Лекція 1 Проблеми Гільберта

23 проблеми Гільберта

НА ДРУГОМУ МІЖНАРОДНОМУ КОНГРЕСІ МАТЕМАТИКІВ ДАВІД ГІЛЬБЕРТ ВИЗНАЧИВ НАЙСУТЄВІШІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СУЧАСНИКІВ І МАЙБУТНІХ КОЛЕГ. На конференції, що проходила в Парижі в 1900 році, він сформулював 10 найбільш актуальних невирішених на той час проблем, які як передбачалось будуть займати уми математиків у наступному столітті, а також описав ще 13 областей перспективних досліджень. Вибір Гільберта був обумовлений завданнями розвитку математики як науки, розширення її можливостей та сфер застосування. До кінця XX століття лише три з них залишилися невирішеними.

На даний час розв'язані 16 проблем з 23. Ще 2 не є коректними математичними проблемами (одна сформульована занадто розпливчасто, щоб зрозуміти, розв'язана вона чи ні, інша, далека від розв'язання, — фізична, а не математична). З 5 проблем, що залишилися, дві не розв'язані ніяк, а три розв'язані тільки для часткових випадків.

Список проблем[ред. | ред. код]

1	**розв'язана**[2]	Проблема Кантора про потужність континууму (Континуум-гіпотеза)
2	**нема консенсусу**[3]	Несуперечливість аксіом арифметики.
3	**розв'язана**	Третя проблема Гільберта — рівноскладеність рівновеликих многогранників
4	**занадто розпливчаста**[4]	Перерахувати метрики, у яких прямі є геодезичними
5	**розв'язана**	Чи всі неперервні групи є групами Лі?
6	**не математична**	Математичний виклад аксіом фізики
7	**розв'язана**	Довести, що число $2^{\sqrt{2}}$ є трансцендентним (або хоча би ірраціональним).[5]
8	**відкрита**[6]	Проблема простих чисел (гіпотеза Рімана і проблема Гольдбаха)
9	**частково розв'язана**[7]	Доведення найзагальнішого закону взаємності в будь-якому числовому полі
10	**розв'язана**[8]	Задача про можливість розв'язання діофантових рівнянь
11	**розв'язана**	Вивчення квадратичних форм із довільними алгебраїчними числовими коефіцієнтами

12	**відкрита**	Поширення теореми Кронекера про абелеві поля на довільну алгебраїчну область раціональності
13	**розв'язана**	Неможливість розв'язання загального рівняння сьомого степеня за допомогою функцій, що залежать тільки від двох змінних
14	**розв'язана**	Доведення скінченнопородженості алгебри інваріантів алгебраїчної групи[9]
15	**частково розв'язана**	Строге обґрунтування обчислювальної геометрії Шуберта
16	**частково розв'язана**[10]	Топологія алгебраїчних кривих і поверхонь[11]
17	**розв'язана**	Представлення визначених форм у вигляді суми квадратів
18	**розв'язана**[12][13]	Скінченність числа кристалографічних груп; нерегулярні заповнення простору конгруентними многогранниками; найщільніше пакування куль
19	**розв'язана**	Чи завжди розв'язки регулярної варіаційної задачі Лагранжа є аналітичними?
20	**розв'язана**	Загальна задача про граничні умови (?)
21	**розв'язана**	Доведення існування лінійних диференціальних рівнянь із заданою групою монодромії
22	**розв'язана**	Уніформізація аналітичних залежностей за допомогою автоморфних функцій
23	**не розв'язана**	Розвиток методів варіаційного числення

1 **проблема:Конти́нуум-гіпо́теза** — гіпотеза, яку висунув Георг Кантор у 1877 і згодом безуспішно намагався її довести, можна сформулювати таким чином:

Будь-яка нескінченна підмножина континууму є або зліченною, або континуальною.

Континуум-гіпотеза стала першою з двадцяти трьох математичних проблем, про які Давид Гільберт доповів на II Міжнародному Конгресі математиків в Парижі 1900 року. Тому континуум-гіпотеза відома також як **перша проблема Гільберта**.

1940 року Курт Гедель довів, що у системі аксіом Цермело—Френкеля з аксіомою вибору (ZFC), континуум-гіпотезу не можна спростувати (за припущення про несуперечність ZFC[Прим. 1]); а 1963 року американський математик Пол Коен довів, що континуум-гіпотезу не можна довести, виходячи з тих же аксіом (також у припущенні про несуперечність ZFC). Таким чином, континуум-гіпотеза не залежить від аксіом ZFC.

1. Континуум-гіпотеза

Континуум-гіпотеза ще відома як перша проблема Гільберта, її формулювання наступне:

З точністю до еквівалентності, існують тільки два типи нескінченних числових множин - зліченна множина і континуум.

Інакше кажучи, потрібно встановити, чи існує множина проміжної потужності, тобто така множина T, $N \subset T \subset R$, яка не еквівалентна ні N, ні R.

Довести континуум-гіпотезу – значить, вивести її з системи аксіом. Спростувати її – значить, показати, що якщо її додати до цієї системи аксіом, то вийде суперечливий набір тверджень. У теорії множин є загальновизнана система аксіом Цермело–Френкеля.

Цією проблемою займалися дуже багато математиків. Г. Кантор неодноразово заявляв, що довів цю гіпотезу, але всякий раз знаходив у себе помилку.

Вирішення проблеми

Виявилось, що перша проблема Гільберта має абсолютно несподіване рішення.

У 1963 році американський математик Паул Коен довів, що континуум-гіпотезу не можна ні довести, ні спростувати.

Це означає, що якщо узяти стандартну систему аксіом Цермело–Френкеля (*ZF*) і додати до неї континуум-гіпотезу як ще одну аксіому, то вийде несуперечлива система тверджень. Але якщо до *ZF* додати заперечення континуум-гіпотези (тобто протилежне твердження), то знову вийде несуперечлива система тверджень.

Таким чином, ні континуум-гіпотезу, ні її заперечення не можна вивести із стандартної системи аксіом.

Що ж робити з цією гіпотезою? Зазвичай її просто приєднують до системи аксіом *ZF*. Але кожного разу, коли використовують при доведенні якогось твердження континуум-гіпотезу, обов’язково указують на це.

8 проблема:Проблема простих чисел (гіпотеза Рімана і проблема Гольдбаха)

ВИНИКНЕННЯ ПРОБЛЕМИ ГОЛЬДБАХА ТА СПРОБИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Найпростіші математичні твердження іноді буває складніше всього довести. Так, Велика теорема Ферма була остаточно доведена лише в кінці XX століття - через кілька сотень років після того, як була сформульована.

У 1742 році прусський математик Християн Гольдбах надіслав листа Леонарду Ейлеру, в якому він висловив таке припущення: кожне непарне число, більше п'яти, можна представити у вигляді суми трьох простих чисел. Ейлер зацікавився проблемою і висунув сильнішу гіпотезу: кожне парне число, більше двох, можна представити у вигляді суми двох простих чисел. Перше твердження називається слабкою проблемою Гольдбаха, друге - сильною проблемою Гольдбаха (або проблемою Гольдбаха у формулюванні Ейлера). Із справедливості твердження сильної проблеми Гольдбаха автоматично випливає справедливість слабкої проблеми Гольдбаха.

З тієї пори, коли Гольдбах висунув сформульовану вище гіпотезу, математики не сумнівалися, що вона, як і Велика теорема Ферма, вірна. Проте, на відміну від теореми Ферма, ніхто ніколи не претендував на те, що зумів її довести. До розв'язання цієї проблеми існує підхід «в лоб» - надовго запустити комп'ютерну програму, яка б послідовно перевіряла це твердження для все більших і більших парних чисел. Тобто, щоб програма послідовно перевіряла правильність гіпотези для кожного наступного парного числа. Вказаним способом на сьогоднішній день перевірено всі парні числа до $3 \cdot 10^{18}$, і перевірка триває. Але такий метод має суттєвий недолік. Він дозволив би спростувати гіпотезу, якщо вона б була невірна. Але так не можна підтвердити гіпотезу з тієї простої причини, що ніколи не можна гарантувати, що число, яке програма могла б перевірити на наступному кроці, не опиниться першим виключенням з правила.

У 30-і роки XX століття група російських математиків встановила, що існує таке скінченне n, що будь-яке парне число може бути представлене у вигляді суми не більше ніж n простих доданків, а також що гіпотеза

Гольдбаха є вірною для певного класу парних чисел. Проте повне доведення теореми досі не знайдене.

Доволі часто можна стикнутись із запитаннями наступного характеру: чому математики витрачають стільки часу на вирішення таких питань як Велика теорема Ферма або проблема Гольдбаха? Адже в цьому немає практичного сенсу. Математики сподіваються виявити такі істини, працюючи з системами, побудованими на чистій логіці. І те, що ці доведення настільки важко досяжні, напевно пояснюється самою природою логіки, неможливістю знайти істину в цьому ненадійному, мінливому світі, а не властивістю математики як такої. Самі ж математики вважають, що до розв'язання сильної проблеми Гольдбаха ще далеко [7].

1.1 Сутність слабкої проблеми Гольдбаха

Слабка проблема Гольдбаха (або тернарна проблема) формулюється так:

Кожне непарне число, більше семи, можна представити у вигляді суми трьох непарних простих чисел.

Або інше формулювання цієї проблеми:

Кожне непарне число, більше п'яти, можна представити у вигляді суми трьох простих чисел.

У середині травня 2013 року математик з Перу, який в даний час працює у Франції, Харальд Хельфготта виклав в архів препринтів Корнельського університету статтю «Великі дуги для теореми Гольдбаха». Ця стаття обсягом 133 сторінки містить фінальну частину доведення (розпочатого на початку XX століття великим радянським математиком Іваном Виноградовим) слабкої проблеми Гольдбаха - однієї з найстаріших задач в теорії чисел. Травень 2013 року став абсолютно дивовижним місяцем для теорії чисел: буквально за один тиждень стало відомо про прогрес у двох найскладніших проблемах, що відносяться до так званих адитивних задач.

Так називають цілий клас задач, в яких мова йде про подання одних чисел у вигляді суми інших, причому ці інші беруться з якого-небудь спеціального класу. Більшість з цих задач зводиться до питання про існування зазначених подань і, у разі позитивної відповіді, до підрахування кількості цих подань.

1.2 Сутність сильної проблеми Гольдбаха, спроби доведення та причини виникнення труднощів

Сильна проблема Гольдбаха (або бінарна проблема) формулюється так: будь-яке парне число, більше двох, можна представити у вигляді суми двох простих чисел.

У 1930 році Шнирельман довів, що будь-яке ціле число можна представити у вигляді суми не більше ніж 800 000 простих чисел [5]. Це було серйозним кроком вперед і цей результат багаторазово поліпшувався. У 1995 році Ремер (Ramaré) довів, що будь-яке парне число - сума не більш ніж 6 простих чисел.

Помітний крок до доведення проблеми Гольдбаха зробив у 1966 році китайський математик Чень Цзінжунь. Він довів, що будь-яке досить велике парне число можна представити або у вигляді суми двох простих чисел, або ж у вигляді суми простого і напівпростого чисел.

В інтернеті можна знайти безліч «доведень» сильної гіпотези Гольдбаха. Але звичайно подібні доведення мають помилки, або взагалі не є доведеннями. Цілком ймовірно, що сильну гіпотезу Гольдбаха неможливо довести. Це твердження пов'язане, зокрема з тим, що так званого «закону простих чисел» також не існує. Відкриття кожного нового простого числа відбувається виключно методом «перебору», і останнім часом через величезні числові «відстані» між кожним новим простим числом і наступним за ним, подібні відкриття відбуваються вкрай рідко і є значними математичними досягненнями.

Сильна проблема Гольдбаха відноситься до адитивних проблем теорії чисел, а це означає, що вона є складною з тієї причини, що парне натуральне число треба представити у вигляді суми простих доданків, але саме воно може бути представлене у вигляді добутку простих чисел (канонічний розклад). Отже, сильна проблема Гольдбаха залишається поки що кам'яною стіною для дослідників.

Проблеми тисячоліття (також *Задачі тисячоліття*; англ. Millennium Prize Problems) — це сім математичних проблем, визначених Математичним інститутом Клея 2000 року, охарактеризовані як «важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено впродовж багатьох років». За розв'язання кожної з цих проблем інститутом Клея запропоновано приз у розмірі 1 000 000 доларів США. Анонсуючи приз, інститут Клея провів паралель із проблемами Гільберта, які було визначено 1900 року та які спричинили істотний вплив на математику XX століття.

1900 року на Міжнародному математичному конгресі в Парижі Давид Гільберт оголосив 23 математичні проблеми, які, на його думку, слід було б розв'язати в XX столітті. На сьогодні 21 проблему з цього списку вже розв'язано, і тільки частина 8-ї проблеми — гіпотеза Рімана — ввійшла до переліку Проблем тисячоліття.

Наприкінці XX століття математики намагалися сформулювати подібні стратегічні завдання на наступне, XXI століття. Так, у травні 2000 року експерти Математичного інституту Клея (Кембридж, Массачусетс, США) відібрали сім найважливіших проблем сучасної математики. Кількість проблем у переліку (сім) було обрано виходячи з того, що засновник інституту, бостонський мільйонер Клей, виділив на премії сім мільйонів доларів — по мільйону за вирішення кожної

Рівність класів P і NP

Докладніше: Рівність класів P і NP

Питання полягає в тому, чи для всіх задач, для яких комп'ютер може швидко перевірити заданий алгоритм (тобто, протягом поліноміального часу), він також може швидко знайти цей розв'язок. Проблема рівності класів складності P і NP є однією з найважливіших проблем теорії алгоритмів і має багато далекосяжних наслідків у математиці, філософії й криптографії (див. Наслідки рівності класів P і NP). Офіційна постановка задачі належить Стівену Куку.

Всі ми пам'ятаємо зі школи квадратні рівняння, які вирішуються через дискримінант. Вирішення цього завдання належить до класу P (Polynomial time) – для неї існує швидкий (тут і далі під словом «швидкий» мається на увазі як виконується за поліноміальний час) алгоритм рішення, який і заучується.

Також існують NP-задачі (Non-deterministic Polynomial time), знайдене рішення яких можна швидко перевірити за певним алгоритмом. Для прикладу перевірка методом перебору комп'ютером. Якщо повернутися до вирішення квадратного рівняння, то ми побачимо, що в даному прикладі існуючий алгоритм рішення перевіряється так само легко і швидко як і вирішується. З цього напрошується логічний висновок, що дана задача відноситься як до одного класу так і до другого.

Таких завдань багато, але основним питанням є, все або не всі завдання які можна легко і швидко перевірити можна також легко і швидко вирішити? Зараз для деяких завдань не знайдено швидкого алгоритму вирішення, і невідомо чи існує такий взагалі.

На просторах інтернету також зустрічається таке цікаве і прозоре формулювання:

“Припустимо, що ви, перебуваючи у великій компанії, хочете переконатися, що там знаходиться й ваш знайомий. Якщо вам скажуть, що він сидить в кутку, то досить буде частки секунди, щоб, кинувши погляд, переконатися в істинності інформації. За відсутності цієї інформації ви будете змушені обійти всю кімнату, розглядаючи гостей.”

В даному випадку питання стоїть таке ж, чи є такий алгоритм дій, завдяки якому навіть не маючи інформації про те, де знаходиться людина, знайти його так само швидко, як ніби знаючи де він знаходиться.

Дана проблема має велике значення для самих різних областей знань, але вирішити її не можуть вже більше 40 років.

Гіпотеза Пуанкаре (доведена)

Докладніше: Гіпотеза Пуанкаре

Вважається найвідомішою проблемою топології. Неформально кажучи, вона стверджує, що всякий «тривимірний об’єкт», що має деякі властивості тривимірної сфери (зокрема, кожна петля всередині нього стягується), має бути сферою з точністю до деформації. 2002 року російський математик Григорій Перельман опублікував працю, з якої випливає справедливість гіпотези Пуанкаре.

Найчастіше зустрічається така розшифровка як «гумову стрічку натягнуту на сферу можна плавно стягнути в точку, а натягнуту на бублик – не можна». Насправді це формулювання справедливе для гіпотези Терстона, яка узагальнює гіпотезу Пуанкаре, і яку в дійсності і довів Перельман.

Окремий випадок гіпотези Пуанкаре каже нам про те, що будь-який тривимірне різноманіття без краю (всесвіт, наприклад) подібно тривимірній сфері. А загальний випадок переводить це твердження на об’єкти будь-якої вимірності. Варто зауважити, що бублик, точно так само, як всесвіт подібний сфері, подібний до звичайної кавової кружки.

Гіпотеза Рімана

Докладніше: Гіпотеза Рімана

Гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета-функції Рімана мають дійсну частину 1/2. Її доведення або спростування буде мати далекосяжні наслідки для теорії чисел, особливо в частині розподілу простих чисел. Гіпотеза Рімана була частиною восьмої проблеми Гільберта.

Всім нам ще зі школи відомі прості числа які діляться тільки на себе і на одиницю (2, 3, 5, 7, 11, …). З давніх часів люди намагаються знайти закономірність в їх розміщенні, але удача досі так нікому і не посміхнулася. В результаті вчені застосували свої зусилля до функції розподілу простих чисел, яка показує кількість простих чисел менше або рівних певного числа. Наприклад для 4 – 2 простих числа, для 10 – вже 4 числа. Гіпотеза Рімана якраз встановлює властивості даної функції розподілу.

Багато тверджень про обчислювальну складність деяких цілочисельних алгоритмів, доведені в припущенні вірності цієї гіпотези.