

Тема 2. Теорема множення та додавання ймовірностей і їх наслідки.

2.1. Ймовірність суми несумісних подій.

Аксиома 3 аксіоматичного означення ймовірності (п. 1.4) стверджує, що ймовірність суми скінченного числа несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_n дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (2.1)$$

З формули (2.1) випливає, що сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці, оскільки у результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з цих подій.

Протилежні події A та \bar{A} утворюють повну групу несумісних подій, тому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Звідси отримуємо:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.2)$$

Приклад 1. Мішень поділена на 3 сектори. Ймовірність влучення стрільцем у перший сектор мішені дорівнює 0,45, у другий сектор – 0,35, у третій – 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить: а) у перший або другий сектор; б) не влучить у мішень.

Розв'язання. Введемо позначення:

подія $A_1 = \{\text{влучення у перший сектор}\}$;

подія $A_2 = \{\text{влучення у другий сектор}\}$;

подія $A_3 = \{\text{влучення у третій сектор}\}$;

подія $A_4 = \{\text{невлучення у мішень}\}$.

Тоді $P(A_1) = 0,45$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,15$.

а) Влучення у перший або другий сектор відповідає сумі подій A_1 та A_2 .

При одному пострілі події A_1 та A_2 є несумісними, тому за формулою (2.1)

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,45 + 0,35 = 0,8.$$

б) Події A_1, A_2, A_3, A_4 попарно несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Тому $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1$. Звідси знаходимо:

$$P(A_4) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) = 1 - 0,45 - 0,35 - 0,15 = 0,05.$$

Приклад 2. У ящику знаходяться 20 деталей, з яких 15 деталей є стандартними. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{серед взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна деталь}\}$. Тоді протилежна подія $\bar{A} = A^c = \{\text{серед взятих деталей всі нестандартні}\}$. Спочатку знайдемо ймовірність протилежної події:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{1}{114}. \text{ Звідси, за формулою (2.2) } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114}.$$

2.2 Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей.

Умовною ймовірністю події A відносно події B називають ймовірність події A , обчислену за умови, що подія B відбулася. Для такої ймовірності використовують позначення $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Приклад. В урні знаходяться 3 білі та 3 чорні кулі. З неї двічі виймають по одній кулі, не повертаючи їх в урну. Знайти ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{першого разу з'явилась біла куля}\}$, подія $B = \{\text{другою з'явилась біла куля}\}$. Знайдемо умовну ймовірність $P(B/A)$, тобто ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю. Після виймання першої кулі (білої) в урні залишилось 2 білі та 3 чорні кулі. Тому ймовірність $P(B/A) = \frac{3-1}{3+3-1} = \frac{2}{5}$.

Теорема 2.1 (Теорема множення ймовірностей). Ймовірність добутку подій A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події відносно першої:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (2.3)$$

Доведення. Доведемо цю теорему для класичної схеми визначення ймовірності, коли у результаті випробування може відбутися одна з скінченного числа n рівноможливих елементарних подій. Нехай з цих n подій сприяють події A m подій, з яких k подій сприяють також події B . Маємо $P(A) = \frac{m}{n}$,

$P(B/A) = \frac{k}{m}$. Добутку подій AB сприяють лише такі випадки з сприятливих

для події A , що є сприятливими і для події B . Отримуємо:

$$P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Аналогічним чином можна отримати формулу $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Формула (2.3) розповсюджується також на випадки, коли класична схема обчислення ймовірностей є незастосовною, наприклад, у випадках, коли простір елементарних подій є нескінченним, або елементарні події не є рівноможливими.

З формули (2.3) знайдемо формулу для обчислення умовної ймовірності:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.4)$$

Формулу (2.4) часто використовують як означення умовної ймовірності події, альтернативне наведеному на початку п.2.2.

Приклад 1. Серед 25 електроламп 4 несправні. Знайти ймовірність того, що дві взяті навмання електролампи будуть несправними.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{перша взята лампа виявилася несправною}\}$, подія $B = \{\text{друга взята електролампа – несправна}\}$. Подія $AB = \{\text{обидві взяті електролампи є несправними}\}$. Обчислимо ймовірність добутку подій AB за формулою (2.3):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24} = 0,02.$$

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати також, використовуючи класичну схему обчислення ймовірності та формули комбінаторики.

Події A та B називають незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання іншої, інакше ці події є залежними.

Події A_1, A_2, \dots, A_n називають попарно незалежними, якщо незалежними між собою є будь-які дві з них. Події A_1, A_2, \dots, A_n називають незалежними у сукупності, якщо вони є попарно незалежними, а також незалежними є кожна подія та всі можливі добутки інших подій. Далі незалежними подіями будемо називати події, незалежні у сукупності.

Оскільки для незалежних подій A та B $P(B \setminus A) = P(B)$, то у цьому випадку формула (2.3) набуває вигляду:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.5)$$

Формула (2.5) виражає теорему множення ймовірностей для незалежних подій:

Теорема 2.2 (Теорема множення ймовірностей для незалежних подій).

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

Приклад 2. Ймовірність влучення у ціль для першого стрільця становить 0,7, для другого ця ймовірність дорівнює 0,9. Вони одночасно стріляють по цілі. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена двічі.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{перший стрілець вразив ціль}\}$, подія $B = \{\text{другий стрілець вразив ціль}\}$. Тоді подія $AB = \{\text{обидва стрільці вразили ціль}\}$. Оскільки події A та B є незалежними, то для знаходження ймовірності їх добутку використаємо формулу (2.5):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Теорему множення ймовірностей можна узагальнити на випадок добутку довільної скінченної кількості подій.

Теорема 2.3. Ймовірність добутку скінченної кількості подій дорівнює добутку їх умовних ймовірностей відносно добутку попередніх по відношенню до кожної з них подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / (A_1 A_2)) \cdot \dots \cdot P(A_n / (A_1 A_2 \dots A_{n-1})). \quad (2.6)$$

Доведення. Здійснимо доведення методом математичної індукції. Теорема виконується для двох подій (теорема 2.1). Нехай вона виконується для $n-1$ подій, тобто

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \dots P(A_{n-1} / (A_1 A_2 \dots A_{n-2})). \quad (2.7)$$

Нехай подія $B = A_1 A_2 \dots A_{n-1}$. Згідно з теоремою множення ймовірностей для двох подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(B A_n) = P(B) \cdot P_B(A_n) = P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \cdot P_{A_1 \dots A_{n-1}}(A_n). \quad (2.8)$$

З (2.8) та (2.7) випливає формула (2.6).

З даної теореми випливає, що для незалежних подій A_1, A_2, \dots, A_n ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (2.9)$$

Приклад 3. На 10 картках надруковані цифри від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання взяті і розміщені у ряд в послідовності виймання картки утворять число 125.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{утворення числа 125}\}$, подія $A_1 = \{\text{поява 1 при першому вийманні картки}\}$, $A_2 = \{\text{поява 2 при другому вийманні}\}$, $A_3 = \{\text{поява 5 при третьому вийманні}\}$. Маємо $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2 та A_3 є залежними. Тому за формулою (2.6) $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$.

Оскільки $P(A_1) = \frac{1}{10}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{9}$, $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{1}{8}$, то $P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$.

Приклад 4. Робітник обслуговує три однотипні верстати. Ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка будь-якого верстата, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка: а) на всіх трьох верстатах; б) хоча б на одному верстаті.

Розв'язання. Нехай подія $A_i = \{\text{аварійна зупинка виникне на } i\text{-ому верстаті}\}$, $i = 1, 2, 3$. Події A_1, A_2 та A_3 є незалежними.

а) Подія $B = \{\text{аварійна зупинка відбудеться на всіх трьох верстатах}\}$ відповідає добутку подій $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (0,6)^3 = 0,216.$$

б) Нехай подія $C = \{\text{аварійна зупинка відбудеться хоча б на одному верстаті}\}$. Тоді протилежна подія $\bar{C} = \{\text{аварійної зупинки не відбудеться на жодному верстаті}\}$, $\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$,

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - 0,6)^3 = 0,064,$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,064 = 0,936.$$

У цьому прикладі була знайдена ймовірність настання хоча б однієї події з кількох незалежних подій. Для цього було знайдено ймовірність протилежної події – {жодна з кількох незалежних подій не з'явилась}.

Теорема 2.4. Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , незалежних у сукупності:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n, \quad (2.10)$$

де $q_1 = P(\bar{A}_1)$, $q_2 = P(\bar{A}_2)$, \dots , $q_n = P(\bar{A}_n)$.

Доведення. Нехай A – подія, що полягає у появі хоча б однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , тобто $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Тоді $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$. Оскільки події A_i , i , відповідно, \bar{A}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, є незалежними у сукупності, то за формулою (2.9) маємо: $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = q_1 q_2 \dots q_n$. Оскільки $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, тог отримуємо формулу (2.10).

Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n є незалежними та їх ймовірності рівні між собою та дорівнюють p , то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій $P(A) = 1 - q^n$, де $q = 1 - p$.

Приклад 5. Ймовірність того, що стрілець при трьох пострілах влучить у ціль хоча б один раз, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність влучення стрільцем у ціль у одному пострілі.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{стрілець влучив у ціль хоча б один раз}\}$.
 За умовою $P(A) = 0,936 = 1 - q^3$, де $q = 1 - p$, p – ймовірність влучення у ціль при одному пострілі. $q^3 = 1 - 0,936 = 0,064$, $q = \sqrt[3]{0,064} = 0,4$. Тоді $p = 1 - q = 1 - 0,4 = 0,6$.

2.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 2.5. Ймовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій, A чи B , дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.11)$$

Доведення. Нехай A та B – сумісні події. Їх суму можна записати у вигляді: $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. Оскільки події AB , $\bar{A}B$ та $A\bar{B}$ є несумісними, то за формулою (2.1) отримуємо:

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \quad (2.12)$$

Оскільки $A = AB + A\bar{B}$, то для ймовірності події A можна записати:

$$P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}).$$

$$\text{Звідси } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \quad (2.13)$$

Аналогічно, з врахуванням несумісності подій BA та $B\bar{A}$ та комутативності множення подій, для ймовірності події B отримуємо:
 $P(B) = P(BA + B\bar{A}) = P(AB) + P(\bar{A}B)$. Звідси маємо:

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \quad (2.14)$$

Підставивши (2.13) та (2.14) у (2.12), отримаємо:

$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$, що й треба було довести.

Приклад. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність виконання завдання першим виконавцем дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання буде виконано.

Розв'язання. Нехай подія $A_1 = \{\text{завдання виконано першим виконавцем}\}$, подія $A_2 = \{\text{завдання виконано другим виконавцем}\}$. За умовою ймовірності цих подій $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,9$. Завдання буде виконано, якщо матиме місце сума сумісних подій A_1 та A_2 . Використовуючи формулу (2.11), знаходимо: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$. Події A_1 та A_2 є незалежними, тому $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. Остаточню, підставляючи задані значення ймовірностей подій A_1 та A_2 , отримуємо:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,98.$$

Використавши метод математичної індукції, формулу (2.11) можна узагальнити на випадок знаходження ймовірності суми довільного скінченного числа сумісних подій A_1, A_2, \dots, A_n . У даному випадку формула (2.11) набуває вигляду:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \dots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \dots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \dots A_n).$$

При великих значеннях n замість останньої формули доцільно знаходити спочатку ймовірність протилежної події $\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_n}$. Тоді

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_n}).$$

2.4 Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія B може настати лише за умови настання однієї з попарно несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_n , що утворюють повну групу. Ймовірності цих подій $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ є відомими, відомі також умовні ймовірності $P(B/A_i)$ події B відносно подій $A_i, i = 1, 2, \dots, n$. Потрібно знайти ймовірність події B .

Теорема 2.6. Ймовірність події B , поява якої можлива лише одночасно з однією з попарно несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_n , що утворюють повну групу,

дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідні умовні ймовірності події B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i). \quad (2.15)$$

Формулу (2.15) називають формулою повної ймовірності.

Доведення. За умовою, подію B можна представити у вигляді:

$$B = A_1B + A_2B + \dots + A_nB,$$

при цьому події A_iB , $i=1, 2, \dots, n$, є попарно несумісними. Тому, за формулою додавання ймовірностей несумісних подій (2.1), маємо:

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^n A_iB\right) = \sum_{i=1}^n P(A_iB) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i).$$

Таким чином, ми отримали формулу (2.15). При цьому була використана теорема 2.1 множення ймовірностей, згідно з якою ймовірність добутку подій A_iB $P(A_iB) = P(A_i)P(B/A_i)$. Теорему доведено.

Приклад. На першому заводі на кожні сто електролампочок виробляється у середньому 90 стандартних, на другому – 95, на третьому – 85 стандартних лампочок. Продукція цих заводів складає відповідно 50 %, 30 % та 20 % всіх лампочок, що надходять у місто. Знайти ймовірність придбання у цьому місті стандартної електролампочки.

Розв'язання. Нехай подія $B = \{\text{придбано стандартну електролампочку}\}$, події $A_i = \{\text{лампочку виготовлено на } i\text{-му заводі}\}$, $i=1, 2, 3$. Події A_i є несумісними та утворюють повну групу подій. $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,2$. Умовні ймовірності події B відносно подій A_i відповідно дорівнюють: $P(B/A_1) = 0,9$, $P(B/A_2) = 0,95$, $P(B/A_3) = 0,85$. Для знаходження ймовірності події B використаємо формулу повної ймовірності (2.15), згідно з якою отримуємо:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,85 = 0,905.$$

2.5 Формула Байєса

Нехай подія B може відбутися лише за умови настання однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , що є попарно несумісними та утворюють повну групу подій. Оскільки невідомо, яка з подій $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ відбудеться, ці події називають гіпотезами. Нехай у результаті випробування з'явилася подія B . Визначимо нові значення ймовірностей гіпотез $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, з врахуванням появи події B , тобто знайдемо умовні ймовірності $P(A_i/B), i = 1, 2, \dots, n$.

Знайдемо умовну ймовірність $P(A_1/B)$. За теоремою множення ймовірностей $P(BA_1) = P(A_1B) = P(B)P(A_1/B) = P(A_1)P(B/A_1)$. Звідси знаходимо: $P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)}$. Замінивши $P(B)$ за формулою повної ймовірності (2.15), остаточно отримуємо формулу для знаходження $P(A_1/B)$:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)}$$

Аналогічно можна знайти формули, що визначають ймовірність решти гіпотез A_i за умови настання події B :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)} \quad (2.16)$$

Формулу (2.16) називають формулою Байєса, за прізвищем англійського математика, який вперше отримав її. Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як став відомим наслідок випробування – настання події B .

Приклад. Виготовлені у цеху деталі для перевірки їх якості потрапляють до одного з двох контролерів. Ймовірність потраплення деталі до першого контролера дорівнює 0,6, до другого – 0,4. Ймовірність того, що якісна деталь буде визнана якісною, для першого контролера дорівнює 0,94, для другого –

0,98. При перевірці якісна деталь була визнана якісною. Знайти ймовірність того, що її перевірів другий контролер.

Розв'язання. Нехай подія $B = \{\text{якісну деталь було визнано якісною}\}$, події $A_i = \{\text{деталь перевірена } i\text{-м контролером}\}$, $i = 1, 2$. Маємо ймовірності $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,4$, $P(B/A_1) = 0,94$, $P(B/A_2) = 0,98$. За формулою Байєса (2.16) отримуємо ймовірність $P(A_2/B)$:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0,4 \cdot 0,98}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,41.$$