4. Варіаційні задачі на умовний екстремум

Основні теоретичні відомості

Нехай потрібно знайти екстремум функціонала

$$I(\overline{y}) = \int_a^b F(x, \overline{y}, \overline{y}')dx \qquad (4.1)$$

на множині неперервно диференційовних вектор-функцій $\overline{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)$, що задовольняють крайовим умовам

$$y_1(a) = y_{11}, y_2(a) = y_{21}, ..., y_n(a) = y_{n1},\ y_1(b) = y_{12}, y_2(b) = y_{22}, ..., y_n(b) = y_{n2}, \qquad (4.2)$$

а також умовам зв'язків. Умови зв'язків можуть задовольняти як диференціальним співвідношенням

$$g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0; i = 1, 2, ..., k; k < n, \qquad (4.3)$$

так і інтегральним рівностям

$$\int_a^b h_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx = L_j,\ j = 1, 2, ..., s. \qquad (4.4)$$

При цьому похідні у виразах (4.3) та (4.4) можуть бути відсутніми. Для зв'язків (4.3) вважаємо, що функції $g_j, j = 1, 2, ..., k$ є неперервно диференційовними за аргументами $y_1', y_2', ..., y_n'$, а ранг матриці Якобі за цими змінними є максимальним та дорівнює k. Вважається також, що функції F, g_i, h_j є двічі диференційованими, а крайові умови (4.2) узгоджені з умовами зв'язку.

Якщо у співвідношеннях (4.3) функції g_i не залежать від похідних, то такі зв'язки називають **фазовими обмеженнями або голономними зв'язками**.

Функціонал (4.1) називають **цільовим функціоналом**, диференціальні співвідношення (4.3) – **диференціальними зв'язками**, а співвідношення (4.4) – **інтегральними, або ізопериметричними зв'язками**.

Дана, сформульована у загальному вигляді, задача називається варіаційною задачею на умовний екстремум. Окремий випадок цієї задачі, коли на допустиму вектор-функцію накладені лише зв'язки виду (4.3), називається **задачею Лагранжа**. Варіаційну задачу на умовний екстремум з інтегральними зв'язками (4.4) називають **ізопериметричною задачею**.

Розглянемо необхідні умови екстремуму функціонала (4.1) з крайовими умовами (4.2) та рівняннями зв'язків (4.3). Для цього побудуємо допоміжний функціонал

$$\tilde{I}(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) g_j \right) dx. \qquad (4.5)$$

Вираз $F + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) g_j$ називають **функцією Лагранжа** даної варіаційної задачі, коефіцієнти $\lambda_j(x)$ – **множниками Лагранжа**.

Теорема 4.1. Якщо вектор-функція $y^* = (y_1^*(x), y_2^*(x), ..., y_n^*(x))$, де $y_i\left(x\right) \in C^1_{[a;b]}$, $i = 1,...,n$, є розв'язком варіаційної задачі (4.1) – (4.3), то існують такі функції $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_n(x)$, що y^*є екстремаллю допоміжного функціонала (4.5).

Алгоритм застосування необхідних умов екстремуму функціонала у варіаційній задачі (4.1) – (4.3) на умовний екстремум складається з наступних кроків.

1. Для заданої варіаційної задачі записуємо функцію Лагранжа

$$L = F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) g_j . \tag{4.6}$$

2. Складаємо систему з рівнянь Ейлера – Лагранжа для допоміжного функціонала (4.5) та умов зв'язку (4.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y_i'}\right) = 0; i = 1, 2, ..., n; \\ \\ g_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\ j = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{4.7}$$

3. Знаходимо загальний розв'язок системи (4.7) $y_i(x, C_1, C_2, ..., C_{2n}), i = 1, 2, ..., n$, $\lambda_j(x)$, $j = 1, 2, ..., k$.

4. Визначаємо значення сталих $C_1, C_2, ..., C_{2n}$ з крайових умов (4.2) та записуємо вираз для отриманої екстремалі $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$.

Варіаційну задачу Лагранжа отримуємо, наприклад, при знаходженні ліній найменшої довжини (геодезичних ліній), що належать заданій поверхні $g(x, y, z) = 0$ та проходять через задані точки $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Якщо розв'язок даної задачі шукати у вигляді пари функцій $y = y(x), z = z(x)$, то отримаємо задачу дослідження на мінімум функціонала $I(y, z) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z_2'} dx$ за умови $g(x, y, z) = 0$, а також виконання крайових умов $y(x_1) = y_1$, $z(x_1) = z_1$, $y(x_2) = y_2$, $z(x_2) = z_2$, розв'язок якої знаходиться згідно викладеного вище алгоритму розв'язування варіаційної задачі Лагранжа.

Теорема 4.2. Якщо вектор-функція $y\left(x\right) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ надає екстремум функціоналу $I(\bar{y})$ у варіаційній задачі (4.1), (4.2), (4.4), то вона є екстремаллю функціонала

$$H(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b \left(F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j \right) dx . \tag{4.8}$$

Якщо у задачі Лагранжа інтегральний цільовий функціонал (4.1) замінити на функціонал виду

$$T(y_1, y_2, ..., y_n) = T(y_1(a), y_2(a), ..., y_n(a), y_1(b), y_2(b), ..., y_n(b)) , \tag{4.9}$$

де T – двічі неперервно диференційована функція своїх аргументів, отримаємо **задачу Майєра**. Функціонал (4.9) називають **термінальним функціоналом**.

Варіаційна задача на **екстремум змішаного функціоналу**

$$B(y_1, y_2, ..., y_n) = I(y_1, y_2, ..., y_n) + T(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{4.10}$$

називається **задачею Больца**.

Вважаємо, що зв'язки, накладені на функціонал, мають вигляд:

$$g_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0;\ j = 1, 2, ..., k; k < n, \tag{4.11}$$

а крайові умови мають найбільш загальний вигляд:

$$\varphi_i(a, y_1(a), ..., y_n(a), b, y_1(b), ..., y_n(b)) = 0, i = 1, 2, ..., s; s \le 2n + 2. \tag{4.12}$$

Варіаційну задачу відносно змішаного цільового функціонала за відсутності умов зв'язків називають **елементарною задачею Больца**.

Розглянемо задачу Больца для функціонала

$$B(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n)dx + T(y_1(b), y_2(b), ..., y_n(b)) \tag{4.13}$$

з диференціальними зв'язками (4.11) та крайовими умовами:

$$y_1(a) = y_{11}, y_2(a) = y_{21}, ..., y_n(a) = y_{n1}. \tag{4.14}$$

<u>Теорема. 4.3.</u> Якщо допустима неперервно диференційовна вектор-функція $\bar{y}(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))$ надає екстремум функціоналу (4.13) за наявності диференціальних зв'язків (4.11) та крайових умов (4.12), то існує система k функцій $\lambda_1(x), ..., \lambda_k(x)$, при яких функція $\bar{y}(x)$ є екстремаллю функціонала

$$H = \int_a^b \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right) dx,$$

що задовольняє умовам (4.11), (4.12), а також умовам трансверсальності

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right|_{x=b} = -\left.\frac{\partial T}{\partial y_i}\right|_{x=b}, i = 1, 2, ..., n. \tag{4.15}$$

Тут $L = F + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$ – функція Лагранжа.

Для функціонала виду

$$B(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n)dx + T_1(y_1(a), ..., y_n(a) + T_2(y_1(b), y_2(b), ..., y_n(b))$$

при фіксованому проміжку інтегрування $[a; b]$ та довільних значеннях $y(x)$ на його межах до умов трансверсальності (4.15) на правому кінці $x = b$ слід додати умови трансверсальності на лівому кінці $x = a$:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial T_1}{\partial y_i}\right|_{x=a}. \tag{4.16}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Знайти екстремалі функціонала $I\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1 \sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx$, якщо допустимі граничні криві задовольняють умовам $y_1(0)=1, y_2(0)=2$, $y_1(1)=2, y_2(1)=1$, $2y_1-y_2-3x=0$.

Розв'язання. Маємо варіаційну задачу Лагранжа на умовний екстремум за наявності скінченного зв'язку $2y_1-y_2-3x=0$. Побудуємо для неї функцію Лагранжа:

$$L\left(y_1(x), y_2(x), \lambda(x)\right)=\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}+\lambda\left(2y_1-y_2-3x\right).$$

Для цієї функції рівняння (4.7) отримають вигляд:

$$\begin{cases} 2\lambda-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0; \\ -\lambda-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0; \\ y_2=2y_1-3x. \end{cases}$$

Помноживши друге з рівнянь цієї системи на 2, та додавши його до першого рівняння, з врахуванням того, що $y_2'=2y_1'-3$, отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5y_1'-6}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0 \Rightarrow y_1'=C_1 \Rightarrow y_1=C_1x+C_2.$$

Використовуючи задані крайові умови, маємо: $y_1(0)=C_2=1$, $y_1(1)=C_1+1=2 \Rightarrow C_1=1$, тобто $y_1=x+1$. Оскільки за умовою задачі $y_2=2y_1-3x$, то $y_2=2(x+1)-3x=2-x$. Таким чином, шукана екстремаль визначається рівностями $y_1=x+1$, $y_2=2-x$, або $\bar{y}(x)=(x+1, 2-x)$.

Приклад 4.2. Знайти екстремалі функціонала $I\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left(y_1'^2+y_2'^2\right)dx$, якщо $y_1(0)=y_2(0)=y_2(1)=0$, $y_1(1)=2$, $y_1+y_2-2x^2=0$.

Розв'язання. Функція Лагранжа для даної варіаційної задачі має вигляд:

$$L=y_1'^2+y_2'^2+\lambda(x)\cdot\left(y_1+y_2-2x^2\right).$$

Система (4.7) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \lambda(x) - 2y_1'' = 0; \\ \lambda(x) - 2y_2'' = 0; \\ y_2 = 2x^2 - y_1. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи маємо $y_2'' = 4 - y_1''$. Виключаючи з системи y_2'', отримуємо:

$$\begin{cases} \lambda - 2y_1'' = 0; \\ \lambda + 2y_1'' = 8. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $\lambda = 4$, $y_1'' = 2 \Rightarrow y_1' = 2x + C_1 \Rightarrow y_1 = x^2 + C_1 x + C_2$. Сталі інтегрування C_1 та C_2 знаходимо, використавши задані крайові умови: $y_1(0) = C_2 = 0$, $y_1(1) = 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1$. Остаточно отримуємо: $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = 2x^2 - y_1 = x^2 - x$.

Приклад 4.3. Визначити екстремалі функціонала $I(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2^2 \right) dx$ за умов $y_1(0) = y_2(1) = 0$, $y_2(0) = y_1(1) = 1$, $y_1' - y_2 = 0$.

Розв'язання. Запишемо функцію Лагранжа для даної варіаційної задачі:

$$L = y_1'^2 + y_2^2 + \lambda(x)\left(y_1' - y_2 \right).$$

Невідомі функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ знайдемо з системи (4.7) для цієї функції:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(2y_1' + \lambda(x) \right) = 0; \\ 2y_2 - \lambda(x) = 0; \\ y_2 = y_1.' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(x) = 2y_2 = 2y_1'; \\ \dfrac{d}{dx}\left(2y_1' + 2y_1' \right) = 0; \\ y_2 = y_1'. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = C_1; \\ y_2 = C_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 x + C_2; \\ y_2 = C_1. \end{cases}$$

З крайових умов знаходимо: $y_1(0) = C_2 = 0$, $y_1(1) = C_1 = 1$. Таким чином, отримуємо $y_1 = x$. Оскільки маємо обмеження $y_2 = y_1'$, то $y_2 = 1$.

Приклад 4.4. Знайти екстремалі функціонала $I(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 - y_2'^2 \right) dx$, якщо $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $y_1' - y_2 = \sin x$.

Розв'язання. Функція Лагранжа для даної задачі на умовний екстремум функціонала $I(y_1, y_2)$ має вигляд:

$$L = y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda(x) \cdot \left(y_1' - y_2 - \sin x \right).$$

Запишемо для неї систему (4.7):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(2y_1' + \lambda(x)\right) = 0; \\ -\lambda(x) + 2y_2'' = 0; \\ y_2 = y_1' - \sin x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1'' + \lambda' = 0; \\ \lambda = 2y_2''; \\ y_2 = y_1' - \sin x. \end{cases}$$

Виключивши звідси $\lambda(x)$, знаходимо:

$$\begin{cases} y_1 + y_2' = C_1 x + C_2; \\ y_2 = y_1' - \sin x. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи маємо $y_2' = y_1'' - \cos x$. Підставивши цю рівність у перше рівняння системи, отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами $y_1'' + y_1 = C_1 x + C_2 + \cos x$. Його розв'язком є функція $y_1 = C_1 x + C_2 + \dfrac{x}{2}\sin x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Знайдемо $y_2(x)$: $y_2 = y_1' - \sin x = C_1 - \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{x\cos x}{2} - C_3 \sin x + C_4 \cos x$.

За заданими крайовими умовами знаходимо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_2 + C_3 = 0; \\ y_2(0) = C_1 + C_4 = 0; \\ y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} \cdot C_1 + C_2 + \dfrac{\pi}{4} + C_4 = \dfrac{\pi}{4}; \\ y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $y_1 = \dfrac{x}{2}\sin x$, $y_2 = \dfrac{1}{2}\left(x\cos x - \sin x\right)$. Таким чином, шукана вектор-функція має вигляд:

$$\bar{y} = (y_1, y_2) = \left(\frac{x}{2}\sin x, \frac{1}{2}\left(x\cos x - \sin x\right)\right)$$

Приклад 4.5. Знайти геодезичну лінію на циліндрі $x^2 + y^2 = 9$, що проходить через точки $A(0;3;0)$ та $B\left(3;0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Геодезичною лінією поверхні називають лінію мінімальної довжини, розташовану на даній поверхні. Тому задача знаходження геодезичних ліній зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$I(y,z)=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$, за умови, що шукана геодезична лінія $y=y(x),\ z=z(x)$ знаходиться на заданій поверхні $\varphi(x,y,z)=0$, тобто маємо задачу на умовний екстремум.

У нашому випадку потрібно знайти екстремум функціонала $I(y,z)=\int_0^3 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ за умов $y(0)=3$, $z(0)=0$, $y(3)=0$, $z(3)=\dfrac{\pi}{2}$, якщо рівняння зв'язку має вигляд $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-9=0$.

Функція Лагранжа для отриманої задачі на умовний екстремум з скінченним зв'язком $x^2+y^2-9=0$ має вигляд:

$$L=\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\cdot\left(x^2+y^2-9\right).$$

Запишемо рівняння Ейлера для допоміжного функціонала з підінтегральною функцією L, а також рівняння зв'язку. Маємо систему:

$$\begin{cases} L_y-\dfrac{d\left(L_{y'}\right)}{dx}=0; \\ L_z-\dfrac{d\left(L_{z'}\right)}{dx}=0; \\ x^2+y^2=9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda y-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0; \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0; \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи знаходимо:

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C\Rightarrow z'^2=C^2\left(1+y'^2+z'^2\right)\Rightarrow z'^2=\frac{C^2}{1-C^2}\left(1+y'^2\right).$$

Таким чином, $z'=C_1\sqrt{1+y'^2}$, де $C_1=\dfrac{C}{\sqrt{1-C^2}}$. Оскільки має місце рівність $x^2+y^2=9$, то $y=\pm\sqrt{9-x^2}$, $y'=\mp\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $1+y'^2=1+\dfrac{x^2}{9-x^2}=\dfrac{9}{9-x^2}$.

Тому похідна $z'(x)=\dfrac{3C_1}{\sqrt{9-x^2}}\Rightarrow z(x)=3C_1\int\dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=3C_1\arcsin\dfrac{x}{3}+C_2$.

Ми отримали, що $y=\pm\sqrt{9-x^2}$, $z=3C_1\arcsin\dfrac{x}{3}+C_2$. Оскільки має місце крайова умова $y(0)=3>0$, то $y=\sqrt{9-x^2}$. Використовуючи інші крайові умови, знаходимо: $z(0)=C_2=0,\ z(3)=3C_1\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 3C_1=1$. Підставивши знайдені значення сталих інтегрування у вирази для $y(x)$ та $z(x)$, отримуємо шукані рівняння геодезичної лінії:

$$\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2}; \\ z = \arcsin \dfrac{x}{3}. \end{cases}$$

Ці рівняння можна записати у параметричній формі. Прийнявши $z = t$, отримуємо $x = 3\sin t$, $y = 3\cos t$, $t \in [0; \pi]$. Маємо параметричні рівняння гвинтової лінії.

Приклад 4.6. Знайти екстремалі функціонала $I(y) = \int_0^1 y'^2 dx$, якщо $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $\int_0^1 xydx = 1$.

Розв'язання. Маємо ізопериметричну задачу, для розв'язання якої запишемо відповідну функцію Лагранжа $L = y'^2 + \lambda xy$, де невідомий множник Лагранжа λ є сталою величиною. Рівняння Ейлера для допоміжного функціонала $I^* = \int_0^1 L(x, y, y')dx$ матиме вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \lambda x - 2y'' = 0.$$

Оскільки $y'' = \dfrac{\lambda x}{2}$, то, інтегруючи цю рівність послідовно двічі, знаходимо

$y = \dfrac{\lambda x^3}{12} + C_1 x + C_2$. Використовуючи крайові умови, отримуємо $y(0) = C_2 = 0$, $y(1) = \dfrac{\lambda}{12} + C_1 = 5$. З інтегрального обмеження отримуємо:

$$\int_0^1 xydx = \int_0^1 x\left(\frac{\lambda x^3}{12} + C_1 x\right)dx = \frac{\lambda}{60} + \frac{C_1}{3} = 1.$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{12} + C_1 = 5; \\ \dfrac{\lambda}{60} + \dfrac{C_1}{3} = 1. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $C_1 = 0, \lambda = 60$. Отже, шукана екстремаль має вигляд $y = \dfrac{\lambda x^3}{12} + C_1 x + C_2 = 5x^3$.

Приклад 4.7. Знайти екстремалі ізопериметричної задачі для функціонала $I(y)=\int\limits_0^{\pi/6}\left(y'^2-9y^2\right)dx$, якщо $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$, $\int\limits_0^{\pi/6}ydx=\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Функція Лагранжа даної задачі має вигляд:

$$L=y'^2-9y^2+\lambda y.$$

Запишемо рівняння Ейлера $L_y-\frac{d\left(L_{y'}\right)}{dx}=0$ для допоміжного функціонала $I^*=\int\limits_0^{\pi/6}L(x,y,y')dx$:

$L_y=\lambda-18y$, $\frac{d\left(L_{y'}\right)}{dx}=\frac{d}{dx}(2y')=2y''$, $L_y-\frac{d\left(L_{y'}\right)}{dx}=\lambda-18y-2y''=0$, або $y''+9y=\frac{\lambda}{2}$. Загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{\lambda}{18}.$$

Підставимо цей вираз у заданий інтегральний зв'язок:

$$\int\limits_0^{\pi/6}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{\lambda}{18}\right)dx=\left.\left(\frac{C_1}{3}\sin 3x-\frac{C_2}{3}\cos 3x+\frac{\lambda x}{18}\right)_0^{\frac{\pi}{6}}\right|=\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{3}+\frac{\lambda\pi}{108}=\frac{1}{2}.$$

Скориставшись крайовими умовами, знаходимо, що $y(0)=C_1+\frac{\lambda}{18}=1$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=C_2+\frac{\lambda}{18}=0$. Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{3}+\frac{\lambda\pi}{108}=\frac{1}{2};\\ C_1+\frac{\lambda}{18}=1;\\ C_2+\frac{\lambda}{18}=0.\end{cases}$$

Звідси знаходимо $C_2=\frac{1}{\pi-4}$, $C_1=\frac{\pi-5}{\pi-4}$, $\lambda=\frac{18}{\pi-4}$. Шукана екстремаль має вигляд: $y(x)=\frac{\pi-5}{\pi-4}\cos 3x-\frac{1}{\pi-4}\sin 3x+\frac{1}{\pi-4}$.

Приклад 4.8. **(Задача Дідони).** Серед усіх кривих довжиною l, які з'єднують дві задані точки A та B на площині, знайти таку, що разом з відрізком AB обмежує максимальну площу.

Розв'язання. Прийнявши за вісь Ox пряму, що проходить через точки $A(a;0)$ та $B(b;0)$, отримаємо вираз для площі, обмеженої кривою $y=y(x)$ та відрізком AB: $I(y(x))=\int_a^b y(x)dx$.

Знайдемо максимум даного інтеграла за умови $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=l$.

У цьому випадку функція Лагранжа $L(x,y,y',\lambda)$ набуває вигляду:

$$L(x,y,y',\lambda)=y(x)+\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

а рівняння Ейлера при $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ можна записати у наступній формі:

$$\frac{d}{dx}\left[F+\lambda G-y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}+\lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]=0,$$

або $y(x)+\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-y'\cdot\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\alpha$.

Звідси знаходимо $y=\alpha-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$.

Прийнявши для інтегрування даного рівняння $\frac{dy}{dx}=tg\varphi$, отримаємо $y=\alpha-\lambda\cos\varphi$.

Таким чином, $\frac{dy}{dx}=\lambda\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx}=tg\varphi$, тому $dx=\lambda\cos\varphi\cdot d\varphi$, $x=\lambda\sin\varphi+\beta$.

Ми отримали параметричне рівняння кола з центром у точці з координатами $(\alpha;\beta)$ радіуса λ:

$$\begin{cases} x-\beta=\lambda\cdot\sin\varphi; \\ y-\alpha=-\lambda\cdot\cos\varphi. \end{cases}$$

Виключаючи звідси параметр φ, отримуємо рівняння кола у декартових координатах: $(x-\beta)^2+(y-\alpha)^2=\lambda^2$.

Сталі інтегрування α, β та невідомий множник λ можна знайти з умов $y(a)=0$, $y(b)=0$ та $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=l$.

Приклад 4.9. Знайти рівняння кривої OA, що з'єднує точки $O(0;0)$ та $A(2;0)$ так, що об'єм тіла, утвореного обертанням дуги OA навколо осі абсцис, був найбільшим за умови, що площа поверхні обертання дорівнює 4π.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі потрібно знайти екстремаль функціонала $I(y)=\pi\int_0^2 y^2dx$, для якої $y(0)=0$, $y(2)=0$, за умови, що виконується рівність $2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}dx=4\pi$, тобто $\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}dx=2$. Оскільки сталий множник π у виразі для $I(y)$ не впливає на вигляд екстремалі $y(x)$, то далі розглядатимемо функціонал $I(y)=\int_0^2 y^2dx$. Маємо ізопериметричну задачу, функція Лагранжа якої має вигляд $L=y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}$. Оскільки вона не залежить явно від змінної x, то рівняння Ейлера для допоміжного функціонала $I^*=\int_0^2 L(x,y,y')dx$ має вигляд $L-y'L_{y'}=C$, або $y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}-\dfrac{\lambda y\cdot y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C$.

Звідси отримуємо диференціальне рівняння:

$$y^2\sqrt{1+y'^2}+\lambda y=C\sqrt{1+y'^2}.$$

Оскільки шукана екстремаль проходить через початок координат, то останнє рівняння повинне виконуватися при $y=0$, звідки отримуємо $C=0$. Таким чином, маємо рівняння $y^2\sqrt{1+y'^2}+\lambda y=0$. Оскільки $y\neq 0$, то $y\sqrt{1+y'^2}=-\lambda$. Підставивши цю рівність у умову $\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}dx=2$, знаходимо $-\lambda\int_0^2 dx=2$, звідки $\lambda=-1$. Тоді $y\sqrt{1+y'^2}=1$. Отримаємо розв'язок цього диференціального рівняння у параметричній формі. Нехай $y'=\operatorname{tg}t$. Тоді $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\cos t$,

$$\frac{dy}{dx}=tgt\Rightarrow dx=dy\cdot\operatorname{ctg}t=-\sin t\cdot\operatorname{ctg}t\cdot dt=-\cos t\cdot dt;\Rightarrow x=-\sin t+C_1.$$

Отже, отримали рівняння екстремалі у параметричній формі:

$$\begin{cases} x=C_1-\sin t; \\ y=\cos t. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь параметр t, отримуємо рівняння кола $(x-C_1)^2+y^2=1$. Значення сталої C_1 знайдемо з умови проходження цього кола через точку $A(2;0)$: $(2-C_1)^2=1\Rightarrow\left[\begin{aligned}&2-C_1=1;\\&2-C_1=-1.\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&C_1=1;\\&C_1=3.\end{aligned}\right.$

Оскільки шукана дуга кола $(x-C_1)^2+y^2=1$ за умовою повинна проходити через початок координат, то $C_1=1$ і рівняння екстремалі має вигляд $(x-1)^2+y^2=1$.

Приклад 4.10. Знайти екстремалі функціонала $I(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 y_1'y_2'dx$, що задовольняють умовам $y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0$, $y_2(1)=1$, $\int\limits_0^1 y_1(x)dx=1$, $\int\limits_0^1 y_2(x)dx=0$.

Розв'язання. Запишемо функцію Лагранжа для даної ізопериметричної задачі. Маємо $L=y_1'y_2'+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$. $L_{y_1}=\lambda_1, L_{y_1'}=y_2', \dfrac{d\left(L_{y_1'}\right)}{dx}=y_2''$, $L_{y_2}=\lambda_2$, $L_{y_2'}=y_1'$, $\dfrac{d\left(L_{2_1'}\right)}{dx}=y_1''$. Система рівнянь Ейлера отримає вигляд:

$$\begin{cases} L_{y_1}-\dfrac{d\left(L_{y_1'}\right)}{dx}=0; \\ L_{y_2}-\dfrac{d\left(L_{y_2'}\right)}{dx}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1-y_2''=0; \\ \lambda_2-y_1''=0. \end{cases}$$

Оскільки $y_2''=\lambda_1=const$, то, застосовуючи послідовне інтегрування, знаходимо $y_2'=\lambda_1 x+C_1, y_2=\dfrac{\lambda_1 x^2}{2}+C_1x+C_2$. Аналогічно, інтегруючи друге рівняння системи, отримуємо $y_1''=\lambda_2 \Rightarrow y_1'=\lambda_2 x+C_3 \Rightarrow y_1=\dfrac{\lambda_2 x^2}{2}+C_3x+C_4$.

З крайових умов маємо $y_1(0)=C_4=0$, $y_2(0)=C_2=0$, $y_1(1)=\dfrac{\lambda_2}{2}+C_3=0$, звідки $C_3=-\dfrac{\lambda_2}{2}$. Оскільки $y_2(1)=\dfrac{\lambda_1}{2}+C_1=1$, то $C_1=1-\dfrac{\lambda_1}{2}$. Для шуканої екстремалі $\left(y_1(x),y_2(x)\right)$ отримуємо $y_1=\dfrac{\lambda_2 x^2}{2}-\dfrac{\lambda_2}{2}x$, $y_2=\dfrac{\lambda_1 x^2}{2}+\left(1-\dfrac{\lambda_1}{2}\right)x$. Підставимо ці вирази у задані інтегральні зв'язки:

$$\int\limits_0^1 y_1(x)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{\lambda_2 x^2}{2}-\frac{\lambda_2}{2}x\right)dx=\frac{\lambda_2}{6}-\frac{\lambda_2}{4}=-\frac{\lambda_2}{12}=1\Rightarrow \lambda_2=-12;$$

$$\int\limits_0^1 y_2(x)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{\lambda_1 x^2}{2}+\left(1-\frac{\lambda_1}{2}\right)x\right)dx=\frac{\lambda_1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\lambda_1}{4}=0\Rightarrow \lambda_1=6.$$

Підставивши знайдені значення множників Лагранжа у вирази для y_1 та y_2, маємо $y_1 = -6x^2 + 6x$, $y_2 = 3x^2 - 2x$.

Приклад 4.11. Знайти екстремаль у елементарній задачі Больца для функціонала $I(y) = \int\limits_0^{\pi} \left(y'^2 + y^2 - 2y\sin x \right) dx + y^2(0) + y^2(\pi)$.

Розв'язання. Маємо елементарну задачу Больца, де відсутні обмеження, тому її функція Лагранжа є підінтегральною функцією заданого функціонала:

$$L = F = y'^2 + y^2 - 2y\sin x.$$

Для знаходження екстремалі запишемо відповідне рівняння Ейлера:

$$L_y - \frac{d\left(L_{y'}\right)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2\sin x - 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' - y = -\sin x.$$

Його розв'язками є сімейство екстремалей $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$. Знайдемо похідну: $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{\cos x}{2}$. Для даної задачі $T_1 = T_2 = y^2$.

Для визначення сталих C_1 та C_2 використаємо умови трансверсальності

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=9} = \left.\frac{\partial T_1}{\partial y}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=\pi} = -\left.\frac{\partial T_2}{\partial y}\right|_{x=\pi}.$$

У нашому випадку ці умови набувають вигляду: $y'(0) = y(0)$, $y'(\pi) = -y(\pi)$.

Підставивши у ці умови значення $y(0) = C_1 + C_2$, $y'(0) = C_1 - C_2 + \frac{1}{2}$, $y(\pi) = C_1 e^{\pi} + C_2 e^{-\pi}$, $y'(\pi) = C_1 e^{\pi} - C_2 e^{-\pi} - \frac{1}{2}$, отримаємо систему рівнянь для знаходження сталих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + \frac{1}{2} - C_1 - C_2 = 0; \\ C_1 e^{\pi} - C_2 e^{-\pi} - \frac{1}{2} + C_1 e^{\pi} + C_2 e^{-\pi} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{e^{-\pi}}{4}; \\ C_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Підставивши знайдені сталі у рівняння для y, отримаємо шукану екстремаль:

$$y = \frac{1}{4}\left(e^{x-\pi} + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\sin x.$$

Приклад 4.12. Розв'язати задачу Больца для функціонала $I = \int\limits_1^2 x^2 y'^2 dx - 2y(1) + y^2(2)$.

Розв'язання. Маємо елементарну задачу Больца, тому, як і у попередньому прикладі, її функція Лагранжа є підінтегральною функцією функціонала I:

$$L = F = x^2 y'^2.$$

Рівняння Ейлера для неї має вигляд $\frac{d}{dx}\left(2x^2 y'\right) = 0$.

Його розв'язками є сімейство функцій $y = C_2 - \frac{C_1}{x}$. Тут $T_1 = -2y$, $T_2 = y^2$. Для визначення сталих C_1 та C_2 використаємо умови трансверсальності $\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=1} = -2$, $\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=2} = -2\left.y\right|_{x=2}$.

Звідси отримуємо:

$y' = \frac{C_1}{x^2}$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2x^2 y' = 2C_1$, $2C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = -1$, $2C_1 = -2\left(C_2 - \frac{C_1}{2}\right)$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Таким чином, екстремаль задачі має вигляд $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$.