cup M_{Q^3} \cup \dots$, де через M_{Q^i} позначено i-ий ступінь композиції матриці M_Q. При цьому має місце наступне співвідношення: $\forall i\in N, i>1:\ M_{Q^i} = M_Q \otimes M_{Q^{i-1}}$.

Транзитивне замикання бінарного нечіткого відношення Q можна визначити за наступним алгоритмом:

1. $M_{Q'}$ =M_Q ? (M_Q ? M_Q), де " ? " – операція композиції.

2. Якщо $M_{Q'}$?M_Q, то виконати присвоєння M_Q=$M_{Q'}$ і перейти до кроку 1. Інакше зупинити алгоритм. Відповідь: M_Q^T =$M_{Q'}$.

Якщо використовують операції (max-min)-композиції та max-об'єднання множин, то відношення Q^T називають *транзитивним* (*max-min*)-*замиканням*.

Приклад 3.8. Визначимо транзитивне замикання M_Q^T нечіткого відношення Q, заданого матрицею:

$$M_Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перший крок наведеного алгоритму. Одержимо:

$$M_Q ? M_Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad M_{Q'} = M_Q ? (M_Q ? M_Q) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,8 & 1,0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

У зв'язку з тим, що $M_{Q'}$?M_Q, присвоїмо M_Q=$M_{Q'}$ і повторимо виконання першого кроку алгоритма:

$$M_Q ? M_Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad M_{Q'} = M_Q ? (M_Q ? M_Q) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 1,0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

У зв'язку з тим, що $M_{Q'}$?M_Q, необхідно знову виконати перший крок алгоритму, попередньо присвоївши M_Q=$M_{Q'}$. В результаті отримаємо, що $M_{Q'}$=M_Q, а отже, шукане транзитивне замикання даного нечіткого бінарного відношення Q має вигляд:

$$M_Q^T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 1,0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Нечітке бінарне відношення еквівалентності, визначене на одному універсумі. Бінарне нечітке відношення Q= $\{<x_1, x_2>; \mu_Q(<x_1, x_2>)\}$, визначене на одному універсумі X, називається *нечітким відношенням* *еквівалентності* (або *подібності*), якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Нечітке відношення еквівалентності тісно пов'язане з поняттям нечіткого розбиття нечіткої множини. Система нечітких підмножин $\Re(\overline{A}) = \{\overline{A}_k \mid \overline{A}_k \subseteq \overline{A}\}$ нечіткої множини $\overline{A}$ називається *нечітким розбиттям*, якщо: 1) $\bigcup_{\overline{A}_k \in \Re(\overline{A})} \overline{A}_k = \overline{A}$; 2) $\forall \overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \Re(\overline{A}):\ h_{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2} < 1$. Якщо виконується тільки умова 1), система нечітких підмножин $\Re(\overline{A})$ називається нечітким покриттям.

Можна показати, що довільне нечітке відношення еквівалентності породжує деяке нечітке розбиття $\Re(\overline{A})$ нечіткої множини $\overline{A}$. Для цього в якості нечітких підмножин $\overline{A}_k \subseteq \overline{A}$ слід взяти нечіткі множини, елементи яких попарно задовольняють умови нечіткої рефлексивності, симетричності й транзитивності.

Через відношення еквівалентності можна визначити класи еквівалентності: для заданого відношення еквівалентності *R*, визначеного на універсумі *X*, клас еквівалентності для кожного *x?X* – це нечітка множина, в якій значення функції належності кожного елемента *y?X* визначається ступенем відношення цього елемента до елемента *x* або величиною $m_R(x,y)$. Таким чином клас еквівалентності для елемента *x* визначає ступінь, з яким всі інші елементи універсума *X* еквівалентні йому.

Приклад 3.9. Нехай задано універсум $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Розглянемо нечітке відношення *R*, зображене у вигляді таблиці, яка відповідає матриці M_R:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	1	0,8	0	0,4	0	0	0
b	0,8	1	0	0,4	0	0	0
c	0	0	1	0	1	0,9	0,5
d	0,4	0,4	0	1	0	0	0
e	0	0	1	0	1	0,9	0,5
f	0	0	0,9	0	0,9	1	0,5
g	0	0	0,5	0	0,5	0,5	1

Відношення R є відношенням еквівалентності, оскільки воно є рефлексивним ($M_R(x,x)=1$), симетричним (якщо $<x,y>?M_R$, то й $<y,x>?M_R$) і транзитивним (алгоритм обчислення транзитивного замикання виконується для M_R і закінчується після першої ітерації).

Позначимо множину а-рівнів відношення *R* через L_R={0; 0,4; 0,5; 0,8; 0,9; 1,0}. Отримаємо, що відношення еквівалентності *R* пов'зане з послідовністю шести класів (кластерів), взаємозв'язок між якими можна зобразити схематично у вигляді *дерева розбиття* (рис. 3.2).

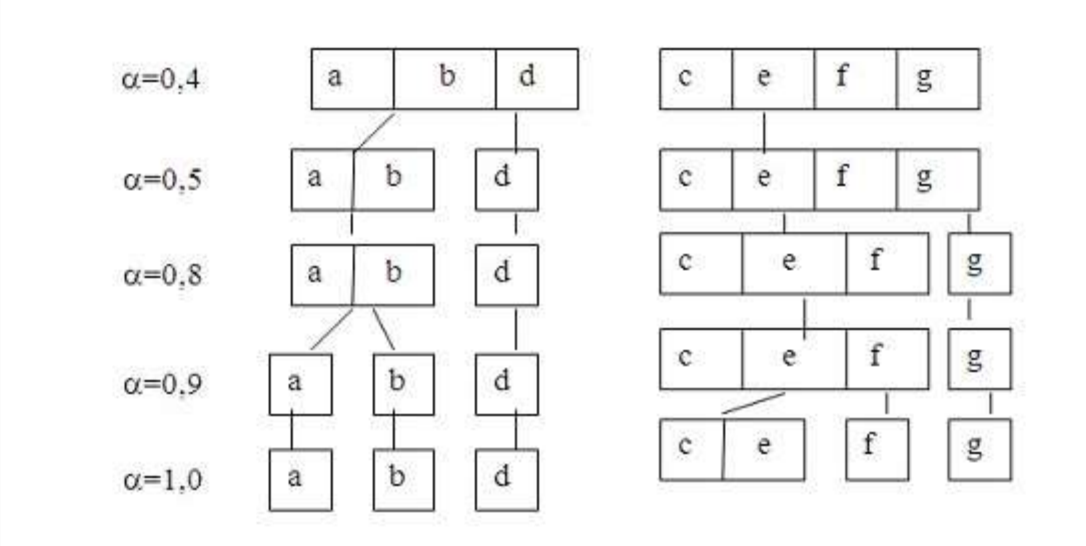


Рис. 3.2. Зображення кластерного дерева (дерева розбиття), яке відповідає нечіткому бінарному відношенню еквівалентності *R* (приклад 3.9)

Класи еквівалентності □-рівня, сформовані в результаті аналізу відношення *R*, можна інтерпретувати як сукупність елементів, які є еквівалентними між собою зі ступенем еквівалентності не менше ніж □. Таким чином, в прикладі 3.9 елементи *c, e, f* і *g* еквівалентні один до одного зі ступенем еквівалентності 0,5, але лише елементи *c* і *e* є еквівалентними зі ступенем еквівалентності 1.

Класи еквівалентності зручно зображувати у вигляді матриць, що відповідають значенням функцій належності. Для відношення еквівалентності *R*, клас еквівалентності для кожного елемента визначається рядком матриці M_R, який відповідає цьому елементу. Наприклад, класи еквівалентності для елементів *c* і *e* відношення *R* з прикладу 3.9 співпадають. Тому, відношення *R* визначає шість різних класів еквівалентності.

Нечітка еквівалентність реалізує розбиття бінарних відношень *R* в сенсі □-розрізів *R*. Це зумовлює виконання властивостей нечіткої рефлексивності, симетричності та транзитивності також і на елементах розбиття.

Таким чином до відношення еквівалентності відносяться елементи підмножин, які є еквівалентними щодо заданого відношення та утворюють класи, що не перетинаються.

- **Тема 4. Арифметичні операції над нечіткими числами та інтервалами**

Нечітка та лінгвістична змінні. *Нечітка змінна* визначається як кортеж <*?*, *X*, $\overline{A}$>, де *?* – ім’я нечіткої змінної, *X* – область її визначення (універсум); $\overline{A}$ ={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$} – нечітка множина, визначена на *X*, яка описує допустимі значення нечіткої змінної. Наприклад, для нечіткої множини $\overline{A}$, яка характеризує “*підвищену температуру тіла людини*”, відповідну нечітку змінну можна зобразити у вигляді: <*Підвищена_температура_тіла_людини*, {*x*|33°C<*x*<42°C}, $\overline{A}$>, де $\overline{A}$ ={*x*; $\mu_{\overline{A}}(x)$}, а функція належності $\mu_{\overline{A}}(x)$ може бути задана графічно у вигляді рис. 4.1.

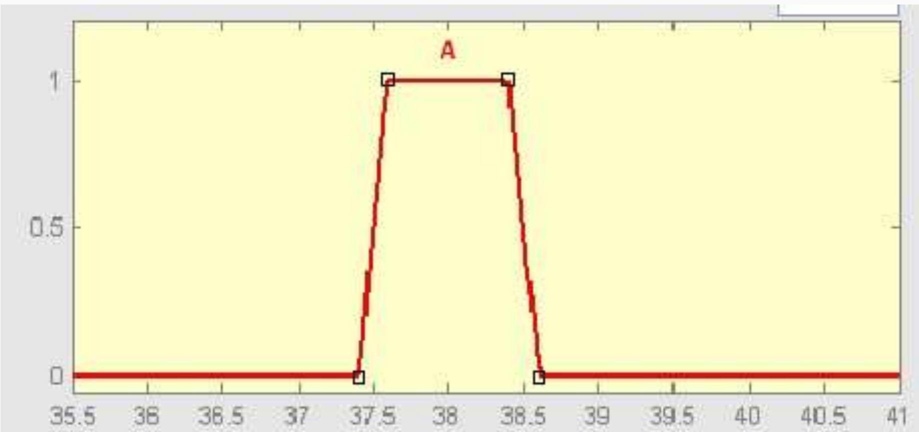


Рис. 4.1. Графік функції належності для нечіткої множини $\overline{A}$, яка описує “*підвищену температуру тіла людини*”

Узагальненням нечіткої змінної є так звана *лінгвістична змінна*, яка визначається як кортеж <*?*,*T*,*X*,*G*,*M*>, де:

? – ім’я лінгвістичної змінної;

T – множина її значень (*термів*), кожне з яких зображує собою ім’я окремої нечіткої змінної;

X – область визначення (універсум) нечітких змінних, які входять у визначення лінгвістичної змінної;

G – синтаксична процедура (наприклад, у вигляді граматики), яка описує процес генерування з множини *T* нових значень лінгвістичної змінної;

M – семантична процедура, яка дозволяє шляхом формування відповідної нечіткої множини поставити у відповідність кожному новому значенню даної лінгвістичної змінної, отриманому за допомогою процедури *G*, деякий зміст.

<u>Приклад 4.1.</u> Розглянемо параметр температура тіла людини. Вона може бути “пониженою”, “нормальною”, “підвищеною” та “високою”.

Формалізація оцінки температури тіла може бути виконана за допомогою лінгвістичної змінної <$?_1$,*T*,*X*,*G*,*M*>, де $?_1$ –

температура_тіла_людини; *T*={“понижена температура тіла”, “нормальна температура тіла”, “підвищена температура тіла”, “висока температура тіла”}; *X*=[33, 42]; *G* – процедура утворення нових термів за допомогою логічних сполучників “І”, “АБО” та модифікаторів типу “ДУЖЕ”, “НЕ”, “ЗЛЕГКА”; *M* – процедура визначення на *X* нечітких змінних $?_1$=“понижена температура тіла”, $?_2$=“нормальна температура тіла”, $?_3$=“підвищена температура тіла”, $?_4$=“висока температура тіла”, а також нечітких множин для термів з *G*(*T*) згідно з правилами трансляції нечітких сполучників і модифікаторів “І”, “АБО”, “НЕ”, “ДУЖЕ”, “ЗЛЕГКА”.

Для розглянутого прикладу нечіткі множини $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, які відповідають нечітким змінним $?_1$, $?_2$, $?_3$, $?_4$, зручно задати графічно за допомогою кусково-лінійних функцій належності. Один з можливих варіантів цих нечітких множин зображено на рис. 4.2.

Поряд з розглянутими вище значеннями лінгвістичної змінної “температура тіла людини” можливі й інші значення цієї ж лінгвістичної змінної, залежні від конкретної величини температури тіла. Наприклад, можна визначити таке значення лінгвістичної змінної температура_тіла_людини, як “приблизно 40^0C”, яке зручно моделювати за допомогою нечітких чисел.

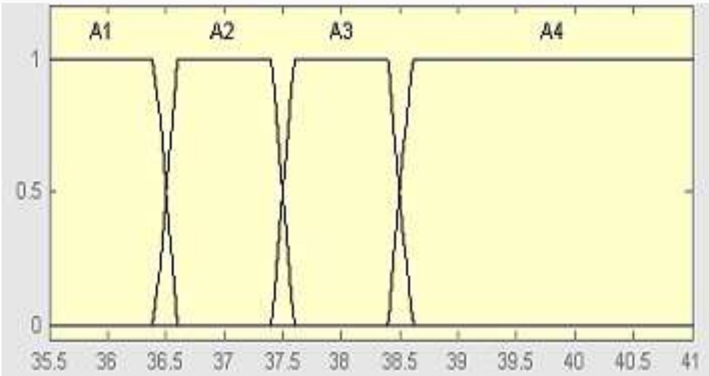


Рис. 4.2. Графіки функцій належності нечітких множин $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, які відповідають нечітким змінним $?_1$, $?_2$, $?_3$, $?_4$ для лінгвістичної змінної $?_1$=температура_тіла_людини

<u>Приклад 4.2.</u> Розглянемо параметр вік людини. Він може приймати такі значення: “молода за віком людина”, “людина середнього віку” та “людина похилого віку”.

Формалізація оцінки віку людини може бути виконана за допомогою лінгвістичної змінної < $?_2$,*T*,*X*,*G*,*M*>, де $?_2$ – вік_людини; *T*={“молода за віком людина”, “людина середнього віку”, “людина похилого віку”}; *X*=[0,120]; *G* – процедура утворення нових термів за допомогою логічних сполучників “І”, “АБО” та модифікаторів типу “ДУЖЕ”, “НЕ”, “ЗЛЕГКА” тощо; *M* – процедура визначення на *X* нечітких змінних $?_1$=“молода за віком людина”, $?_2$=“людина середнього віку”, $?_3$=“людина похилого віку”, а також нечітких множин для термів з $G(T)$ згідно з правилами трансляції нечітких сполучників і модифікаторів "І", "АБО", "НЕ", "ДУЖЕ", "ЗЛЕГКА".

Для розглянутого прикладу нечіткі множини $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, які відповідають нечітким змінним *?₁, ?₂, ?₃*, зручно задати графічно за допомогою кусково-лінійних функцій належності. На рис. 4.3 наведено один із можливих варіантів нечітких множин $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, які відповідають нечітким змінним *?₁, ?₂, ?₃* для лінгвістичної змінної *?₂*=вік_людини.

<u>Приклад 4.3.</u> Розглянемо параметр температура повітря в кімнаті. Він може приймати такі значення: “холодно”, “комфортно” або “жарко”.

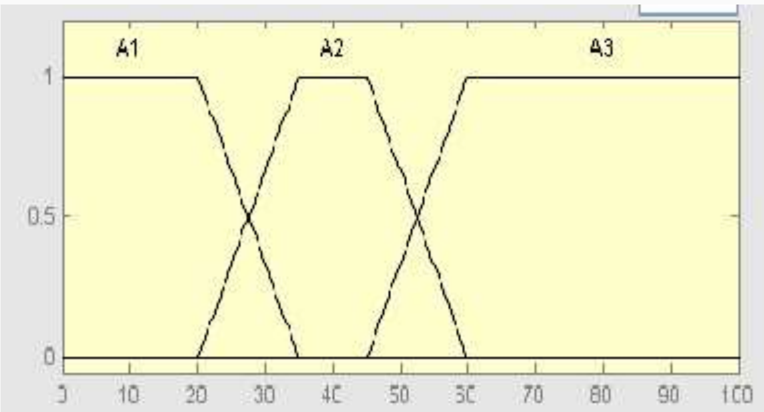


Рис. 4.3. Графік функцій належності нечітких множин $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, які відповідають нечітким змінним *?₁, ?₂, ?₃* для лінгвістичної змінної *?₂*=вік_людини

Формалізація оцінки параметра “температури повітря в кімнаті” може бути виконана за допомогою лінгвістичної змінної <*?₃*,*T*,*X*,*G*,*M*>, де:

?₃ – температура_повітря_в_кімнаті;

T={“холодно”, “комфортно”, “жарко”} з такими функціями належності:

$\mu_{a1}(x)=\dfrac{1}{1+\left|\dfrac{x-12}{6}\right|^{12}}$; $\mu_{a2}(x)=\dfrac{1}{1+\left|\dfrac{x-20}{3}\right|^{8}}$; $\mu_{a3}(x)=\dfrac{1}{1+\left|\dfrac{x-33}{8}\right|^{12}}$; x?*X*=[12, 35]

G – процедура (синтаксичні правила) утворення нових термів за допомогою логічних сполучників “І”, “АБО” та модифікаторів типу “ДУЖЕ”, “НЕ”, “ЗЛЕГКА”;

M – процедура (семантичні правила) визначення на *X* нечітких змінних *?₁*=“холодно”, *?₂*=“комфортно”, *?₃*=“жарко”, а також нечітких множин для термів з $G(T)$ згідно з правилами трансляції нечітких сполучників і модифікаторів “І”, “АБО”, “НЕ”, “ДУЖЕ”, “ЗЛЕГКА”.

Нечітка істина. Особливе місце в нечіткій логіці займає лінгвістична змінна “істина”, яка аксіоматично (різні автори визначають її по різному) визначена на універсальній множині [0, 1].

Л.Заде запропонував наступні функції належності нечітких змінних “істина” та “хибність”:

$$\mu_{ІСТИНА}(x)=\begin{cases}0,\ якщо\ \ 0\le x\le\alpha;\\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2,\alpha<x\le\dfrac{\alpha+1}{2};\\ 1-2\left(\dfrac{x-1}{1-\alpha}\right)^2,\dfrac{\alpha+1}{2}<x\le 1,\end{cases}$$

де a?[0, 1] – параметр, який визначає носія нечітких множин “істина” та “хибність”. Відповідно до Л.Заде для нечіткої множини “істина” носієм буде інтервал (a, 1], для нечіткої множини “хибність” – [0, a) і виконується відношення: $\mu_{ХИБНІСТЬ}(x)=\mu_{ІСТИНА}(1-x)$, x?[0, 1]. На рис. 4.4 зображено графіки функцій належності нечітких змінних “істина” (‘--’) та “хибність” (‘??’), якщо a=0,3.

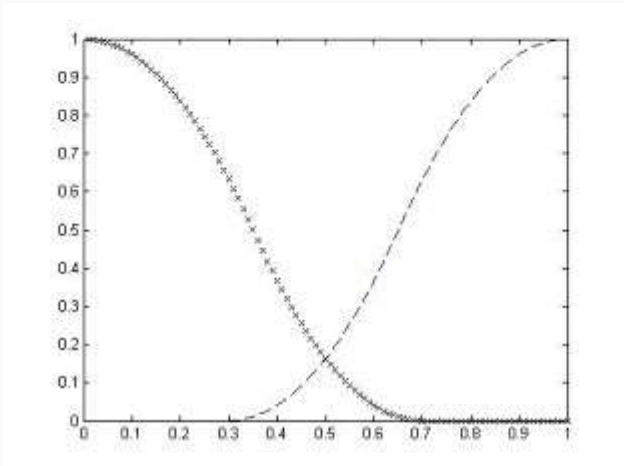


Рис. 4.4. Лінгвістичні змінні “істина” (‘--’) та “хибність” (‘??’) відповідно до Л.Заде

Для нечітких множин “істина” та “хибність” Джонатан Болдуин запропонував інші функції належності (рис. 4.5): $\mu_{ІСТИНА}(u)=u$, $\mu_{ХИБНІСТЬ}(u)=1-u$, x?[0, 1].

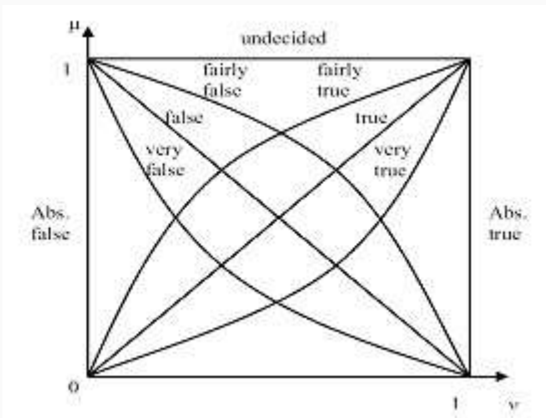


Рис. 4.5. Лінгвістичні змінні “істина” та “хибність” відповідно до Дж.Болдуина

Арифметичні операції над нечіткими числами та інтервалами

Нечіткі величини, числа та інтервали. *Нечіткою величиною* називається довільна нечітка множина $\overline{A}=\{x;\mu_{\overline{A}}(x)\}$, визначена на множині дійсних чисел R. Прикладами нечітких величин є нечіткі множини, функції належності яких мають трикутну та трапецієподібну форму.

Нечітким інтервалом називається нечітка величина з опуклою функцією належності. Прикладами нечітких інтервалів є такі нечіткі множини: “середня швидкість автомобіля 50–70 км/год”, “нормальна температура тіла”.

Нечітким числом називається нечітка нормалізована множина $\overline{A}$, визначена на множині R, функція належності якої є опуклою. Нечітке число інколи визначають як нечітку величину, функція належності якої є опуклою та унімодальною. Прикладами нечітких чисел є нечіткі множини: “нечіткий нуль” та “нечітка одиниця”.

Арифметичні операції над нечіткими числами та інтервалами. Нехай $\overline{A}=\{x;\mu_{\overline{A}}(x)\}$ і $\overline{B}=\{y;\mu_{\overline{B}}(y)\}$ – деякі нечіткі числа (нечіткі інтервали).

Сумою нечітких чисел (нечітких інтервалів) $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}=\{z;\mu_{\overline{C}}(z)\}$, функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_{\overline{C}}(z)=\sup_{z=x+y}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x),\mu_{\overline{B}}(y)\}\} \qquad (5.1)$$

Різницею нечітких чисел (нечітких інтервалів) $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}=\overline{A}-\overline{B}=\{z,\mu_{\overline{C}}(z)\}$, функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_{\overline{C}}(z)=\sup_{z=x-y}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x),\mu_{\overline{B}}(y)\}\} \qquad (5.2)$$

Добутком нечітких чисел (нечітких інтервалів) $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}=\overline{A}\times\overline{B}=\{z,\mu_{\overline{C}}(z)\}$, функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_{\overline{C}}(z)=\sup_{z=x\cdot y}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x),\mu_{\overline{B}}(y)\}\} \qquad (5.3)$$

Часткою нечітких чисел (нечітких інтервалів) $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається нечітка множина $\overline{C}=\overline{A}:\overline{B}=\{z,\mu_{\overline{C}}(z)\}$, функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_{\overline{C}}(z) = \sup_{z=x:y}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(y)\}\} \quad (5.4)$$

У формулах (5.1)–(5.4) супремум береться для кожного з сукупності значень елементів універсума R, які в свою чергу є результатом відповідної звичайної арифметичної операції над чисельними значеннями елементів універсуму вихідних нечітких чисел (нечітких інтервалів).

<u>Приклад 5.3.</u> Нехай задано нечітке число "*нечітка одиниця*", яке описується нечіткою множиною $\overline{A}$ ={<0;0,2>, <1;1,0>, <2;0,2>}. Розглянемо виконання нечіткої операції додавання: "*нечітка одиниця*" плюс "*нечітка одиниця*" за формулою (5.1). Послідовно одержимо:

$\overline{A}+\overline{A}$ ={<0;0,2>, <1;1,0>, <2;0,2>} + {<0;0,2>, <1;1,0>, <2;0,2>}= {<0;min{0,2;0,2}>,<l;max{min{0,2;1,0},min{1,0;0,2}}>, <2;max{min{0,2;0,2},min{1,0;1,0},min{0,2;0,2}}>, <3;max{min{1,0;0,2},min{0,2;1,0}}>,<4;min{0,2;0,2}>} =

{<0;0,2>, <1;0,2>, <2;1,0>, <3;0,2>, <4;0,2>}.

Отримане в результаті нечітке число можна назвати "*нечітка двійка*".

Аналогічним чином можна одержати інше нечітке число – "*нечіткий нуль*", як результат виконання операції віднімання за формулою (5.2). В цьому випадку одержимо: "нечіткий нуль" дорівнює "нечітка одиниця" мінус "нечітка одиниця" або

$\overline{A}-\overline{A}$ ={<0;0,2>, <1;1,0>, <2;0,2>} – {<0;0,2>, <1;1,0>, <2;0,2>} =

={<-2;min{0,2;0,2}>,<-1;max{min{0,2;1,0},min{1,0;0,2}}>, <0;max{min{0,2;0,2},min{1,0;1,0},min{0,2,0,2}}>, <1;max{min{1,0,0,2},min{0,2,1,0}}>, <2;min{0,2, 0,2}>} =

={<-2;0,2>, <-l;0,2>, <0;1,0>, <1;0,2>, <2;0,2>}.

Крім розглянутих операцій існують й інші. Ознайомитися з ними можна в спеціальній літературі [17, 41].

Тема 5. Основи нечіткої логіки

1. Поняття нечіткого висловлювання й нечіткого предиката.

2. Основні логічні операції з елементарними нечіткими висловлюваннями.

3. Методи виведення висновків у системах нечітких продукцій.

Нечітка логіка призначена для формалізації людських здібностей у вигляді неточних або наближених міркувань, які дозволяють більш адекватно описувати ситуації з невизначеністю. Розглянемо основи нечіткої логіки, яка використовує поняття теорії нечітких множин.

Поняття нечіткого висловлювання й нечіткого предиката. У запропонованому Л.Заде варіанті нечіткої логіки множина висловлювань, які приймають значення істина, має вигляд інтервалу дійсних значень [0,1], що дозволяє висловлюванню приймати будь-яке істинне значення з цього інтервалу. Це значення є кількісною оцінкою ступеня істинності висловлювання, про яке не можна з цілковитою впевненістю сказати істинне воно чи хибне. Використання інтервала [0,1] в якості множини значень істинності дозволяє побудувати логічну систему, в рамках якої можливі міркування з невизначеністю. В цій системі можна оцінювати істинність таких висловлювань, як: “*Швидкість автомобіля досить висока*”, “*Тиск у системі досить значний”*, “*Молода за віком людина*” тощо.

Основним поняттям нечіткої логіки є поняття елементарного нечіткого висловлювання.

Елементарним нечітким висловлюванням називається розповідне речення, що виражає закінчену думку, про яке можна стверджувати істинне воно чи хибне лише з деяким ступенем впевненості. Елементарні нечіткі висловлювання для зручності будемо позначати так само, як і нечіткі множини.

У нечіткій логіці ступінь істинності елементарного нечіткого висловлювання приймає значення з інтервалу [0,1], причому 0 і 1 є граничними значеннями ступеня істинності й відповідають значенням “хибність” та “істина”.

Наведемо приклади елементарних нечітких висловлювань:

1) завтра буде хмарна погода;

2) 35.5^0C – понижена температура тіла людини;

3) Петро - людина похилого віку;

4) артеріальний систолічний тиск у людини високий;

5) три – мале число.

Невизначеність нечітких висловлювань може мати різну природу. Так, наприклад, невизначеність оцінки істинності у висловлюванні 4) пов'язана з нечіткістю визначення поняття “*високий артеріальний систолічний тиск*”, яке є нечіткою змінною. Аналогічний характер невизначеності мають нечіткі висловлювання 2), 3) і 5), які відповідно пов'язані з нечіткими змінними *понижена_температура_тіла_людини*, *похилий_вік_людини*, *мале _число*. Що стосується висловлювання 1), то тут, окрім визначення нечіткої змінної *хмарна_погода*, треба оцінити істинність цієї змінної відносно деякого моменту часу в майбутньому. Спільним для всіх цих висловлювань є те, що їхню істинність можна оцінити дійсним числом з інтервалу [0,1].

Для оцінки ступеня істинності довільного нечіткого висловлювання зручно ввести відображення істинності *T*, яке діє на множині нечітких висловлювань U і набуває значень з інтервалу [0,1], тобто $T:U\to[0,1]$. Це відображення називається *відображенням істинності* нечітких висловлювань. Значення істинності деякого нечіткого висловлювання $\overline{A}\in U$ позначають через $T(\overline{A})$. Таким чином, якщо позначити нечітке висловлювання 1) через $\overline{A}_1$, то його істинність може кількісно дорівнювати 0,7, тобто $T(\overline{A}_1)$=0,7.

При визначенні нечіткого відношення розглядають певну характерну йому властивість, яку можна записати у вигляді багатомісного нечіткого предиката.

Нечіткий предикат $P(<x_1,...,x_k>)$ – це відображення декартового добутку універсумів $X_1,...,X_k$ в деяку впорядковану множину значень істинності, зокрема, в інтервал [0,1], тобто *P*: $X_1\times...\times X_k\to$[0,1]. Змінні $x_1,...,x_k$ називаються *предикатними* змінними нечіткого предиката $P(<x_1,...,x_k>)$, а декартовий добуток універсумів $X_1\times...\times X_k$ – його *предметною областю.*

Взаємозв'язок між нечіткими висловлюваннями та нечіткими предикатами встановлюється за допомогою процесу *означування* нечіткого предиката $P(<x_1,...,x_k>)$, під яким розуміється підстановка замість предикатних змінних $x_1,...,x_k$ конкретних значень із відповідних універсумів: $a_1\in X_1,...,a_k\in X_k$. При цьому нечіткий предикат $P(<x_1,...,x_k>)$ перетворюється в деяке нечітке висловлювання *P* зі значенням істинності з інтервалу [0,1].

Основні логічні операції з елементарними нечіткими

висловлюваннями. Нехай U – деяка множина елементарних нечітких висловлювань, $T:U\to[0,1]$ – відображення істинності висловлювань.

Запереченням нечіткого висловлювання $\overline{A}$ називається логічна операція, результатом якої є нечітке висловлювання $\overline{B}=\neg\overline{A}$ зі значенням істинності $T(\overline{B})=1-T(\overline{A})$**.** Наприклад, застосувавши операцію логічного заперечення до нечіткого висловлювання $\overline{A}$= "*Температура тіла людини підвищена*" зі значенням істинності $T(\overline{A})=0,7$**,** отримаємо висловлювання $\overline{B}$ = "*Невірно, що температура тіла людини підвищена*", ступінь істинності якого $T(\overline{B})=0,3$.

Кон'юнкцією (*min-кон'юнкцією*) нечітких висловлювань $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається бінарна логічна операція, результатом якої є нечітке висловлювання $\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}$, істинність якого визначається за формулою:

$T(\overline{C})=\min\{T(\overline{A}),T(\overline{B})\}$. (6.1)

Наприклад, розглянемо складне нечітке висловлювання, яке складається із двох елементарних: "*Людина похилого віку* та *артеріальний систолічний тиск людини високий*". Припустимо, що істинність першого з них дорівнює $T(\overline{A})=0,7$, а істинність другого – $T(\overline{B})=0,6$. Тоді істинність логічної кон'юнкції цих нечітких висловлювань дорівнює $T(\overline{A}\cap\overline{B})=0,6$.

Диз'юнкцією (*max-диз'юнкцією*) нечітких висловлювань $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається бінарна логічна операція, результатом якої є нечітке висловлювання $\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$, істинність якого визначається за формулою:

$T(\overline{C})=\max\{T(\overline{A}),T(\overline{B})\}$. (6.2)

Наприклад, розглянемо складне нечітке висловлювання: "*Людина похилого віку* або *артеріальний систолічний тиск людини високий*". Припустимо, що ступені істинності елементарних нечітких висловлювань, які входять до нього, дорівнюють відповідно $T(\overline{A})=0,7$ і $T(\overline{B})=0,2$. Тоді ступінь істинності логічної диз'юнкції цих нечітких висловлювань дорівнює $T(\overline{A}\cup\overline{B})=0,7$.

Нечіткою імплікацією висловлювань $\overline{A}$ і $\overline{B}$ ($\overline{A}\rightarrow\overline{B}$ читається "ЯКЩО $\overline{A}$, ТО $\overline{B}$") називається бінарна логічна операція, результатом якої є нечітке висловлювання, значення істинності якого визначається за обраною формулою. Найчастіше використовуються наступні формули:

1. Нечітка імплікація Заде:

$T(\overline{A}\rightarrow\overline{B})=\max\{\min\{T(\overline{A}),T(\overline{B})\},1-T(\overline{A})\}$. (6.3)

2. Нечітка імплікація Гьоделя (для $\mathrm{T}(\overline{A})\geq\mathrm{T}(\overline{B})$):

$T(\overline{A}\rightarrow\overline{B})=\max\{T(\neg\overline{A}),T(\overline{B})\}$. (6.4)

3. Нечітка імплікація Мамдані:

$T(\overline{A}\rightarrow\overline{B})=\min\{T(\overline{A}),T(\overline{B})\}$. (6.5)

4. Нечітка імплікація Лукасевича:

$T(\overline{A}\rightarrow\overline{B})=\min\{1,T(\neg\overline{A})+T(\overline{B})\}$. (6.6)

5. Нечітка імплікація Гогена (для $\mathrm{T}(\overline{A})>0$):

$T(\overline{A} \to \overline{B}) = \min\{1, T(\overline{B}) / T(\overline{A})\}$. (6.7)

Розглянемо складне нечітке висловлювання в формі нечіткої імплікації: "*Якщо людина похилого віку, то артеріальний систолічний тиск її високий*". Припустимо, що значення істинності елементарних нечітких висловлювань, з яких воно складається, дорівнюють відповідно $T(\overline{A}) = 0,7$ і $T(\overline{B}) = 0,2$. Тоді, відповідно до формули (6.3) маємо $T(\overline{A} \to \overline{B}) = 0,3$, формули (6.4) – $T(\overline{A} \to \overline{B}) = 0,3$, формули (6.5) – $T(\overline{A} \to \overline{B}) = 0,2$, формули (6.6) – $T(\overline{A} \to \overline{B}) = 0,5$ та формули (6.7) – $T(\overline{A} \to \overline{B}) = 0,29$

Еквівалентністю нечітких висловлювань $\overline{A}$ і $\overline{B}$ називається бінарна логічна операція, результатом якої є нечітке висловлювання $\overline{C} = \overline{A} \equiv \overline{B}$, істинність якого визначається за формулою:

$$T(\overline{C}) = \min\{\max\{ T(\neg\overline{A}), T(\overline{B})\}, \max\{T(\overline{A}), T(\neg\overline{B})\}\}.$$

Прикладом логічної еквівалентності є складне нечітке висловлювання: "*Людина похилого віку* еквівалентно тому, що *артеріальний систолічний тиск людини високий*", істинність якого приймає значення 0,3, якщо припустити, що значення істинності елементарних нечітких висловлювань, з яких воно складається, дорівнюють відповідно $T(\overline{A}) = 0,7$ і $T(\overline{B}) = 0,2$. .

Крім розглянутих логічних операцій над нечіткими висловлюваннями існують й інші. Ознайомитися з ними можна в спеціальній літературі [17, 42].

Правила нечітких продукцій. Оскільки нечіткий висновок реалізується на основі нечітких продукційних правил, то формалізм нечітких продукційних моделей здобуває самостійне значення. При цьому нечіткі правила продукцій не тільки багато в чому близькі до логічних моделей, але й дозволяють належним чином зображувати практичні знання експертів у тій чи іншій проблемній області.

Під правилом нечіткої продукції розуміється вираз вигляду:

$$(i): Q; P; \overline{A} \to \overline{B}; S; F; N,$$

де (i) – ім'я нечіткої продукції, Q – сфера застосування нечіткої продукції, P – умова застосування ядра нечіткої продукції, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ – нечіткі висловлювання (прості або складні), $\overline{A} \to \overline{B}$ – ядро нечіткої продукції, в якому $\overline{A}$ – умова ядра, $\overline{B}$ – висновок ядра, "®" – знак логічної секвенції, S – метод отримання значення істинності висновку ядра $\overline{B}$ на основі відомого значення істинності умови $\overline{A}$, F – коефіцієнт визначеності нечіткої продукції (виражає кількісну оцінку ступеня істинності нечіткої продукції), N – постумова продукції.

Ім'я (i), сфера застосування нечіткої продукції Q, умова застосування ядра нечіткої продукції P і постумова N визначаються аналогічно до звичайної продукції. Коефіцієнт впевненості F приймає значення з інтервалу [0,1] і часто називається ваговим коефіцієнтом нечіткого правила продукції.

Продукційна нечітка система або *система нечітких правил продукцій* має вигляд узгодженої множини нечітких продукцій або правил нечітких продукцій у формі "ЯКЩО $\overline{A}$, ТО $\overline{B}$".

У системах нечітких продукцій провідне місце займає метод визначення істинності висновків нечітких правил продукцій.

З метою формального визначення різних методів нечіткого виведення на основі нечітких правил продукцій розглянемо дві нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$, задані відповідно на універсумах X і $У$. При цьому припустимо, що нечітка множина $\overline{A}$ є умовою деякого нечіткого правила продукції, а нечітка множина $\overline{B}$ – висновком цього ж правила.

Нехай на декартовому добутку універсумів $X \times Y$ визначено бінарне нечітке відношення $Q = \{\langle x, y\rangle, \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}$. Якщо додатково відома функція належності $\mu_{\overline{A}}(x)$ нечіткої множини $\overline{A}$, то функцію належності $\mu_{\overline{B}}(y)$ нечіткої множини $\overline{B}$ можна визначити як результат нечіткої (max-min)-композиції відповідних нечітких відношень. Також для визначення функції належності нечіткої множини $\overline{B}$ можна використати наступні формули визначення функції належності результату:

1. Max-min-композиція або максимальна нечітка згортка:

$$\mu_{\overline{B}}(y) = \max_{x\in X}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}\}. \quad (6.8)$$

2. Max-prod-композиція:

$$\mu_{\overline{B}}(y) = \max_{x\in X}\{\mu_{\overline{A}}(x) \cdot \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}. \quad (6.9)$$

3. Min-max- композиція:

$$\mu_{\overline{B}}(y) = \min_{x\in X}\{\max\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}\}. \quad (6.10)$$

4. Max-max- композиція:

$$\mu_{\overline{B}}(y) = \max_{x\in X}\{\max\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}\}. \quad (6.11)$$

5. Min-min- композиція:

$$\mu_{\overline{B}}(y) = \min_{x\in X}\{\min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}\}. \quad (6.12)$$

Вибір варіанту композиції визначається постановкою задачі.

Методи виведення висновків у системах нечітких продукцій. Аналогічно до звичайних продукційних систем, важливим компонентом систем нечітких продукцій є так званий метод виведення висновків на основі нечітких умов у базі правил нечітких продукцій. Найбільш відомими є прямий і зворотний методи виведення висновків.

Прямий метод виведення висновків у системах нечітких продукцій заснований на використанні нечіткого узагальнення правила виведення модус поненс – FMP (fuzzy modus ponens).

Розглянемо докладніше сутність нечіткого правила модус поненс. Класична імплікація $A \rightarrow B$ у правилі виведення модус поненс замінюється на правило нечіткої продукції: "ЯКЩО x?$\overline{A}$, ТО y?$\overline{B}$", де $\overline{A}$ і $\overline{B}$ – нечіткі множини. Об'єднання правила нечіткої продукції й нечіткої умови дозволяє одержати нову інформацію про значення змінної y в формі "y?$\overline{B}$". При цьому висновок, отриманий за правилом FMP, є функцією належності нечіткої множини $\overline{B}$ на основі функцій належності умови $\overline{A}$ і нечіткої імплікації з використанням одного з методів нечіткої композиції (6.8)–(6.12).

В системах нечітких продукцій прямий метод виведення реалізується за допомогою перетворення окремих фактів проблемної області в конкретні значення функцій належності умов нечітких продукцій. Після цього перетворення за одним з методів нечіткої композиції знаходять значення функцій належності висновків кожного з правил нечітких продукцій. Ці значення функцій належності або є шуканим результатом виведення, або можуть бути використані як додаткові умови в базі правил нечітких продукцій. При цьому правила, які можна використати для виконання нечіткої композиції називають *активними.*

Прямий метод виведення у системах нечітких продукцій, як правило, має рекурсивний (ітеративний) характер. Його можна зупинити або за умови відсутності активних правил нечітких продукцій, або у випадку одержання функції належності висновку, який є цільовим у контексті вирішення поставленої проблеми.

Зворотний метод виведення висновків у системах нечітких продукцій заснований на використанні нечіткого узагальнення правила виведення модус толленс – FMT (fuzzy modus tollens). Більш детально ознайомитися з ним можна в спеціальній літературі [17].

Розглянемо прості приклади використання механізмів виведення.

Приклад 6.1. Нехай задані універсуми X={1, 2, 3, 4, 5} та Y={5, 10, 15, 20}. Припустимо, що має місце висловлювання у вигляді нечіткого правила "Якщо x?$\overline{A}$, то y?$\overline{B}$", де $\overline{A}$ ={<1;0,0>, <2;0,1>, <3;0,5>, <4;0,8>, <5;1,0>}, $\overline{B}$ ={<5;1,0>, <10;0,8>, <15;0,4>, <20;0,2>} і задано "x?$\overline{A'}$", де x – вхідна змінна, $\overline{A'}$ ={<1;0,3>, <2;0,5>, <3;1,0>, <4;0,7>, <5;0,4>}.

Використовуючи правило виведення *modus ponens* визначити значення висновку (вихідної змінної y), який описується за допомогою висловлювання "y?$\overline{B'}$".

Нагадаємо, що правило виведення *modus ponens* має вигляд :

Правило: “ЯКЩО x? $\overline{A}$, ТО y?$\overline{B}$ ”

Дані: x? $\overline{A'}$

Висновок: y?$\overline{B'}$

Розв'язання. Нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ задані відповідно на універсумах $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ і $Y = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$. Нечітка множина $\overline{A}$ є умовою нечіткого правила продукції “Якщо x?$\overline{A}$, то y?$\overline{B}$”, а нечітка множина $\overline{B}$ – висновком цього правила. Задане нечітке правило можна зобразити за допомогою нечіткого відношення $Q = \{\langle x, y\rangle, \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}$, яке визначене на декартовому добутку універсумів $X \times Y$.

Спочатку розрахуємо нечітке відношення Q, яке відповідає правилу “Якщо x?$\overline{A}$, то y?$\overline{B}$”, використовуючи нечітку імплікацію. При використанні в якості нечіткої імплікації операції мінімуму розрахунок нечіткого відношення Q виконується за формулою: $\mu_Q(x, y) = \min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(y)\}$, $(x, y) \in X \times Y$. Отже, маємо:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (6.8) розрахуємо нечітке значення вихідної змінної:

$$y = \overline{A'}\ ?Q = (0{,}3;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 0{,}7;\ 0{,}4)\ ? \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} =$$

={<5;0,7>, <10;0,7>, <15;0,4>, <20;0,2>}.

Приклад 6.2. Нехай задані множини значень змінних X={x_1, x_2, x_3} та Y={y_1, y_2}. Припустимо, що має місце висловлювання у вигляді нечіткого правила “Якщо x?$\overline{A}$, то y?$\overline{B}$”, де $\overline{A}$ ={<x_1; 0,5>, <x_2; 1,0>, <x_3; 0,6>}, $\overline{B}$ ={<y_1; 1,0>, <y_2; 0,8>} і задано “x?$\overline{A'}$”, де x – вхідна змінна, $\overline{A'}$ ={<x_1; 0,6>, <x_2; 0,9>, <x_3; 0,7>}.

Використовуючи правило виведення *modus ponens* визначити значення висновку (вихідної змінної y), який описується за допомогою висловлювання “y?$\overline{B'}$”.

Розв'язання. Маємо нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$, задані відповідно на універсумах *X* і *Y*. Нечітка множина $\overline{A}$ є умовою нечіткого правила продукції "Якщо *x*?$\overline{A}$, то *y*?$\overline{B}$", а нечітка множина $\overline{B}$ – висновком цього правила. Задане нечітке правило можна зобразити за допомогою нечіткого відношення $Q = \{\langle x, y\rangle, \mu_Q(\langle x, y\rangle)\}$, яке визначене на декартовому добутку універсумів $X \times Y$.

Використовуючи, наприклад, імплікацію Лукасевича:

$T(\overline{A} \to \overline{B}) = \min\{1, T(\neg\overline{A}) + T(\overline{B})\} = \min\{1, 1 - \mu(\overline{A}) + \mu(\overline{B})\}$),

визначимо нечітке відношення Q у вигляді: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 1 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Використовуючи правило max-min–композиції, одержимо:

y= $\overline{A'}$?Q = (0,6; 0,9; 0,7) ? $\begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 1 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \end{pmatrix}$?

$\overline{B'}$ (y_1)= max [min(0,6; 1,0);min(0,9; 1,0);min(0,7; 1,0)] = 0,9

$\overline{B'}$ (y_2)= max [min(0,6;0,9);min(0,9;0,4);min(0,7;0,8)] = 0,7

Таким чином, ми можемо зробити висновок, що $\overline{B'}$ ={<y_1; 0,9>, <y_2; 0,7>}.

Приклад 6.3. Нехай задано множини значень змінних X={x_1, x_2, x_3}, Y={y_1, y_2} та Z={z_1, z_2}. Припустимо, що мають місце такі висловлювання (у вигляді нечітких правил):

1) "Якщо *x*?$\overline{A}$, то *y*?$\overline{B}$", де $\overline{A}$ ={<x_1; 0,5>, <x_2; 1,0>, <x_3; 0,6>}, $\overline{B}$ ={<y_1; 1,0>, <y_2; 0,4>};

2) "Якщо *y*?$\overline{B}$, то *z*?$\overline{C}$", де $\overline{B}$ визначено в пункті 1 і $\overline{C}$ ={<z_1; 0,2>, <z_2; 1,0>}.

Використовуючи правило виведення *syllogism* визначіть відношення, яке описується за допомогою висловлювання "Якщо *x*?$\overline{A}$, то *y*?$\overline{C}$". Нагадаємо, що правило виведення *силогізм* має вигляд :

Правило 1: "ЯКЩО *x*?$\overline{A}$, ТО *y*?$\overline{B}$"

Правило 2: "ЯКЩО *y*?$\overline{B}$, ТО *z*?$\overline{C}$"

Висновок: "ЯКЩО *x*?$\overline{A}$, ТО *z*?$\overline{C}$"

Розв'язання. Нечіткі множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ задані відповідно на універсумах *X* і *Y*. Нечітка множина $\overline{A}$ є умовою нечіткого правила продукції "Якщо *x*?$\overline{A}$, то *y*?$\overline{B}$", а нечітка множина $\overline{B}$ – висновком цього правила.

Задане нечітке правило можна зобразити за допомогою нечіткого відношення $Q_1 = \{\langle x, y\rangle, \mu_{Q_1}(\langle x, y\rangle)\}$, яке визначене на декартовому добутку універсумів $X \times Y$.

Нехай $Q_1 = \{\langle x, y\rangle, \mu_{Q_1}(\langle x, y\rangle)\}$ =Q$_1$(A,B)= $\begin{cases} 1, \text{якщо } \mu_{\bar{A}} \le \mu_{\bar{B}} \\ \mu_{\bar{B}}, \text{якщо } \mu_{\bar{A}} > \mu_{\bar{B}} \end{cases}$. Тоді $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 \\ 1 & 0,4 \\ 1 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Нечіткі множини $\overline{B}$ і $\overline{C}$ задані відповідно на універсумах *Y* і *Z*. Нечітка множина $\overline{B}$ є умовою нечіткого правила продукції “Якщо *y*?$\overline{B}$, то *z*?$\overline{C}$”, а нечітка множина $\overline{C}$ – висновком цього правила. Задане нечітке правило можна зобразити за допомогою нечіткого відношення $Q_2 = \{\langle y, z\rangle, \mu_{Q_2}(\langle y, z\rangle)\}$, яке визначене на декартовому добутку універсумів $Y \times Z$. Використовуючи, наприклад, імплікацію Лукасевича, маємо: $Q_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді маємо $Q_3 = Q_1 \otimes Q_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,2 & 1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 6. Нечіткі моделі у вигляді системи нечіткого виведення

Оскільки нечіткі лінгвістичні висловлювання мають фундаментальне значення в контексті сучасної нечіткої логіки, то вивчення систем нечіткого виведення розпочнемо саме з них.

Нечіткі лінгвістичні висловлювання. *Нечіткими лінгвістичними висловлюваннями* будемо називати висловлювання наступного вигляду:

1. “$\beta = \alpha$”, де β – ім‘я лінгвістичної змінної, α – її значення, якому відповідає окремий терм із базової терм-множини T лінгвістичної змінної β.

2. “$\beta = \nabla\alpha$”, де ∇ – модифікатор, який відповідає таким словам, як: “ДУЖЕ”, “БІЛЬШ-МЕНШ”, “НАБАГАТО БІЛЬШЕ” й іншим, які можна отримати за допомогою використання процедур *G* і *M* лінгвістичної змінної β.

3. Складні висловлювання, утворені з висловлювань виду 1 і 2 та нечітких логічних операцій у формі сполучників “І”, “АБО”, “ЯКЩО-ТО”, “НЕ”.

Приклад 7.1. Висловлювання "*температура тіла людини висока*" є нечітким лінгвістичним висловлюванням першого виду, в рамках якого лінгвістична змінна *температура_тіла_людини* приймає значення "*висока*". При цьому передбачається, що на універсальній множині X цієї змінної визначено відповідний лінгвістичний терм "*висока*", який задається в формі функції належності деякої нечіткої множини.

Приклад 7.2. Висловлювання "*температура тіла людини дуже висока*" є нечітким лінгвістичним висловлюванням другого виду й означає, що лінгвістична змінна *температура_тіла_людини* приймає значення "*висока*" з модифікатором "ДУЖЕ", який змінює значення відповідного лінгвістичного терма "*висока*" на основі використання, наприклад, формули (2.8) для операції концентрації CON.

Зазвичай, в конкретних системах нечіткого виведення розрахункові формули для модифікаторів прийнято вказувати явно в рамках процедур G і M відповідної лінгвістичної змінної.

Приклад 7.3. Висловлювання "*людина похилого віку і артеріальний систолічний тиск людини високий*" є нечітким лінгвістичним висловлюванням третього виду й означає, що лінгвістичні змінні *вік_людини* та *артеріальний_систолічний_тиск_людини* приймають значення "*похилий*" і "*високий*" відповідно.

Правила нечітких продукцій у системах нечіткого виведення. Основною особливістю нечітких правил в системах нечіткого виведення є те, що умови й висновки деяких з них мають вигляд нечітких висловлювань виду 1–3.

Правилом нечіткої продукції називається вираз вигляду:

$(i): Q;P; \overline{A} ® \overline{B};S;F;N,$

компоненти якого визначені в § 6 даної глави, за винятком того, що умова ядра $\overline{A}$ і висновок ядра $\overline{B}$ є нечіткими лінгвістичними висловлюваннями виду 1–3.

Системою нечітких правил продукцій називається деяка узгоджена множина нечітких продукцій вигляду "ЯКЩО $\overline{A}$, ТО $\overline{B}$", де $\overline{A}$ і $\overline{B}$ – нечіткі лінгвістичні висловлювання виду 1–3.

Розглянемо деякі форми нечітких правил продукцій, які пов'язані з лінгвістичними висловлюваннями третього виду. Серед них:

1. Нечіткі висловлювання, які відповідають одній лінгвістичній змінній в умові правила нечіткої продукції та з'єднані нечіткими логічними операціями. Ця форма правил нечітких продукцій має

вигляд: ПРАВИЛО<№>: ЯКЩО “ $\beta_1 = \alpha_1$ ” І(АБО) “ $\beta_2 = \alpha_2$ ” ТО “ $\beta_3 = \nu$ ”, (7.1)

для $\beta_1 = \beta_2, \ \beta_1 \neq \beta_3$.

Наприклад, в якості умови даної форми правила нечіткої продукції можна розглянути висловлювання “*температура тіла людини понижена і (або) температура тіла людини висока*”, якому відповідають два нечітких висловлювання першого виду, з'єднані логічною операцією нечіткої кон’юнкції (диз'юнкції). Це висловлювання еквівалентне нечіткому висловленню першого виду: “*температура тіла людини понижена і (або) висока*”.

2. Нечіткі висловлювання, які відповідають різним лінгвістичним змінним в умові правила нечіткої продукції та з'єднані нечіткими логічними операціями. Ця форма правил нечітких продукцій має вигляд:

ПРАВИЛО<№>: ЯКЩО “ $\beta_1 = \alpha_1$ ” І(АБО) “ $\beta_2 = \alpha_2$ ” ТО “ $\beta_3 = \nu$ ”, (7.2)

для $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$.

Наприклад, в якості умови даної форми правила нечіткої продукції можна розглянути висловлювання “*людина похилого віку* і (або) *артеріальний систолічний тиск людини високий*”.

3. Нечіткі висловлювання, які відповідають різним лінгвістичним змінним у висновку правила нечіткої продукції та з'єднані нечіткими логічними операціями. Ця форма правил нечітких продукцій має вигляд: ПРАВИЛО<№>: ЯКЩО “ $\beta_1 = \alpha_1$ ” ТО “ $\beta_2 = \alpha_2$ ” І(АБО) “ $\beta_3 = \nu$ ”, (7.3)

для $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$.

Система нечіткого виведення у вигляді структури даних. Типова структура системи нечіткого виведення (СНВ) зображена на рис. 7.1 і містить наступні складові:

-*фазифікатор*, який перетворює фіксований вхідний вектор *x* у вектор нечітких множин $\overline{X}$, необхідних для нечіткого виведення;

- *нечітка база знань*, яка містить інформацію про залежність *y*=*f*(*x*) у вигляді лінгвістичних правил “Якщо-То”;

-*функції належності*, які використовують для зображення лінгвістичних термів у вигляді нечітких множин;

-*механізм нечіткого виведення*, який на основі правил бази знань визначає значення вихідної змінної у вигляді нечіткої множини $\overline{Y}$, що відповідає нечітким значенням вхідної змінної;

-*дефазифікатор* (наприклад, в СНВ на основі Мамдані, він перетворює, вихідну нечітку множину в число).

Рис. 7.1. Типова струкутра СНВ

На рис. 7.2 зображена СНВ, яка була реалізована в системі MatLab у вигляді структури даних.

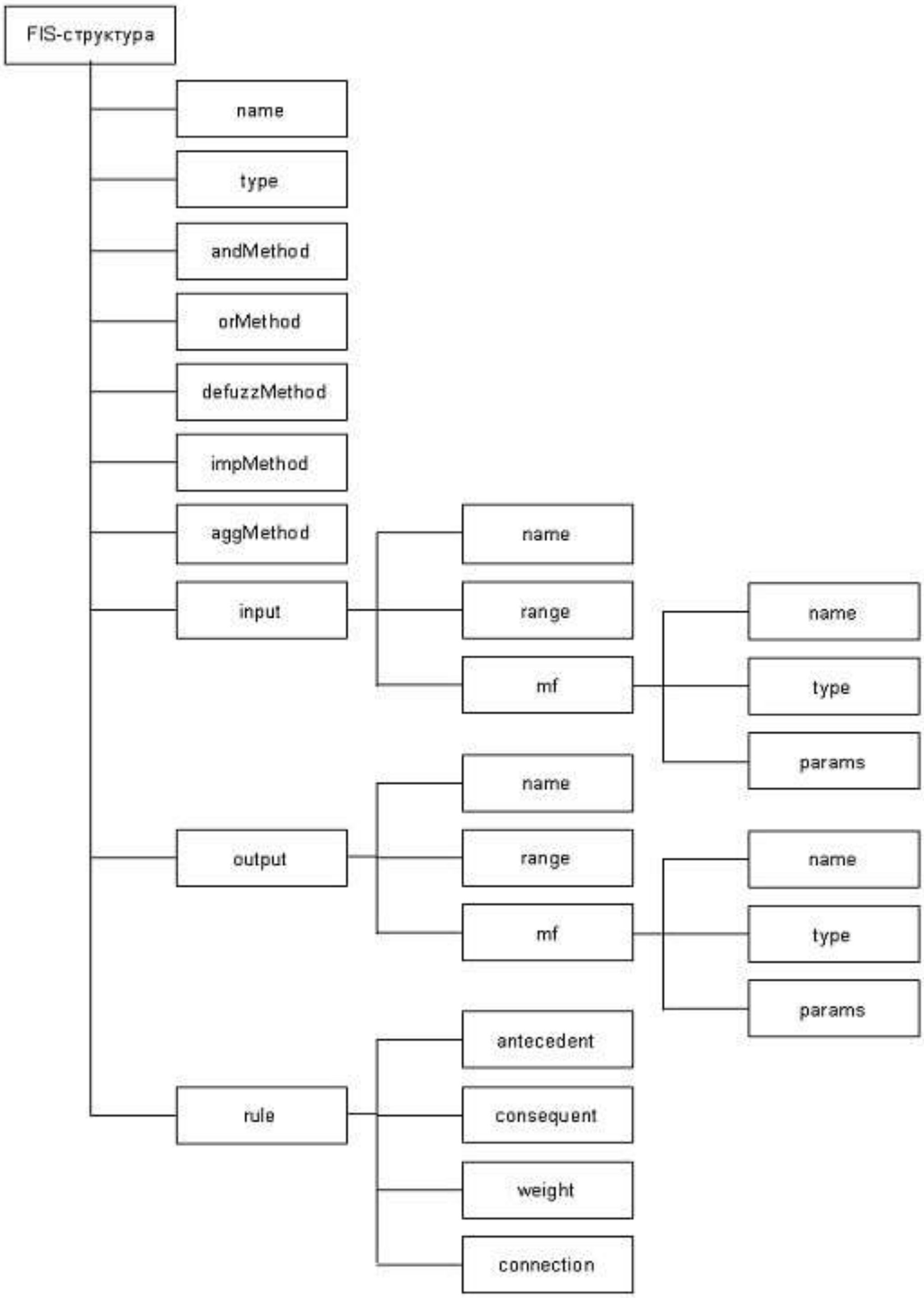


Рис. 7.2. Структура даних, яка використовується для описання СНВ в системі MatLab

Зазначена структура даних містить наступні поля, описані в таблиці: *name* – ім'я системи нечіткого виведення, *type* – тип системи нечіткого виведення (алгоритм), *andMethod* – реалізація логічної операції "І", *orMethod* – реалізація логічної операції "АБО", *defuzzMethod* – метод дефазифікації, *impMethod* – реалізація операції імплікації, *aggMethod* – реалізація операції об'єднання функцій належності вихідної змінної, *input* – масив вхідних змінних, *input.name* – ім'я вхідної змінної, *input.range* – діапазон значень вхідної змінної, *input.mf* – масив функції належності вхідної змінної, *input.mf.name* – ім'я функції належності вхідної змінної, *input.mf.type* – модель функції належності вхідної змінної, *input.mf.params* – масив параметрів функції належності вхідної змінної, *output* – масив вихідних змінних, *output.name* – ім'я вихідної змінної, *output.range* – діапазон значень вихідної змінної, *output.mf* – масив функції належності вихідної змінної, *output.mf.name* – ім'я функції належності вихідної змінної, *output.mf.type* – модель функції належності вихідної змінної, *output.mf.params* – масив параметрів функції належності вихідної змінної, *rule* – масив правил нечіткої бази знань, *rule.antecedent* – умова правила нечіткої продукції, *rule.consequent* – наслідок правила нечіткої продукції, *rule.weight* – вага правила нечіткої продукції, *rule.connection* - логічний зв'язок змінних всередині правила.

Основні етапи нечіткого виведення. Розробка та застосування систем нечіткого виведення складаються з етапів, реалізація яких виконується за допомогою основних положень нечіткої логіки.

Дані, які надходять до СНВ, мають вигляд вимірюваних вхідних змінних. Інформація, яка формується на виході системи нечіткого виведення, відповідає вихідним змінним. Системи нечіткого виведення перетворюють вхідних змінні у вихідні. Для цього вони містять базу правил нечітких продукцій і реалізовують процес нечіткого виведення висновків на основі умов, поданих у формі нечітких лінгвістичних висловлювань. Основними етапами нечіткого виведення є:

1) формування бази правил систем нечіткого виведення;
2) фазифікація вхідних змінних;
3) агрегування умов нечітких правил продукцій;
4) активізація (композиція) висновків нечітких правил продукцій;
5) акумулювання висновків нечітких правил продукцій.

Розглянемо основні особливості кожного з цих етапів і деякі приклади їхнього виконання.

Формування бази правил систем нечіткого виведення. *База правил нечітких продукцій* – це скінченна множина правил нечітких продукцій, які узгоджені з використанням лінгвістичних змінних. Найчастіше база правил приймає наступний вигляд:

ПРАВИЛО<1>: ЯКЩО "Умова_1" ТО "Висновок_1" (F1) (7.4)

ПРАВИЛО<*n*>: ЯКЩО "Умова_n" ТО " Висновок_n" (F_n)

Тут через F_i (i=1,...,n) позначено *коефіцієнти визначеності* або вагові коефіцієнти відповідних правил. Ці коефіцієнти приймають значення з інтервалу (0,1] (якщо ваговий коефіцієнт відсутній, то вважається, що його значення дорівнює 1).

Узгодженість правил з використанням лінгвістичних змінних означає, що в якості умов і висновків цих правил можуть використовуватися тільки нечіткі лінгвістичні висловлювання вигляду (7.2) і (7.3). При цьому для всіх висловлювань мають бути визначені функції належності елементів терм-множини кожної з лінгвістичних змінних.

У системах нечіткого виведення лінгвістичні змінні, які використовуються в умовах правил нечітких продукцій, називають *вхідними*, а лінгвістичні змінні, які використовуються у висновках – *вихідними.*

При формуванні бази правил нечітких продукцій необхідно визначити:

1) множину правил нечітких продукцій: $P=\{R_1,...,R_n\}$ у формі (7.4);

2) множину вхідних лінгвістичних змінних: $V=\{b_1,...,b_m\}$;

3) множину вихідних лінгвістичних змінних: $W=\{w_1,...,w_s\}$.

Отже, база правил нечітких продукцій вважається заданою, якщо задані множини P, V, W. Нагадаємо, що лінгвістична змінна вважається заданою, якщо для неї визначені базова терм-множина з відповідними функціями належності кожного терма та процедури G і M.

Фазифікація вхідних змінних (введення нечіткості). Метою етапу фазифікації є встановлення відповідності між конкретним значенням вхідної лінгвістичної змінної й значенням функції належності відповідного їй терму. Після завершення цього етапу для всіх вхідних змінних повинні бути визначені значення функцій належності кожного з лінгвістичних термів, які використовуються в умовах бази правил СНВ.

Розглянемо більш докладно процес виконання процедури фазифікації.

На початку етапу фазифікації припускають відомими значення всіх вхідних змінних, тобто вважається заданою множина $V?=\{a_1,...,a_m\}$. У загальному випадку $a_i?X_i$, де X_i – універсум лінгвістичної змінної b_i. Ці значення можна отримати, наприклад, за допомогою датчиків.

Далі розглядається кожна з умов правил вигляду "$b_i=a?$ ", де $a?$ – деякий терм (нечітка множина) з відомою функцією належності $m(x)$, та знаходиться кількісне значення $b_i?=m(a_i)$, яке є результатом фазифікації умови "$b_i=a?$ ".

Етап фазифікації вважається закінченим, якщо знайдено всі значення b_i? для кожної з умов правил, які входять у базу правил системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначимо через $B=\{b_1?,...,b_m?\}$. При цьому, якщо деякий терм $a?$ лінгвістичної змінної b_i відсутній у всіх нечітких висловлюваннях, то відповідне йому значення функції належності не приймає участі в процесі фазифікації. Якщо в деякій умові зустрічається терм із модифікатором, то процедура фазифікації виконується після виконання операції, яка відповідає даному модифікатору.

<u>Приклад 7.4.</u> Розглянемо процес фазифікації вхідної лінгвістичної змінної b_1=*температура_тіла_людини* для нечітких висловлювань “*температура тіла людини понижена*”, “*температура тіла людини нормальна*”, “*температура тіла людини підвищена*” та “*температура тіла людини висока*”. Лінгвістичній змінній b_1 відповідають такі нечіткі висловлювання першого виду: “$b_1=A_1$”, “$b_1=A_2$”, “$b_1=A_3$”, “$b_1=A_4$”. Припустимо, що поточна температура тіла людини $a_1=36{,}8^0$С. Тоді результатом фазифікації першого, третього та четвертого нечітких висловлювань є число 0, яке одержується завдяки підстановці значення a_1 замість аргументів функцій належності термів A_1, A_3 та A_4 відповідно (рис. 7.2). Це число є ступенем істинності цих висловлювань. Результатом фазифікації другого нечіткого висловлювання є число 1 (рис. 7.2).

Агрегування умов нечітких правил продукцій. *Агрегування* – це процедура визначення ступеня істинності умов кожного з правил СНВ.

Розглянемо більш докладно процес виконання процедури агрегування.

На початку етапу агрегування припускають відомими ступені істинності всіх умов СНВ, тобто вважається заданою множина $B=\{b_1?,...,b_m?\}$.

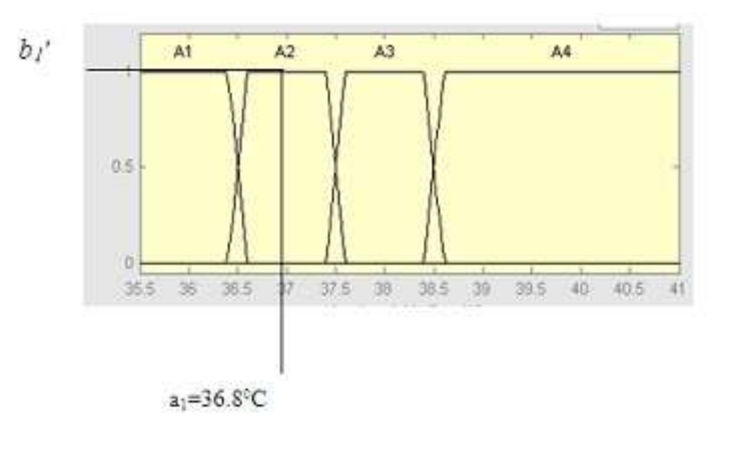


Рис. 7.2. Фазифікація вхідної лінгвістичної змінної b_1 для чотирьох нечітких висловлювань з прикладу 7.4

Далі розглядається кожна з умов правил СНВ:

1. Якщо умовою правила є нечітке висловлювання першого або другого виду, то ступінь його істинності дорівнює відповідному значенню b_i?.

2. Якщо умова правила складається з декількох підумов вигляду (7.2), причому лінгвістичні змінні в них попарно не співпадають, то ступінь істинності складного висловлювання визначається на основі відомих значень істинності підумов. При цьому значення b_i? використовуються як аргументи відповідних логічних операцій. Наприклад, для визначення результату нечіткої кон’юнкції використовують формулу (6.1), а для визначення результату нечіткої диз’юнкції – формулу (6.2).

Етап агрегування вважається закінченим, якщо знайдено всі значення b_k? для кожного з правил R_k, які входять у базу правил P системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначимо через $B''=\{b_1?,\ldots,b_n?\}$.

<u>Приклад 7.5.</u> Розглянемо процес агрегування нечіткого висловлювання “*людина середнього віку і артеріальний систолічний тиск людини нормальний*” для вхідних лінгвістичних змінних b_1=*вік_людини* та b_2=*артеріальний_систолічний_тиск_людини*. Припустимо, що вік людини a_1=50 років, а артеріальний систолічний тиск – a_2=138 мм р. ст. Тоді агрегування даного нечіткого висловлювання з використанням операції нечіткої кон’юнкції (6.1) дає в результаті число $b_1?=\min\{0,8;0,6\}=0,6$, яке є його ступенем істинності (рис.7.3).

“Людина середнього віку” “Артер.систол. тиск людини нормальний”

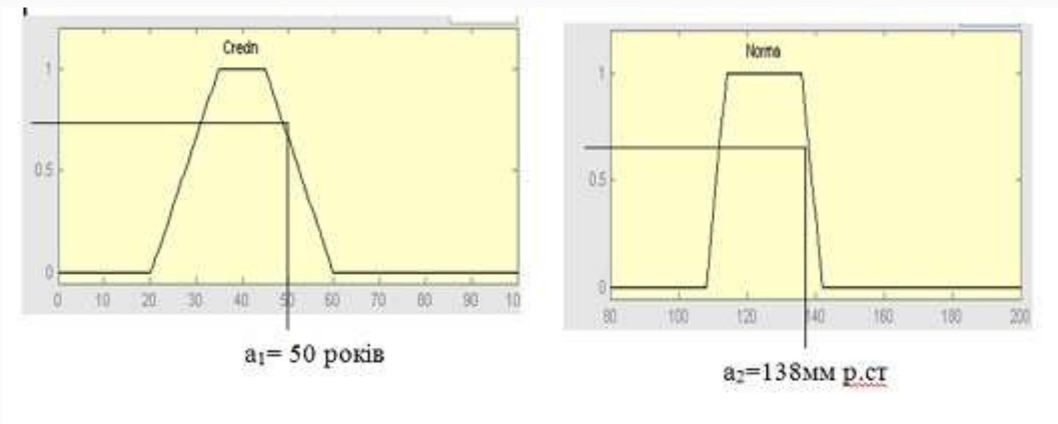


Рис. 7.3. Агрегування підумов нечіткого висловлювання з прикладу 7.5

Агрегування нечіткого висловлювання “*людина середнього віку або артеріальний систолічний тиск людини нормальний*” з використанням операції нечіткої диз'юнкції (6.2) дає в результаті число $b_1?=\max\{0,8;0,6\}=0,8$, яке є його ступенем істинності.

Активізація висновків нечітких правил продукцій. *Активізація* в системах нечіткого виведення – це процес знаходження ступеня істинності кожного з висновків правил нечітких продукцій.

Розглянемо більш докладно процес виконання процедури активізації.

На початку етапу активізації припускають відомими ступені істинності всіх умов СНВ, тобто вважається заданою множина $B''=\{b_1?,\ldots,b_n?\}$ і значення вагових коефіцієнтів F_i (i=1,...,n). Далі розглядається кожний з висновків правил СНВ. Якщо висновком правила є нечітке висловлювання першого або другого виду, то ступінь його істинності дорівнює добутку відповідного значення $b_i?$ на ваговий коефіцієнт F_i . Якщо ж висновок складається з декількох підвисновків вигляду (7.3), причому лінгвістичні змінні в них попарно не співпадають, то ступінь істинності кожного з підвисновків дорівнює добутку відповідного значення $b_i?$ на ваговий коефіцієнт F_i. Таким чином знаходять всі значення c_k ступенів істинності підвисновків для кожного з правил R_k, які входять у базу правил P системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначимо через С=$\{c_1,\ldots,c_q\}$, де q – загальна кількість підвисновків у базі правил P.

Після знаходження множини C визначаються функції належності кожного з підвисновків для розглянутих вихідних лінгвістичних змінних. Для цього використовують один з методів, який є модифікацією того або іншого методу нечіткої композиції, наприклад:

min-активізація: $\mu'(y) = \min\{c_i, \mu(y)\};$ (7.5)

prod-активізація: $\mu'(y) = c_i \cdot \mu(y)$, (7.6)

де $?(y)$ – функція належності терма, який є значенням вихідної змінної $w_j?W$, визначеної на універсумі Y.

Етап активізації вважається закінченим, якщо для кожної з вихідних лінгвістичних змінних, які входять в окремі підвисновки правил нечітких продукцій, визначено функції належності їхніх значень, тобто якщо отримано сукупність нечітких множин: $\overline{C}_1$,..., $\overline{C}_q$.

<u>Приклад 7.6.</u> Розглянемо процес активізації висновку в наступному правилі нечіткої продукції: ЯКЩО "*людина середнього віку*" ТО "*артеріальний систолічний тиск людини нормальний*".

Позначимо вхідну лінгвістичну змінну цього правила *вік_людини* та вихідну змінну *артеріальний_систолічний_тиск_людини* через b_1 та b_2 відповідно.
Припустимо, що вік людини a_1=50 років. Оскільки в результаті агрегування умови цього правила отримаємо значення $b_1?$=0,25, а відповідний ваговий

коефіцієнт дорівнює 1 (за замовчуванням), то c_1=0,25. Результат, отриманий методом min-активізації (7.5), зображено на рис. 7.4 у вигляді затемнення.

“Людина середнього віку” “Артер.сист.тиск людини нормальний ”

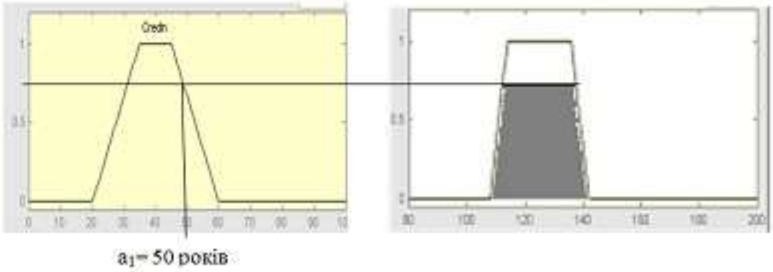


Рис. 7.4. Активізація висновку для правила нечіткої продукції з прикладу 7.6

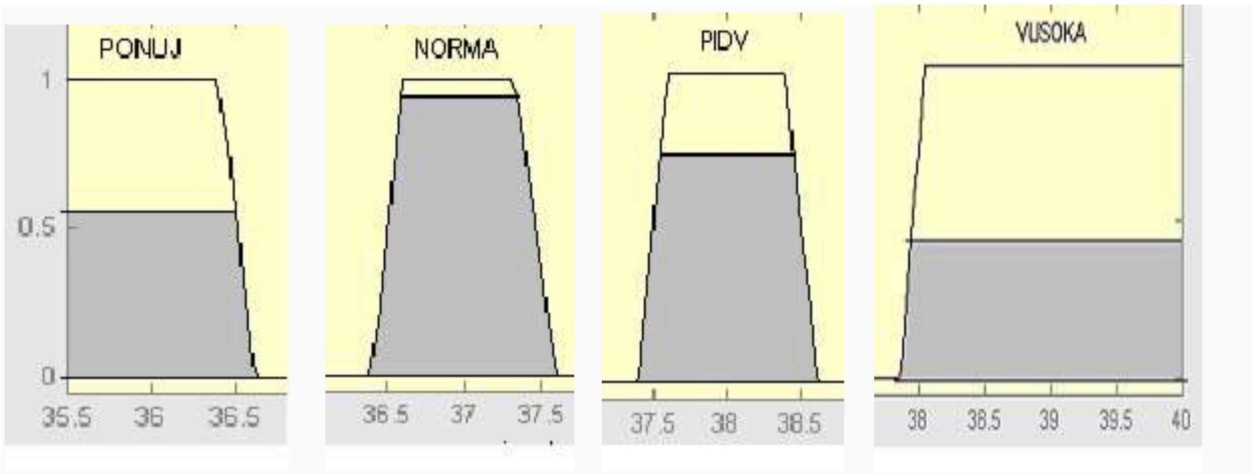
Акумуляція висновків. *Акумуляція* в системах нечіткого виведення – це процес знаходження функції належності для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини *W*. Акумуляція полягає в об'єднанні всіх ступенів істинності висновків (підвисновків) для одержання функцій належності вихідних змінних. Необхідність виконання даного етапу полягає в тому, що підвисновки, які відповідають одній вихідній лінгвістичній змінній, можуть належати різним правилам СНВ.

Розглянемо більш докладно процес виконання процедури акумуляції.

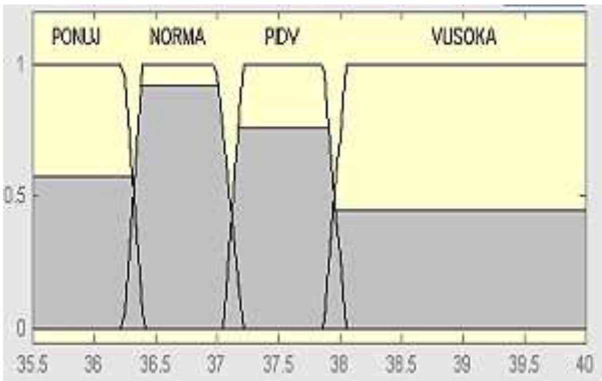
На початку етапу акумуляції припускають відомими ступені істинності всіх підвисновків для кожного з правил R_k, які входять у базу правил *P* системи нечіткого виведення, в формі нечітких множин: $\overline{C}_1$,..., $\overline{C}_q$, де *q* – загальна кількість підвисновків у базі правил. Далі послідовно розглядається кожна з вихідних лінгвістичних змінних w_j?*W* і нечіткі множини $\overline{C}_{j1}$,..., $\overline{C}_{jq}$, які їй відповідають. Результатом акумуляції для вихідної лінгвістичної змінної w_j є об'єднання нечітких множин $\overline{C}_{j1}$,..., $\overline{C}_{jq}$ за формулою (2.2). Етап акумуляції вважається закінченим, якщо для кожної з вихідних лінгвістичних змінних визначено підсумкові функції належності нечітких множин (тобто визначено нечіткі множини: $\overline{C'}_1$,..., $\overline{C'}_s$, де *s* – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил *P*).

Приклад 7.7. Розглянемо процес акумуляції висновків для чотирьох нечітких множин $\overline{C}_{11}$, $\overline{C}_{12}$, $\overline{C}_{13}$ та $\overline{C}_{14}$, отриманих у результаті виконання процедури активізації для вихідної лінгвістичної змінної w_1 – *температура_тіла_людини* в системі нечіткого виведення.

Нехай відповідні функції належності цих нечітких множин такі, як зображено на рис. 7.4 *а*), *б*), *в*) і *г*). Акумуляція цих функцій належності методом max-об'єднання нечітких множин $\overline{C}_{11}$, $\overline{C}_{12}$, $\overline{C}_{13}$ та $\overline{C}_{14}$ за формулою (2.2) дозволяє одержати в результаті функцію належності вихідної лінгвістичної змінної w_1, яку зображено на рис. 7.4 *д*). Ця функція належності відповідає нечіткій множині $\overline{C}_1$?.



а) *б*) *в*) *г*)



д)

Рис. 7.5. Акумуляція виведення для вихідної лінгвістичної змінної w_1 з прикладу 7.7

Дефазифікація (приведення до чіткості). *Дефазифікація* в СНВ – це процес знаходження значення кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини *W*.

Розглянемо більш докладно процес виконання процедури дефазифікації.

На початку дефазифікації припускають відомими функції належності всіх вихідних лінгвістичних змінних у формі нечітких множин: $\overline{C}'_1$,..., $\overline{C}'_s$, де s – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого виведення. Далі послідовно розглядається кожна з вихідних лінгвістичних змінних $w_j \in W$ і нечітка множина $\overline{C}'_j$, яка їй відповідає. Результатом дефазифікації вихідної лінгвістичної змінної w_j є значення $y_j \in R$, одержане за однією з розглянутих далі формул.

Етап дефазифікації вважається закінченим, якщо для всіх вихідних лінгвістичних змінних визначено відповідні їм значення у формі дійсних чисел y_1,...,y_S.

При виконанні чисельних розрахунків на етапі дефазифікації використовуються різні формули, які називаються методами дефазифікації. Основними з них є:

1. *Метод центра ваги*. Центр ваги y_c обчислюється за формулою:

$$y_c = \frac{\int\limits_{Min}^{Max} y\mu(y)dy}{\int\limits_{Min}^{Max} \mu(y)dy},$$

де y_c – результат дефазифікації; y – змінна, яка відповідає вихідній лінгвістичній змінній w; $\mu(y)$ – функція належності нечіткої множини $\overline{A}$, яка відповідає вихідній змінній w після етапу акумуляції; *Min* і *Max* – ліва та права точки нечіткої множини $\overline{A}$.

При дефазифікації методом центру ваги значення вихідної змінної дорівнює абсцисі центра ваги фігури, обмеженої графіком функції належності $\mu(y)$.

Центр ваги для одноточкових множин обчислюється за формулою:

$$y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(y_i)} \qquad (7.7)$$

де n – число одноточкових (одноелементних) нечітких множин, кожній з яких відповідає одне значення вихідної лінгвістичної змінної.

2. *Метод центра площини*. Центр площини визначається з рівняння:

$$\int_{Min}^{y_{p3}} \mu(y)dy = \int_{y_{p3}}^{Max} \mu(y)dy \quad . \qquad (7.8)$$

3. *Метод середнього максимуму*. Середній максимум y_M визначається як середнє арифметичне лівого та правого модальних значень. Якщо функція належності $m(y)$ досягає максимального значення лише в одній точці $y_{\max}$, то $y_M = y_{\max}$, якщо ж вона досягає свого максимального значення між точками y_l і y_s, то $y_M = \frac{1}{2}(y_l + y_s)$.

4. *Метод лівого модального значення*. Ліве модальне значення y_s обчислюється за формулою: $y_s = \min y_{\text{mod}}$, де y_{mod} – модальне значення нечіткої множини, яке розраховується за формулою (1.2) та відповідає вихідній нечіткій змінній після етапу акумуляції, .

5. *Метод правого модального значення*. Праве модальне значення y_l обчислюється за формулою: $y_l = \max y_{mod}$, де y_{mod} – модальне значення нечіткої множини, яке розраховується за формулою (1.2) та відповідає вихідній змінній після етапу акумуляції.

Найчастіше на практиці застосовується метод центра ваги.

Застосувавши перераховані методи дефазифікації до функції належності $m(y)$, яку зображено на рис. 7.6, отримаємо точки y_c, y_M, y_s і y_l.

Розглянуті етапи нечіткого виведення реалізовуються неоднозначно, оскільки вони залежать від різних параметрів. Тим самим вибір конкретних параметрів кожного з етапів визначає деякий алгоритм, який в повному обсязі реалізує нечітке виведення в системах правил нечітких продукцій.

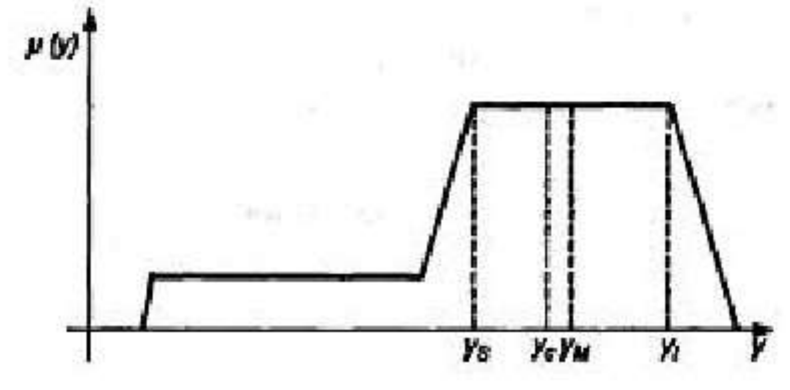


Рис. 7.6. Ілюстрація застосування різних методів дефазифікації

Алгоритми нечіткого виведення. У наш час відомо декілька алгоритмів нечіткого виведення. Розглянемо ті з них, які набули застосування в системі MatLab, а саме в пакеті Fuzzy Logic Toolbox: алгоритми Мамдані та Сугено.

Алгоритм Мамдані складається з таких етапів:

1. Формування бази правил системи нечіткого виведення.
2. Фазифікація вхідних змінних.
3. Агрегування підумов нечітких правил продукцій. На цьому етапі для знаходження ступенів істинності умов кожного з правил нечітких продукцій використовуються парні нечіткі логічні операції. Правила, в яких ступені істинності умов відмінні від нуля, вважаються активними й використовуються для подальших розрахунків.

4. Активізація підвисновків нечітких правил продукцій за формулою (7.5). На цьому етапі розглядаються лише активні правила нечітких продукцій.
5. Акумуляція висновків нечітких правил продукцій за формулою (2.2). На цьому етапі відбувається об'єднання нечітких множин, які відповідають термам підвисновків, що відносяться до одних і тих же вихідних лінгвістичних змінних.

6. Дефазифікація вихідних змінних.

На рис. 7.7 зображено приклад виконання алгоритма Мамдані для системи з двома правилами виведення, двома вхідними змінними x_1 і x_2 та вихідною змінною y.

Правила виведення при цьому приймають наступний вигляд:

ЯКЩО $(x_1 = A^{11})$ І $(x_2 = A^{12})$ ТО y=B^1

ЯКЩО $(x_1 = A^{21})$ І $(x_2 = A^{22})$ ТО y=B^2

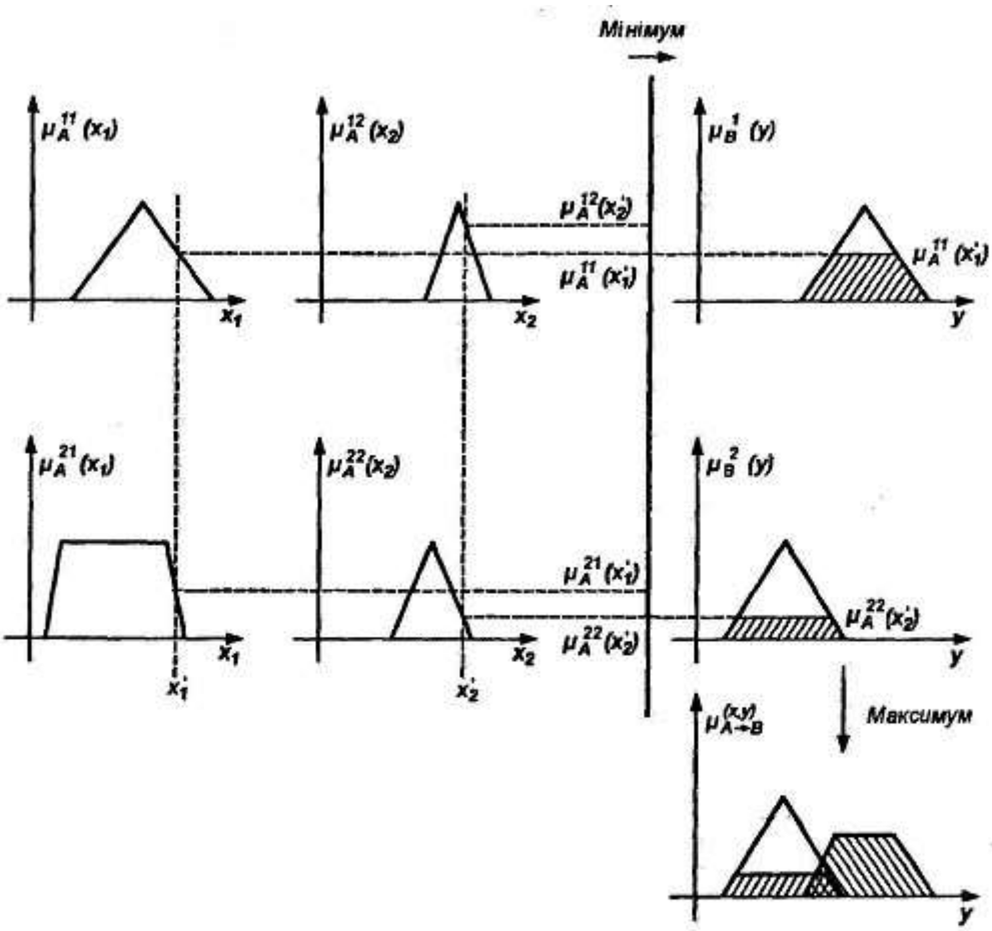


Рис. 7.7. Ілюстрація виконання алгоритма Мамдані для системи з двома правилами виведення та двома вхідними змінними

На прикінці XX-ого століття було показано, що системи нечіткого виведення на основі алгоритму Мамдані є універсальними апроксиматорами, якщо:

1) ці системи застосовують правила вигляду:

ПРАВИЛО<*i*>: ЯКЩО "$x=\overline{A}_i$" І "$y=\overline{B}_i$" ТО "$z=\overline{C}_i$", $i=1,\ldots,n$,

де $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, $\overline{C}_i$ – лінгвістичні оцінки параметрів x, y, z, описані відповідними симетричними трикутними функціями належності з центрами в точках a_i, b_i, c_i:

$$\mu_{\overline{A}\,i}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-|a_i-x|}{\alpha_i}, & \text{якщо } |a_i-x|\le\alpha_i,\\ 0, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$\mu_{\overline{B}\,i}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-|b_i-y|}{\beta_i}, & \text{якщо } |b_i-y|\le\beta_i,\\ 0, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}\qquad \mu_{\overline{C}\,i}(z)=\begin{cases}\dfrac{1-|c_i-z|}{\gamma_i}, & \text{якщо } |c_i-z|\le\gamma_i\\ 0, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

;

2) для даних систем визначені операція min-кон'юнкції, операція імплікації у формі Мамдані та центроїдний метод зведення до чіткості:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \min\{\mu_{\overline{A}_i}(x), \mu_{\overline{B}_i}(y)\}}{\sum_{i=1}^{n} \min\{\mu_{\overline{A}_i}(x), \mu_{\overline{B}_i}(y)\}}$$

.

Також було доведено наступну теорему: для будь-якої дійсної неперервної функції g(x), яка задана на компакті U, і для довільного $\varepsilon > 0$ існує СНВ, яка формує вихідну функцію f(x), причому $\sup_{x \in U} \| g(x) - f(x) \| \le \varepsilon$.

Розглянемо тепер докладніше *алгоритм Сугено*. Він складається з таких етапів:

1. Формування бази правил системи нечіткого виведення. В базі правил, зазвичай, використовують паравила нечітких продукцій вигляду:

ПРАВИЛО <*j*>: ЯКЩО ?b_1 = α^1 ? І ...І?b_m= α^m ? ТО ? $w_j = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i$?, (7.9)

де ε_i – деякі вагові коефіцієнти (i=1,...,m), а значенням вихідної змінної w_j є деяке дійсне число (j=1,...,n).

2. Фазифікація вхідних змінних.

3. Агрегування підумов у нечітких правилах продукцій. На цьому етапі для знаходження ступеня істинності умов правил нечітких продукцій, як правило, використовується логічна операція min-кон'юнкції. Правила, в яких ступені істинності умов відмінні від нуля, вважаються активними й використовуються для подальших розрахунків.

4. Активізація підвисновків нечітких правил продукцій включає в себе такі етапи:

– знаходження ступенів істинності всіх висновків правил нечітких продукцій, використовуючи метод (7.5) ;

– знаходження значень вихідних змінних кожного правила вигляду (7.9), де замість a_i підставляються значення вхідних змінних до етапу фазифікації та визначаються множина значень $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ і множина значень вихідних змінних $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, де n – загальна кількість правил у базі правил.

5. Акумуляція висновків нечітких правил продукцій. Цей етап фактично відсутній, оскільки при розрахунках використовуються звичайні дійсні числа w_j.

6. Дефазифікація вихідних змінних. Використовується метод центра ваги для одноточкових множин: $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$.

На рис. 7.8 зображено приклад виконання алгоритма Сугено для системи з двома правилами виведення, двома вхідними змінними x_1, x_2 та вихідними змінними $w_1=x_1+x_2$, $w_2=2x_1+x_2$. Правила виведення при цьому приймають наступний вигляд:

ЯКЩО $(x_1 = A^{11})$ I $(x_2 = A^{12})$ ТО $w_1=x_1+x_2$

ЯКЩО $(x_1 = A^{21})$ I $(x_2 = A^{22})$ ТО $w_2=2*x_1+x_2$

Результат роботи алгоритму: $y = \frac{c_1 w_1 + c_2 w_2}{c_1 + c_2}$.

Системи з нечіткою логікою доцільно застосовувати до складних процесів, якщо їх не можна описати у вигляді простої математичної моделі, а експертні знання про них можна сформулювати лише в лінгвістичній формі.

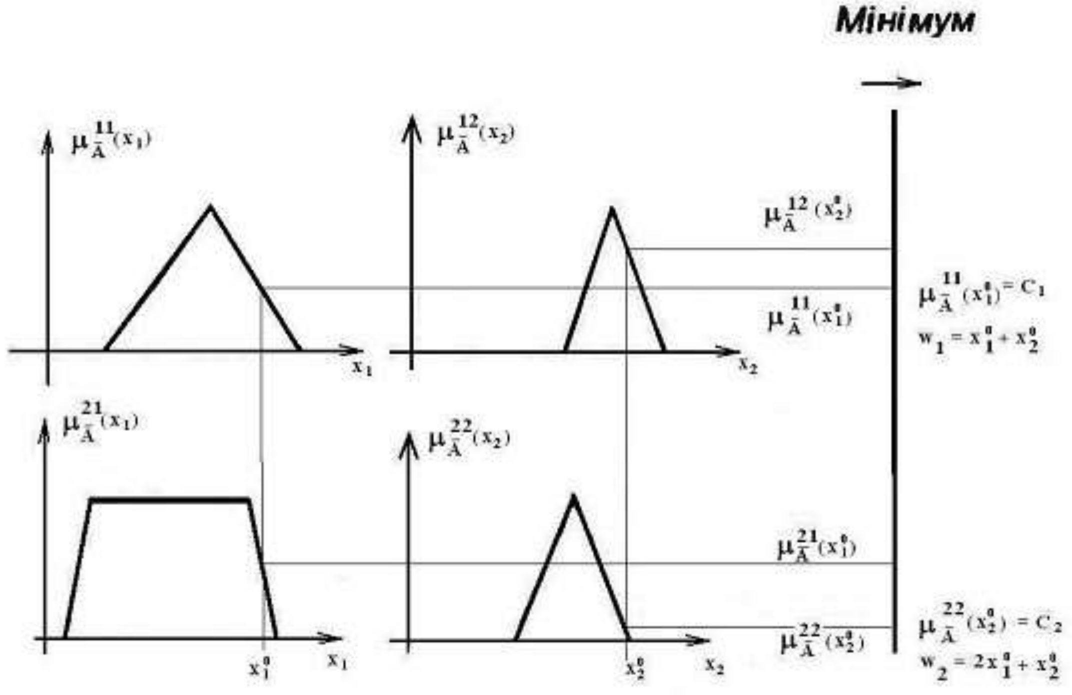


Рис. 7.8. Ілюстрація виконання алгоритма Сугено для системи з двома правилами виведення

Зазначимо, що основні недоліки систем з нечіткою логікою пов'язані з тим, що початковий набір нечітких правил, а також параметри функцій належності, які описують вхідні та вихідні змінні системи, формулюються людиною-експертом і можуть не відповідати реальності.

Розглянемо деякі приклади використання систем нечіткого виведення.

- **Література**

Рекомендована література

1. Базова

1.1. Добровська Л. М., Добровська І. А. Експертні системи в медицині [Текст]: навчальний посібник / Уклад. Л.М. Добровська, І.А. Добровська – К.:НТУУ «КПІ», 2008.- 146с.
1.2. Добровська Л. М. Експертні системи в медицині [Текст]: метод. вказівки до практ. занять з дисципліни для студ. IV-го курсу міжуніверситетського медико-інженерного факультету /Уклад. Л.М. Добровська – К.: НТУУ «КПІ», 2008.- 116 с.
1.3. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат; пер.с англ. –

М.: БИНОМ. Лаборатория знаний (Адаптивные и интеллектуальные системы), 2009. – 798с.
1.4. Cordon Oscar, Herrera Francisco, Hoffmann Frank, Magdalena Luis Genetic Fuzzy systems. Evolutionary tuning and learning of fuzzy knowledge bases. – World Scientific, 2001. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. - 462 p.
2. Допоміжна
2.1. Борисов А.Н. и др. Фурье-метод обработки изображений лесных территорий. – Красноярск, 1984.- 43с.
2.2. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: примеры использования. - Рига, 1990
2.3. Вятченин Нечеткие методы автоматической классификации: Монография.- Минск: УП “Технопринт” 2004. – 218 с.
2.4. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – К.: Издательский дом “Слово” , 2008. – 344 с.
2.5. Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Збірник задач. – К.: Видавничий дім “Слово” , 2007. – 472 с.
2.6. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
2.7. Ротштейн А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. - Винница, 1996.- 132 с.
2.8. Ротштейн О.П., Ракитянська Г.Б. Діагностика на базі нечітких відношень в умовах невизначенності. – Вінніця, 2006
2.9. James C. Bezdek, James Keller, Raghu Krisnapuram, Nikhil R. Pal Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing. – United States of America, 199. – 785 p.
2.10. Jang, Jyh-Shing Roger Neuro-fuzzy and soft computing: a computation approach to learning and machine intelligence / Jyh-Shing Roger Jang, Chuen-Tsai Sun, Eiji Mizutani. – USA, 1997. – 640 p.
Інформаційні ресурси
http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/fuzzylogic – консультационный центр MATLAB компании Soft Line.
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/fuzzy/ - полный пакет сопроводительной документации к пакету Fuzzy Logic Toolbox (на английском языке).
http://www.intuit.ru/department/ds/fuzzysets/ - курс лекций по теории нечетких множеств.
http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/fuzzylogic - консультационный центр MATLAB компании Soft Line.