Тема4. ВІДНОСИНИ НА МНОЖИНАХ

План

4.1 Поняття бінарного відношення.

4.2 Зворотне відношення.

4.3 Композиція відношень.

4.4 Відображення множин, функції на множинах.

4.1 Поняття бінарного відношення.

Нехай задані дві непорожні множини $A = \emptyset$ і $B = \emptyset$. **Бінарним відношенням** R на заданих множинах A і B називається нова множина $R \subseteq A \cdot B$, де $A \cdot B$ – результат прямого декартового добутку цих множин.

Таким чином, для побудови будь-якого бінарного відношення R множина $A \cdot B$ є універсальною, на ній можна будувати різні бінарні відшення R . Якщо деяка впорядкована пара $(a, b) \in R$, то кажуть, що елемент $a \in A$ знаходиться у відношенні R з елементом $b \in B$ (для цього використовується запис aRb).

Областю визначення бінарного відношення R є множина $DomR$ $\{a : (a, b) \in R\}$, елементи цієї множини визначають першу координату відношення R . **Множиною значень** бінарного відношення R є множина $Im\, R$ $\{b : (a, b) \in R\}$, елементи цієї множини визначають другу координату відношення R. Слід зазначити, що $DomR \subseteq A$ і $Im\, R \subseteq B$, тобто. можуть і не включати всі елементи A та B.

Для побудови бінарного відношення R необхідно визначити функцію належності $\mu_R(a, b)$, яка встановлює ступень належності даної пари $(a, b) \in A \cdot B$ до множини R на відрізку [0,1]. При цьому множина R може вийти як чіткою, так і нечіткою.

Часто бінарне відношення R представляють у вигляді матриці відношення $\|M_R\|$, в якій кількість рядків $n = |A|$ і кількість стовпців $m = |B|$, а елементи матриці є ступенем належності даної пари $(a, b) \in A \cdot B$ до множини R.

Приклад 4.1. Задано множини $A = \{2,3,5,7\}$ і $B = \{10,15\}$.

Побудуємо на множині

$A \cdot B = \{(2,10), (2,15), (3,10), (3,15), (5,10), (5,15), (7,10), (7,15)\}$

два бінарних відношення R_1 та R_2 з наступними функціями належності:

- $\mu_{R_1}(a,b)$: «a ділить націло b»,
- $\mu_{R_2}(a,b)$: «$5a$ набагато більше, ніж b».

Функція належності $\mu_{R_1}(a,b)$ є чіткою логічною умовою (істина чи брехня).

Тоді $R_1 = \{(2,10),(3,15),(5,10),(5,15)\}$,

$DomR_1 = \{2,3,5\}$,

$Im\ R_1 = \{10,15\}$.

Функція належності $\mu_{R_2}(a,b)$ є нечіткою логічною умовою. Для оцінки ступенів належності проведемо такі розрахунки (тут ступеня належності пар (3,10), (5,10), (5,15), (7,10), (7,15) встановлені експертно).

a	5a	**b**	5a>b	5a-b	$\mu_{R_2}(a,b)$
2	10	**10**	-		0
2	10	**15**	-		0
3	15	**10**	+	5	0
3	15	**15**	-		0
5	25	**10**	+	15	0,5
5	25	**15**	+	10	0,25
7	35	**10**	+	25	1
7	35	**15**	+	20	0,75

Тоді

$R_2 = 0{,}5/(5,10) + 0{,}25/(5,15) + 1/(7,10) + 0{,}75/(7,15)$,

$DomR_2 = \{5,7\}$,

$Im\ R_2 = \{10,15\}$.

Нижче приведено матричне представлення бінарних відношень R_1 та R_2.

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

4.2 Зворотне відношення

Нехай є деяке бінарне відношення R на множинах A і B. **Зворотним відношення** для відношення R буде множина $R^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in R\}$, тобто множина тих самих упорядкованих пар, у яких координати змінилися місцями. Отже, область визначення зворотного відношення $DomR^{-1} = ImR$, а множина його значень – $ImR^{-1} = Dom$. Якщо бінарне відношення R представлено матрицею $\|M_R\|$ то зворотне відношення R^{-1} може бути представлено також матрицею, отриманою шляхом транспонування вихідної матриці.

Приклад 4.2. Задано дві бінарні відносини $R_1 = \{(2,10), (3,15), (5,10), (5,15)\}$, $R_2 = 0{,}5/(5,10) + 0{,}25/(5,15) + 1/(7,10) + 0{,}75/(7,15)$

З наступними функціями приналежності:

- $\mu_{R_1}(a, b)$: «a ділить націло b»,
- $\mu_{R_2}(a, b)$: «$5a$ набагато більше, ніж b».

Тоді зворотнім відношенням для R_1 буде множина

$R_1^{-1} = \{(10,2), (15,3), (10,5), (15,5)\}$

з областю визначення $DomR_1^{-1} = \{10,15\}$,

множиною значень $ImR_1^{-1} = \{2,3,5\}$.

При цьому функція належності зворотного відношення $\mu_{R_1^{-1}}(a, b)$: «a ділиться націло b».

Тоді зворотним відношенням для R_2 буде множина

$R_2^{-1} = 0{,}5/(5,10) + 0{,}25/(5,15) + 1/(7,10) + 0{,}75/(7,15)$

з областю визначення $DomR_2^{-1} = \{10,15\}$

множиною значень $ImR_2^{-1} = \{5,7\}$.

При цьому функція належності зворотного відношення $\mu_{R^{-1}{}_2}(a, b)$: «a набагато менше, ніж 5 b».

Приклад 4.3. Бінарні відношення R_1 та R_2 представлені наступними матрицями:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

Тоді їх зворотні відношення R_1^{-1} і R_2^{-1} є такими матрицями:

$$M_{R_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_{R_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

4.3 Композиція відношень

Композицією двох бінарних відношень $R_1 \subseteq A \cdot B$ та $R_2 \subseteq B \cdot C$ називається множина $R_1 \circ R_2$, що включає лише впорядковані пари за умовою

$$(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2 \Longrightarrow (a, c) \in R_1 \circ R_2, \tag{4.1}$$

ступеня належності яких обчислюються за правилом

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(a, c) = \max_{b \in B}\left(\min\left(\mu_{R_1}(a, b), \mu_{R_2}(b, c)\right)\right). \tag{4.2}$$

Композиція встановлює бінарне відношення між елементами множин *A* та *C* опосередковано через елементи множини *B*.

Приклад 4.4. На трьох множинах *A* {*a* : *a* студенти університету}, *B* {*b* : *b* студентські групи}, *C* {*c* : *c* факультети університету} побудовано бінарні відношення $R_1 \subseteq A \cdot B$ та $R_2 \subseteq B \cdot C$ з наступними функціями належності $\mu_{R_1}(a, b)$: «студент *a* навчається у групі *b*», $\mu_{R_2}(a, b)$: «група *b* відноситься до факультету *c* ». Тоді композиція $R_1 \circ R_2 = \{(a, c): (a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2\}$ приведе до побудови бінарного відносини з функцією приналежності $\mu_{R_1 \circ R_2}(a, c)$ «студент а навчається на факультеті с».

Приклад 4.5. Бінарні відношення $R_1 \subseteq A \cdot B$ та $R_2 \subseteq A \cdot B$ представлені такими матрицями:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}9 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Оскільки $|A| = 3$, $|B| = 4$, $|C| = 2$, то матриця композиції цих бінарних відносин $\left\|M_{R_1 \circ R_2}\right\|$ матиме три рядки і два стовпці, а елементи в ній обчислюються (4.2) як $m_{R_1 \circ R_2}(i, j) = \max_{k=1}^{4}\left(\min\left(m_{R_1}(i, k), m_{R_2}(k, j)\right)\right)$, наприклад:

$$m_{R_1 \circ R_2}(1,1) = = \max_{k=1}^{4} \left(\min\left(m_{R_1}(1,k), m_{R_2}(k,1)\right)\right) =$$
$$= \max\left[\min(0{,}8; 0{,}8), \min(0{,}5; 0{,}2), \min(0{,}2; 0{,}9), \min(0{,}9; 1)\right] =$$
$$= \max[0{,}8; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}9] = 0{,}9$$

$$m_{R_1 \circ R_2}(1,2) = \max_{k=1}^{4} \left(\min\left(m_{R_1}(1,k), m_{R_2}(k,2)\right)\right) =$$
$$\max\left[\min(0{,}8; 0{,}5), \min(0{,}5; 0{,}7), \min(0{,}2; 0{,}3), \min(0{,}9; 0{,}7)\right] =$$
$$\max[0{,}5; 0{,}5; 0{,}2; 0{,}7] = 0{,}7$$

Тоді матричне подання композиції бінарних відношень R_1 і R_2 має такий вигляд:

$$M_{R_1 \circ R_2} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

4.4 Відображення множин, функції на множинах

Будь яке бінарне відношення можно розглядати, як відображення $f: A \to B$.

Відображення $f: A \to B$ називається **функцією**, якщо воно встановлює однозначну відповідність оригіналів (прообразів) A і елементів множини образів B у відношенні R. Якщо впорядкована пара $(a, b) \in R$, то його можно розглядати, як відображення оригінала a в образ *в* $: f(a) = b$. Графічно відповідність елементів відображення $f: A \to B$ зображується за допомогою дуг у якому витоком є оригінал, а стоком його образ. Якщо відношення нечітке, то дугам присвоюються ваги рівні ступеням приналежності відповідних пар$(a, b) \in R$.

Відображення $f: A \to B$ називається **функцією**, якщо воно встановлює однозначну відповідність оригіналів тобто $f(a) = b \vee f(a) = c \Rightarrow b = c$ (у оригіналу може бути лише один образ або жодного). Не всяке відображення є функцією.

Областю визначення функції або областю відправлення функції $f: A \to B$ називається множина $Domf = \{a: a \in A, \exists b \in B(b = f(a))\}$.

Областю значень функції або областю прибуття функції $f: A \to B$ називається множина $Im\, f = \{b: b \in B, \exists a \in A(b = f(a))\}$. Вочевидь, що $Domf \subseteq A, Imf \subseteq B$.

Якщо у функції $f: A \to B$ область визначення $Domf = A$, то така функція називається **тотальною**, інакше – **частковою**.

Звуженням функції $f: A \to B$ на множину $M \subset A$ називається функція $f|M$, яка визначається бінарним ставленням $R|M = \{(a, b) : (a, b) \in R, a \in M\}$. В цьому випадку функція $f: A \to B$ є **продовженням** функції $f|M$.

Слід зауважити, що функціональність відображення $f: A \to B$ і тотальність функції визначається лише множиною оригіналів A .

Приклад 4.6. На множинах $A\,\{a : a -$ студенти університету$\}, B\,\{b : b -$ студентські групи$\}$ побудовано бінарне відношення $R \subseteq A \cdot B$ з функцією приналежності $\mu_R(a, b)$: «студент a навчається у групі b».

Відображення $f : A \to B$ схематично представлено на рисунку 4.1.Проаналізуємо множину оригіналів: кожен оригінал має один образ. Отже, відображення $f : A \to B$ малюнку 4.2 є тотальною функцією. Зузимо цю функцію на множину $M \subset A$, де будуть студенти, прізвища яких починаються з літери «А». Тоді функція $f|M$ буде визначатися бінарним відношенням $R|M = \{(a, b) : (a, b) \in R, a \in M\}$ і задавати відповідність студентів, прізвища яких починаються з літери «А», та всіх студентських груп університету.

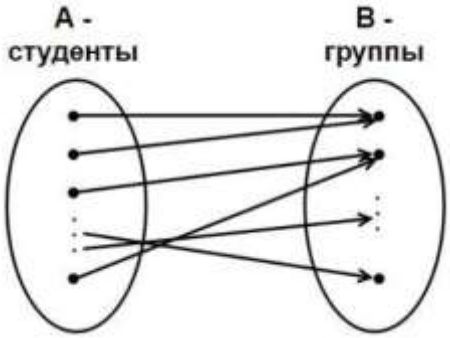


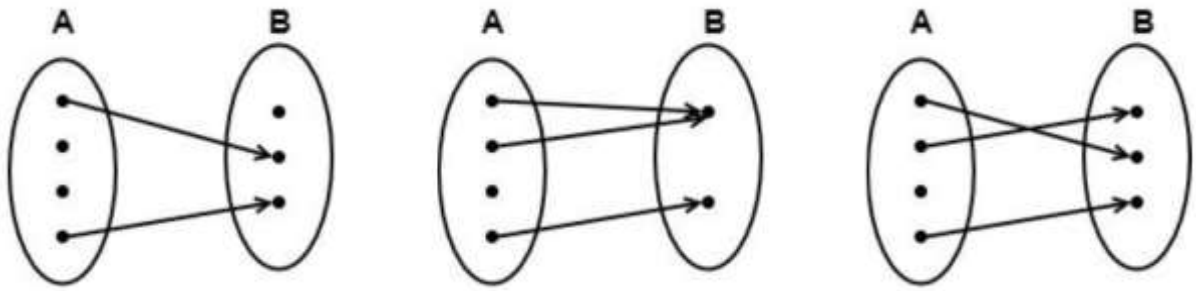
Рисунок 4.1 – Приклад тотальної функції

Залежно від множини образів B розрізняють такі **види** функцій.

1). Функція $f : A \to B$ називається **ін'єктивною** (або ін'єкцією), якщо виконується така умова: $f\,(a) = b \vee f\,(a) = c \Rightarrow b = c$, тобто у кожного образу може бути лише один прообраз чи жодного. Приклад ін'єкції наведено рисунку 4.2,а.

2). Функція $f : A \to B$ називається **сюр'єктивною** (або сюр'єкцією), якщо виконується така умова: $\forall b \in B(\exists a \in A : f(a) = b)$, тобто кожен образ має хоча б один прообраз. Приклад сюр'єкції наведено рисунку 4.2,б. Сюр'єктивною є функція в прикладі 4.6 (рис. 4.1).

3). Функція $f : A \to B$ називається бієктивною (або бієкцією), якщо вона одночасно ін'єктивна та сюр'єктивна, тобто виконується така умова:$\forall b \in B\ (\exists!\ a \in A: f\ (a) = b)$, тобто кожен образ має лише один прообраз. Бієкцію часто називають взаємно однозначною відповідністю. Приклад бієкції наведено рисунку 4.2,в.



а) ін'єкція б) сюр'єкція в) бієкція

Рисунок 4.2 – Приклади видів функцій

Зазначимо такі важливі особливості відображень зворотних бінарних відносин.

1). Якщо функція $f : A \to B$ є тотальною бієкцією для відношення $R \subseteq A \cdot B$, зворотне відношення $R^{-1} \subseteq B \cdot A$ також є тотальною бієкцією.

2). Якщо функція $f : A \to B$ є ін'єкцією для відношення $R \subseteq A \cdot B$, зворотне відношення $R^{-1} \subseteq B \cdot A$ також є функцією (можливо, частковою).

Лабораторна робота 4

Тема. ВІДНОСИНИ НА МНОЖИНАХ

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з визначення бінарного відношення на нечітких множинах, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- визначати бінарного відношення нечітких множин;
- виконувати зворотне відношення нечітких множин;
- виконувати композиція відношень нечітких множин;
- визначати відображення нечітких множин;
- створювати програмні функції для визначення відносин на нечітких множинах.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- як визначати бінарне відношення нечітких множин;
- як визначати зворотне відношення нечітких множин;
- як виконувати композицію відношень нечітких множин;
- як визначати відображення нечітких множин;
- одну з мов програмування.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування.

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис виконаного завдання.

Зміст звіту

Титульний лист.

Назва і мета лабораторної роботи.

Теоретична частина:

1. Опис умов задачі.
2. Основні теоретичні положення за темою лабораторної роботи.

Практична частина:

1. Розв'язок завдань лабораторної роботи, ілюстровані скріншотами.

Висновки по роботі.

Завдання 1

На множинах A $\{1,2,3\}$ і B $\{4,5,9\}$ побудовано бінарне відношення R з наступною функцією приналежності: $\mu_R(a,b)$: $a^2 < b$.

Виберіть правильні твердження.

a. $|A \cdot B| = 9$
b.$|R| = 6$
c. $\mu_R(1,4) = 1$
d.$(4,5) \in R$
e. $\mu_R(2,5) = 0,5$
f. $(2,9) \in R$
g. $DomR = A$
h.$Im\ R = B$
t. Немає правильної відповіді.

Завдання 2

На множинах $A = \{1,2,3\}$ і $B = \{4,5,9\}$ побудовано бінарне відношення $R = \{(1,4), (1,5), (1,9), (2,5), (2\ ,9)\}$.

Виберіть правильні твердження.

a. $R^{-1} = \{(4,1), (5,1), (9,1), (5,2), (9,2)\}$
b. $R^{-1} = \{(4,1), (5,1), (9,1), (5,4), (9,4)\}$
c. $|R| = |R^{-1}|$
d. $DomR^{-1} = B$
e. $Im\ R^{-1} = A$
f. Немає правильної відповіді.

Завдання 3

Задано множини $A = \{1,3,5,9\}$ і $B = \{15,27\}$.

1). Необхідно побудувати на множині $A \cdot B$ два бінарних відношення R_1 та R_2 з наступними функціями належності:

- $\mu_{R_1}(a, b)$: «a ділить націло b»,
- $\mu_{R_2}(a, b)$: «$3a$ набагато менше, ніж b».

2). Вкажіть $DomR_1$ та $Im\ R_1$.

3). Визначте функції належності $\mu_{R_1}(a, b)$ та $\mu_{R_2}(a, b)$, для цього ступеня належності визначених пар встановіть експертно та занесіть у таблицю.

4). Наведіть матричне представлення бінарних відношень R_1 та R_2.