РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

2.1 Вектори і тензори другого рангу

Введемо в тривимірному евклидовом просторі декартову систему Ox1x2x3. Позначимо через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ одиничні вектори (орти) цієї системи координат. Введемо математичний об'єкт у вигляді направленого відрізка $\vec{A}$. витікаючою з початку координат, який назвемо вектором. Підкреслимо, що $\vec{A}$ не залежить від напряму координатних осей, тобто за визначенням, є інваріантним об'єктом.

Розкладемо вектор $\vec{A}$ по одиничних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i. \qquad (2.1)$$

Числа a1,a2,a3, називаються компонентами вектора $\vec{A}$ в системі координат Ox1x2x3, і повністю характеризують цей вектор.

Виконаємо тепер жорсткий поворот осей координат і дійдемо нової системи $Ox_1'x_2'x_3'$ з одиничними векторами $\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ Орти системи координат Ox1x2x3 і $Ox_1'x_2'x_3'$ зв'язані лінійними співвідношеннями:

$$\vec{e}_j' = \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}\vec{e}_{i,}$$

де β_{ij} - тензор направляючих косинусів між осями систем координат. Представимо тепер вектор $\vec{A}$ у вигляді розкладання по одиничних векторах системи координат $Ox_1'x_2'x_3'$:

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{3} a_j'\vec{e}_j'$$

Встановимо зв'язок між компонентами одного і того ж вектора в різних системах координат:

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{3} a_j'\left(\sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}a_j'\right)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i.$$

Звідси слідує

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} a'_j. \qquad (2.2)$$

Виходячи від поняття вектора як наочного геометричного образу у вигляді направленого відрізка і розумітимемо під вектором $\breve{A}$ впорядковану трійку чисел (a_1, a_2, a_3) пов'язану з певною системою координат. У системі координат $Ox_1^{'}x_2^{'}x_3^{'}$ така трійка чисел має вигляд (a'_1, a'_2, a'_3) Для того, щоб ці трійки чисел представляли один і той же об'єкт, необхідно, щоб координати (a_1, a_2, a_3) і (a'_1, a'_2, a'_3) були зв'язані співвідношенням (2.2). Визначимо тепер вектор $\breve{A}$ як впорядковану трійку чисел (a_1, a_2, a_3) яка при повороті системи координат перетвориться згідно співвідношенням (2.2).

Узагальнимо таке розуміння вектора на інваріантні об'єкти, координати яких залежать від двох індексів. Такі об'єкти називаються тензорами 2-го рангу. Первинна трудність сприйняття поняття тензора пов'язана з тим що для тензора відсутній такий же наочний геометричний образ, як направлений відрізок для вектора.

Тензор 2-го рангу як математичний об'єкт задається набором з 9-ти чисел, званих компонентами тензора. Позначатимемо тензор через Т, а його компоненти – через t_{ij}. Компоненти тензора впорядковані у вигляді таблиці:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & {}_{33} \end{pmatrix}.$$

Хай t'_{ij} - компоненти того ж тензора Т, але в системі координат $Ox_1^{'}x_2^{'}x_3^{'}$. Для того, щоб компоненти t_{ij} і t'_{ij} задавали один і той же об'єкт, необхідно, щоб ці компоненти були зв'язані співвідношеннями:

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \beta_{ki} \beta_{mj} t'_{km}. \qquad (2.3)$$

Ця властивість і кладеться в основу формального визначення тензора, згідно якому тензором 2-го рангу називається набір з 9-ти чисел, впорядкованих у вигляді таблиці 3х3, які при повороті системи координат перетворяться згідно співвідношенням (2.3).

Для спрощення запису виразів, що містять компоненти векторів і тензорів, звичайно використовується правило підсумовування, запропоноване А. Ейнштейном: у тензорних виразах мається на увазі підсумовування по індексом, що повторюється, і знак суми опускається. Відповідно до цього правила, вираз (2.3) можна записати в спрощеній формі:

$$t_{ij} = \beta_{ki}\beta_{mj}t'_{km}.$$

Крім того, використовується спрощений запис приватних похідних по просторових змінних, тобто приймаються позначення:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i};\ a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j};\ t_{ij,k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k}.$$

Тензор Т називається симетричним, якщо $t_{ij} = t_{ji}$. Введемо симетричний тензор Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{Bmatrix}$$

У теорії пластичних середовищ особливе значення має розкладання тензора 2-го рангу на кульовий тензор $T\sigma$ і девіатор T_d:

$$T = T_\sigma + T_d.$$

Позначимо через $t = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22} + t_{33}) = \frac{1}{3}t_{ij}\delta_{ij}$; тоді кульовим тензором називається тензор:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

а девіатором - тензор:

$$T_d = \begin{pmatrix} t_{11} - t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - t \end{pmatrix}.$$

Вектори і тензори, як інваріантні об'єкти, володіють скалярними інваріантами, тобто певними комбінаціями компонент, що не змінюються при повороті системи координат. Вектор має один незалежний інваріант, як якого природно приймати довжину вектора, або, краще, квадрат довжини вектора:

$$I(\overset{\rho}{A}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Тензор 2-го рангу має три незалежні інваріанти. При вивченні пластичної деформації особливе значення мають два перші інваріанти:

$$I_1(T) = t; I_3(T) = (t_{ij} - t\delta_{ij})(t_{ij} - t\delta_{ij})$$

В цілях зручності ці інваріанти звичайно уживаються з деякими коефіцієнтами.

2.2 Деформований стан

Якщо для опису суцільного середовища прийняти підхід Лагранжа, то деформований стан повністю описується вектором $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ переміщень всіх матеріальних точок тіла. Позначимо через $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ координати матеріальної точки тіла в початковий момент процесу деформації, через $y_i(\overline{x}, t)$ - координати тієї ж точки у момент часу t. Тоді вектор переміщення $\overline{u}$ має координати:

$$u_i(\overline{x}, t) = y_i(\overline{x}, t) - x_i, \qquad i = 1,2,3$$

Використання вектора $\overline{u}(\overline{x}, t)$ як заходи деформованого стану не цілком розумно, оскільки при русі тіла як жорсткого цілого, тобто за відсутності *деформації* вектор $\overline{u}(\overline{x}, t)$ відмінний від нуля. Тому для опису власне деформованого стану використовуються похідні від вектора характеристики:

$$\varepsilon_{ij}(\overline{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\overline{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\overline{x}, t)}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_k(\overline{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k(\overline{x}, t)}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

При русі тіла як жорсткого цілого маємо $\varepsilon_{ij}(\overline{x}, t) \equiv 0$.

Показано, що величини ε_{ij} при повороті декартової системи координат перетворяться за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу, тобто в сукупності утворюють інваріантний об'єкт - тензор 2-го рангу, який називається тензором деформацій Лагранжа.

Співвідношення (2.4) вводяться без яких-небудь обмежень на величини деформацій і переміщень, і тому справедливі як у разі малих, так і у разі великих (кінцевих) деформацій. Відзначимо, що зв'язок між переміщеннями і деформаціями згідно (2.4) є *нелінійним.* Якщо вважати деформації малими і відкинути малі 2-го порядку, то приходимо до лінійних співвідношень Коші для компоненту тензора малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\bar{x},t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\bar{x},t)}{\partial x_i}\right)$$

Для характеристики темпу зміни деформації в часі в рамках підходу Лагранжа вводиться тензор швидкостей деформацій Лагранжа:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\bar{x},t)}{\partial t},$$

компоненти якого виражається через компоненти $\dot{u}_i(x,t)$ вектора швидкості переміщень матеріальної частинки співвідношеннями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) + \dot{u}_{ki}u_{kj} + u_{ki}\dot{u}_{kj}$$

лінійними щодо швидкостей переміщень.

При малих деформаціях маємо:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji})$$

В рамках підходу Ейлера рух суцільного середовища однозначно визначається вектором швидкостей $\bar{v}(\bar{x},t)$ матеріальних крапок, які у момент часу t знаходяться в точках $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ простору. Поняття переміщення в підході Ейлера втрачає сенс.

Для того, щоб характеризувати чисто деформаційну частину руху суцільного середовища, вводиться поняття швидкості деформації Ейлера:

$$\varsigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(v_{ij} + v_{ji}\right) \qquad (2.5)$$

Показано, що величини, можуть розглядатися як компоненти симетричного тензора 2-го рангу, який називається тензором швидкостей деформацій Ейлера (або просто тензором швидкостей деформацій).

Відзначимо, що зв'язок (2.5) між компонентами тензора швидкостей деформацій і вектора швидкості є лінійним і при великих деформаціях і переміщеннях. Підкреслимо також, що, не дивлячись на схожі назви, тензори $\dot{\varepsilon}_{ij}$ і ς_{ij} мають абсолютно різний сенс. Зокрема, компоненти ς_{ij} не можна одержувати з ε_{ij} шляхом диференціювання за часом.

Таким чином, деформація суцільних середовищ як при підході Лагранжа, так і при підході Ейлера характеризується інваріантними математичними об'єктами - векторами і тензорами 2-го рангу.

Представимо тензор деформацій у вигляді суми кульового тензора і девіатора:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}; \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}.$$

Кульовий тензор з компонентами $\varepsilon\delta_{ij}$ характеризує деформацію зміни об'єму в околиці даної матеріальної крапки, а девіатор тензора деформацій з компонентами e_{ij} - деформацію зміни форми.

Аналогічно при використанні підходу Ейлера тензор швидкостей деформацій розбивається на суму кульового тензора і девіатора:

$$\varsigma_{ij} = \varsigma_0 \delta_{ij} + \eta_{ij}; \qquad \varsigma_0 = \frac{1}{3} \varsigma_{ij} \delta_{ij}$$

При побудові моделей пластичного тіла використовуються два перші інваріанти тензорів деформації і тензорів швидкостей деформацій. Як перший (лінійного) інваріант звичайно приймається: середня деформація ε_0 - при підході Лагранжа; швидкість зміни об'єму ς_0 - при підході Ейлера.

Другі (квадратичні) інваріанти найчастіше вибираються у вигляді інтенсивності деформацій:

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$$

або інтенсивності деформацій зрушення:

$$\varepsilon_u = \Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$$

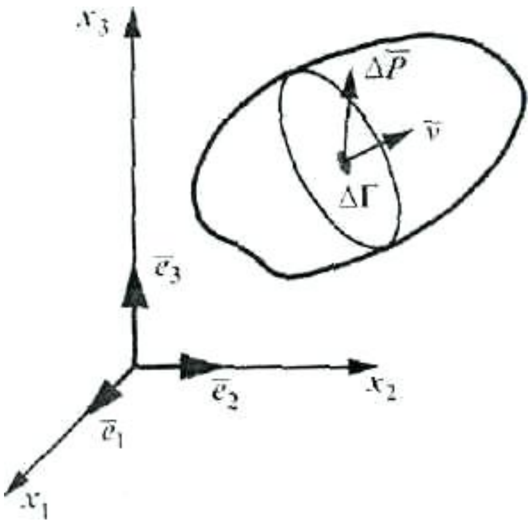
В рамках підходу Ейлера звичайно використовується, як другий інваріант, інтенсивність швидкостей деформацій зрушення:

$$\varsigma_u = \mathrm{H} = \sqrt{2\varsigma_{ij}\varsigma_{ij}}$$

2.3 Напружений стан

Якщо тверде тіло піддати зовнішнім діям, то таке тіло, деформуючись, зберігає, в певних межах, свою цілісність і безперервність. Залишаючись в рамках концепції суцільного середовища, таке явище можна пояснити появою гіпотетичних *внутрішніх зусиль,* що виникають як реакція на деформацію і що забезпечують цілісність тіла. Вивчення природи таких внутрішніх зусиль лежить за межами моделі суцільного середовища і для побудови механіки тіла, що деформується, не є обов'язковим.

Введемо кількісні характеристики внутрішніх зусиль, використовуючи підхід Ейлера. У деякий момент часу t розітнемо деформоване тіло площиною, що проходить через крапку (x_1, x_2, x_3). Орієнтацію такої площини задаватиме вектором одиничної нормалі (рис. 2.1).



Рисунрк 2.1 – Вектор напруг

Виділимо в перетині цією щільністю деяку малу околицю Г крапки $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, яку називатимемо майданчиком з нормаллю $\bar{v}$ в крапці $\bar{x}$. Оскільки кожна з частин розітнутого тіла знаходиться в рівновазі, то це можна забезпечити введенням внутрішніх зусиль, що діють в точках площини розтину. Хай $\Delta\vec{P}_V$ - вектор внутрішніх зусиль, прикладених до майданчика Г. Чтоби виключити вплив розмірів майданчика, розділимо силу, на площу Г0. Якщо така межа існує і не залежить від способу зменшення майданчика, то вектор

$$\Delta\vec{P}_V = \lim_{\Delta\Gamma \to 0} \frac{\Delta\vec{P}_V}{\Delta\Gamma}$$

називається *вектором напруг* в крапці $\bar{x}$ на майданчику з нормаллю $\bar{v}$.

Якщо побудувати вектори напруг на всіх майданчиках, що проходять через фіксовану точку простору, то, очевидно, одержимо повну характеристику напруженого стану в цій крапці. Такий опис навряд чи можна вважати задовільним, оскільки в кожній крапці можна побудувати нескінченне число майданчиків, і, отже, для опису напруженого стану в крапці буде потрібно нескінченне число векторів напруг. Проте виявилось, що можна описати напружений стан в крапці, використовуючи тільки кінцеве число параметрів.

Побудуємо в точці $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ три взаємноперпендикулярні майданчики з нормалями, паралельними координатним осям, тобто, співпадають по напряму з ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ системи координат. Позначимо через $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, вектори напруг на цих майданчиках. Розкладемо вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ по векторах базису ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$):

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_2 &= \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_3 &= \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Коефіцієнти розкладання, впорядковані у вигляді таблиці

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

при повороті системи координат перетворяться за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу. Цей тензор називається тензором напруг Ейлера.

Сенс введення тензора напруг як інваріантної характеристики напруженого стану пояснюється тим. що вектор напруг на *будь-якому* майданчику, що проходить через точку, може бути виражений через компоненти тензора напруг в цій точці. Насправді, проведемо через точку $\bar{x}$ *довільний* майданчик з нормаллю $\bar{v}$. і хай $\Delta\vec{P}_V$ - вектор напруг на цьому майданчику. Цей вектор можна виразити через вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$:

$$\Delta\vec{P}_V = \vec{P}_1\cos(\vec{v}, x_1) + \vec{P}_2\cos(\vec{v}, x_2) + \vec{P}_3\cos(\vec{v}, x_3) = \vec{P}_i \vec{v}_i$$

Підставляючи тепер замість, відповідні вирази згідно (2.6). одержуємо: $\Delta\vec{P}_V = \sigma_{ij} v_j \vec{e}_i$.

Отже, для повного опису напруженого стану в точці досить мати в своєму розпорядженні лише дев'ять компонентів тензора напруг.

Компонентам тензора напруг можна додати наступний механічний сенс: σ_{ij} можна розглядати як проекцію на вісь x_j вектора напруг, що діє на майданчику з нормаллю $\vec{e}_i$. При $i = j$ значення σ_{ij} називаються *нормальними,* а при ij - *дотичними* напругами (рис. 2.2).

Тензор напруг Ейлера характеризує напружений стан в поточному положенні тіла і представляється найбільш природною мірою напруженого стану.

Тензор напруг Лагранжа характеризує напружений стан в точці тіла по відношенню до майданчиків, узятих в початковому стані. Оскільки в процесі деформації змінюється як орієнтація, так і розміри майданчиків, то тензор напруг Лагранжа має умовний зміст і застосовується в основному у разі малих деформацій, коли зміною розмірів і орієнтації майданчиків можна нехтувати і тензори напруг Ейлера і Лагранжа співпадають.

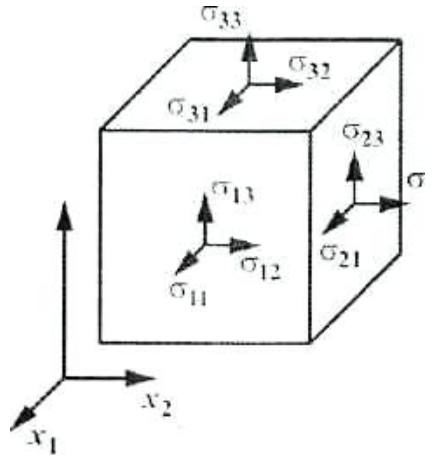


Рисунок 2.2 – Механічний сенс компонент тензора напруг

У теорії ОМТ у разі кінцевих деформацій використовуються, як правило, співвідношення Сен-Венана-Льові-Мізеса. у які входить повний вектор напруг Ейлера, і потреби в диференціюванні параметрів напруженого стану немає. При малій пружнопластичності деформациях.в якості міри для швидкості зміни напруженого стану приймається тензор 2-го рангу, складений з похідних за часом від компонент тензора напруг Лагранжа.

Розкладемо тензор напруг Ейлера на кульову і девіаторну частини:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}$$

Скалярна величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

називається середнім гідростатичним тиском і є лінійним інваріантом тензора напруг.

Як квадратичні інваріанти тензора напруг звичайно використовуються або інтенсивність напруг:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \, ,$$

або інтенсивність дотичних напруг:

$$\tau_u = T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}$$