РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ`ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ ТИСКОМ

3.1 Умови взаємодії заготівки і інструменту. Постанова краєвих задач

Пластична деформація при обробці тиском відбувається під дією валків, штампів, матриць і інших інструментів. Звичайно деформації інструменту малі в порівнянні з деформацією заготовок, тому вважаємо інструмент жорстким.

Відзначимо принципові особливості контактної взаємодії інструменту і заготовки. У більшості процесів обробки тиском фактичний майданчик контакту наперед невідомий і підлягає визначенню. Друга особливість пов'язана з наявністю тертя на майданчику фактичного контакту. Виникає проблема визначення областей зчеплення і областей ковзання; межа розділу цих областей наперед невідома і також є об'єктом рішення задачі. Крім того, умови взаємодії повинні відобразити напрям ковзання, яке не може бути визначене наперед. Нарешті, сили тертя є неконсервативними, тому рішення задачі залежить від історії руху штампу.

Коректне математичне формулювання умов контактної взаємодії повинне враховувати всі відмічені особливості і не пов'язувати постановку завдання з фіксацією певних майданчиків контакту, областей зчеплення і ковзання і т.п. Як наслідок таких загальних вимог виникають некласичні умови, що містять нерівності [3].

Відмітимо, що в багатьох дослідженнях по комп'ютерному моделюванню в ОМТ вказані особливості явно не відображаються в краєвих умовах, а враховуються за допомогою ряду евристичних алгоритмів вже в процесі чисельного рішення. Крім очевидної логічної недосконалості такого підходу, виключається можливість якої-небудь теоретичної оцінки погрішності отриманих результатів, стає неможливим обгрунтування збіжності, а відсутність чіткої початкової постановки може служити джерелом прямих помилок.

Розглянемо спочатку постановку умов контактної взаємодії в змінних Лагранжа. Виходимо з того, що майданчик контакту заготівки і інструменту наперед невідомий, проте у будь-якому випадку це майданчик є частиною Гс поверхні заготівки.

Називатимемо Гс областю можливого контакту.

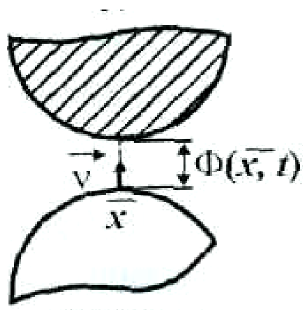
Взаємодію інструменту і заготівки описуватимемо за допомогою векторів *i*, а переміщень і напруг, визначених в точках поверхні Гс. Хай v - вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні Гс. Розкладемо вектори *i* і з на нормальні і дотичні компоненти:

uv = wv;   мт = *i* - *uvv*

GV = *av*;   ст = а -avv.

Взаємне положення інструменту і заготівки описуватимемо функцією ф(х,г), значення якої рівні відстані від поверхні Гс до поверхні інструменту, зміряній уздовж напряму нормалі v і Гс у момент часу *t* (рис. 3.1).

інструмент



заготовка

Рисунок 3.1 – Взаємодія інструменту і заготовки

Функція *Ф(x,t)* може приймати і негативні значення, що відповідає зануренню інструменту в заготовку. Якщо в деякій точці *х* Гс відбувається контакт заготовки і інструменту, то в цій точці uv(x,t) = *Ф(x,t).* Крім того, нормальні напруги $_v$ повинні бути такими, що стискають, тобто $_v$ *(x,t)* < 0. Якщо ж в точці *х* контакт відсутній, то *uv (x,i)* < *Ф (x,t)*, σ_v *(x,t) = 0.*

Запишемо одержані умови у формі, що не вимагає згадки про відсутність або наявність контакту в точці:

$$uv\ (x,t) < \Phi\ (x,t); \qquad (3.1)$$

$$\sigma_v\,(x,t) \le 0; \qquad (3.2)$$

$$\sigma_v\,(x,t)[uv\ (x,t) - \Phi(x,t)] = 0. \qquad (3.3)$$

Умова (3.2) називається умовою непроникнення. Умови (3.1) - (3.3) повинні бути виконані в усіх точках поверхні можливого контакту; при їх формулюванні немає необхідності указувати фактичні майданчики контакту.

Сформулюємо тепер умови, що накладаються на дотичні компоненти векторів переміщень і напруг.

Згідно закону Амонтона - Кулона, дотичні зусилля в точках контакту не повинні по модулю перевищувати величини $f|\sigma_v\ (x,t)|$, причому взаємне ковзання відбувається, якщо $\left|\overrightarrow{\sigma_\tau}(x,t)\right| = f\left|\sigma(x,t)\right|$, і ковзання відсутнє, якщо $\left|\overrightarrow{\sigma_\tau}(x,t)\right| < f\left|\sigma(x,t)\right|$. Числовий коефіцієнт$f$ f характеризує властивості контактуючих поверхонь і називається коефіцієнтом тертя. Окрім факту ковзання, умови дотичної взаємодії повинні також відображати напрям взаємного ковзання. Відразу підкреслимо, що напрям ковзання, взагалі кажучи, не співпадає з напрямом вектора переміщення. Напрям ковзання слід пов'язувати з напрямом вектора швидкості взаємного ковзання.

Хай - різниця дотичних компонент швидкостей точки Гс і відповідної точки на поверхні інструменту. Напрям взаємного ковзання визначає одиничний вектор, а напрям дотичного зусилля - одиничний вектор $\vec{\sigma}_\tau\ /|\vec{\sigma}_\tau|\ /$. Приймаємо, що напрям взаємного ковзання протилежно напряму дотичного зусилля, тобто:

$$\frac{\Delta\vec{u}_\tau}{\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau}{\left|\vec{\sigma}_\tau\right|}.$$

Об'єднуючи сформульовані вимоги, приходимо до наступних умов дотичної взаємодії в точках поверхні Гс:

$$\sigma_\nu(x,t) \leq \leq 0; \qquad \left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right| \leq f\left|\sigma_\nu(x,t)\right| \qquad (3.4)$$

$$\Delta\vec{u}_\tau(x,t) = 0 \qquad \text{якщо } \left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right| < f\left|\sigma_\nu(x,t)\right| \qquad (3.5)$$

$$\frac{\Delta\vec{u}_\tau(x,t)}{\left|\Delta\vec{u}_\tau(x,t)\right|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau(x,t)}{\left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right|} \qquad \text{якщо } \left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right| = f\left|\sigma_\nu(x,t)\right| \qquad (3.6)$$

Підкреслимо, що при формулюванні умов (3.4) - (3.6) не вимагається ніякої інформації про фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Сформульовані умови контактної взаємодії описують всі відмічені вище особливості без яких-небудь апріорних припущень про характер рішення, зокрема, про фактичні майданчики контакту і фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Звернемо увагу на те, що умови містять нерівності, тобто мають некласичний характер. Умови дотичної взаємодії включають швидкості відносного ковзання, а не повні переміщення, причому ці співвідношення не є інтегрованими за часом. Цим пояснюється неконсервативний характер сил тертя. Заміна швидкостей повними переміщеннями можлива тільки за спеціальних умов зовнішнього вантаження, розглянутих [4].

Розглянемо тепер формулювання умов взаємодії металу і інструменту в змінних Ейлера. Виникаючі проблеми пов'язані з тим, що в "чистому" підході Ейлера поняття переміщення відсутнє. Тому безпосереднє переформулювання умов, одержаних раніше в змінних Лагранжа, неможливо. Ейлерове трактування завдання відноситься тільки до поточного стану жорстко-пластичного тіла і може бути послідовно проведена тільки для стаціонарних процесів формозміни без урахування зміцнення. В цьому випадку слід вважати, що майданчики фактичного контакту вже відомі, оскільки в рамках підходу Ейлера відсутній кінематичний критерій для визначення областей контакту і областей відставання.

Хай *Vs(x,t)* - вектор швидкостей точок поверхні інструменту. Умови нормальної взаємодії в точках майданчика контакту мають вигляд:

$$V_\nu (x,t) = (V_s)_\nu (x,t);\ \ \sigma_\nu (x,t) \le 0 \qquad (3.7)$$

Позначимо через $\Delta \vec{v}_\tau (x,t)$ різницю дотичних компонент векторів швидкостей металу і інструменту в точках поверхні контакту. Виходячи із закону тертя Амонтона - Кулона, одержуємо наступні умови дотичної взаємодії:

$$|\vec{\sigma}_\tau (x,t)| \le f\, |\sigma_\nu (x,t)|,$$

$$\Delta \vec{v}_\tau = 0, \text{ якщо } |\vec{\sigma}_\tau (x,t)| < f |\sigma_\nu (x,t)| \qquad (3.8)$$

$$\frac{\Delta \vec{v}_\tau (x,t)}{|\Delta \vec{v}_\tau (x,t)|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau (x,t)}{|\vec{\sigma}_\tau (x,t)|}, \text{ якщо } |\vec{\sigma}_\tau (x,t)| = f |\sigma_\nu (x,t)| \qquad (3.9)$$

У разі нестаціонарних процесів деформації тіла, що зміцнюється, дослідження пластичного тертя можливо тільки на основі з'єднання Ейлерового і Лагранжевого підходів. Звичайна схема реалізації такого з'єднання припускає розбиття процесу деформації на послідовні етапи, на кожному з яких відбувається переформулювання умов взаємодії в змінних Ейлера. Послідовна фіксація параметрів напружено-деформованого стану проводиться із застосуванням змінних Лагранжа. Інакше кажучи, на кожному етапі визначається форма області і поточний майданчик контакту, щодо яких і формулюються умови (3.7) - (3.9).

Краєві задачі пластичної деформації

Сучасний етап розвитку комп'ютерного моделювання процесів ОМТ характеризується підвищеними вимогами до точності, достовірності, обгрунтованості одержуваних рішень. Вказані вимоги можуть бути виконані тільки з використанням коректних постановок відповідних математичних завдань. Розглянемо постановки завдання пластичної деформації як краєвих завдань для систем диференціальних рівнянь з приватними похідними. Далі, в п. 3.2, будуть представлені так звані варіаційні постановки цих завдань, зручніші для побудови алгоритмів чисельного рішення.

Почнемо з постановок краєвих завдань в рамках підходу Лагранжа. Хай тіло, що деформується, займає в початковому недеформованому стані область, обмежену поверхнею Г. Ця поверхня може складатися з трьох частин Гu, Γ_σ, Гс. На частини Гu, точки тіла закріплені, частина Γ_σ вільна від навантажень. Взаємодія металу і інструменту може відбуватися в точках поверхні Гс. Хай компоненти тензорів напруг і деформацій зв'язані співвідношеннями деформаційного типа.

Сформуємо краєве завдання пластичної деформації як завдання визначення функцій *ui(x,t),* $e_{(/}$(x,r), *al}.(x,t),* що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij.j}(x,t) = 0; \quad (3.10)$$

співвідношенням Коші:

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)\right]; \quad (3.11)$$

визначальним співвідношенням:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \frac{\partial W(x, \varepsilon_{ij}(x,t)}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (3.12)$$

краєвою умовою:

$$ui\,(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u;$$

$$\sigma_{ij}\,(x,t)\ \&_{j\,(x)} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \quad (3.13)$$

умовам (3.1) - (3.3) контактної взаємодії на Гс, а також початкових умовах *ui* (x,0) $=S_{ij}$ (x,0) = σ_{ij} (x,0) = 0.

Одержуємо краєве завдання визначення 15 функцій ui (x,t), Sij *(x,t)* σ_{ij} (x,t), що задовольняють 15 рівнянням (3.10) - (3.12), краєвим умовам (3.1) - (3.3), (15.7) і початковим умовам.

Принципова трудність постановки завдань в рамках теорії пластичності диференціального типа пов'язана з колізією між неінтегрованих визначальних співвідношень і недиференціюванням умов у вигляді нерівностей.

Внаслідок цього постановка повинна містити, як характеристики напружено-деформованого стану, так і швидкості зміни цих характеристик.

Перейдемо від рівнянь рівноваги і співвідношень Коші, записаних відносних повних параметрів ui, Sij, σ_{ij} до їх аналогів, одержаних шляхом почленного диференціювання. Відмітимо, що умови, що містять нерівності, не допускають такого переходу. Щоб перейти до завдання в швидкостях, представимо переміщення, деформації і напругу в наступному вигляді:

$$u_i(x,t) = \int_0^t \dot{u}_i(x,\tau)d\tau\,; \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau)d\tau\,,$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(x,\tau)d\tau \qquad (3.14)$$

Сформулюємо тепер завдання визначення напружено-деформованого стану як завдання визначення процесу зміни функцій,, $\dot{\sigma}_{ij}(x,t)$ в кожен момент часу тих, що задовольняють рівнянням рівноваги і співвідношенням Коші в диференціальній формі:

$$\dot{\sigma}_{ij,j}(x,t) = 0\,; \qquad (3.15)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_{i,j}(x,t) + \dot{u}_{j,i}(x,t)\right]; \qquad (3.16)$$

визначальним співвідношенням:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkm}(\ldots)\dot{\varepsilon}_{km}\,, \qquad (3.17)$$

граничною умовою:

$$\dot{u}_i(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(x,t)\nu_j = 0 \text{ на } \Gamma \qquad (3.18)$$

умовою контактної взаємодії – (3.1) – (3.6) з урахуванням співвідношень (3.14), а також початковою умовою:

ui (x,0) = Sij (x,0) = σ_{ij} (x,0) = 0.

Розглянемо, використовуючи підхід Ейлера, постановку завдання жорстко - пластичної течії. Хай Ω Ω - область простору, в якому відбувається пластичний перебіг металу. Напружено-деформований стан описуємо вектором швидкостей $\&_i$(x,t), тензором швидкостей деформацій ξ ξ_{ij} (x,t) тензором напруг $_{ij}$ (x,t).

Відповідне краєве завдання полягає у визначенні функцій $\&_i$ (x,t), ξ_{ij} (x,t), $_{ij}$ (x,t), що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j}\,(x,t) = 0; \qquad (3.19)$$

співвідношенням Коші - Стоксу:

$$\xi_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[v_{i,j}(x,t) + v_{j,i}(x,t)\right]; \qquad (3.20)$$

співвідношенням Сен-Венана - Льові - Мізеса:

$$s_{ij}(x,t) = \frac{2F(\xi_u)}{\xi_u}\xi_{ij}(x,t); \qquad (3.21)$$

краєвим умовам:

$$ui\,(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u; \qquad (3.22)$$

умовам (3.7) - (3.9) взаємодії металу і інструменту.

Підкреслимо, що під областю Ω. розуміється область простору, в якій фактично відбувається пластична деформація. Ця область повинна бути відома до рішення задачі.

Представлені постановки краєвих завдань можуть бути використані як основа для дослідження пластичної деформації тільки в достатньо простих окремих випадках. Рішення складніших задач вимагає перетворення постановок завдань до інших форм, зручніших для цілей комп'ютерного моделювання, зокрема, до варіаційних формулювань.

3.2 Варіаційні формулювання краєвих задач обробки металів тиском

Поняття варіаційного принципу

Розглянемо проблему дослідження формозміни металу з наступного. При заданій формі інструменту і заданих зусиллях логічно можливі різні форми перебігу металу. Проте фактично здійснюється лише одна певна картина течії.

Чим же дійсна картина течії відрізняється від інших варіантів течії, можливих, але що не реалізовуються? Як найприродніше сформулювати критерій, згідно якому природа з безлічі можливостей вибирає один конкретний варіант?

Хай механічна система переходить з початкового стану А в кінцеве *B*. Можливий набір (множина) *V* можливі траєкторії v переходу із стану А в стан *B,* показаних на рис. 3.2 штриховими лініями, і існує єдина дійсна траєкторія *і* такого переходу (показана на рис. 3.2 суцільною лінією).

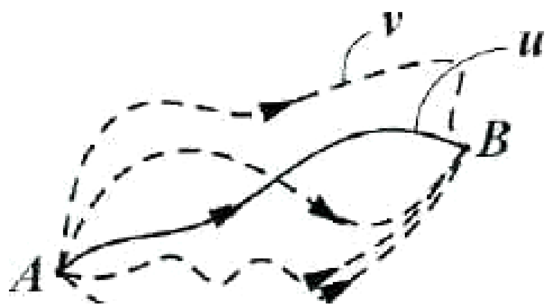


Рисунок 3.2 – Дійсні і можливі траєкторії

Один з критеріїв вибору дійсної траєкторії дає класичне формулювання у вигляді краєвого завдання: тільки для дійсної траєкторії виконуються рівняння рівноваги, що визначають співвідношення, співвідношення Коші - Стоксу і краєві умови. Проте такий критерій залишає відчуття незадоволеності, оскільки не містить прямої відповіді на питання, чим же "краще" дійсна траєкторія в порівнянні зі всіма можливими.

Упевненість в гармонійному, якнайкращому пристрої привела до переконання, що дійсним процесом протікання природних явищ відповідає найменше значення деякої величини, наприклад, енергії. Вже в XVIII столітті було встановлено, що завдання механіки можна формулювати у вигляді варіаційного принципу.

Кожної траєкторії *v* з множини *V* зіставимо за певним правилом деяке число *J(&).* Тоді говорять, що на більшості *V* заданий функціонал *J(v).* Варіаційний принцип має наступну форму: існує такий функціонал *J(v),* що визначений на безлічі можливих траєкторій і володіє тією властивістю, що саме на дійсній траєкторії цей функціонал досягає свого найменшого значення. Для реальних механічних систем такий функціонал має конкретний механічний сенс.

Очевидно, що критерій вибору дійсної траєкторії у вигляді варіаційного принципу представляється глибшим і природнішим, чим критерій у вигляді краєвого завдання. Л. Ейлер писав: "Оскільки будівля всього світу абсолютно і зведено премудрим Творцем, то в світі не відбувається нічого, в чому б не було видно сенсу якогось максимуму або мінімуму". Додамо, що всесвітньо відомий курс теоретичної фізики Л.Д. Ландау і Е.М. Лівшица [5] заснований на застосуванні варіаційних принципів як початкових постулатів.

Відмітимо, що часто не вдається одержати варіаційний принцип в екстремальній формі; тоді використовується стаціонарна форма варіаційного принципу у вигляді рівності нулю першої варіації функціонала *J(&)*.

Оскільки обидва вказані критерії, - і у вигляді краєвого завдання, і у вигляді варіаційного принципу, - дозволяють виділити дійсну траєкторію, то очевидно, що між обома критеріями повинен існувати певний зв'язок. Виявилось, що варіаційні принципи можуть бути формально-математичними методами одержані з постановок краєвих завдань. Навпаки, при деяких обмеженнях критерій у вигляді краєвого завдання витікає з відповідного варіаційного принципу. Всупереч поширеній помилці, обидва ці критерії не є еквівалентними: варіаційний принцип володіє більшою спільністю. На цій обставині ми зупинимося пізніше.

Після появи на початку XX століття фундаментальних робіт Д. Гильберта і В. Рітца виразно виявилася роль варіаційних принципів як принципової основи для побудови наближених методів рішення краєвих задач. Зокрема, виявилось, що саме варіаційні формулювання найбільш зручні для використання в сучасних методах комп'ютерного моделювання пластичного формозміни. Далі для основних класів визначальних співвідношень встановимо форму варіаційних постановок завдань і покажемо зв'язок між краєвими завданнями і варіаційними принципами.

Варіаційні формулювання крайових задач для визначення співвідношень деформаційного типа

На прикладі співвідношень деформаційного типа розглянемо типові прийоми отримання варіаційних формулювань, виходячи з постановок у вигляді краєвих завдань. Встановимо також, що при додаткових обмеженнях з варіаційного принципу виходять співвідношення краєвого завдання.

1. Одержимо дві форми варіаційного формулювання, виходячи із співвідношень краєвого завдання. Хай *ui, Sij,* $_{ij}$ є рішенням краєвої задачі, тобто задовольняють в області Ω. рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (3.23)$$

визначальним співвідношенням:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{km})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad (3.24)$$

співвідношенням Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (3.25)$$

а також краєвим умовам:

ui – *Ui* на частини Γu межі Γ області Ω;

σ_{ij}& $_j$ = *Si* на частині Γ $_\sigma$межі Р., що залишилася.

При виведенні варіаційних формулювань ключову роль грає формула Остроградського – Гауса. Хай область *Ω* обмежена кусочно-гладкою поверхнею Γ, а функції $P_1(\vec{x})$,,,, і їх приватні похідні,, $\frac{\partial P_3}{\partial x_3}$ безперервні в області Ω. Тоді, згідно теоремі Остроградского-гауса, справедливо співвідношення:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} \partial\Omega = \int_{\Gamma} P_i v_i d\Gamma. \qquad (3.26)$$

Формула Остроградського – Гауса дозволяє перетворити інтеграл, взятий по тривимірній області, в інтеграл, обчислений по поверхні цієї області, і навпаки.

Варіаційне формулювання містить три основні елементи: визначення безлічі допустимих функцій, введення функціонала, визначеного на цій множині, і твердження про екстремальну або стаціонарну властивість функціонала для дійсних функцій.

Введемо множину V - допустимі переміщення. Включимо в цю множину всі вектори $\vec{u}^*(\vec{x})$ переміщень, компоненти яких безперервні і мають безперервні приватні похідні, і крім того, задовольняють граничній умові на Гu. Будь-який елемент $\vec{u}^*$ множини V називатимемо можливим переміщенням, а відповідні згідно співвідношенням Коші величини

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$$

називатимемо компонентами можливого тензора деформацій.

Оскільки для дійсних напруг ij виконані умови рівноваги, то в кожній точці області Ω. справедлива рівність:

$$-\sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i) = 0$$

Інтегруючи по області, одержуємо:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i)d\Omega = 0 \qquad (3.27)$$

Перетворимо під інтегральний вираз за допомогою формули диференціювання твору:

$$\sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}\left(u_i^* - u_i\right)\right] - \sigma_{ij}(u_{i,j}^* - u_{i,j}).$$

Тоді (3.27) представляється у вигляді:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}\left(u_i^* - u_i\right)\right]d\Omega = -\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u_{i,j}^* - u_{i,j})d\Omega = 0 \qquad (3.28)$$

Вважаючи $P_j = \sigma_{ij}(u_i^* - u_i)$, застосуємо формулу Остроградского-Гауса до першого інтеграла:

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}\left(u_i^*-u_i\right)\right]d\Omega=-\int_{\Gamma}\sigma_{ij}(u_{i,j}^*-u_{i,j})v_j d\Gamma=0$$

Оскільки тензор σ_{ij} є симетричним, то:

$$\sigma_{ij}\left(u_{i,j}^*-u_{i,j}\right)=\sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^*+u_{i,j}^*\right)-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{i,j}\right)\right]=\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij}\right)$$

Тоді рівність (3.28) приймає вигляд:

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij}\right)d\Omega-\int_{\Gamma}\sigma_{ij}v_j\left(u_i^*-u_i\right)d\Gamma=0 \qquad (3.29)$$

Враховуючи, що:

$\Gamma = \Gamma u + \Gamma_{\sigma}$; $u_i^*=u_i$ на Гu ; σij &j = Si на Г

одержуємо:

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_i\left(u_i^*-u_i\right)d\Gamma=0$$

Виразимо ij через компоненти дійсного тензора деформацій згідно визначальним співвідношенням і одержимо інтегральну рівність:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_i\left(u_i^*-u_i\right)d\Gamma=0 \qquad (3.30)$$

Одержана рівність справедливо для всіх допустимих переміщень і деформацій і називається *варіаційним рівнянням.* Сенс цього рівняння, одержаного як формальне слідство диференціальної постановки завдання, полягає в тому. що тільки для дійсних переміщень *ui* і дійсних деформацій *Sij* рівність (3.30) справедливо при всіх можливих переміщеннях u_i^* і відповідних можливих деформаціях ε_{ij}^*.

Покажемо, що завдання рішення варіаційного рівняння еквівалентне завданню мінімізації деякого функціонала на множині *V.* Істотну роль в подібних перетвореннях варіаційних рівнянь в екстремальні завдання грає одна властивість опуклих функцій. Нагадаємо, що функція $f(z_1,$ z_2, ..., $zn)$ називається опуклою, якщо для двох будь-яких наборів змінних $\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)},.., z_n^{(1)}\right)$ і $\left(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}..., z_n^{(2)}\right)$ виконано нерівність

$$f\left[\left(1-\lambda\right)z_1^{(1)}+\lambda z_1^{(2)},\left(1-\lambda\right)z_2^{(1)}+\lambda z_2^{(2)},\ldots,\left(1-\lambda\right)z_n^{(1)}+\lambda z_n^{(2)}\right]\le$$
$$\le\left(1-\lambda\right)f\left(z_1^{(1)},z_2^{(1)},..,z_n^{(1)}\right)+\lambda f\left(z_1^{(2)},z_2^{(2)}...,z_n^{(2)}\right)$$

справедливе для всіх чисел _∈ [0, 1].

Для опуклих функцій, що безперервно-диференціюються, справедливо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\bigg|_{z_1=z_1^{(1)},\ldots,z_n^{(1)}=z_n^{(1)}}\left(z_i^2-z_i^1\right)\le f\left(z_1^{(2)},z_2^{(2)}...,z_n^{(2)}\right)-f\left(z_1^{(1)},z_2^{(1)},..,z_n^{(1)}\right) \qquad (3.31)$$

яке і використовується при переході до екстремального формулювання.

Візьмемо за функціюf *f* функцію *W(Sij)* як функцію шести змінних. Для реальних матеріалів при малих деформаціях функція *W(Sij)* є опуклою. Нерівність (3.31) приймає вигляд:

$$\frac{\partial W\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i\right)\le W\left(\varepsilon_{ij}^*\right)-W\left(\varepsilon_{ij}\right) \qquad (3.32)$$

Замінюючи в (3.30) $\frac{\partial W\left(\varepsilon_{ij}\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i\right)$ згідно (3.32), одержуємо нерівність:

$$\int_{\Omega}W\left(\varepsilon_{ij}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_iu_i\,d\Gamma\le\int_{\Omega}W\left(\varepsilon_{ij}^*\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_iu_j^*\,d\Gamma\,. \qquad (3.33)$$

Введемо функціонал:

$$J\left(u_i\right)=\int_{\Omega}W\left(\varepsilon_{ij}^*\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_iu_i^*\,d\Gamma\,.$$

Нерівність (3.33) означає, що серед всіх переміщень u_i^* з допустимої множини *V* саме дійсним переміщенням відповідає найменше значення функціонала $J(u_i^*)$.

Сформулюємо тоді наступне екстремальне варіаційне завдання: знайти переміщення ui∈ ∈ *V*, що доставляє значення точної нижньої грані на множині *V* функціоналу $J(u_i^*)$, тобто:

$$J(ui)=\inf J(u_i^*); \qquad (3.34)$$

$$u_i^*\in V.$$

Таким чином, рішення задачі в диференціальній постановці (тобто у вигляді краєвого завдання) є рішенням екстремальної варіаційної задачі (3.34).

Зворотне твердження справедливо лише при додаткових припущеннях про властивості рішення екстремальної задачі.

Доведемо спочатку, що рішення екстремальної варіаційної задачі є рішенням варіаційного рівняння. Хай u_i^* - довільне допустиме переміщення. Очевидно, що переміщення *wi* = u_i^* + $t(u_i^*$*-ui)* при будь-якому числі *t* також буде допустимим. Зафіксуємо певну функцію u_i^*. Тоді функціонал на безлічі переміщень *wi* - перетворюється на функцію однієї змінної:

$$J\left(u_i + t\left(u_i^* - u_i\right)\right) = F(t)$$

Оскільки при *wi* = *ui,* тобто при *t* = 0, функціонал приймає найменше значення, то для функції *F(t)* виконано необхідну умову екстремуму:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

тобто:

$$\left.\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega} W\left[\varepsilon_{ij} + t\left(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}\right)\right]d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma}\left[u_i + t\left(u_i^* - u_i\right)\right]d\Gamma\right\}\right|_{t=0} = 0$$

Виконавши диференціювання підінтегральних функцій, одержимо:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial W\left[\varepsilon_{ij} + t\left(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}\right)\right]}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}\right)d\Omega - \int S_i\left(u_i^* - u_i\right)d\Gamma = 0$$

Вважаючи *t* = 0, приходимо до варіаційного рівняння (3.30).

Отже, формулювання завдань у вигляді варіаційного рівняння і у вигляді екстремального варіаційного завдання *повністю еквівалентні.* Тому можна говорити про дві форми представлення одного і того ж варіаційного завдання.

Дамо тепер відповідь і на останнє питання: чи є рішення варіаційної задачі рішенням задачі в диференціальній постановці. Додатково припустимо, що рішення варіаційної задачі що двічі безперервно диференціюється в області *Ω*.

Хай $_i$ - компоненти довільного вектора переміщень, нульові значення, що безперервно диференціюються в області *Ω* і приймаючі, на межі Г області *Ω*.

Покладемо $u_i^* = ui + \eta_i \in V$. Тоді варіаційне рівняння (3.30) приймає вигляд:

$$\int_\Omega \frac{dW(\varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)d\Omega = 0 \tag{3.35}$$

Застосовуючи формулу диференціювання твору, представимо підінтегральний вираз у вигляді

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\eta_i\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\eta_i.$$

Застосовуючи формулу Остроградского-Гауса, який перетворений (3.35) до вигляду:

$$\int_\Gamma \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}} v_j u_i d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\eta_j d\Omega = 0$$

Оскільки $\eta_i \equiv 0$ на Г, а $\sigma ij = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}$ то одержуємо рівність:

$$\int_\Omega \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\eta_i d\Omega = 0 \tag{3.36}$$

Враховуючи, що η_i - *довільні* функції, укладаємо, що рівність (3.36) можливо лише при $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \equiv 0$ в областіΩ, тобто рішення варіаційного завдання задовольняє рівнянням рівноваги.

Залишається показати, що на $Г_\sigma$ виконані краєві умови в напругах. Знову введемо довільні функції ζ_i визначені на Г і дорівнюють нулю на Гu. З урахуванням вже доведеного рівняння рівноваги аналогічно перетворимо варіаційне рівняння до вигляду:

$$\int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} v_j - S_i)\zeta_i d\Gamma = 0$$

і зважаючи на довільність ζ_i одержуємо, що:

$$\sigma_{ij} \&_j = S_i, \text{ на Р.}_\sigma$$

Отже, рішення варіаційної задачі є рішенням краєвої задачі лише при додатковому припущенні про існування безперервних других похідних. Тому говорять, що рішення варіаційної задачі є узагальненим рішенням краєвої задачі. Встановлений зв'язок між двома формами постановок дозволяє замінити рішення краєвої задачі рішенням відповідної варіаційної задачі.

Варіаційні нерівності

Варіаційні завдання, розглянуті раніше, відповідають так званим класичним краєвим завданням, коли на фіксованій частині поверхні тіла задані змінні, а на тій, що залишилася - зусилля. Проте для обробки тиском типовою є деформація під дією інструменту. Як показано в п. 3.1, умови взаємодії заготовки з інструментом не можна описати тільки класичними краєвими умовами: у число умов на межі області входять ще і умови у вигляді нерівностей. Вивчення завдання з краєвими умовами у вигляді нерівностей почалося в 60-і роки XX сторіччя, причому найбільш ефективним виявився саме варіаційний підхід.

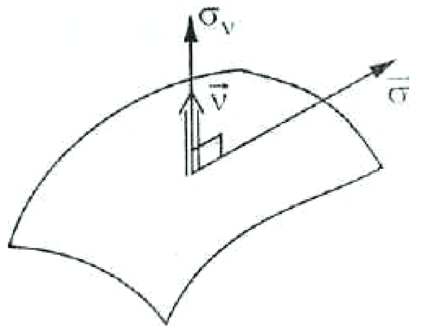


Рисунок 3.3 - Розкладання вектора напруги

Виявилось, що в подібних некласичних завданнях замість варіаційного рівняння з'являється варіаційна нерівність, тому весь клас завдань з краєвими умовами, що містять нерівності, одержав назву варіаційних нерівностей.

Спочатку для спрощення вважаємо, що тертя між заготовкою і інструментом відсутнє. Хай поверхня заготовки складається з трьох частин Гu,

$Г_σ$, Гс. На частини *Гu* і *Г* задані класичні краєві умови в переміщеннях і напругах відповідно. На частини Гс відбувається взаємодія заготовки з інструментом. Умови, така взаємодія, що описує, викладені в п. 3.1 Одержимо варіаційні формулювання для такого класу завдань. Введемо безліч допустимих переміщень, в яку включимо всі вектори переміщень, що задовольняють умові в переміщеннях на Гu, а також умові непроникнення на Гс:

$$u_\nu^* \le \Phi \text{ на Гс.}$$

Оскільки інтегральна рівність (3.29) одержана без яких-небудь припущень про вид граничних умов, то скористаємося (3.29) і у разі некласичних умов контактної взаємодії. Представимо інтеграл його поверхні Г у вигляді суми інтегралів по Гu, $Г_σ$ і Гс. Для елементів множини інтеграл по Гu звертається в нуль, а інтеграл по Г, як і раніше, перетвориться до вигляду:

$$\int_{\Gamma_\sigma} S_i \left(u_i^* - u_i\right) d\Gamma$$

Зупинимося докладніше на інтегралі по Гс. Перетворимо заздалегідь підінтегральний вираз. Хай - вектор одиничної зовнішньої нормалі до Гс. Розкладемо вектори переміщень і вектори зусиль на Гс на нормальні і дотичні складові:

$$u_\nu = u_i \nu_i;\ \vec{u}_\nu = \vec{\nu} u_\nu;\ \sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i;\ \vec{\sigma}_\nu = \sigma_\nu \vec{\nu}$$

$$\left(\vec{u}_\tau\right) = u_i - u_\nu \nu_i;\ \left(\vec{\sigma}_\tau\right)_i = \sigma_{ij} \nu_j - \sigma_\nu \nu_i$$

Тоді підінтегральний вираз перетвориться до вигляду:

$$\sigma_{ij} \nu_j \left(u_i^* - u_i\right) = \sigma_\nu \left(u_\nu^* - u_\nu\right) + \left(\vec{\sigma}_\tau\right)_i \left(\left(\vec{u}_\tau^*\right) - \left(\vec{u}_\tau\right)_i\right)$$

Припущення про відсутність тертя означає, що $(\sigma_\tau)_i = 0$, тоді підінтегральний вираз приймає простіший вигляд:

$$\sigma_{ij} \nu_j \left(u_i^* - u_i\right) = \sigma_\nu \left(u_\nu^* - u_\nu\right).$$

Хай $\vec{x} \in \Gamma_c$ - довільна точка поверхні Гс. Можливі два варіанти: а) у точці $\vec{x}$ *відбувається фактично контакт заготовки* і інструменту: б) у точці $\vec{x}$ контакт відсутній.

У варіанті а) маємо: $u\nu = \Phi$: $u_\nu^* = \Phi$: $\sigma_\nu 0$. Тоді:

$$\sigma_\nu\left(u_\nu^* - u_\nu\right) = \sigma_\nu\left(u_\nu^* - \Phi\right) \ge 0$$

У варіанті б) маємо $\sigma_\nu = 0$, і підінтегральний вираз дорівнює нулю. Отже, в усіх точках поверхні Гс виконується нерівність:

$$\sigma_\nu\left(u_\nu^* - u_\nu\right) \ge 0$$

Тоді, відкидаючи в інтегральній рівності інтеграл:

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_\nu\left(u_\nu^* - u_\nu\right) d\Gamma \ge 0$$

приходимо до варіаційної нерівності:

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_\nu^* - \varepsilon_\nu\right) d\Omega - \int_{\Gamma_c} S_i\left(u_i^* - u_i\right) d\Gamma \ge 0,\ \forall u_i^* \in \tilde{V}. \tag{3.37}$$

Доведено [6], що таке варіаційна нерівність еквівалентно варіаційному завданню:

$$\inf\ J\left(u_i^*\right);$$
$$u_i^* \in \tilde{V}$$

З іншого боку, доведено [6], що рішення варіаційної нерівності є узагальненим рішенням краєвої задачі з некласичними краєвими умовами у вигляді нерівностей.

Одержимо варіаційні формулювання краєвих завдань з урахуванням тертя на контактній поверхні. Відразу відмітимо, що сформульовані в п. 3.1 умови тертя, відповідні закону Амонтона-Кулона, не узгоджуються з визначальними співвідношеннями деформаційного тіла. Насправді, умови (3.4) - (3.6) формулюються щодо швидкостей переміщень, а визначальні співвідношення використовують повні деформації, і, отже, повні переміщення. У теорії пружності у зв'язку з такою ситуацією використовується заміна швидкостей в (3.5), (3.6) повними переміщеннями. Умови, при яких така заміна є законною, сформульовані [4]. Вважатимемо, що умови з [4] виконані, і використовуємо співвідношення закону тертя в наступному вигляді:

$$\left|\sigma_\tau(x,t)\right| \le f\left|\sigma_\nu(x,t)\right|;$$

$$\dot{u}_\tau(x,t) = 0,\ \text{якщо}\ \left|\sigma_\tau(x,t)\right| < f\left|\sigma_\nu(x,t)\right|; \tag{3.38}$$

$$\frac{\Delta\dot{\vec{u}}_\tau(x,t)}{\left|\Delta\dot{\vec{u}}_\tau(x,t)\right|} = -\frac{\sigma_\tau(x,t)}{\left|\sigma_\tau(x,t)\right|} \text{ якщо } \left|\sigma_\tau(x,t)\right| = f\left|\sigma_\nu(x,t)\right|$$

Представимо поверхню Гс можливого контакту у вигляді об'єднання поверхонь Гс(0), Гс(а), Гс(s). На частини Гс контакт заготовки і інструменту відсутній, на частини Гс(а) здійснюється зчеплення контактуючих поверхонь, а на частини Гс(5) відбувається взаємне ковзання.

Розглянемо вираз $A_\tau = -\vec{\sigma}_\tau\left(\vec{u}_\tau^* - \vec{u}_\tau\right)$на кожній з вказаних частин. Хай $\vec{u}_\tau^{(i)}$ - дотична складова переміщень точок контакту. Тоді А можна представити таким чином:

$$A_\tau = -\vec{\sigma}_\tau\left|\vec{u}_\tau^* - \vec{u}_i^{(i)} - \left(\vec{u}_\tau - \vec{u}_i^{(i)}\right)\right| = -\vec{\sigma}_\tau\left(\Delta\vec{u}_\tau^* - \Delta\vec{u}_\tau\right),$$

де $\Delta\vec{u}_\tau^* = \vec{u}_\tau^* - \vec{u}_i^{(i)}$, $\Delta\vec{u}_\tau = \vec{u}_\tau - \vec{u}_i^{(i)}$ - відносні можливе і дійсне дотичні переміщення поверхні Гс і поверхні інструменту.

l. На частини Гс(0) маємо, і, отже:

$$A_\tau = 0.$$

2.На частини *Гс(а)* виконані умови:

$$\Delta\vec{u}_\tau = 0,\ \left|\vec{\sigma}_\tau\right| < f\left|\sigma_\nu\right|.$$

Тоді:

$$A_\tau = -\vec{\sigma}_\tau\left(\Delta\vec{u}_\tau^* - \Delta\vec{u}_\tau\right) = -\sigma_\tau\Delta\vec{u}_\tau^* = \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right|\cos\left(-\vec{\sigma}_\tau^{\wedge}, \Delta\vec{u}_\tau^*\right) \le$$
$$\le \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right| = \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\Delta\vec{u}_\tau^* - \Delta\vec{u}_\tau\right) \le f\left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\Delta\vec{u}_\tau^* - \Delta\vec{u}_\tau\right).$$

3. На частини Гс(s), згідно закону Амонтона - Кулона, справедлива рівність:

$$\left|\vec{\sigma}_\tau\right| = f\left|\vec{\sigma}_\nu\right|,\ \vec{u}_\tau = -\frac{\vec{u}_\tau}{\left|\vec{\sigma}_\tau\right|}\vec{\sigma}_\tau,$$

і, отже

$$A_\tau = -\sigma_\tau\Delta\vec{u}_\tau^* + -\sigma_\tau\Delta\vec{u}_\tau = \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right|\cos\left(-\vec{\sigma}_\tau^{\wedge}, \Delta\vec{u}_\tau^*\right) - \left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\frac{\vec{\sigma}_\tau \cdot \sigma_\tau}{\left|\vec{\sigma}_\tau\right|} \le$$
$$\le \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right| - \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left|\Delta\vec{u}_\tau\right| = \left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right| - \left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right) = f\left|\sigma_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{u}_\tau^*\right| - \left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right).$$

Таким чином, на всіх ділянках виконано нерівність:

$$A_\tau \le f\left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\left|\Delta\vec{u}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right),$$

тобто:

$$-\int_{\Gamma_c}\vec{\sigma}_\tau\left(\Delta\vec{u}^*_\tau-\Delta\vec{u}_\tau\right)d\Gamma \le \int_{\Gamma_c}\left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\left|\Delta\vec{u}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right)d\Gamma .$$

Приходимо до наступної інтегральної нерівності:

$$\int_\Omega\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon^*_\nu-\varepsilon_\nu\right)d\Omega-\int_{\Gamma_c}S_i\left(u^*_i-u_i\right)d\Gamma+\int_{\Gamma_c}f\left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\left|\Delta\vec{u}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right)d\Gamma\ge 0\ \ \forall\vec{u}^*\in\tilde{V} . \qquad (3.39)$$

На відміну від варіаційної нерівності (3.37), одержана нерівність (3.39) не може бути перетворена до еквівалентного екстремального завдання. Формальна причина полягає в тому. що вираз $f\left|\vec{\sigma}_\tau\right|\left(\left|\Delta\vec{u}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right)$ не може бути розбитий на різницю двох виразів, одне з яких залежить тільки від параметрів можливого стану, а друге - тільки від параметрів дійсного стану. Джерелом цього утруднення є неконсервативний характер сили тертя. Зважаючи на відсутність еквівалентного екстремального завдання нерівність (3.39) можна назвати квазіваріаційними.

Беручи до уваги переваги екстремальних формулювань, розглянемо ітераційний процес заміни квазіваріаційної нерівності (3.39) послідовністю варіаційних нерівностей, що мають еквівалентне формулювання у вигляді екстремального завдання.

Як нульове наближення приймається рішення варіаційної нерівності (3.37). Хай $\sigma^{(0)}_\nu$ - відповідне розподіл нормальних контактних напруг; $\sigma^{(0)}_\nu$ є відомою функцією координат точок поверхні Гс.

Далі знаходимо перше наближення, як рішення варіаційної нерівності:

$$\int_\Omega\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon^*_\nu-\varepsilon_\nu\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_i\left(u^*_i-u_i\right)d\Gamma+\int_{\Gamma_c}f\left|\vec{\sigma}^{(0)}_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{u}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{u}_\tau\right|\right)d\Gamma\ge 0,\ \forall\vec{u}^*_i\in\tilde{V} .$$

Очевидно, така нерівність еквівалентно екстремальному завданню для функціонала:

$$J^{(1)}\left(\Delta u^*_i\right)=\int_\Omega W\left(\varepsilon^*_{ij}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}S_iu^*_i\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}f\left|\sigma^{(0)}_\nu\right|u^*_i\,d\Gamma .$$

На кроці ітераційного процесу визначається рішення варіаційної нерівності:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij} \right) d\Omega - \int_{\Gamma\sigma} S_i \left(u_i^{*} - u_i \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f \left| \sigma_{\nu}^{(p-1)} \right| \left(\left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| - \left| \Delta \vec{u}_{\tau} \right| \right) d\Gamma \geq 0,$$

якому відповідає еквівалентне екстремальне завдання для функціонала:

$$J^{(p)} \left(\Delta u_i^{*} \right) = \int_{\Omega} W \left(\varepsilon_{ij}^{*} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} S_i u_i^{*} d\Omega + \int_{\Gamma_c} f \left| \sigma_{\nu}^{(p-1)} \right| \left| \Delta u_{\tau}^{*} \right| d\Gamma$$

Показано [3.7] що питання про збіжність такого ітераційного процесу еквівалентно питанню про існування рішення краєвої задачі з тертям. Це принципове питання дотепер не знайшло повного дозволу. Проте практика чисельного рішення показує, що звичайно описаний ітераційний процес сходиться достатньо швидко.

Звернемо увагу на те, що із-за наявності $\left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right|$ в інтегралі по Гс функціонал $J^{(p)} \left(u_i^{*} \right)$ є таким, що не диференціюється. Відомо, що не диференційованість функціонала може привести до явищ "заїдання" алгоритму оптимізації в неоптимальній крапці. Щоб виключити таку небажану можливість, можна рекомендувати заміну $\left| \Delta_{\tau}^{*} \right|$ близьким, але таким, що диференціюється при u_{τ}^{*}= 0 виразом. Наприклад, покласти $\left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| \approx \omega_{\varepsilon} \left(\left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| \right)$, де:

$$\omega_{\varepsilon} \left(\left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| \right) = \begin{cases} \left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| - \dfrac{\varepsilon}{2}, \left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| > 0, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} \Delta \vec{u}_{\tau} \cdot \Delta \vec{u}_{\tau}, \left| \Delta \vec{u}_{\tau}^{*} \right| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

значення S > 0 вибираються достатньо малими.

Варіаційні формулювання краєвих задач із застосуванням співвідношень диференціального типа

У сучасних технологіях прецизійної обробки тиском пружна деформація сумісно з пластичним. Інша особливість таких технологій обумовлена істотно складним характером деформації. Зокрема, результат обробки тиском може залежати від історії пружно пластичної деформації. Оскільки співвідношення деформованого типа зв'язують кінцеві значення напруг і деформацій, то застосування таких співвідношень виключає можливість урахування історії деформації. Тому як визначальні співвідношення при складному вантаженні доцільно використовувати співвідношеннях диференціального типа, які, принаймні, у принципі, здатні описувати вказану залежність від історії деформації.

Беручи до уваги істотну роль історії деформації, під рішенням задачі обробки тиском розуміємо весь процес зміни параметрів напружено деформованою стани, тобто об'єктами рішення є функції: $u_i(x,t)$, $Sij(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, $t \in [0,T]$, де T - повний час деформації.

Хай тіло Ω обмежене поверхнею Г, що складається з трьох частин Гu, $Г_\sigma$, Гс. На частини Гu тіло закріплене, на частини Гс вільно від навантажень, а частина Гс піддається дійсно інструменту. Взаємодія заготовки і інструменту описується співвідношеннями (3.38). Процес деформації визначається законом руху інструменту в процесі обробки.

Звернемо тепер увагу на те, що умови контактної взаємодії сформульовані щодо повних переміщень і напруг, а що визначають співвідношення - щодо швидкостей деформацій і швидкостей зміни напруг. Шляхом диференціювання за часом можна також записати в швидкостях рівняння рівноваги і співвідношення Коші:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0; \ \dot{\varepsilon}_{ij,j} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}).$$

Проте повний перехід до завдання в швидкостях неможливий, оскільки умови контактної взаємодії містять нерівності, які не можна почленно диференціювати. Це створює додаткові труднощі при побудові варіаційних формулювань.

Обмежуючись на початку випадком відсутності тертя, побудуємо припустиму множину $\dot{V}$, до якої віднесемо всі процеси $\dot{u}_i(x,t)$ зміни швидкостей переміщеня, що задовольняє в кожен момент часу $t \in [0,T]$ наступним вимогам: $\dot{u}_i(x,t) = 0$ на Γ_u;

$$\int_0^1 \dot{u}_\nu(x,t)d\tau \le \Phi(x,t) \tag{3.40}$$

$$\dot{u}_\nu(x,t) = \Phi(x,t) \text{якщо } \sigma_\nu(x,t) < 0 \text{ на Гс}$$

Показано [8], що якщо $\dot{u}_i$(x,t), $\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t)$ - дійсні швидкості зміни переміщень і деформацій, то для всіх допустимих процесів $\dot{u}_i(x,t) \in \in$ $\dot{V}$ *виконується інтегральна рівність:*

$$\int_0^T \left\{ \int_\Omega A_{ikm}\varepsilon_{km}\left(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}\right)d\Omega \right\} dt = 0 \tag{3.41}$$

Зворотне твердження справедливо в наступному формулюванні: рішення рівняння (3.41), що володіє безперервним другим приватним похідним по просторових змінних і відповідні швидкості викладу деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t)$ і напруг $\dot{\sigma}_{ij}(x,t)$ задовольняють всім співвідношенням в початковій (диференціальної) постановці.

Звернемо увагу на одну особливість представленого формулювання: визначення допустимої множини $\dot{V}$ використовує шукану напругу σ_{ij}(x,t). Тому рівнянню (3.41) не можна зіставити еквівалентне екстремальне завдання, а саме рівняння природно назвати квазіваріаційним.

У роботі [8] запропонований підхід до дослідження і чисельного рішення квазіваріаційної рівності і нерівностей такого вигляду, що полягає в попередній напівдискретизації за часом. Це дозволило звести завдання до послідовності варіаційних рівнянь, відповідних вузловим моментам часу і, отже, до послідовності екстремальних варіаційних завдань.

Одержавши $\dot{u}_i(x,t), \dot{\varepsilon}_{ij}(x,t), \dot{\sigma}_{ij}(x,t)$ як рішення варіаційного рівняння (3.41), неважко побудувати шукані процеси зміни параметрів напружено-деформованого стану:

$$u_i(x,t)=\int_0^t \dot{u}_i(x,\tau)d\tau\,;\;\; \varepsilon_{ij}(x,t)=\int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau)d\tau\,;\;\; \sigma_{ij}(x,t)=\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(x,\tau)d\tau\,.$$

Викладемо варіаційне формулювання в припущенні, що тертя на поверхні контакту заготовки і інструменту можна описати співвідношеннями закону Лмонтона - Кулона. Виділимо в множині $\dot{V}$ підмножину, додатково зажадавши, щоб допустимі процеси зміни швидкостей переміщень задовольняли умовам:

$$\Delta\vec{\dot{u}}^*_\tau(x,t)=0 \text{ якщо } \sigma_\nu(x,t)<0 \; \left|\vec{\dot{\sigma}}_\tau(x,t)\right|< f\left|\sigma_\nu(x,t)\right|\,;$$

$$\frac{\Delta\vec{\dot{u}}^*_\tau(x,t)}{\left|\Delta\vec{\dot{u}}^*_\tau(x,t)\right|}=-\frac{\vec{\dot{\sigma}}_\tau(x,t)}{\left|\vec{\dot{\sigma}}_\tau(x,t)\right|} \text{ якщо } \sigma_\nu(x,t)<0 \; \left|\vec{\dot{\sigma}}_\tau(x,t)\right|= f\left|\sigma_\nu(x,t)\right|$$

Тоді, як показано [7] серед всіх допустимих процесів зміни швидкостей переміщень $\dot{u}^*_i(x,t)\in\dot{V}_f$, тільки для дійсних процесів зміни переміщень $\dot{u}_i(x,t)$ виконано квазіваріаційне рівняння вигляду:

$$\int_0^T\left\{\int_\Omega A_{ijkm}(\ldots)\dot{\varepsilon}_{km}\left(\varepsilon^*_{ij}-\varepsilon_{ij}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_c}\frac{d}{dt}\left\{f\left|\sigma_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{\dot{u}}^*_\tau\right|-\left|\Delta\vec{\dot{u}}_\tau\right|d\Gamma\right)\right\}\right\}=0\,, \qquad (3.42)$$

справедливе для всіх $\vec{\dot{u}}^*_i(x,t)$ з множини $\dot{V}_f$.

У [7] запропонований прийом напівдискретизації, що зводить завдання рішення нерівності (3.42) до послідовності завдань рішення варіаційної рівності, відповідної вузловим моментам часу.

Варіаційні постановки крайових задач для жорстко-пластичних тіл

Для більшості процесів обробки тиском характерно розвинена пластична деформація; при цьому частка пружних деформацій нікчемно мала. Це дає підставу відкинути взагалі пружні деформації. З одного боку, таке допущення приводить до певного спрощення завдання, зокрема, дозволяє використовувати Ейлеров підхід і розглядати деформацію як перебіг металу. Проте, з іншого боку, оскільки зміна об'єму зв'язується з пружною деформацією і напругою всестороннього стиснення, то подібне допущення створює проблеми іншого роду, які набувають гострої форми при побудові варіаційних формулювань і подальшому чисельному рішення задач.

Проте величезні труднощі рішення задач ОМТ при великих пружно пластичних деформаціях вимушують звертатися до схеми жорстко пластичної течії. Слід визнати, що більшість розроблених і ефективно працюючих варіантів комп'ютерного моделювання в ОМТ заснована саме на варіаційних формулюваннях завдань жорстко-пластичної течії. Використовується звичайно або варіаційне формулювання в швидкостях (принцип Лагранжа), або змішане формулювання щодо швидкостей і середнього гідростатичного тиску. Вкажемо прийоми отримання цих формулювань і звернемо увагу на переваги і недоліки кожного з двох альтернативних підходів.

Вважатимемо, що пластична деформація відбувається у області простору, і ця область відома до рішення задачі. Дане припущення є істотним, оскільки виділення областей пластичної деформації і жорстких зон є окремою серйозною проблемою. Хай область Ω обмежена поверхнею Γ, що складається з трьох частин Γu, Γ_σ, Γc. На частини Γ_c швидкості дорівнюють нулю, частина Γ_σ вільна від навантажень, а на частини Γ_c відбувається взаємодія з інструментом. Вважаємо, що фактичний майданчик контакту в даний момент співпадає з Γ_c. Напружено-деформований стан характеризуватимемо Ейлеровими змінними:

$$\xi_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[v_{i,j}(x,t) + v_{j,i}(x,t)\right].$$

Під *x* розуміються точки області Ω.

Дотичну взаємодію описуємо співвідношеннями закону тертя Амонтона - Кулона. Позначимо через w_ν нормальну компоненту швидкості інструменту в даній точці поверхні контакту, а через $\Delta\vec{v}_\tau = \vec{v}_\tau - \vec{w}_\tau$ - різниця дотичних компонент швидкостей заготовки та інструменту в точках контактної поверхні. Умови контактної взаємодії приймають вигляд:

$$v_\nu = w_\nu\,;\ \left|\vec{\sigma}_\tau\right| \le f\left|\sigma_\nu\right|,$$

причому: $\Delta\vec{v}_\tau = 0$ якщо $\left|\vec{\sigma}_\tau\right| < f\left|\sigma_\nu\right|$;

$$\frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\left|\Delta \vec{v}_\tau\right|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau}{\left|\vec{\sigma}_\tau\right|} \text{ якщо } \left|\vec{\sigma}_\tau\right| = f\left|\sigma_\nu\right|.$$

Вкажемо підхід до отримання варіаційних формулювань типу Лагранжа. Введемо допустиму множину V_f, полів швидкостей, в яке включимо всі безперервні і функції, що безперервно диференціюються по просторових змінних $v_i^*(x,t)$, задовольняють умові:

$$\&_i = 0 \text{ на } \Gamma u$$

умові не проникнення на Γ_c:

$$V_\nu^* = w\nu \text{ на } \Gamma c$$

а також умові нестискуваної:

$$div\left(v^*\right) = \xi_{ij}^* \delta_{ij} = 0,$$

де $\xi_{ij}^* = \frac{1}{2}\left[v_{i,j}^* + v_{j,i}^*\right]$.

Хай $\sigma_{ij}(x,t)$ - дійсні напруги. Це, зокрема означає, що у всій області Ω виконані рівняння рівноваги, тобто: $-\sigma_{ij,j} \equiv 0$.

Умножаючи на v* -v, і інтегруючи по області Ω одержуємо:

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j}\left(v_i^* - v_i\right) d\Omega = 0$$

Використовуючи ті ж прийоми, що і при отриманні варіаційного формулювання в рамках деформаційної теорії, приходимо до інтегральної рівності:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\left(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}\right) d\Omega - \int_\Gamma \sigma_{ij} \nu_j \left(v_i^* - v_i\right) d\Gamma = 0 \qquad (3.43)$$

Представимо ij у вигляді суми кульового тензора і девиатора:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij}\delta + sij$$

тоді: $\left(s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}\right)\left(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}\right) = s_{ij}\left(\xi_{ij}^* \delta_{ij} - \xi_{ij}\delta_{ij}\right) = s_{ij}\left(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}\right)$.

Застосовуючи визначальні співвідношення, одержуємо, що:

$$s_{ij}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right)=\frac{2F}{\xi_u}\xi_{ij}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right).$$

Розбиваємо інтеграл по Г на суму інтегралів по Гu, Γ_σ, Гс. Очевидно, що інтеграли по Гu і Γ_σ дорівнює нулю.

Підінтегрований вираз в інтегралі по Гс перетвориться до вигляду:

$$\sigma_{ij}v_i\left(v_i^{*}-v_i\right)=f\left|\sigma_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{v}_\tau^{*}\right|-\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|\right)d\Gamma,$$

тоді (3.43) приводиться до наступного квазіваріаційного рівняння:

$$\int_\Omega\frac{2F}{\xi_u}\xi_{ij}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\vec{v}_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{v}_\tau^{*}\right|-\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|\right)d\Gamma=0 \qquad (3.44)$$

Очевидно, що рівнянню (3.44) не можна зіставити еквівалентні екстремальні завдання. Щоб дістати можливість переходу до екстремального завдання, застосуємо ітераційною процес, аналогічний описаному раніше. На кроці такого ітераційного процесу розглядається рішення варіаційного рівняння:

$$\int_\Omega\frac{2F}{\xi_u}\xi_{ij}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\sigma_\nu^{(p-1)}\right|\left(\left|\Delta\vec{v}_\tau^{*}\right|-\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|\right)d\Gamma=0,$$

у якому $\sigma_\nu^{(p-1)}$ розуміється відома функція координат, одержана на попередньому кроці ітераційного процесу.

Перейдемо до еквівалентного екстремального завдання. Введемо питому потужність деформації:

$$\Pi\left(\xi_{ij}^{*}\right)=\int_0^{\xi_{ij}^{*}}s_{ij}\,d\xi_{ij}=\int_0^{\xi_{ij}^{*}}\frac{2F}{\xi_u}\xi_{ij}\,d\xi_{ij}.$$

Вважаємо $\Pi\left(\xi_{ij}^{*}\right)$ опуклою функцією шести змінних ξ_{ij}. Так само, як раніше, використовуючи властивості опуклості, приходимо до наступного екстремального формулювання: серед всіх допустимих смуг швидкостей $v_i^{*}(x,t)\in V_f$ тільки для дійсних полів швидкостей функціонал

$$J^{(p)}\left(v_i^{*}\right)=\int_\Omega\Pi\left(\xi_{ij}^{*}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\sigma_\nu^{(p-1)}\right|\left|\Delta\vec{v}_\tau^{*}\right|d\Gamma$$

приймає найменше значення на безлічі Vf.

Одержане варіаційне формулювання формально близьке до варіаційного формулювання в рамках теорій деформаційного типа, з одним, але дуже істотною відмінністю: можливі поля швидкостей повинні ще задовольняти умові нестискуваної в усіх точках області .Ω. Така вимога за своєю природою принципова відрізняється від кінематичних умов на межі. Задовольнити апріорі умові нестискуваної, як правило, не вдається. Інша проблема полягає в тому, що, використовуючи знайдене поле швидкостей, за допомогою співвідношень Сен-Венана - Льові-Мізеса можна одержати тільки девиаторную частину тензора напруг. Звичайні рекомендації використовувати інтеграцію рівнянь рівноваги часто нездійснимі через відсутність початкових значень напруг на межі області пластичної течії.

Беручи до уваги привабливу сторону варіаційного формулювання типу Лагранжа – її екстремальний характер, розглянемо підхід, ідея якого полягає в тому, щоб виключити вимогу нестискуваної з визначення допустимої множини. Суть підходу запозичення з теорії умовної оптимізації і заснована на ідеї методу штрафних функцій.

Очевидно, що $(div\vec{v})^2 \geq 0$, причому рівність можливо тоді і тільки тоді, коли в даній точці виконано умову нестискуваної. Поширюючи цей висновок на всі точки області Ω, приходимо до інтегральної нерівності:

$$\int_\Omega \left(div\vec{v}\right)^2 d\Omega \geq 0$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли в усіх точках області Ω виконано умова нестискуваної. Складемо допоміжний функціонал:

$$\int_\Omega \Pi\left(\xi_{ij}^*\right) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f\left|\sigma_\nu^{(p-1)}\right|\left|\Delta\vec{v}_\tau^*\right| d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left(div\vec{v}\right)^2 d\Omega$$

Числовий параметр $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ має сенс штрафного тарифу за порушення

умови нестискуваної. Введемо допустиму множину $V_f(S)$ швидкості $v_i^*(x,t)$, що задовольняють тільки кінематичним умовам $v_i^*(x,t) = 0$ на Гu. Введемо числову послідовність $\{\varepsilon_n\}$, що володіє наступними властивостями:

а) $S_o > S_1 > S_2 > . > S_n > S_{n+1} > .$;

б) $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$,і розглянемо відповідну послідовність екстремальних завдань визначення швидкостей $v_i^{(n)}(x,t)$, для яких функціонал

$$J^{(p)}(v_i^*) = \int_\Omega \Pi(\xi_{ij}^*) d\Omega + \int_\Gamma f \left|\sigma_\nu^{(p)}\right| \left|\Delta \vec{v}_\tau^*\right| d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_n} \int (div \vec{v})^2 d\Omega$$

досягає найменшого значення на множині $V_f(S)$. Показано, що послідовність при зводить до рішення задачі мінімізації $J(v_i^*)$ на безлічі Vf. Цікаво, що при цьому виявляється справедливою асимптотична оцінка:

$$\sigma \sim \frac{2}{\varepsilon} div \vec{v}. \tag{3.45}$$

Іншими словами, застосування принципу Лагранжа в поєднанні з методом штрафних функціоналів дає принципову можливість одержати, як поле швидкостей, так і поле середнього гідростатичного тиску. Проте практичне здійснення такого підходу стикається з певними труднощами. Зокрема, після дискретизації виникає скінченномірне завдання мінімізації, що володіє несприятливими обчислювальними властивостями - функція, що мінімізується, при малих S має характер, "яру". Крім того, виявилось, що дискретизація штрафного функціонала не може виконуватися по тому ж алгоритму, що і дискретизація функціонала $J(v_i)$; потрібна розробка процедур неповної (скороченого) інтеграції і т.д. Точність асимптотичного співвідношення унаслідок неминучий дискретизації варіаційного завдання виявляється невисокою. Щоб в деякій мірі усунути вказані проблеми, доцільно вирішувати варіаційні задачі, послідовно зменшуючи параметр *Sn* і використовуючи одержане рішення як початкове наближення для наступного етапу. Рішення задачі відразу для малих S приводить до значних похибок. Рішення скінченномірних задач слід проводити, використовуючи методи прямої мінімізації. Треба особливо застерегти від спроб переходу до рішення системи лінійних рівнянь алгебри на основі необхідної умови екстремуму.

Подальше рішення такої системи прямими методами при малих S приводить до принципових помилок із-за поганої обумовленості матриці системи.

Варіаційне формулювання Марков - Німеччини

Як вже наголошувалося, саме наявність умови нестискуваної, з одного боку, і неможливість безпосереднього отримання напруженого стану, з іншого боку, є найбільш істотними недоліками моделі жорстко-пластичного тіла. Один з шляхів рішення цих проблем, заснований на методі штрафних функціоналів, описаний вище. Інший можливий підхід полягає в тому, щоб ввести середній гідростатичний тиск в число шуканих характеристик, тобто розглядати варіаційні завдання щодо можливих швидкостей і можливого середнього гідростатичного тиску. Такі формулювання одержали назву змішаних.

Так само як і при використанні штрафних функціоналів, розглядається безліч *Vf* допустимих швидкостей. На допустимі значення середнього гідростатичного тиску ніяких додаткових умов не накладається.

Хай v_i, σ_{ij} – дійсні швидкості, швидкості деформацій і напруги, тобто виконана тотожність:

$$\sigma_{ij,j} \equiv 0 \tag{3.46}$$

$$div\vec{v} = \xi_{ij}\delta_{ij} = 0 \tag{3.47}$$

Позначимо через v_i^*, - можливі швидкості і швидкості деформацій, через σ_0^* - можливий середній тиск. Помножимо (3.46) на $\left(v_i^* - v_i\right)$, а (3.47) – на і складемо: $\sigma_{ij,j}\left(v_i^* - v_i\right) + \xi_{ij}\delta_{ij}\left(\sigma_0^* - \sigma_0\right) \equiv 0$

Інтегруючи по області Ω, одержуємо:

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}\left(v_i^* - v_i\right)d\Omega + \int_\Omega \xi_{ij}\delta_{ij}\left(\sigma_0^* - \sigma_0\right)d\Omega \equiv 0$$

Перетворимо перший доданок і одержимо:

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}\left(v_i^* - v_i\right)d\Omega = \int_\Omega s_{ij}\left(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}\right)d\Omega + \int_\Omega \sigma_0\delta_{ij}\left(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}\right)d\Omega + \int_{\Gamma_c} f\left|\sigma_\nu\right|\left(\left|\Delta\vec{v}_\tau^*\right| - \left|\Delta\vec{v}_\tau\right|\right)d\Gamma$$

Використовуючи визначальні співвідношення, приходимо до варіаційного рівняння:

$$\int_{\Omega}\frac{2F}{\xi_u}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\sigma_0\delta_{ij}\left(\xi_{ij}^{*}-\xi_{ij}\right)d\Omega+$$

$$+\int_{\Omega}\xi_{ij}\left(\sigma_0^{*}-\sigma_0\right)d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\left(\sigma_\nu\right)\right|\left(\left|\Delta\vec{v}_\tau^{*}\right|-\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|\right)d\Gamma=0 \qquad (3.48)$$

Звернемо увагу на те, що навіть за відсутності тертя рівняння принципово не зводиться до відповідного варіаційного завдання. Ця обставина є загальною для всіх змішаних формулювань. Відсутність екстремальної форми варіаційного принципу істотно ускладнює дослідження і чисельне рішення задач.

Покажемо, що квазіваріаційне рівняння (3.48) фактично є умова стаціонарності деякого функціонала. Представимо v_i^{*}, ξ_{ij}^{*}, σ_0^{*} у вигляді $v_i^{*}=v_i+\delta v_i$,, $\sigma_0^{*}=\sigma_0+\delta\sigma_0$. Тоді (3.48) можна представити у вигляді:

$$\int_{\Omega}\frac{2F}{\xi_u}\delta\xi_{ij}d\Omega=\int_{\Omega}\xi_{ij}\delta_{ij}\delta\sigma_0 d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\sigma_\nu\right|\delta\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|d\Gamma=0$$

Враховуючи, що $\Pi\left(\xi_{ij}^{*}\right)=\int_0^{\xi_{ij}}\frac{2F}{\xi_u}d\xi_{ij}$, одержуємо:

$$\frac{2F}{\xi_u}\delta\xi_{ij}=\frac{\partial\Pi\left(\xi_{ij}\right)}{\delta\xi_{ij}}\delta\xi_{ij}=\delta\Pi\left(\xi_{ij}\right).$$

Приходимо до рівняння:

$$\delta J\left(v_i,\sigma_0\right)=0 \qquad (3.49)$$

де $$J\left(v_i,\sigma_0\right)=\int_{\Omega}\Pi\left(\xi_{ij}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\sigma_0 div\vec{v}d\Omega+\int_{\Gamma_c}f\left|\sigma_\nu\right|\left|\Delta\vec{v}_\tau\right|d\Gamma$$

Підкреслимо, що $\left|\sigma_\nu\right|$, вважається заданою функцією координат.

Умова (3.49) називається умовою стаціонарності функціонала $J\left(v_i,\sigma_0\right)$. Отже, тільки для дійсних полів швидкостей і середнього гідростатичного тиску функціонал $J\left(v_i,\sigma_0\right)$ досягає стаціонарного значення. Очевидно, якщо функціонал володіє екстремальною властивістю, для нього виконано умову стаціонарності; зворотне твердження, взагалі кажучи, невірно. Тому умова стаціонарності розглядається як необхідна умова екстремуму функціонала.

Встановимо зв'язок між екстремальним принципом Лагранжа і стаціонарним пинципом Марков - Германця. Виключимо умову нестискуваної за допомогою методу множників Лагранжа і розглянемо функціонал:

$$J(v_i, \lambda) = J(v_i) + \int_\Omega \lambda div \vec{v} d\Omega .$$

Очевидно, $J(v_i, \lambda)$ співпадає з функціоналом Марков, якщо як множник Лагранжа прийняти середній гідростатичний тиск.

Переваги використання принципу Марков при комп'ютерному моделюванні жорстко-пластичної течії мають двоякий характер. По-перше, зникає необхідність апріорного виконання умови нестискуваної. Більш того, як випливає зі встановленого зв'язку принципів Лагранжа і Марков, поля швидкостей, знайдені з умови $\delta J(v_i, \lambda) = 0$, автоматично задовольняють умові нестискуваної. По-друге, середній гідростатичний тиск визначається, як рішення задачі, тому можна відразу одержати всі компоненти напруженого стану:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + \frac{2F(\xi_{ij})}{\xi_u} \xi_{ij} .$$

Ключовий недолік принципу Марков полягає у відсутності еквівалентного екстремального формулювання. Внаслідок цього для вирішення виникаючих після дискретизації скінченномірних завдань не можна застосовувати ефективні методи прямої мінімізації. Звичайно така система замінюється послідовністю систем лінійних рівнянь алгебри. Матриці цих систем не є позитивно визначеними, що виключає застосування итерациионных і ефективних прямих методів (наприклад, методу Холецкого). Тому практично єдиним підходом до рішення вказаних систем є прямі методи, засновані на ідеї виключення.