

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М.,
Трейтяк В. В.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник

Київ 2017

УДК 004.942 (076.8)
ББК В180 я 7
М 34

Рецензенти :

В. М. Михалевич – д-р техн. наук, проф., зав. каф. вищої математики
Вінницького національного технічного університету;

В.В. Гавриленко – д-р фіз.-мат. наук, проф., Національний
транспортний університет;

С.О. Лук'яненко – д-р техн. наук, проф., Національний технічний
університет України «Київський політехнічний інститут»

*Рекомендовано вченою радою Національного авіаційного
університету (протокол від 17.12.2014 №11).*

Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М., Трейтяк В. В.

М34 Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. – К. :
НАУ, 2017. – 392 с.

У посібнику викладено теоретичні та практичні основи математичного моделювання сучасних систем і процесів. Представлено узагальнену методику математичного моделювання для формалізованого опису, аналізу та різного способу організації математичного моделювання систем і процесів. Особливу увагу приділено можливостям сучасних інформаційних технологій з моделювання, аналізу, синтезу та оптимізації процесів і систем. Наведено приклади та розглянуто особливості використання базового математичного апарату для моделювання технічних систем.

Для студентів напряму підготовки 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірвальні технології», аспірантів, наукових та інженерно-технічних працівників.

**УДК 004.942 (076.8)
ББК В180 я 7**

ISBN 978–966–598–925-7 © Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М.,
Трейтяк В. В.

ЗМІСТ

Вступ	7
УМОВНІ СКОРОЧЕННЯ	10
1. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В СУЧАСНОМУ КОМП'ЮТЕРНОМУ СВІТІ	12
1.1. Інформаційне середовище технічних систем	12
1.2. Роль і місце математичного моделювання в інформаційних технологіях	19
1.3. Завдання досліджень технічних систем.....	23
1.4. Методи моделювання технічних систем.....	25
1.4.1. Класифікаційні ознаки методів моделювання технічних систем.....	26
1.4.2. Математичне моделювання технічних систем.....	29
1.4.3. Імітаційне моделювання технічних систем	30
1.4.4. Інші види моделювання технічних систем	34
1.5. Застосування результатів математичного моделювання.....	36
Запитання та завдання для поточного контролю	39
Підсумки до розділу 1	40
2. СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕСИ ЯК ОБ'ЄКТ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	43
2.1. Поняття про термін «технічна система»	43
2.2. Моделі технічних систем	47
2.3. Об'єкт моделювання – технічна система	53
2.4. Аналіз та класифікація факторів.....	57
2.5. Властивості експериментальних факторів	60
2.6. Методи відбору факторів експериментів	63
Запитання та завдання для поточного контролю	68
Підсумки до розділу 2	69
3. АНАЛІЗ СКЛАДОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ	73
3.1. Класифікація математичних моделей.....	73
3.2. Вимоги до математичних моделей.....	77
3.3. Структурні елементи математичних моделей.....	80
3.4. Параметри математичної моделі.....	82
3.5. Системний підхід до розроблення та аналізу математичної моделі	86
Запитання та завдання для поточного контролю	88
Підсумки до розділу 3	89
4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЗАСОБІВ І ПРОЦЕСУ ВИМІРЮВАННЯ	92
4.1. Математичне моделювання об'єктів вимірювання	98
4.2. Математичне моделювання засобів вимірювання	101
4.3. Математичне моделювання середовища та умов вимірювання	111

Запитання та завдання для поточного контролю.....	119
Підсумки до розділу 4	120
5. УЗАГАЛЬНЕНА МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОГО	
МОДЕЛЮВАННЯ.....	126
5.1. Узагальнені етапи математичного моделювання	126
5.2. Способи організації процесу математичного моделювання	127
5.3. Послідовність математичного моделювання	130
5.4. Постановка задачі математичного моделювання.....	133
5.5. Розроблення концептуальної математичної	
моделі технічної системи	140
Запитання та завдання для поточного контролю.....	145
Підсумки до розділу 5	146
6. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ	
ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ.....	149
6.1. Математичне планування експерименту	149
6.1.1. Етапи планування експерименту.....	151
6.1.2. Вибір основного рівня та інтервалів варіювання.....	153
6.1.3. Кодування факторів і складання матриці планування.....	155
6.1.4. Проведення та оцінювання експериментів.....	157
6.1.5. Побудова регресійної математичної моделі.....	162
6.1.6. Інтерпретація результатів експерименту	166
6.1.7. Особливості отримання рівняння моделі у вигляді	
степеневої функції.....	168
6.1.8. Загальні уявлення про планування другого порядку	169
6.1.9. Використання планування експерименту для	
процесу вимірювання величин	176
6.2. Елементи теорії дослідження операцій	185
6.2.1. Основи теорії оптимізації... ..	185
6.2.2. Графоаналітичний метод вирішення задач	
математичного програмування	188
6.2.3. Методи розв'язання багатокритерійних задач	
оптимізації.....	196
6.2.4. Об'ємне планування роботи технічних систем	202
6.2.5. Задача про мінімальне завантаження обладнання	203
6.2.6. Приклад прийняття рішень в умовах невизначеності ...	204
6.3. Елементи теорії множин і графів.....	207
6.4. Елементи теорії масового обслуговування	212
6.4.1. Визначення систем масового обслуговування	217
6.4.2. Типи систем масового обслуговування	221
6.4.3. Математичний опис системи масового обслуговування	222
6.4.4. Марківський випадковий процес	225
6.4.5. Потоки подій	227
6.4.6. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів	228
6.4.7. Приклади систем масового обслуговування.....	232
6.4.7.1. Одноканальна система масового	
обслуговування з відмовами	232

6.4.7.2. Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням	237
6.4.7.3. Багатоканальна система масового обслуговування з очікуванням	239
6.4.7.4. N-канальна СМО з відмовами (задача Ерланга)	240
6.5. Елементи теорії розкладів	247
6.5.1. Формування розкладу роботи технічних систем методами лінійного та динамічного програмування.....	250
6.6. Елементи теорії надійності в моделюванні технічних систем	256
6.6.1. Характеристики надійності технічних систем	263
6.6.2. Види відмов та резервування технічних систем	268
Запитання та завдання для поточного контролю	277
Підсумки до розділу 6	279
7. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ	283
7.1. Особливості застосування комп'ютерного моделювання в навчальному процесі	283
7.2. Аналіз сучасних пакетів прикладних програм математичного моделювання.....	286
7.3. Аналіз сучасних САЕ-систем комп'ютерного моделювання	292
7.3.1. Класифікаційні групи систем комп'ютерного моделювання.....	292
7.3.2. Типові задачі комп'ютерного моделювання	296
7.3.3. Функціональні можливості сучасних інформаційних систем комп'ютерного моделювання	298
7.4. Застосування інструментального засобу Origin Pro для математичного моделювання технічних систем	308
Запитання та завдання для поточного контролю	330
Підсумки до розділу 7	331
8. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ	334
Лабораторна робота 1 Вивчення графічних можливостей пакету Origin Pro	336
Лабораторна робота 2 Моделювання сигналів акустичної емісії залежно від швидкості процесів руйнування композиційного матеріалу.....	340
Лабораторна робота 3 Дослідження закономірностей руйнування композиційного матеріалу залежно від швидкості процесів руйнування його елементів	345
Лабораторна робота 4 Моделювання сигналів акустичної емісії залежно від дисперсності властивостей композиційного матеріалу	349

Лабораторна робота 5	Визначення статистичних характеристик руйнування композиційного матеріалу залежно від швидкості процесів руйнування його елементів	354
Лабораторна робота 6	Моделювання та прогнозування розвитку процесу в часі	358
Лабораторна робота 7	Вибір значущих факторів методом рангової кореляції	363
Лабораторна робота 8	Аналіз даних проведених експериментів	373
Лабораторна робота 9	Дослідження технічної системи за допомогою повного факторного експерименту	377
ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК	385
ЛІТЕРАТУРА ТА ПОСИЛАННЯ	397
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК	403

ВСТУП

Створення та експлуатація сучасних комп'ютеризованих виробництв, технологій, приладів та систем на промислових підприємствах і їх експлуатація є не тільки функцією фахівців з автоматизованого управління та фахівців з інформаційних технологій. Вони потребують різних форм участі практично всіх груп інженерно-технічного та адміністративно-управлінського персоналу підприємств та організацій.

Сучасний інженер, який працює як дослідник чи проектувальник технічних систем, об'єктів і процесів або працює як користувач автоматизованих та інформаційних систем повинен мати глибокі теоретичні й практичні знання з математичного моделювання. Використання сучасних інформаційних технологій для моделювання технічних об'єктів, систем і процесів ґрунтується на математичних методах моделювання, які дозволяють моделювати виробничі ситуації, аналізувати наявні види інформації та виробляти оптимальні рекомендації щодо дій, які забезпечують найефективніше досягнення мети.

Підготовка фахівців на межі двох наук – прикладної інженерії та розділів прикладної математики – надає майбутнім інженерам можливість ухвалювати оптимальні рішення, підвищувати ефективність їх обґрунтувань та бути провідниками ефективних засобів вирішення сучасних наукових і виробничих завдань.

Впровадження математичних методів у різні інженерні дисципліни надає можливість користуватися новими, як правило, дуже ефективними засобами досліджень, розробки, виробництва та експлуатації технічних систем. Зростання математичної культури фахівців у відповідних інженерних галузях знань приводить до поглибленого вивчення загальних теоретичних положень та методів розрахунків за допомогою прикладної математики і, у цілому, достатньо та доступно висвітлена у виданих навчальних посібниках.

Разом з тим, наукова та виробнича практика доводить, що самих математичних знань, на жаль, не достатньо для вирішення того чи іншого наукового або прикладного завдання. У вищому технічному

навчальному закладі ще обов'язково потрібно отримати теоретичні і практичні навички з формалізації конкретного завдання, математичного опису необхідної інформації, послідовності математичного моделювання, що потребує освоєння методики математичного моделювання та використання отриманих моделей для аналізу, синтезу, розрахунку та оптимізації технічних систем за допомогою сучасних інформаційних технологій.

Сьогодні в науково-технічній та навчальній літературі студентам і фахівцям доводиться часто зустрічатися з різною інтерпретацією таких фундаментальних понять, як система, модель, моделювання. Подібна неоднозначність не свідчить про помилковість одних і правильність інших визначень термінів, а відображає залежність предмета розгляду як від галузі функціонування об'єкта, так і від службового призначення та його цілей. Відмінною особливістю даного посібника є спроба авторів інтегрувати питання математичного моделювання в завдання, які вирішуються протягом усього життєвого циклу технічної системи за допомогою сучасних інформаційних технологій.

Навчальний посібник деякою мірою ліквідує відсутність навчальної літератури з математичного моделювання систем і процесів для студентів вищих навчальних закладів України спеціальності «Інформаційно-вимірювальні системи» та може бути корисним студентам інших технічних спеціальностей. Сучасний інженер повинен використовувати математику не тільки як метод розрахунку, а й як метод мислення, формалізації та формування інформаційних понять. Доповнюючи досвід інженера та його інтуїцію, формалізовані методи математичного моделювання створюють фундаментальну базу для розробки та експлуатації технічних систем, використання сучасних інтегрованих автоматизованих систем і значно підвищують якісний рівень підготовки інженерів, інженерів-дослідників та наукових співробітників.

У більшості технічних спеціальностей навчальним планом передбачено курс «Математичне моделювання систем і процесів», який має ознайомити майбутніх інженерів із деякими розділами прикладної математики і навчити їх практичним основам математичного моделювання за допомогою сучасних інформаційних технологій, підготувати студентів до подальшого вивчення базових інженерних дисциплін. Запропонований навчальний посібник може

бути використаний для більшості інженерних спеціальностей, оскільки він містить базову інформацію для навчального етапу вивчення математичного моделювання з прив'язкою до специфіки технічних систем конкретної інженерної спеціальності.

У першому розділі розглянуто взаємозв'язок математичного моделювання з сучасними інформаційними технологіями. Вивчаючи цей розділ, треба зрозуміти зміст основних понять і визначень інформаційних технологій та методів моделювання технічних систем. Інформаційний матеріал другого і третього розділів надає можливість студентам систематизувати, класифікувати та формалізувати більшість термінів і понять об'єкта «технічна система» та самих математичних моделей.

Четвертий розділ розкриває специфіку аналізу, формалізації та математичного моделювання об'єктів, засобів та процесу вимірювання. П'ятий розділ посібника представляє систематизовану авторами методику моделювання технічних систем, яка застосовувалась як у науковій, так і в інженерній практиці.

Шостий розділ надає узагальнену інформацію про використання базового математичного апарату прикладної математики для подальшої формалізації задачі та її математичного моделювання. Сьомий розділ знайомить читачів із практичними можливостями сучасних прикладних пакетів моделювання та САЕ-системами.

До восьмого розділу входять апробовані в навчальному процесі лабораторні роботи з математичного моделювання реальних процесів і технічних систем.

Розділи посібника логічно пов'язані між собою, містять основні поняття та визначення, необхідні для вивчення курсу «Математичне моделювання систем і процесів». Список літератури в кінці посібника містить науково-технічні книги та навчальні посібники, використані авторами і рекомендовані для подальшого поглибленого вивчення.

Автори висловлюють подяку за допомогу у підготовці навчального посібника колезі по роботі, науковому співробітнику НАУ Захарчук Т. М.

УМОВНІ СКОРОЧЕННЯ

АСТПВ	– автоматизована система технічної підготовки виробництва;
АСУП	– автоматизована система управління підприємством;
АСУ ТП	– автоматизована система управління технологічними процесами;
АЦП	– аналого-цифровий перетворювач;
ВЗВ	– варіанти задоволення вимог;
ИПИ	– информационная поддержка изделий;
ІАС	– інтегрована автоматизована система;
ІТ	– інформаційні технології;
КМВ	– концептуальна модель варіантів;
МПЕ	– математичне планування експерименту;
ОДР	– область допустимих рішень;
ПФЕ	– планування факторного експерименту;
САПР	– система автоматизованого проектування;
СВ	– структурні варіанти;
СМО	– системи масового обслуговування;
СУБД	– системи управління базою даних;
ЦАП	– цифро-аналоговий перетворювач;
ЦВП	– цифровий вимірювальний перетворювач;
ЦКП	– центральне композиційне планування;
API	– Application Programming Interface (прикладний програмний інтерфейс);
ARIS	– Architecture of Integrated Information Systems (група інструментальних засобів IDS Sheer «ARIS»);
CAD	– Computer Aided Design (комп'ютерне проектування);
CAE	– Computer Aided Engineering (комп'ютерний інженерний аналіз);
CALS	– Computer Aided Acquisition and Lifecycle Support

	(підтримка безперервних постачань і життєвого циклу);
CAM	– Computer Aided Manufacturing (комп'ютерне виготовлення);
CIM	– Common Information Model (спільна інформаційна модель);
CRM	– Customer Relationship Management (керування відносинами з клієнтами);
CRT	– традиційний тип проекторів;
DFD	– Data Flow Diagrams (моделювання потоків даних);
Electronics Wordbench	– бібліотека електронних компонентів;
ER-діаграма	– узагальнена схема взаємодії об'єктів без деталізації послідовності виконання функцій;
ERP	– Enterprise Resource Planning (планування та управління підприємством);
eEPC	– Extended Event-driven Process Chain (розширена модель ланцюга процесів, яка керує подіями);
IDEF0	– Function Modeling (методологія функціонального моделювання);
IDEF3	– моделювання потоків робіт;
LabView	– система автоматизованого проектування;
MathCAD	– програмний засіб для виконання різноманітних математичних і технічних розрахунків;
MatLab	– сучасний програмний засіб для числового моделювання, розрахунків і розроблення алгоритмів аналізу та візуалізації даних;
PDM	– Product Data Management (керування даними про виріб);
PLM	– Product Life-cycle Management (керування життєвим циклом виробу);
OLE	– Object Linking and Embedding (технологія поєднання та впровадження об'єктів в інші документи та об'єкти);
SCM	– Supply Chain Management (керування ланцюгами постачань);
UML	– Unified Modeling Language (інструментальний засіб Rational Rose)

1. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В СУЧАСНОМУ КОМП'ЮТЕРНОМУ СВІТІ

1.1. Інформаційне середовище технічних систем

За останні двадцять років світове промислове виробництво зазнало низки кардинальних змін. Ці зміни багато в чому зумовлені розвитком інформаційних технологій, що ґрунтуються на сучасних комп'ютерних і комунікаційних засобах. Інтегрованим результатом змін, що відбулися в промисловості, визнано глобалізацію, під якою розуміють інтеграцію регіональної, національної та галузевої економіки [1– 3].

Створені в сучасних умовах інформаційні технології, з одного боку, намагаються наздогнати зростаючі вимоги до них, а з другого – самі є ініціаторами нових ідей. Реалізація цих ідей зумовила появу нових форм промислових виробництв, комплексної автоматизації та інтеграції основних функцій життєвого циклу технічних систем на основі ISO-стандартів та інформаційних технологій.

Комплексна автоматизація проектної діяльності розробників, виробників та експлуатаційників технічних систем базується на використанні сучасних інформаційних і телекомунікаційних технологій та інтегрованих автоматизованих систем (ІАС). Саме використання ІАС дозволяє комплексно автоматизувати дослідницькі, проектні та виробничі процеси. Прикладом такої системи є зображена на рис. 1.1 структурно-функціональна схема автоматизованої системи технічної підготовки виробництва (АСТПВ), яку автори розробляли протягом декількох років [3; 4].

Коротко розглянемо історичний ракурс термінології та понять інформаційних технологій.

Важливість комплексного підходу до розроблення технічних систем почали усвідомлювати ще в 70-х роках минулого століття. У 1980-х роках ідеї комплексності знайшли відображення у створенні гнучких виробничих систем [5; 6]. Іншим втіленням цих ідей стала концепція єдиної інформаційної підтримки всіх етапів життєвого циклу виробів.

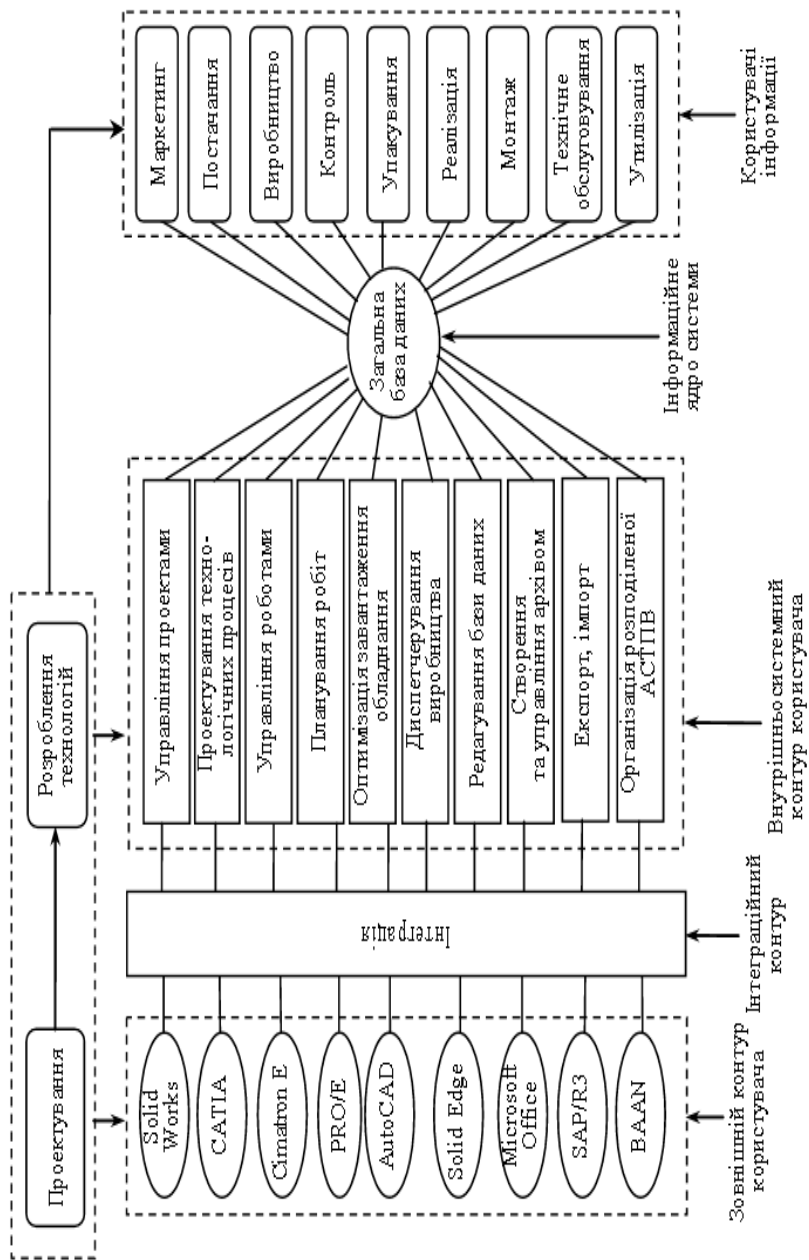


Рис. 1.1. Структурно-функціональна схема інтегрованої АСТІВ

Поняття життєвого циклу виробів охоплює всі стадії виробу – від вивчення ринку перед проектуванням до утилізації виробу після його використання.

Фахівці з прогнозування розвитку промисловості вже давно передбачали, що процеси розроблення, підготовки виробництва, виготовлення виробу та його експлуатації підпорядковуються одним законамирностями і можуть бути формалізовані. Тобто їх можна об'єктивно розраховувати, моделювати та оптимізувати. Технічно ця можливість стримувалася дефіцитом можливостей комп'ютерів і засобів комунікацій. На організаційному й науковому рівнях досить добре описано лише деякі з процесів, а їх системна інтеграція мала стільки ж видів і форм, скільки самих промислових підприємств.

Комп'ютерно-інформаційна підтримка етапів життєвого циклу виробів знайшла своє відображення в методології та стандартах CALS-технологій [7; 9]. Відповідно до концептуальних положень CALS-технологій, реальні виробничі процеси відображаються у віртуальному інформаційному середовищі, у якому опис виробу подано у вигляді повного електронного опису, а середовище його створення та експлуатації – у вигляді систем моделювання процесів. Усі три складові (визначення виробу, середовища його створення й середовища експлуатації) не тільки взаємозалежні, а й безперервно розвиваються впродовж життєвого циклу виробу.

Існують різні розшифрування абревіатури CALS. Методологія CALS зародилася в департаменті оборони США в середині 1980-х років. Історія її розвитку детально викладена у деяких вітчизняних та іноземних виданнях [10; 11]. Натепер у технічній літературі (як зарубіжній, так і вітчизняній) під терміном CALS розуміють Continuous Acquisition and Lifecycle Support – безперервну інформаційну підтримку життєвого циклу виробу і називають цю підтримку CALS-технологіями. У російській технічній та науковій літературі поряд з терміном CALS використовують рівнозначний російський термін ИПИ (информационная поддержка изделий) [12; 13].

У галузі технічної підготовки виробництва, яка охоплює концептуальні розробки технічних систем, конструкторське проектування і технологічну підготовку виробництва, принципи ИПИ/CALS знайшли своє відображення у створенні провідними західними розробниками програмних систем, що забезпечують комплексну інформаційну підтримку етапів життєвого циклу виробу на основі концеп-

пції PLM (Product Lifecycle Management – управління життєвим циклом виробу). Цими провідними розробниками є компанії Dassault Systemes (Франція), Siemens PLM Software (Німеччина) та компанія PTC (США) [14; 15].

Відповідно до визначення CIMdata, відомого у світі незалежного експерта з проблем PLM [16], «PLM – це стратегічний підхід до ведення бізнесу, що використовує набір сумісних рішень для підтримки загального подання інформації про продукт у процесі його створення, реалізації та експлуатації, у середовищі розширеного підприємства, починаючи від концепції створення продукту до його утилізації – при інтеграції людських ресурсів, процесів та інформації».

На підставі цього визначення можна виокремити три основні вимоги PLM-рішень до розроблення, виготовлення та експлуатації технічних систем:

- можливість універсального, безпечного й керованого засобу управління та використання інформації, що визначає технічну систему та її структурні елементи;
- підтримка цілісності інформації, що визначає технічну систему, протягом усього її життєвого циклу;
- управління та підтримка всіх процесів, які реалізуються під час створення, розподілу й використання інформації.

Концепцію PLM (рис. 1.2) розробив науково-дослідний центр компанії Dassault Systemes [17]. В основу розробки цієї концепції покладено такі вимоги:

Інтеграція інформації етапів життєвого циклу технічної системи. Усі види діяльності та предмети, що являють собою компоненти життєвого циклу технічної системи, мають знайти універсальне інформаційне ядро, що забезпечує єдине подання промислового бізнесу як системи продуктів, процесів, ресурсів та знань. Усі три компоненти повинні ґрунтуватися на єдиній схемі опису (специфікування).

Асоціативність. Між усіма компонентами життєвого циклу технічної системи мають підтримуватися стійкі й керовані причинно-наслідкові зв'язки. Будь-який елемент опису продукту, процесу, ресурсу чи знань має зберігати своє походження й умови існування. Це основний радикальний захід для скорочення витрат на випуск нових, конкурентоспроможних товарів.

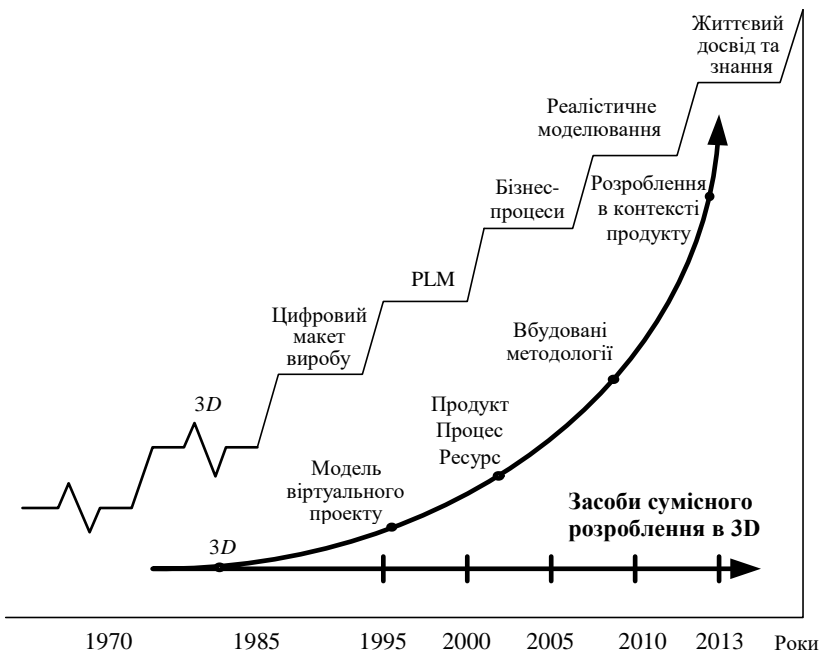


Рис. 1.2. Концепція PLM-рішень для комплексної інформаційної підтримки етапів життєвого циклу виробів

Сертифікованість. Електронна модель виробу повинна мати властивості контролепридатності. Інструкція контролю – це вид процесу, специфікований за тими самими законами, що і продукт, і є невід’ємною частиною віртуального проекту виробу. Вона має існувати й діяти на всіх етапах життєвого циклу технічної системи. Дані про виріб повинні існувати й розвиватися разом із процедурами контролю, пов’язаними з ними.

Умовна інваріантність. Більшість технічних систем має велику кількість версій, модифікацій, варіантів виконання, залежних від певних умов.

Різноманітність засобів надання інформації про систему. Оскільки змістовна частина проекту технічної системи в електронному вигляді збільшується і покриває дедалі більше галузей знань, то і подання його має бути селективним, тобто вибіркоvim за певним критерієм. Відповідно до цього структура даних повинна мати ознаки (атрибути) ролі, завдання і рівня допуску користувача.

Оскільки існують стійкі (стандартні) ролі користувачів, то мають бути передбачені відповідні стандартні форми подання проекту:

- інженерна – для розробників;
- презентаційна – для відвідувачів;
- експлуатаційна – для операторів;
- маркетингова – для публікацій та продажу тощо.

Програмні додатки, що працюють з електронним проектом, повинні бути чутливі до ролі, в якій перебуває користувач.

Базовими системами, що забезпечують реалізацію стратегії PLM, є системи класів CAD/CAM/CAE (Computer Aided Design – комп'ютерне проектування / Computer Aided Manufacturing – комп'ютерне виготовлення / Computer Aided Engineering – комп'ютерний інженерний аналіз) та PDM (Product Data Management – керування даними про виріб). Відповідно до концепції Dassault Systemes системи класів ERP (Enterprise Resource Planning – планування ресурсів підприємства), SCM (Supply Chain Management – управління ланцюгами постачань) і CRM (Customer Relationship Management – управління відносинами із замовниками) не належать до засобів підтримки PLM-рішень, а забезпечують разом з PLM ефективне функціонування промислових підприємств.

Базові засоби підтримки PLM-рішень через свою універсальність можуть використовуватися на різних етапах життєвого циклу технічної системи (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Схема етапів життєвого циклу технічної системи

Найхарактернішим прикладом є CAD-система, яка може застосовуватись як на етапі проектування, так і на етапі технологічної підготовки виробництва під час проектування засобів технологічної оснастки. При цьому CAD/CAM- і CAE-системи стають засобами автоматизації виконання різних проектних процедур з розроблення технічних систем, а PDM-система – засобом для реалізації процесів керування інформацією на всіх етапах життєвого циклу технічної системи (рис. 1.4). Разом з тим PDM-система є базовим засобом, за допомогою якого реалізується інтегроване інформаційне середовище для всіх етапів життєвого циклу технічної системи.

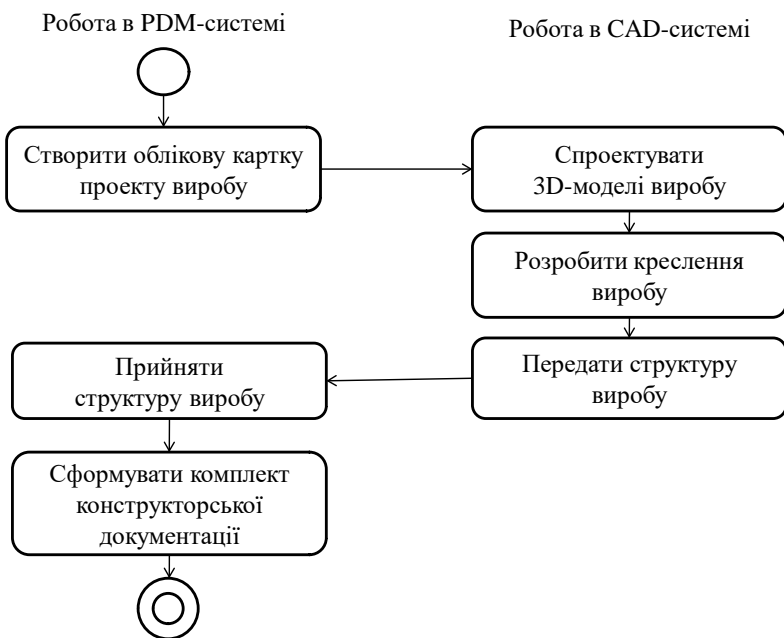


Рис. 1.4. Фрагмент загальної послідовності етапів конструкторського проектування з використанням PDM- і CAD-систем

Перетворення структури проекту в PDM-системі полягає в тому, що вхідні об'єкти розміщуються (зі збереженням зв'язків між ними) у відповідних їм класах «Складальні одиниці», «Деталі», «Моделі», «Креслення», «Стандартні вироби» та ін.

Відзначимо, що таке перетворення структури проекту (як і формування текстових конструкторських документів) не є «штатною» функцією PDM-системи, а реалізується за допомогою спеціального додатка PDM-системи, а саме – засобами API-інтерфейсів (рис. 1.5).

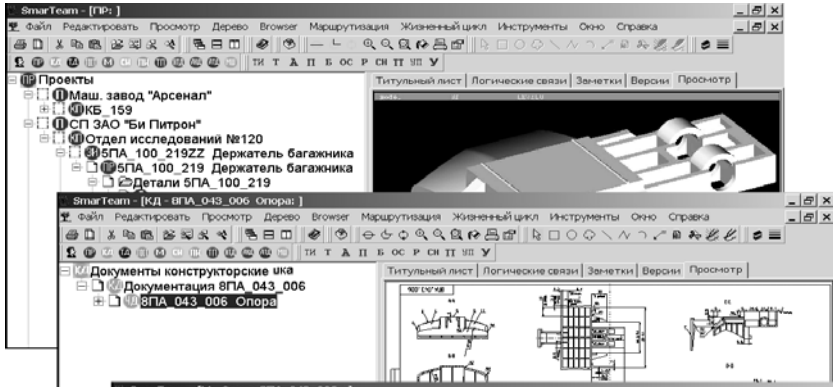


Рис. 1.5. Результаты анализа структуры проекта
засобами PDM-системи ENOVIA SmarTeam

1.2. Роль і місце математичного моделювання в інформаційних технологіях

У чому ж суть нових інформаційних технологій та які конкретні причини їх виникнення? Основним джерелом системи збирання, передавання, перетворення, зберігання та подання в зручному вигляді різної інформації є комп'ютери. Інформація створюється для використання та навчання людей, які ухвалюють рішення у різних сферах професійної діяльності та в побуті.

Разом із тим для професійного використання комп'ютера інформацію необхідно представити у формалізованому вигляді. Тому інформаційні технології завжди потребують формалізації подання даних. Отже, впровадження нових інформаційних технологій означає «просування» формалізованих методів у нові сфери використання.

Які ж формалізовані засоби дали можливість використовувати інформаційні технології у нових, далеких від математики сферах?

Передусім, це мови та системи програмування, системи керування базами даних, засоби подання текстової та графічної інформації, засоби діалогу людини з комп'ютером. Це «зовнішня» причина виникнення нових інформаційних технологій. «Внутрішня» причина – це потреба в розвитку науки, техніки та технологій, тобто в традиційних методах отримання нової інформації.

Наука з прадавніх часів збирає та обробляє інформацію. Наукові методи пізнання – одна з найдавніших інформаційних технологій. Більше того, це найдосконаліші з інформаційних технологій, оскільки наукові методи – це методи якісного перетворення інформації. Але традиційно науковий метод є індивідуальним, повільним методом оброблення інформації на відміну від індустріального методу. Еволюція самої науки потребує нової інформаційної технології.

Потужним стимулятором наукового методу пізнання є використання системного методу, поєднання аналізу та синтезу, використання методів математичного моделювання.

Математичне моделювання з давніх часів використовувалось у фізиці для опису реального світу та методів математичного дослідження моделей, отримання якісних та кількісних властивостей явищ і процесів, що вивчаються. Одночасно культура математичного моделювання та аналізу поширилась на інші природничі науки, упровадилася в інженерну справу та у відповідні навчальні дисципліни.

Високий рівень формалізації мають математичні абстрактні методи, які добре поєднуються зі схемним зображенням процесів і систем.

Щодо конкретної модельованої системи, розробнику математичної моделі допомагають лише ті математичні схеми, які пройшли апробацію для певного класу систем і показали ефективність у прикладних дослідженнях на комп'ютері. Ці схеми отримали назву **типових математичних схем** [18].

Уведення поняття «типова математична схема» дозволяє розглядати математику не як метод розрахунку, а як метод мислення, як засіб формулювання понять, що є найбільш важливим для переходу від словесного опису системи до формального подання процесу її функціонування у вигляді деякої математичної моделі. При користуванні типовою математичною схемою дослідник технічної системи, передусім, повинен цікавитися питаннями адекватності відображення у вигляді конкретних схем реальних процесів у

досліджуваній системі, а не можливістю отримання відповіді (результату рішення) на конкретне питання дослідження.

Наприклад, подання процесу функціонування інформаційно-обчислювальної системи колективного користування у вигляді мережі схем масового обслуговування дає змогу більш повно описати процеси, що відбуваються в системі. Через складні закони розподілу вхідних потоків і потоків обслуговування такі схеми не дозволяють отримувати результати у явному вигляді.

Типову математичну схему визначають як ланку при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування технічної системи з урахуванням впливу навколишнього середовища. Тобто при формалізації процесу функціонування технічних систем наявний ланцюжок: *«описова модель – типова математична схема – математична модель»*.

Під час практичного моделювання технічних систем на початкових етапах їх дослідження раціонально використовувати такі типові математичні схеми: диференціальні рівняння, кінцеві та ймовірнісні автомати, системи масового обслуговування, мережі Петрі та ін.

Типові математичні схеми мають переваги в наочності та простоті при значному зменшенні можливостей їх застосування. Так, якщо при дослідженні технічних систем не враховуються випадкові фактори (детерміновані моделі), то в математичному моделюванні застосовуються диференціальні, інтегральні, інтегродиференціальні та інші рівняння. Для моделювання систем, які функціонують у дискретному часі, рекомендують застосовувати математичний апарат і типові математичні схеми теорії кінцевих автоматів. Під час моделювання систем з урахуванням часу (дискретні моделі) та випадкових факторів (стохастичні моделі) застосовують ймовірнісні автомати. Для подання таких систем у неперервному часі використовують системи масового обслуговування, а для подання поведінки систем і процесів у реальному часі – імітаційне моделювання [19].

Наведені типові математичні схеми не можуть описати і формально подати всі процеси, які відбуваються у більшості технічних систем. Наприклад, для опису складних інформаційно-вимірювальних систем і процесів, що в них відбуваються, перспективним є застосування агрегативних моделей [20; 21].

Агрегативні моделі дозволяють описати певну кількість об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів. Саме за агрегативного опису складний об'єкт (технічна система) поділяється на кінцеву кількість частин (підсистем) зі збереженням при цьому зв'язків, які забезпечують взаємодію цих частин.

Очевидно, що для побудови математичних моделей процесів функціонування систем і самих систем (технічних систем) є такі основні типові математичні схеми:

- 1) неперервно-детермінована (математичний апарат – диференціальні рівняння);
- 2) дискретно-детермінована (кінцеві автомати);
- 3) дискретно-стохастична (імовірнісні автомати);
- 4) неперервно-стохастична (системи масового обслуговування, імітаційне моделювання);
- 5) мережева (мережі Петрі, Е-мережі та ін.);
- 6) універсальна чи комбінована (агрегативні моделі).

Типові математичні схеми та приклади їх практичного використання під час математичного моделювання в середовищі інформаційних технологій змістовно і повною мірою подано в навчальному посібнику [18].

Застосування аналізу під час проектування технічних систем зумовило постановку завдання синтезу системи із заданими можливостями. Проектувальника вже не задовольняє аналіз лише одного варіанта системи, він намагається порівняти різні альтернативи системи, щоб обрати найбільш оптимальну, а це вже спроба розв'язання задачі синтезу. При цьому виникають такі питання:

- де взяти опис багатьох можливих варіантів системи;
- як сформулювати цілі, заради яких створюється система та умови її функціонування;
- як серед усіх можливих варіантів системи знайти «найбільш відповідну поставленому завданню».

Практика підтверджує, що окремі фахівці (інженер, математик, програміст) не можуть самостійно вирішити ці питання. Це потребує сумісного формулювання завдання синтезу технічної системи і її чіткого формального подання, бо інакше не можливе використання математичних моделей.

Отож, для постановки та розв'язання завдання синтезу (яке постійно ставиться інженерами для розроблення та використання технічних систем) потрібен системний підхід, тобто необхідні спеціалісти-інженери, які володіють системним аналізом і математичним мисленням.

Під час вирішення дослідницьких, проектних, управлінських та інших завдань у наведеній постановці треба вміти використовувати методи математичного моделювання. Тому стає очевидною ключова роль математичного моделювання у сучасних інформаційних технологіях, які автоматизують процес розроблення, аналізу та експлуатації технічних систем.

1.3. Завдання досліджень технічних систем

Найважливішими для дослідження складних технічних систем є задача аналізу та завдання синтезу. Розв'язуючи задачу аналізу за відомою структурою й відомими параметрами системи, вивчають її поведінку, тобто досліджують властивості системи та її характеристики. Задача синтезу полягає у з'ясуванні структури й головних параметрів системи за її заданими властивостями. Обидві задачі взаємно зворотні, тому їх розв'язують здебільшого спільно, зокрема задачі синтезу як складніші найчастіше розв'язують, використовуючи результати розв'язання задач аналізу.

Аналіз – це процес дослідження властивостей, притаманних системі.

Синтез – це процес створення функцій та структур, необхідних і достатніх для досягнення певних результатів. Відшуковуючи функції, які реалізовує система, знаходять деяку абстрактну систему, про яку відомо лише те, що вона функціонуватиме.

Результат аналізу – створення моделі процесів, що відбуваються в складних системах, і встановлення закономірностей, притаманних процесам і системам. Моделі виявляють причинно-наслідкову природу процесів і визначають залежності між їх характеристиками та параметрами систем. Саме в цьому й полягає пізнавальна цінність аналізу. Прикладну цінність зумовлює застосування результатів аналізу для постановки задач синтезу (конструювання), які виникають під час проектування складних систем.

Кожну систему у ієрархії систем можна розглядати в двох аспектах – як елемент широкої системи і як сукупність взаємопов'язаних

елементів. Тому аналізувати її можна двома способами – мікроаналізом та макроаналізом.

Мікроаналіз – це вивчення і моделювання структури системи та властивостей її елементів. Його часто можна замінювати дослідженням функцій елементів і процесу функціонування системи.

Макроаналіз спрямовують на систему загалом – її властивості, поведінку, взаємодію з навколишнім середовищем. Його наслідком є макромодель системи, яку часто розглядають у вигляді «чорної скриньки». Це образне поняття означає, що внутрішня будова системи невідома. Відомі лише зв'язки системи з навколишнім середовищем і зміна на її виходах залежно від вхідних дій. На підставі цього отримують уявлення про властивості й внутрішню будову системи. Таке дослідження та моделювання називають методом «чорної скриньки».

Зображення реального об'єкта як системи та використання системних понять під час його моделювання є основою принципів дослідження, названих системним аналізом.

Системний аналіз передбачає послідовний перехід від загального до часткового, коли в основі розгляду є мета, а досліджуваній об'єкт виділяють із навколишнього середовища. Такий спосіб дає змогу розв'язати проблему побудови складної системи з урахуванням усіх факторів і можливостей, пропорційних їх значущості, на всіх етапах дослідження системи та побудови її моделі. Системний аналіз ґрунтується на розгляді системи як інтегрованого цілого, який розпочинають із головного: формулювання мети функціонування. Використання системного аналізу допомагає не тільки побудувати модель реального об'єкта, а й на її основі вибрати необхідну кількість інформації в реальній системі, оцінити показники її функціонування і завдяки цьому знайти найефективніший варіант побудови та оптимальний режим функціонування реальної технічної системи.

Ефективне розв'язання сучасних завдань моделювання технічних систем можливе тільки за умов загальної методології – системного аналізу. У сучасному автоматизованому виробництві найважливішим інструментом системного аналізу є програмне моделювання в інформаційному середовищі САЕ-систем.

При цьому важливу роль у процесі моделювання відіграє дослідник. Постановка завдання з побудовою змістовної моделі реального об'єкта є творчим процесом і ґрунтується на евристиці. У цьому сенсі

не існує формальних шляхів вибору оптимального методу моделювання. Часто немає формальних методів, які дозволяють досить точно описати реальний процес. Тому вибір тієї чи іншої аналогії, вибір того чи іншого математичного апарату моделювання цілком ґрунтується на наявному досвіді дослідника. Помилка дослідника може призвести до хибних результатів моделювання [22; 23].

1.4. Методи моделювання технічних систем

Досліджуючи або проектуючи технічну систему, застосовують різні методи моделювання систем. Розглянемо детальніше особливості методів моделювання, які найчастіше використовують.

Залежно від характеру використаного математичного апарату можна виокремити два основні розділи математики – класичну та прикладну.

Методи класичної математики, що включають математичний аналіз і теорію ймовірності, не є основними для використання в наукових дослідженнях і для розв'язання проектних завдань під час аналізу та синтезу технічних систем.

Група методів прикладної математики значно ширша за номенклатурою і частіше використовується інженерами-практиками. Методи, які до неї входять, неоднорідні за складом елементарних розрахунків, способом їх реалізації, використаними прийомами тощо. Їх можна класифікувати так: теорія множин, теорія графів, математична логіка, теорія ухвалення рішень, лінійне та оптимальне програмування, теорія розкладів, теорія масового обслуговування, теорія надійності, експертні методи оцінювання та ін.

Вибір методу математичного моделювання безпосередньо залежить від ступеня деталізації об'єкта, закону функціонування елементів системи і зовнішніх дій. Залежно від ступеня деталізації опису складних систем та їх елементів можна вирізнити три основні рівні моделювання:

1) структурне моделювання систем із застосуванням моделей і спеціалізованих мов моделювання, теорій множин, алгоритмів, формальних граматик, графів, масового обслуговування, статистичного моделювання;

2) логічне моделювання функціональних систем, моделі яких зображують у вигляді логічних рівнянь і будують, застосовуючи дво- або багатозначну алгебру логіки;

3) кількісне моделювання (аналіз) принципових схем елементів складальних систем, моделі яких зображують у вигляді систем нелінійних алгебричних або інтегродиференціальних рівнянь і досліджують, застосовуючи методи функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики.

Сукупність моделей об'єкта на структурному, логічному й кількісному рівнях моделювання являє собою ієрархічну систему, яка показує взаємозв'язок різних аспектів опису об'єкта та забезпечує системну пов'язаність його елементів і властивостей на всіх стадіях процесу проектування.

1.4.1. Класифікаційні ознаки методів моделювання технічних систем

Однією з основних ознак класифікації видів моделювання є ступінь повноти моделі, за яким поділяють на повні, неповні та наближені моделі. В основу повного моделювання покладено абсолютну подібність як у часі, так і в просторі. Для неповного моделювання характерна часткова подібність моделі з досліджуваним об'єктом. Наближене моделювання – це приблизна подібність, за якої певні етапи технічної системи зовсім не моделюються [24; 25]. Класифікацію видів моделювання технічних систем у загальному вигляді зображено на рис. 1.6.

Залежно від характеру досліджуваних процесів у технічній системі всі види моделювання можна поділити на детерміновані та стохастичні, статичні та динамічні, дискретні, безперервні та дискретно-безперервні.

Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, з яких виключаються будь-які випадкові впливи.

Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні процеси і події. При цьому аналізують можливість реалізації випадкового процесу та оцінюють середні характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.

Статичне моделювання описує поведінку об'єкта в певний момент часу, а динамічне – за весь час.

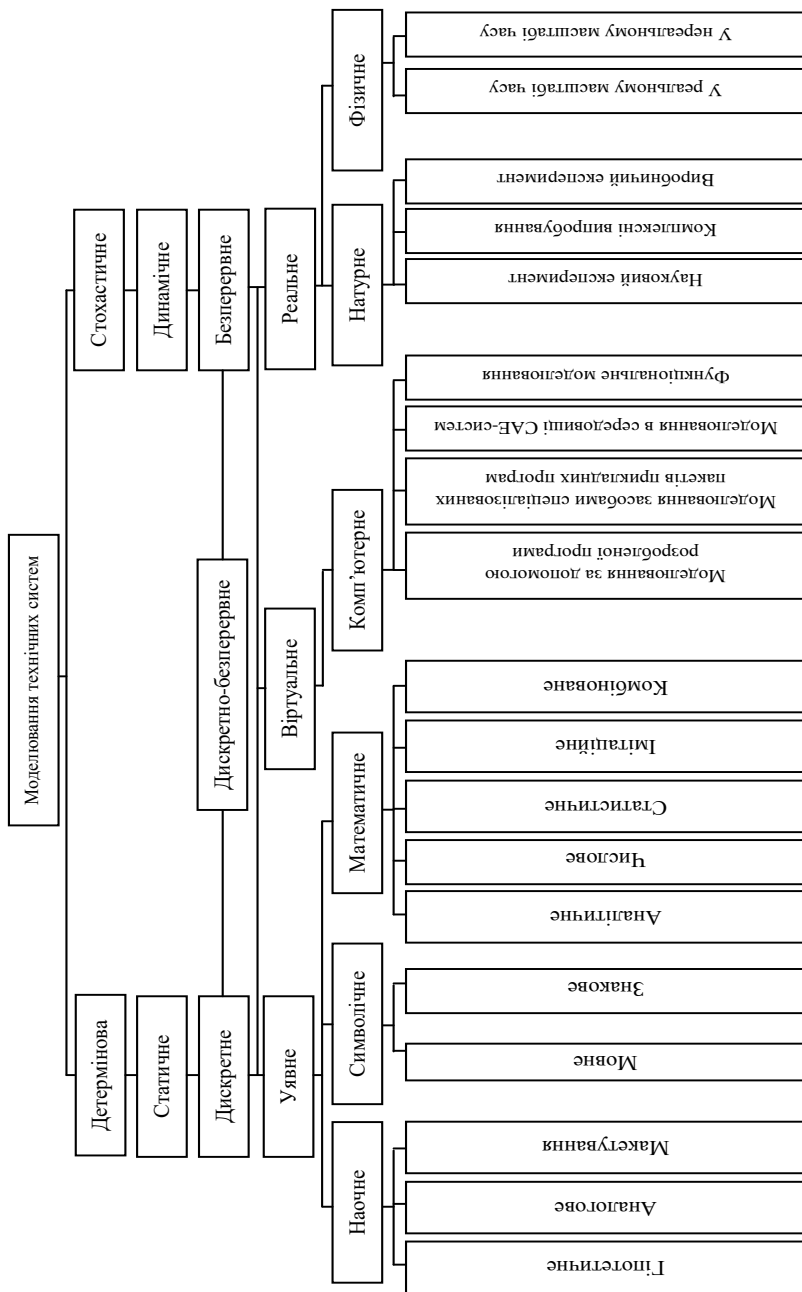


Рис. 1.6. Класифікація методів моделювання технічних систем

Дискретне моделювання описує дискретні процеси, **безперервне** – відображає безперервні процеси в системах, **дискретно-безперервне** використовується для випадків, де є дискретні та безперервні процеси.

Залежно від форми подання об'єкта технічної системи розрізняють уявне та реальне моделювання. **Уявне моделювання** часто буває єдиним способом моделювання об'єктів, які або практично нереалізовані в заданому інтервалі часу, або існують поза умовами, можливими для їх фізичного створення. Наприклад, на підставі уявного моделювання можна проаналізувати багато ситуацій мікросвіту, що не піддаються фізичному експерименту. Уявне моделювання може бути реалізоване у вигляді наочного, символічного та математичного.

За **наочного моделювання** на підставі спостережень про реальні об'єкти створюються різні наочні моделі, які відображають явища та процеси, що в них відбуваються.

В основу **гіпотетичного моделювання** дослідником закладається гіпотеза про закономірність перебігу процесу в реальному об'єкті, що відображає рівень знань дослідника про об'єкт і базується на причинно-наслідкових зв'язках між входом і виходом досліджуваного об'єкта. Гіпотетичне моделювання застосовується тоді, коли знань про об'єкт недостатньо для побудови формальних моделей.

Аналогове моделювання базується на застосуванні аналогій різних рівнів. Найвищим рівнем є цілковита аналогія, яку використовують лише для дуже простих об'єктів. Для складніших об'єктів використовують аналогії наступних рівнів, де аналогова модель відображає частину функціонування об'єкта або лише один бік функціонального об'єкта.

Велике значення за уявного наочного моделювання має **макетування**. Уявний макет можна застосовувати тоді, коли в реальному об'єкті відбуваються процеси, які не піддаються фізичному моделюванню або можуть передувати проведенню інших видів моделювання. В основу побудови уявних макетів також покладено аналогії, що ґрунтуються на причинно-наслідкових зв'язках між явищами та процесами в об'єкті. Якщо ввести умовне позначення окремих знаків і певних операцій між ними, то можна реалізувати знакове моделювання. Наприклад, використовуючи операції

об'єднання, перетинання та доповнення теорії множин, можна за допомогою окремих символів описати реальний об'єкт.

Основою мовного моделювання є тезаурус. Він утворюється з набору вхідних тезаурусів, причому цей набір має бути фіксованим. Між тезаурусом і звичайним словником існують принципові розбіжності. **Тезаурус** – словник, який виключає неоднозначність, тобто кожному слову може відповідати лише єдине значення, хоча у звичайному словнику одне слово може мати кілька значень.

Символічне моделювання – це штучний процес створення логічного об'єкта, який замінює реальний і виражає його основні відношення за допомогою системи знаків чи символів.

1.4.2. Математичне моделювання технічних систем

Математичне моделювання використовується під час дослідження характеристик процесу функціонування будь-якої системи за допомогою математичних методів (включаючи машинні). Для цього проводять формалізацію цього процесу, тобто будують математичну модель. *Під математичним моделюванням розуміють процес установалення відповідності математичного об'єкта (математичної моделі) до реального названого та дослідження цієї моделі, що дозволяє отримувати характеристики розглянутого об'єкта.* Вид математичної моделі залежить як від природи об'єкта, так і від завдань із його дослідження, необхідної ймовірності і точності вирішення цього завдань. Будь-яка математична модель описує реальний об'єкт, але з певним наближенням.

Математичне моделювання з дослідження характеристик процесу функціонування систем поділяють на аналітичне, числове, статистичне, імітаційне та комбіноване.

Для аналітичного моделювання характерним є те, що процеси функціонування елементів системи подаються у вигляді функціональних співвідношень (алгебричних, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих та ін.) або за принципом логіки. Аналітична модель може бути досліджена такими методами:

- аналітичним – намагання отримати в загальному вигляді явні залежності для досліджуваних характеристик;
- числовим – неможливість розв'язання рівнянь у загальному вигляді, намагання отримати числові результати за конкретними початковими даними;

– якісним – можливість без розв’язку в явному вигляді знаходження деяких властивостей розв’язку (наприклад, оцінити стійкість розв’язку).

Найбільш повне дослідження процесу функціонування системи можна провести, якщо відомі залежності, що зв’язують шукані характеристики з початковими умовами, параметрами та змінними системи. Проте ці залежності вдається отримати тільки для порівняно простих систем. Дослідження складніших систем аналітичним методом призводить до значних ускладнень, які важко усунути. Тому у випадку використання аналітичного методу доводиться значно спростувати вихідну модель, що дозволяє вивчити хоча б загальні властивості системи. Дослідження на спрощеній моделі аналітичним методом дає змогу досягати орієнтовних результатів для отримання точніших даних за допомогою інших методів.

Порівняно з аналітичним *числовий метод* дозволяє досліджувати ширший діапазон класу систем, проте отримані при цьому розв’язки мають індивідуальний характер. Числовий метод найбільш ефективний для застосування програмних засобів.

Іноді під час дослідження технічної системи можуть задовольняти висновки, отримані внаслідок використання якісного методу аналізу математичної моделі. Такі якісні методи широко застосовують, наприклад, у теорії автоматичного керування для оцінювання ефективності різних варіантів систем керування.

1.4.3. Імітаційне моделювання технічних систем

Під час *імітаційного моделювання* алгоритм, що реалізує модель, відтворює процес функціонування системи в часі. При цьому імітуються елементарні явища (складові цього процесу) зі збереженням їх логічної структури та послідовності перебігу в часі. Це дозволяє за вихідними даними отримати відомості про стани процесу в певні моменти часу, що дає змогу оцінити характеристики системи.

Основною перевагою імітаційного моделювання порівняно з аналітичним є можливість вирішення більш складних завдань. Імітаційні моделі дозволяють легко враховувати такі фактори, як наявність дискретних і безперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові впливи та інші фактори, що часто створюють труднощі під час аналітичних досліджень.

На сьогодні імітаційне моделювання – найефективніший метод дослідження складних технічних систем, а часто і єдиний, практично доступний метод отримання інформації із впровадження системи, особливо на етапі її проектування.

Імітаційне моделювання здебільшого застосовується для ухвалення рішень під час проектування структури складної технічної системи або для пошуку оптимальних значень її параметрів. Можна визначити кілька основних напрямів ухвалення рішень за результатами моделювання [24]:

- пошук найкращих щодо певного критерію ефективності значень параметрів складних систем керування;
- пошук оптимального значення критерію ефективності технічної системи;
- порівняння альтернативних варіантів структури технічної системи та визначення найбільш придатного;
- моделювання аварійних ситуацій за сценарієм на кшталт «що буде, якщо...».

Попри те, що імітаційне комп'ютерне моделювання є потужним інструментом дослідження систем, його застосування не завжди доцільне. Відомо багато завдань, ефективно розв'язаних за допомогою інших методів. Разом із тим для вищого класу завдань дослідження та проектування систем метод імітаційного моделювання найбільш прийнятний. Його правильне застосування можливе лише за умов чіткого розуміння суті методу імітаційного моделювання та розумного використання в дослідницькій практиці реальних систем з урахуванням особливостей конкретних систем і можливостей їх дослідження різними методами.

Основними критеріями доцільності застосування методу імітаційного комп'ютерного моделювання є:

- відсутність або неприйнятність аналітичних, числових і якісних методів вирішення поставленого завдання;
- наявність достатньої кількості вихідної інформації про модельовану технічну систему для побудови адекватної імітаційної моделі;
- необхідність проведення на підставі можливих методів численних обчислень, важко реалізованих навіть спеціальними програмними засобами;

- можливість пошуку оптимального варіанта системи під час її комп'ютерного моделювання.

Основні переваги методу імітаційного моделювання для дослідження складних систем:

- машинний експеримент із імітаційною моделлю досліджує особливості процесу функціонування технічної системи за будь-яких умов;

- застосування програмних засобів в імітаційному експерименті істотно скорочує тривалість випробувань порівняно з натурним експериментом;

- імітаційна модель дозволяє включати результати натурних випробувань реальної системи чи її частин для проведення подальших досліджень;

- імітаційна модель має відому гнучкість варіювання структури, алгоритмів і параметрів модельованої системи, що важливо під час пошуку оптимального варіанта системи;

- імітаційне моделювання складних систем є єдиним практично реалізовним методом дослідження процесу функціонування таких систем на етапі їх проектування.

Основним недоліком машинної реалізації методу імітаційного моделювання є те, що рішення, отримане під час аналізу імітаційної моделі, завжди має локальний характер, бо відповідає фіксованим елементам структури, алгоритмам поведінки та значенням параметрів технічної системи, початковим параметрам впливів зовнішнього середовища. Тому для повного аналізу характеристик процесу функціонування систем доводиться багато разів відтворювати імітаційний експеримент, варіюючи цим вихідним завданням. Унаслідок цього збільшуються витрати машинного часу на проведення експерименту з імітаційною моделлю в процесі функціонування досліджуваної технічної системи.

Під час імітаційного моделювання, як і в разі використання будь-якого методу аналізу та синтезу технічної системи, важливим є питання його ефективності. Ефективність імітаційного моделювання може оцінюватись як критерій, у тому числі точністю й імовірністю результатів моделювання, часом побудови та роботи з моделлю, витратами машинних ресурсів (часу і пам'яті), вартістю розроблення й експлуатації моделі. Очевидно, що найбільш точною оцінкою ефективності є порівняння отриманих результатів із реа-

льним дослідженням, тобто моделюванням на реальному об'єкті під час проведення натурального експерименту. Оскільки це не завжди вдається зробити, то статистичний підхід дозволяє з певним ступенем точності за повторюваності машинного експерименту дістати усереднені характеристики поведінки системи.

У випадку, коли результати, отримані при відтворенні на імітаційній моделі процесу функціонування технічної системи, є реалізацією випадкових величин і функцій, то для знаходження характеристик процесу потрібно його багаторазове відтворення з подальшим статистичним обробленням інформації. Як метод машинної реалізації імітаційної моделі доцільно використовувати метод статистичного моделювання.

Спочатку було розроблено метод статистичних випробувань. Це числовий метод, який застосовувався для моделювання випадкових величин і функцій, імовірнісні характеристики яких збігалися з розв'язками аналітичних завдань (метод Монте-Карло). Цей прийом стали застосовувати і для машинної імітації під час дослідження характеристик процесів функціонування систем, які зазнають випадкового впливу, тобто з'явився метод статистичного моделювання. Отже, методом статистичного моделювання є метод машинної реалізації імітаційної моделі, а методом статистичних випробувань (Монте-Карло) – числовий метод вирішення аналітичного завдання.

Метод імітаційного моделювання дозволяє вирішувати завдання аналізу складних технічних систем, включаючи оцінювання варіантів структури системи, ефективності різних алгоритмів керування системою, впливу зміни різних параметрів системи. Імітаційне моделювання може бути основою структурного, алгоритмічного та параметричного синтезу складних систем, коли потрібно створити систему із заданими характеристиками з певними обмеженнями, що є оптимальними за певних критеріїв оцінювання ефективності.

Під час вирішення завдань комп'ютерного синтезу систем на підставі імітаційних моделей, крім розроблення моделювальних алгоритмів для аналізу фіксованої системи, потрібно також розробити алгоритми пошуку оптимального варіанта системи. Надалі в методології комп'ютерного моделювання розрізнятимемо два основні розділи: статику та динаміку, завданнями яких є відповідно вирішення питань аналізу та синтезу систем, заданих моделювальними алгоритмами [26; 27].

Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання при аналізі та синтезі систем дозволяє об'єднати переваги аналітичного та імітаційного моделювання. Для побудови комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на відповідні підпроцеси. І там, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, де ні – будуються імітаційні моделі. Такий комбінований підхід дозволяє охопити якісно нові класи систем, які не можуть бути досліджені з використанням тільки аналітичного та імітаційного моделювання окремо.

1.4.4. Інші види моделювання технічних систем

За реального моделювання досліджують характеристики цілого об'єкта або його частин. Такі дослідження проводять на об'єктах, що працюють як за нормальних режимів, так і спеціальних – для оцінювання характеристик, які цікавлять дослідників (за інших значень змінних і параметрів, в іншому масштабі часу та ін.).

Реальне моделювання є найбільш адекватним, але його можливості з урахуванням особливостей реальних об'єктів обмежені. Наприклад, проведення реального моделювання автоматизованих систем управління підприємством (АСУП) дозволяє створити таку АСУП (ERP-систему) та провести експерименти з об'єктом управління (підприємством), що в більшості випадків неможливо. Розглянемо різновиди реального моделювання.

Натурне моделювання – дослідження на реальному об'єкті з наступним обробленням результатів експерименту на підставі теорії подібності. У процесі функціонування об'єкта відповідно до поставленої мети вдається виявити закономірності перебігу реального процесу. Такі різновиди натурального експерименту, як виробничий експеримент і комплексні випробування мають високий ступінь імовірності.

Із розвитком техніки та проникненням углиб процесів, що відбуваються у реальних системах, зростає технічна оснащеність сучасного наукового експерименту. Він характеризується ширшим використанням засобів проведення автоматизації, застосуванням різноманітних засобів оброблення інформації, можливістю втручання людини в процес експерименту. У зв'язку з цим з'явився новий науковий напрям – автоматизація наукових експериментів [28; 29].

Відмінність між експериментом і реальним перебігом процесу полягає в тому, що експеримент може мати критичні ситуації і в ньому можуть визначитися межі стійкості процесу. Під час експерименту у процесі функціонування об'єкта вводяться нові збудовальні фактори і впливи. Один із різновидів – комплексні випробування, які належать до натурального моделювання. При цьому внаслідок повторних випробувань виникають загальні закономірності про надійність виробів, про характеристики якості та ін. У цьому випадку моделювання здійснюється шляхом оброблення й узагальнення відомостей про однорідні явища у групі.

Поряд зі спеціально організованими випробуваннями можлива реалізація натурального моделювання через узагальнення досвіду, нагромаджений під час виробничого процесу (виробничий експеримент). За допомогою теорії подібності тут обробляють статистичний матеріал виробничого процесу й отримують його узагальнені характеристики.

Іншим видом реального *моделювання* є *фізичне*, яке відрізняється від натурального тим, що дослідження проводять на установках, які зберігають природу явищ і мають фізичну подібність. Під час фізичного моделювання задаються характеристики навколишнього середовища і досліджується поведінка реального об'єкта, його моделі за заданих або створених штучно впливів навколишнього середовища.

Фізичне моделювання може відбуватися в реальному та нереальному (псевдореальному) масштабах (відліку) часу, а також розглядатися без урахування часу. В останньому випадку досліджуються так звані «заморожені» процеси, які фіксуються в заданий момент часу. Найбільшу складність і цікавість щодо точності отриманих результатів становить фізичне моделювання в реальному масштабі (відліку) часу.

Із погляду математичного опису об'єкта й залежно від його характеру, моделі можна поділити на аналогові (неперервні), цифрові (дискретні) та аналого-цифрові (комбіновані). Під *аналоговою моделлю* розуміють модель, що описується рівняннями із безперервних величин. Під *цифровою* розуміють *модель*, яка описується рівняннями із дискретних величин, поданих у вигляді цифр. Під *аналого-цифровою* розуміють *модель*, яка може бути описана рівняннями, до яких входять неперервні й дискретні величини.

Особливе місце в моделюванні займає *кібернетичне моделювання*, у якому фізичні процеси, що відбуваються в моделях, не схожі з реальними процесами. У цьому випадку намагаються відобразити лише певну функцію і розглядають реальний об'єкт як «чорну скриньку», яка має входи і виходи, та моделюють зв'язки між входами і виходами.

Найчастіше у разі використання кібернетичних моделей аналізують поведінку об'єкта за різних впливів навколишнього середовища.

Отож, в основу кібернетичних моделей покладено відображення інформаційних процесів керування, що дозволяє оцінити поведінку реального об'єкта. Тому для побудови імітаційної моделі потрібно виділити досліджувану функцію реального об'єкта, спробувати формалізувати її у вигляді певних операторів зв'язку між входом і виходом та відтворити на імітаційній моделі, причому на підставі інших математичних співвідношень і, зрозуміло, іншої фізичної реалізації процесу.

1.5. Застосування результатів математичного моделювання

Вітчизняна промисловість нагромадила значний досвід у вирішенні завдань, у яких використовуються математичні методи та комп'ютерні технічні засоби з розроблення нової техніки, проектування технологій, планування та керування технічними системами. Процес упровадження математики в інженерну діяльність інтенсивно відбувався впродовж останніх 20 років. Існують наукові школи із впровадження математичних методів у прикладні завдання промисловості у США, Франції, ФРН, Росії та Україні, викликаного об'єктивними причинами. Так розширення масштабів виробництва, поглиблення його спеціалізації, підвищення вимог до якості та надійності продукції зумовили різке збільшення кількості проектних, управлінських та інших рішень, серед яких належить обирати найбільш оптимальні.

У загальному вигляді математичне моделювання технічних систем застосовується у таких випадках:

– для дослідження технічної системи ще до того, як вона буде спроектована з метою встановлення чутливості характеристик до змін структури та параметрів об'єкта моделювання і навколишнього середовища;

– на етапі проектування технічної системи для аналізу та синтезу різних варіантів системи і вибору такого варіанта, який би задовольняв заданій критерій оцінювання ефективності системи за впроваджених обмежень;

– під час експлуатації технічної системи для отримання інформації, яка б доповнювала результати експлуатації реальної системи та для прогнозування розвитку системи в часі.

Ці випадки відображають загальний підхід до використання математичного моделювання. У реальних навчальних, дослідницьких чи виробничих процесах їх значно більше, вони більш різноманітні за своїми вхідними та вихідними параметрами і характеристиками.

Методи моделювання успішно застосовують під час дослідження інформаційно-вимірювальних систем і комплексів їх проектування, організації роботи виробничих комплексів, аналізу різних аспектів діяльності людини, автоматизованого управління виробничими та іншими процесами. Моделювання використовують під час проектування, виробництва, впровадження та експлуатації технічних систем, а також на різних рівнях її вивчення – від аналізу роботи елементів до дослідження систем загалом у процесі взаємодії з навколишнім середовищем, тобто на всіх етапах життєвого циклу технічної системи.

Математичне моделювання як альтернатива дослідному (пробному) фізичному експерименту, методу спроб та помилок упроваджується у практику промислового виробництва як досить ефективний та економічно вигідний напрям розвитку та вдосконалення. Наприклад, розроблення автоматизованих вимірювальних комплексів не може обійтись без моделювання таких об'єктів, як деталь, вимірювальний процес, пристрій тощо. При цьому використовується апарат дискретної математики: теорія множин, теорія графів, математична логіка, теорія ухвалення рішень, лінійне та динамічне програмування та ін.

Успішно застосовуються на практиці методи математичного програмування, теорії масового обслуговування, мережеві методи планування та управління. Так методами лінійного програмування оптимізуються рішення від порівняно простих завдань різання листового металу, пошуку оптимальної траєкторії оброблення складних контурів різальним інструментом до складних завдань оптимі-

зації планів дільниці цеху з максимальним завантаженням обладнання тощо.

Значні можливості для вирішення складних завдань промислового виробництва мають методи динамічного програмування, випадкового пошуку та евристичного програмування. Методи теорії масового обслуговування широко застосовують для управління технологічною підготовкою виробництва, забезпечують потрібне завантаження обладнання та виконання робіт в установлені терміни.

Інтенсивний розвиток інформаційних технологій відкриває нові можливості для широкого використання методів теорії ймовірності та математичної статистики, особливо методів кореляційного та дисперсійного аналізів під час проектування технологічних процесів, прогнозування та ін.

Розвиток теорії та практики автоматизованого керування зумовив створення основи для розроблення адаптивних слідкувальних систем у металообробній галузі. Математичне моделювання системи «верстат – пристрій – інструмент – заготовка» дозволило розробити для таких систем принципові основи автоматизованого керування точністю оброблення, продуктивністю верстатного обладнання тощо.

Утім як у технічних науках, так і в їх практичному втіленні ще багато вузьких «неформалізованих» завдань, які стримують використання таких автоматизованих систем, як систем автоматизованого проектування (САПР), автоматизованих систем управління технологічними процесами (АСУ ТП) та ін. Напевно головним прискорювачем вирішення цих завдань і є використання методів математичного моделювання.

Загальноживаний вираз «Ніколи не починати справу, якщо не знаєш, як вести її до заданої мети» інженерно-математичною мовою означає: «Промодельуйте та розрахуйте за допомогою програмних засобів те, що ви отримаєте при вхідних даних, тоді зрозумієте шляхи вирішення завдання».

Використання автоматизованих систем і масове впровадження комп'ютерної техніки на промислових підприємствах суттєво збільшує первинні капіталовкладення та основні фонди.

Виробники і теоретики зазвичай зацікавлені в оцінюванні ефективності цих витрат, терміну їх окупності. Критерії ефективності ґрунтуються на кількісній оцінці якісних характеристик, які відображають відношення досягнутих цілей до витрат. Безпосереднім показником

ефективності у цьому випадку може бути значення досягнутого результату, віднесене до суми витрат.

Наприклад, керівнику підприємства запропонували декілька альтернативних замовлень. Як обрати те, яке за мінімальних витрат забезпечить максимум прибутку? Тут потрібно оцінити наявні ресурси, ступінь завантаження підприємства, наявність обладнання та ін. Використання математичного моделювання та інформаційних технологій дозволять за лічені хвилини визначити всі переваги і недоліки запропонованих варіантів та обрати оптимальний. Такі ж конкретні рішення й конкретні ефекти у натуральних та економічних показниках досягаються за допомогою математичного моделювання більшості проектних і виробничих завдань.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Які етапи включає життєвий цикл технічної системи?
2. Що розуміють під концепцією PLM-рішень?
3. Які основні вимоги PLM-рішень до технічних систем?
4. Що таке типова математична схема?
5. Які типові схеми використовуються під час моделювання технічних систем?
6. Що називається синтезом технічних систем?
7. У чому полягає суть системного аналізу?
8. Назвіть основні рівні моделювання.
9. Які є методи моделювання систем?
10. Що розуміють під терміном «математичне моделювання»?
11. У чому полягає суть імітаційного моделювання?
12. Наведіть приклади задач, які можна розв'язати за допомогою імітаційного моделювання.
13. У чому полягають переваги і суть комбінованого виду моделювання?
14. Виконайте критичний аналіз різних видів класифікації моделей та видів моделювання.
15. Як використовуються результати математичного моделювання?

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Необхідно знати:

1. Застосування інтегрованих автоматизованих систем забезпечує комплексну автоматизацію процесів життєвого циклу технічних систем.
2. Сучасні CALS-технології та PLM-рішення забезпечують інтеграцію автоматизованих систем та створюють єдине інформаційне середовище підприємства чи організації.
3. Ключова роль в сучасних автоматизованих системах та інформаційних технологіях належить математичному моделюванню.
4. Інженери, розробники, дослідники та експлуатаційники технічних систем для якісного виконання службових функцій повинні володіти системним аналізом та математичним мисленням.
5. Базовими для дослідження та розроблення технічних систем є завдання аналізу та синтезу, вирішення яких здебільшого взаємозалежне, що потребує їх спільного розв'язання та подальшого застосування результатів.
6. Вибір методу математичного моделювання залежить від ступеня деталізації об'єктів технічної системи, закону функціонування елементів системи та зовнішніх впливів (дій) навколишнього середовища.
7. Будь-яка математична модель описує реальну технічну систему з певним (деяким) наближенням.
8. Вид математичної моделі залежить передусім від природи технічної системи (форми, складу, функцій та ін.), поставлених завдань з її дослідження (аналізування, розроблення) та необхідної ймовірності і точності вирішення цих завдань.
9. Аналітичне математичне моделювання потребує значного спрощення технічної системи та забезпечує тільки встановлення її загальних властивостей.
10. Числове математичне моделювання забезпечує отримання індивідуальних рішень за певною технічною системою. Метод ефективний за комп'ютерного моделювання.
11. Імітаційне моделювання є найбільш ефективним методом досліджень складних технічних систем. Його правильне застосування можливе лише за умов чіткого розуміння суті методу іміта-

ційного моделювання та розумного застосування реальних систем з урахуванням їх особливостей і можливостей дослідження.

12. Комбіноване (аналітико-імітаційне) математичне моделювання поєднує переваги обох видів моделювання і дозволяє охопити найбільш складні та якісно нові класи технічних систем.

13. Найбільшу точність отриманих результатів забезпечує фізичне моделювання в реальному масштабі часу.

14. Математичне моделювання є основою для ухвалення оптимальних проектних, виробничих та управлінських рішень і забезпечення конкурентоспроможності сучасного промислового виробництва.

15. У чому полягає необхідність та ефективність застосування математичного моделювання?

Слід запам'ятати:

1. Визначення та суть базових понять – CALS-технології та PLM-рішення.

2. Основні вимоги PLM-рішень до розроблення, виготовлення та експлуатації технічних систем.

3. Склад і послідовність етапів життєвого циклу технічної системи.

4. Визначення та функціональне призначення базових інтегрованих автоматизованих систем – CAD/CAM/CAE, PDM, ERP, CRM.

5. Правила та послідовність застосування основних типових математичних схем.

6. Визначення понять системного аналізу: «аналіз», «синтез», «результат аналізу», «мікроаналіз», «макроаналіз».

7. Три основні рівні математичного моделювання: структурне, логічне, кількісне (аналітичне).

8. Принципи побудови та класифікацію методів моделювання технічних систем.

9. Визначення математичного моделювання та його різновиди: аналітичне, числове, статистичне, імітаційне, комбіноване.

10. Основні критерії доцільності застосування методу імітаційного комп'ютерного моделювання.

11. Переваги і недоліки застосування імітаційного моделювання для дослідження складних технічних систем.

12. Визначення та умови застосування таких видів моделювання технічних систем, як реальне, натурне, фізичне, кібернетичне.

13. Загальні випадки доцільного застосування математичного моделювання технічних систем.

Треба вміти:

1. Формулювати базові принципи CALS-технологій та PLM-рішень.

2. Формулювати основні технічні вимоги концепції застосування PLM-рішень.

3. Будувати графік часового розвитку функцій комп'ютерного моделювання (PLM-рішення) за комплексної інформаційної підтримки етапів життєвого циклу виробів.

4. Будувати схему етапів життєвого циклу технічних систем.

5. Визначати умови та послідовність застосування типових математичних схем під час дослідження та проектування складних технічних систем.

6. Застосовувати принципи й базові поняття системного аналізу для дослідження технічних систем.

7. Визначати умови застосування для різних методів моделювання технічних систем і вибрати конкретний метод моделювання.

8. Визначати вид математичного моделювання: аналітичне, числове, статистичне, імітаційне, комбіноване.

9. У загальному вигляді формулювати умови ефективного застосування методів математичного моделювання.

2. СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕСИ ЯК ОБ'ЄКТ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Поняття про термін «технічна система»

Одним із сучасних принципів наукової та проектної діяльності розробника є творче ставлення до об'єктів дослідження і проектування і відповідних їм виробничих процесів. Надалі сукупність об'єктів, систем, приладів та процесів їх розроблення, виготовлення та експлуатації називатимемо узагальненим терміном «технічна система». У термін «система» вкладають різні поняття. Але він завжди є підмножиною взаємопов'язаних елементів, виділеною з множини елементів будь-якої природи, відповідно до вимог поставленого завдання.

Суб'єктивний зміст поняття системи полягає в тому, що дослідник, починаючи вивчати певний об'єкт чи групу об'єктів, вибирає для розгляду ті елементи або явища, які, з одного боку, відповідають меті дослідження, а з іншого – легше й природніше піддаються аналізу чи синтезу. Об'єктивний зміст поняття системи полягає в тому, що її, як правило, поділяють за просторовою чи функціональною ознакою.

Для того щоб визначити об'єкт як систему, треба мати:

- об'єкт, що складається з множини елементів та їх властивостей, які можна розглядати як єдине ціле завдяки зв'язкам між ними та їх властивостями;
- дослідника, який виконує цілеспрямовану дію (роботу);
- завдання, з погляду розв'язання якого об'єкт виділяється дослідником як система;
- мову, якою дослідник може описати об'єкт, властивості його елементів та зв'язки.

Прикладами систем є:

- 1) сонячна система;
- 2) обчислювальний центр;
- 3) промислове підприємство;
- 4) система лінійних рівнянь;
- 5) інформаційно-вимірювальний пристрій;
- 6) операційна система комп'ютера;
- 7) система управління підприємством.

Системи 1–4, що складаються з матеріальних чи абстрактних об'єктів, сформовані за просторовою ознакою, а системи 5–7 – за

функціональним призначенням. Деякі із цих систем можна описувати двома способами. Так операційну систему комп'ютера можна задавати як її функціями, так і набором програм, що реалізують ці функції.

Коли систему задають за просторовими ознаками, то здебільшого одночасно проводять і її структуризацію – виділення двох типів об'єктів – множини елементів та множини зв'язків і співвідношень цих множин. Так у промисловому підприємстві елементами можуть бути окремі цехи, а зв'язками – матеріальні та інформаційні потоки між ними. У системі лінійних рівнянь елементи – це окремі рівняння, а зв'язки – участь одних і тих самих змінних у різних рівняннях. Структурною одиницею (елементом) підприємства може бути цех, дільниця чи робоче місце. Залежно від цього змінюються й види зв'язків. Окрім того, те, що в одному випадку є видом зв'язку, в іншому може бути видом елемента. Поділ системи на елементи – один із перших кроків у напрямі побудови її формального опису, тобто математичної моделі.

***Елементи** – це частина або компоненти системи, які умовно вважають нероздільними.*

***Властивості** – якості, що дозволяють описувати систему й виділяти її серед інших систем. Вони можуть мати кількісну або якісну міру.*

***Зв'язки** – це те, що з'єднує елементи та їх властивості з іншими елементами. Вважають, що кожен елемент системи з'єднаний зв'язками безпосередньо чи опосередковано з будь-яким іншим елементом.*

***Структура системи** – це спосіб організації елементів у системі з певними властивостями та визначенням між ними взаємозв'язків. Структура системи класифікується за такими характеристиками:*

- за кількістю рівнів ієрархії (одно- та багаторівневі);
- за принципом розбиття елементів системи на підсистеми (функціональні та об'єктні);
- за кількістю цілей функціонування (одноцільові, багатоцільові).

Структура та властивості елементів описують індивідуальні характеристики системи і дозволяють розглядати її як цілісне утворення. Елемент належить до системи, оскільки він пов'язаний з іншими її елементами, об'єднаними в єдине ціле для досягнення певної мети. Вилучення із системи елемента чи сукупності елементів неодмінно змінює її

властивості, віддаляючи від мети. Цілісність системи полягає в тому, що її властивості якісно можуть відрізнятися від властивостей складових елементів. Наприклад, металорізальний верстат можна зобразити як систему, елементами якої є складальні одиниці, пов'язані між собою. Кожну складальну одиницю верстата можна описати певними властивостями, але жодна з них не має його властивості – оброблювати деталі виробів зніманням стружки. Отже, система – це не сукупність частин, що її утворюють, а цілісне утворення з новими властивостями, притаманними елементам системи.

Систему вважають простою, якщо вона складається з малої кількості елементів або її модель можна зарахувати до розряду простих. Складна система має складну математичну модель із множини взаємозв'язаних елементів та підсистем із різною фізичною природою, які взаємодіють між собою, становлять неподільне ціле і забезпечують виконання системою певної складної функції.

Система згідно з означенням має певну множину елементів. Припускають, що існує множина елементів за межами системи, з якими система взаємодіє, але не є з ними єдиним цілим. Цю множину називають навколишнім середовищем. Елементи, котрі взаємозв'язані з системою, не є частиною її середовища.

Отже, визначаючи об'єкт як систему, дослідник, залежно від вирішуваної проблеми, вилучає її із навколишнього середовища, окреслює її межі, визначає вхідні та вихідні зв'язки, з'ясовує чинники, які мають описувати стани системи.

Відносність систем полягає також і в тому, що одну й ту ж сукупність елементів можна розглядати як систему або як частину більшої системи, множину елементів якої можна поділити на кілька підмножин.

Частину системи, утворену з елементів підмножини, називають підсистемою.

Нехай систему S (рис. 2.1) утворено з елементів 1–12 $\{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$, пов'язаних між собою. Цю систему можна поділити на три підсистеми, наприклад, A, B, C .

Підмножину елементів $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, що утворюють підсистему A , можна розглядати як систему, тоді B і C будуть елементами навколишнього середовища. Якщо властивості елементів і структура підсистем A, B, C не є предметом розгляду, то систему можна спростити і розглядати ці підсистеми як елементи системи S .

Отже, кожен систему можна розглядати як підсистему чи елемент більшої системи або як сукупність елементів, кожен із яких припустимо називати системою.

Звідси випливає ієрархія систем, у якій елементами системи i -го рівня є системи $(i+1)$ -го рівня. Наприклад, підприємство можна розглядати як систему, елементами якої є цехи, як сукупність виробничих дільниць, а дільницю – як систему верстатів тощо. Якщо брати за початковий рівень аналізу підприємство, то можна розширювати уявлення про систему не тільки «вниз», а й «вгору», що робить цю систему (підприємство) підсистемою, або елементом більшої системи (об'єднання чи холдингу).

Виходячи з проведеного аналізу поняття «система» та системного підходу, введемо визначення терміна «технічна система», який використовуватимемо надалі.

Так, **технічна система** – це цілісний об'єкт (множина взаємопов'язаних об'єктів), у межах якого визначено його функціональне призначення, сформульовано цілі, поставлені перед системою, та визначено показник якості її функціонування, який кількісно визначає мету функціонування.

У загальному випадку технічна система як об'єкт моделювання характеризується такими параметрами:

- 1) **вхідні** (x_1, x_2, \dots, x_i) – значення можуть бути виміряні (встановлені), але можливості впливу на них з боку системи немає;
- 2) **керувальні** (u_1, u_2, \dots, u_n) – чинять безпосередній вплив на технічну систему та дозволяють керувати вихідними параметрами;
- 3) **збурювальні** (z_1, z_2, \dots, z_k) – значення змінюються випадково з плином часу та недоступні для зміни дослідником;

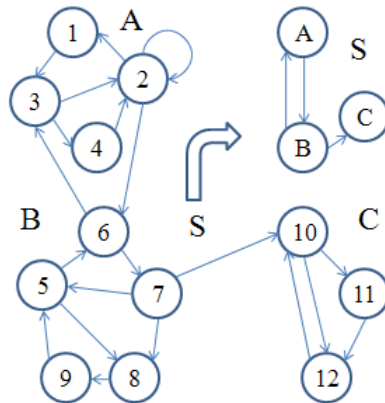


Рис. 2.1. Схема поділу системи на підсистеми

4) *вихідні* (y_1, y_2, \dots, y_j) – характеризують стан технічної системи або результат її функціонування від загального впливу вхідних, керувальних та збудувальних параметрів.

Отже, технічна система матиме такий вигляд, як показано на рис. 2.2.

Відповідно до визначення технічної системи її фізичним змістом є цифро-аналоговий перетворювач. Інший приклад технічної системи – це відділ головного метролога підприємства, до складу якого входять такі підсистеми, як виробнича, управлінська, планова та ін.

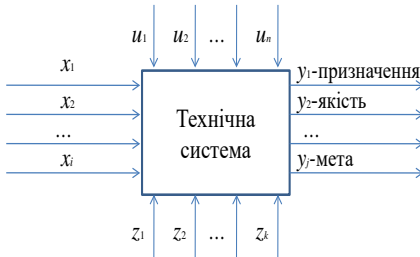


Рис. 2.2. Схема технічної системи

Процес вимірювання також можна розглядати як технічну систему, оскільки він має атрибути системи – мету, структуру, параметри тощо.

Рівень складності технічної системи визначається завданням, що виконується у кожному конкретному випадку. Завдання навчального процесу (використовуючи

математичний апарат) – навчитися моделювати технічну систему для подальшого керування, автоматизації та вирішення поставлених завдань.

2.2. Моделі технічних систем

Фахівці з розроблення, проектування та експлуатації технічних систем, наприклад, інформаційно-вимірювальних приладів та комплексів, прагнуть досягти конкретної мети. Залежно від цієї мети можуть розглядатись різні співвідношення між самим об'єктом (системою) S і навколишнім середовищем E . Тому залежно від мети, яку ставить фахівець, система може формалізуватися по-різному, і можуть виникати різні взаємодії цього об'єкта із навколишнім середовищем. Отож система S є цілеспрямованою множиною взаємозалежних елементів будь-якої природи. Навколишнє середовище E – множина

існуючих поза системою елементів будь-якої природи, які впливають на систему або перебувають під її впливом [18; 30].

Традиційний підхід до вивчення взаємозв'язків між окремими частинами моделі передбачає розгляд їх як відображення зв'язків між окремими підсистемами об'єкта. Такий класичний підхід може бути використаний для створення простих моделей. Процес синтезу моделі M на підставі класичного (індуктивного) підходу показано на рис. 2.3, *a* [18]. Реальний об'єкт, що підлягає моделюванню, розбивається на окремі підсистеми, тобто вибираються початкові дані D для моделювання і ставляться цілі C , які відображають окремі складові процесу моделювання. За окремою сукупністю початкових даних D ставиться мета моделювання окремої складової функціонування системи. На підставі цієї мети формується певний компонент K до майбутньої моделі. Сукупність компонентів об'єднується в модель M .

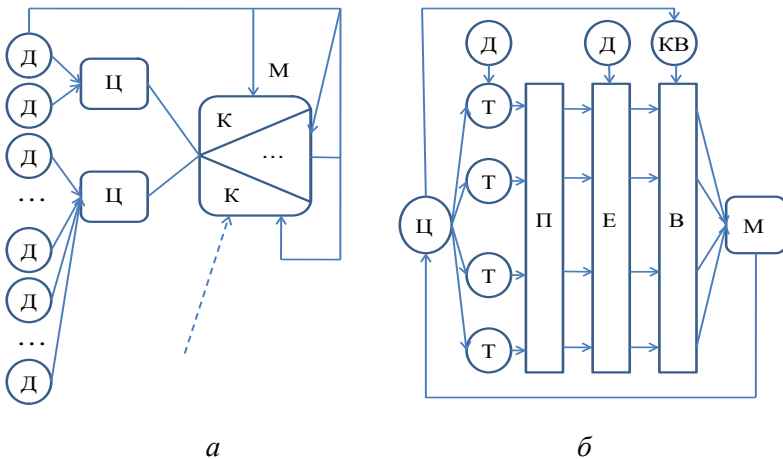


Рис. 2.3. Схеми процесу синтезу моделі на підставі класичного (*a*) та системного (*б*) підходів

Отже, розроблення моделі M на підставі класичного підходу означає об'єднання окремих компонентів в єдину модель. Кожний із компонентів вирішує свої завдання та ізольований від інших частин моделі. Тому класичний підхід може бути використаний для реалізації порівняно простих моделей, у яких можливий поділ і взаємозалежний розгляд окремих складових функціонування реального

об'єкта. Для моделі складного об'єкта така роз'єднаність вирішуваних завдань неприпустима, оскільки це призводить до значних витрат ресурсів під час реалізації моделі на базі конкретних програмно-технічних засобів.

Можна відзначити два класичні підходи:

- 1) дослідження системи проводиться від часткового до загального;
- 2) модель (система) створюється шляхом об'єднання окремих її компонентів, при цьому не враховується виникнення нового системного ефекту.

Із погляду системного підходу створювана модель M також є системою, тобто $S' = S'(M)$, і може розглядатися відносно навколишнього середовища E . Найпростіші за уявленням моделі ті, у яких зберігається пряма аналогія явища. Застосовують також моделі, у яких немає прямої аналогії, а зберігаються лише закони і загальні закономірності поведінки елементів системи S . Правильне розуміння взаємозв'язків усередині самої моделі M і взаємодії її із навколишнім середовищем E значною мірою визначається тим, на якому рівні перебуває дослідник.

Системний підхід дозволяє вирішити проблему побудови складної системи з урахуванням усіх чинників і можливостей, які пропорційні їх значущості на всіх етапах дослідження технічної системи S і побудови моделі M . Системний підхід означає, що кожна система S є інтегрованим цілим навіть тоді, коли вона складається з окремих роз'єднаних підсистем. Тобто в основі системного підходу лежить розгляд системи як інтегрованого цілого і починається він з формулювання мети функціонування. Процес синтезу моделі технічної системи на базі системного підходу матиме такий вигляд, як показано на рис. 2.3, б. На підставі вихідних даних D , які відомі з аналізу навколишнього середовища E , урахування існуючих обмежень, які накладаються на систему, та можливостей їх реалізації, і на основі мети функціонування формулюються вихідні вимоги T до математичної моделі системи S . На підставі цих вимог формуються деякі підсистеми P та їх елементи E і виконується найбільш складний етап синтезу – вибір B , для чого використовуються спеціальні критерії вибору KB .

З ускладненням об'єктів моделювання виникла необхідність спостереження за ними з вищого рівня. У цьому випадку дослідник (розробник) розглядає систему S як підсистему певної метасистеми (системи вищого рангу) і змушений перейти на позиції систе-

много підходу. Це дозволить йому побудувати не тільки досліджувану систему, що вирішує сукупність завдань, але й створювати систему, яка є складовою частиною метасистеми. Наприклад, якщо ставиться завдання проектування АСУП, то з позиції системного підходу слід брати до уваги, що ця система може бути складовою частиною АСУП об'єднання або холдингу.

Системний підхід застосовується в системотехніці у зв'язку з потребою досліджувати великі реальні системи через недостатність, а іноді помилковість прийняття будь-яких локальних рішень. На виникнення системного підходу вплинули зростаюча кількість початкових даних під час розроблення, необхідність урахування складних стохастичних зв'язків у системі та дій навколишнього середовища Е. Усе це змусило дослідників вивчати складний об'єкт не ізольовано, а у взаємодії із навколишнім середовищем, а також разом з іншими системами певної метасистеми.

Поняття системи та моделі взаємопов'язані. Модель являє собою обраний спосіб опису системи. Усім наукам в явній чи неявній формі притаманне поняття моделі (від лат. *modus* – копія, образ, опис), яка відображає подібні ознаки досліджуваних явищ та об'єктів. Кожна дослідницька або проектна діяльність так чи інакше пов'язана з побудовою моделей. Проект машини, заводу, креслення деталі, макет автомобіля, трактора – це все моделі майбутніх реальних об'єктів. Вивчення явищ, які відбуваються в природі, економічній, політичній, технічній та громадській діяльності людей, також пов'язане з моделюванням.

Поняття моделі ґрунтується на певній подібності двох об'єктів. Проте терміни «подібність» і «об'єкт» вживають у дуже широкому розумінні. Подібність може бути суто зовнішньою, стосуватися внутрішньої структури зовні зовсім неподібних об'єктів або певних рис поведінки об'єктів, які не мають нічого спільного ні за формою, ні за структурою. Поняття подібності застосовують до багатьох матеріальних об'єктів живої та неживої природи, штучних об'єктів, створених людиною, зображень, символів тощо.

Зовнішню подібність (подібність форми) мають такі об'єкти, як автомобіль та його зображення у вигляді рисунка, об'ємної моделі чи комплекту креслень, металевий виливок та його дерев'яна модель. Подібність структури можуть мати система керування державою та її структурна схема; міська водогінна мережа і схема водо-

постачання. Для систем управління найважливішою схожістю є подібність їх поведінки. Моделювання поведінки ґрунтується на тому факті, що однаково поводитися за певних умов можуть системи, які дуже відрізняються за формою, структурою й фізичною природою наявних у них процесів.

Коли між двома об'єктами можна виявити подібність хоча б у якомусь одному певному розумінні, то між ними є відношення оригіналу й моделі. Це означає, що один із об'єктів можна розглядати як оригінал, а другий – як його модель. Відношення «оригінал – модель» можуть мати не тільки два, але й скільки завгодно об'єктів.

Моделлю називають відображення на підставі подібності з об'єктом його характеристик з метою подальшого його вивчення.

Модель дозволяє з усієї різноманітності проявів досліджуваного об'єкта вирізняти тільки ті, які необхідні з погляду розв'язування проблеми. Модель – не точна копія об'єкта, а відображення лише певної частини його властивостей. Тому головне завдання моделювання – розумне спрощення моделі, тобто вибір ступеня подібності та об'єкта. Подібність – це взаємно однозначна відповідність між двома об'єктами, коли відомі функції переходу від параметрів одного з них до параметрів іншого, а математичні описи цих об'єктів можна перетворити на тотожні.

Під час проектування дослідник оперує не самими об'єктами, а їх моделями, тому моделювання є апаратом і засобом створення проекту складної технічної системи. У широкому розумінні моделюванням – це процес адекватного відображення найпростіших властивостей досліджуваного об'єкта чи явища з точністю, необхідною для практичних потреб. У загальному випадку моделюванням можна назвати особливу форму опосереднення, яка ґрунтується на формалізованому підході до дослідження системи.

Отже, *моделювання* – це процес зображення об'єкта дослідження подібною до нього моделлю і виконання експериментів із нею для отримання інформації про об'єкт дослідження.

Моделі можна реалізувати як фізичними, так і абстрактними системами. Відповідно до цього є фізичні та абстрактні моделі.

Фізичні моделі складаються із сукупності матеріальних об'єктів. Для їх побудови використовують різні фізичні властивості об'єктів, але застосовувані в моделі матеріальні елементи не обов'язково повинні мати таку саму природу, що й досліджуваний

об'єкт. Приклад фізичної моделі – макет машини, приладу, споруди, електрична модель об'єкта чи явища. Проте фізичні моделі мають обмежену сферу застосування, бо не для кожного явища та об'єкта можна побудувати аналогі. Варто назвати виробничі процеси, організаційні системи тощо.

Абстрактна модель – це опис досліджуваного об'єкта певною мовою. Абстрактність моделі виявляється в тому, що її компонентами є поняття, а не фізичні елементи. Наприклад, словесні описи, креслення, схеми, графіки, таблиці, алгоритми або програми, математичні описи. Абстрактні моделі поділяють на гносеологічні, інформаційні, сенсуальні, концептуальні й математичні.

Гносеологічні моделі спрямовано на вивчення об'єктивних законів природи, наприклад, моделі сонячної системи, біосфери, Світового океану, катастрофічних явищ природи.

Інформаційні моделі описують поведінку об'єкта – оригіналу, але не копіюють його.

Сенсуальні – це моделі якихось почуттів, емоцій або моделі, що впливають на почуття людини, наприклад малярство, музика, поезія.

Концептуальна – це абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, притаманні досліджуваному об'єкту, важливі в межах певного дослідження. Основне її призначення – виявлення набору причинно-наслідкових зв'язків, які необхідно брати до уваги для отримання потрібних результатів. Один і той самий об'єкт можна подавати різними концептуальними моделями, що їх будують залежно від мети дослідження.

Математичною моделлю системи називають її опис формальною мовою, що дозволяє робити висновки про певні риси поведінки цієї системи за допомогою формальних процедур над її описом.

Оскільки математичний опис не може бути всеохопним та ідеально точним, то математичні моделі описують не реальні системи, а їх спрощені (гомоморфні) моделі. Математична модель має форму функціональних залежностей між параметрами, що їх ураховує відповідна концептуальна модель. Ці залежності конкретизують причинно-наслідкові зв'язки, виявлені в концептуальній моделі, які і характеризують їх кількісно.

Математична мова може бути аналітичною (рівняння), графічною (графіки, структурні схеми, графи), матрицевою і табличною.

Наприклад, графік залежності згасаючих синусоїдних коливань від часу є абстрактною моделлю вільних коливань маятника, яка може бути подана графічною мовою опису. Різні досліджувані явища можуть мати однаковий математичний опис. Наприклад, електричний коливальний контур і пружинний маятник описують однаковими рівняннями.

Створюючи модель, дослідник вирізняє її як об'єкт вивчення з навколишнього середовища і будує її формальний опис відповідно до поставленої мети, завдань та наявних можливостей. Надалі він аналізує систему через поведінку, властивості і стан моделі, можливі зміни, дозволені й заборонені форми існування тощо.

2.3. Об'єкт моделювання – технічна система

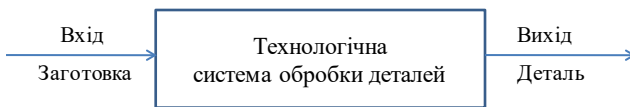
Для загального опису технічної системи зручно користуватися кібернетичним підходом, пов'язаним із поняттям «чорна скринька» (рис. 2.4) [31].



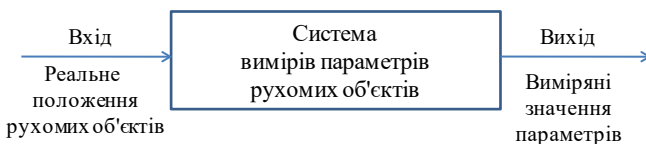
Рис. 2.4. Кібернетична модель технічної системи

У ролі технічної системи можуть бути фізичні та абстрактні (віртуальні) об'єкти, процеси та ін. Так, процес – це об'єкт, внутрішня будова якого невідома для розгляду системи, а дослідник спостерігає тільки за вхідними й вихідними процесами.

Прикладом характерних технічних систем і функцій, які вони виконують, є дві характерні технічні системи (рис. 2.5).



a



б

Рис. 2.5. Приклади технічних систем:
а – оброблювальна система; *б* – вимірювальна система

За математичного моделювання зображених на рис. 2.5 технічних систем математична модель повинна мати такі структурні елементи:

- **обмеження системи** – граничні значення, які накладаються на параметри функціонування технічної системи;
- **цільову функцію**, яка виражає залежність ефекту функціонування технічної системи від регульованого параметра;
- **вхідні параметри** – сукупність вхідних показників процесу, які визначають зміст та властивості технічної системи під час її моделювання;
- **вихідні параметри** – кількісні та якісні показники системи (продуктивність, точність, якість, собівартість), які характеризують функціонування системи та залежать від сумарної дії зовнішніх чинників, вхідних параметрів;
- **керувальні параметри** – чинять пряму дію на нестабільність і дозволяють керувати роботою технічної системи;
- **збурювальні параметри** – постійно вимірювані параметри, які впливають на вихідні параметри.

Під **об'єктом моделювання** розуміють технічну систему, яка підлягає вивченню або оптимізації. Основною властивістю об'єкта дослідження є його складність, яка визначається кількістю станів, у яких може перебувати об'єкт. Різний стан технічної системи відповідає, наприклад, стану вимірювального приладу з визначеними властивостями (точністю, швидкістю та ін.).

Структурну схему об'єкта моделювання зображено на рис. 2.6.

У загальному вигляді математична модель об'єкта записується так:

$$Y = F(X, Q),$$

де Y – вектор вихідних параметрів $Y = (y_1, y_2, \dots, y_j)$; Q – вектор

внутрішніх параметрів $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$; X – вектор зовнішніх (вхідних) параметрів $X = (x_1, x_2, \dots, x_i)$.

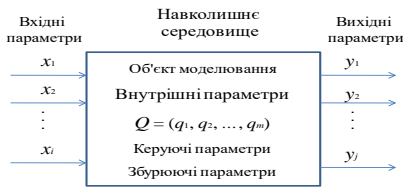


Рис. 2.6. Структурні елементи об'єкта моделювання

Потрібно пам'ятати, що будь-який об'єкт не може існувати відособлено, без взаємозв'язку з іншими об'єктами (навколишнім середовищем). Для процесу вимірювання елементами навколишнього середовища є температура, вимірювальний прилад чи система, швидкість руху елементів приладу та ін. Для виконання процесу вимірювання – це вимірювальний пристрій (система), допоміжний інструмент, елементи пристосування та ін.

Важливою характеристикою об'єкта дослідження є його керованість. *Керованим* є такий об'єкт, який дослідник може перемістити в будь-який із станів і підтримувати його протягом певного часу із заданою точністю. Об'єкти, для яких вказана вимога не виконується, є *некерованими*.

Властивість керованості об'єкта дозволяє проводити «активні» експерименти, які полягають у безпосередньому впливі на об'єкт за бажанням експериментатора. «Активний» експеримент найчастіше використовується в лабораторних дослідженнях.

Здебільшого функціонуючі промислові об'єкти не забезпечують можливості активного впливу. За такої ситуації здійснюється пасивне спостереження за об'єктом і фіксація зацікавлених параметрів без безпосереднього впливу на них, тобто проводиться «пасивний» експеримент. Іноді можна досліджувати роботу діючих промислових об'єктів у різних станах, близьких за значенням, тобто експериментатор може «варіювати» об'єкт навколо одного з його станів. Такий експеримент називають активно-пасивним, а планування експериментів на промислових об'єктах – еволюційним.

Важливою властивістю об'єкта дослідження є ступінь відтворення результатів, для оцінювання якої необхідно в одному й тому

ж стані об'єкта у різні моменти часу провести декілька серій експериментів, які в плануванні експерименту називають паралельними. Для запобігання впливу на результати різних похибок, зумовлених із порядком проведення експериментів у серії, номер експерименту призначається випадково.

Для математичного моделювання будемо використовувати математичні моделі об'єкта дослідження. Під математичною моделлю розуміють рівняння, яке пов'язує параметр оптимізації з факторами. Цей вираз у загальному вигляді можна записати так:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

де k – кількість факторів; $f(X)$ – функція відгуку.

Кожний фактор може набувати під час експерименту одне з декількох значень. Такі значення називають рівнями. Фактор може набувати нескінченно багато значень (нескінченний ряд), але на практиці точність, з якою виявляються ці значення, обмежена. Тому можна вважати, що будь-який фактор має певну кількість дискретних рівнів.

Фіксована кількість рівнів факторів (установлення кожного фактора на певний рівень) визначає одне з можливих станів «чорної скриньки». Одночасно це є умови проведення одного з можливих експериментів. Якщо перебрати всі можливі варіанти станів, то отримаємо множину різних станів «чорної скриньки». Це буде можлива кількість різних експериментів.

Щоб визначити кількість різних станів, достатньо кількості рівнів факторів піднести до степеня, що дорівнює кількості факторів k :

$$N = p^k, \quad (2.1)$$

де N – кількість станів; p – кількість рівнів факторів, k – кількість факторів.

Проте для планування експерименту важливо знати властивості об'єкта дослідження. Розглянемо основні вимоги, які треба брати до уваги. Перша вимога полягає у відтворенні на об'єкті результатів експерименту. Виберемо деякі рівні для всіх факторів, і за цих умов проведемо експеримент. Повторимо його декілька разів через неоднакові проміжки часу та порівняємо значення параметра оптимізації. Розкид цих значень характеризує відтворення результатів. Якщо він не перевищує заданої величини (вимог до точності експе-

рименту), то об'єкт задовольняє вимогу відтворення, а якщо перевищує – не задовольняє. Розглядатимемо лише такі об'єкти, для яких вимога відтворення виконується.

Планування експерименту передбачає активне втручання в процес і можливість вибору в кожному експерименті потрібних рівнів факторів. Такий експеримент називається активним. Об'єкт, на якому можливий активний експеримент, називають керованим. Це друга вимога до об'єкта дослідження.

Поняття «об'єкт дослідження» потребує точного формального визначення. Для цього запропоновано використовувати кібернетичне поняття «чорної скриньки» – модель об'єкта. Експериментатор, який почав використовувати методи планування експерименту, повинен уміти формулювати завдання в термінах «чорної скриньки».

Входи «чорної скриньки» називаються факторами. Кожен фактор може набувати певну кількість різних значень – рівнів. Сукупність таких рівнів усіх факторів визначає можливий стан «чорної скриньки» та умови одного з можливих експериментів.

Сукупність усіх можливих станів визначає складність «чорної скриньки» та загальну кількість можливих експериментів.

Результати експерименту використовуються для відтворення математичної моделі об'єкта дослідження, що має вигляд рівняння, яке пов'язує параметри оптимізації та фактори. Таке рівняння називають функцією відгуку.

Використання всіх можливих експериментів для створення моделі призводить до абсурдно великої їх кількості. Вибір необхідної кількості експериментів, методів математичного оброблення їх результатів та ухвалення рішень є завданням планування експерименту. Однією зі складових цього завдання є планування екстремального експерименту, тобто експерименту, поставленого для пошуку оптимальних умов об'єкта, за яких він функціонує. Планування екстремального експерименту – метод вибору мінімальної кількості експериментів, необхідних для пошуку оптимальних умов.

2.4. Аналіз та класифікація факторів

Після вибору параметрів оптимізації приступають до вибору засобів впливу на об'єкт дослідження, тобто факторів – незалежних змінних величин, які можуть впливати на об'єкт дослідження.

Фактором називають засіб впливу на об'єкт дослідження, тобто змінну величину, яка вимірюється і набуває певного значен-

ня у певний момент часу. Кількість факторів за технічних досліджень необмежена, що різко збільшує кількість дослідів і витрат на їх проведення.

Як і параметр оптимізації, кожний фактор має область визначення, схему якої зображено на рис. 2.7.

Вважатимемо, що фактор задано, якщо разом з його назвою вказано область його визначення.

Під областю визначення розуміють сукупність усіх значень, яких може набути цей фактор.

Область визначення може бути безперервною та дискретною. На практиці завдання області визначення факторів, як правило, обмежені. Обмеження можуть мати принциповий, технічний або техніко-економічний характер.

Принципові обмеження – це такі обмеження, які не можуть бути порушеними ні за яких обставин.

Технічні обмеження попереджають про можливість пошкодження окремих елементів технічної системи. Технічні обмеження визначаються конкретними умовами проведення процесу, наприклад, обладнанням,

технологією та ін.

Техніко-економічні міркування враховують витрати на проведення експериментів або виходять із реальних можливостей конкретного виробництва чи лабораторії (наявність устаткування, інструмента, оснащення, апаратури, характеру досліджуваного процесу).

В області визначення фактор може мати декілька значень, які відповідають кількості його станів. Такі фіксовані значення фактора називаються рівнями варіювання.

У загальному випадку рівнів варіювання може бути скільки завгодно. Вони визначаються постановкою задачі, видом фактора, точністю його фіксування, передбачуваною складністю об'єкта.

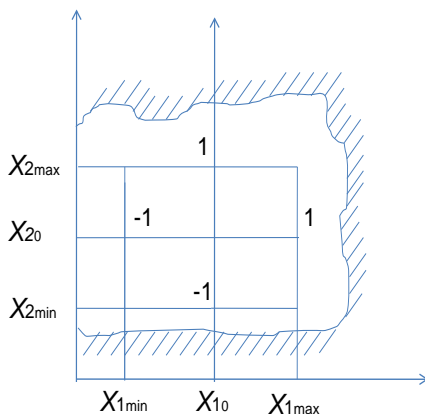


Рис. 2.7. Схематичне зображення області визначення факторів

Тоді загальну кількість різних станів об'єкта чи процесу, що реалізуються при їх дослідженні (загальну кількість експериментів N), можна визначити за такою залежністю:

$$N = \prod_{i=1}^k p_i, \quad (2.2)$$

де k – кількість досліджуваних факторів; p_i – кількість рівнів варіювання i -го фактора.

Якщо всі фактори мають однакову кількість рівнів варіювання, тобто $p_i = p$, то формула (2.2) набуває вигляду (2.1).

Аналіз цих залежностей показав, що зі збільшенням k різко зростає загальна кількість серій дослідів N і збільшуються витрати на їх проведення. Тому, якщо $k > 10$, потрібно застосовувати різні статистичні методи з вилучення істотних факторів.

Різниця між двома значеннями фактора називається інтервалом варіювання. Його величина залежить від завдань дослідження і точності вимірювальної апаратури. Надмірне збільшення чи зменшення інтервалу варіювання призводить до ускладнення плану експерименту та зниження ефективності пошуку оптимуму.

Експериментальні фактори – це розмірні величини, що мають різну розмірність та істотно розрізняються за абсолютною величиною. Використання їх під час аналізу результатів експерименту значно збільшує обсяг обчислювальних робіт та ускладнює інтерпретацію знайденої математичної моделі. Тому експериментальні фактори підлягають попередньому кодуванню, що є лінійним перетворенням досліджуваного факторного простору.

Фактори можна поділити на керовані та некеровані; кількісні та якісні.

Усі змінні, що визначають поведінку і стан досліджуваної технічної системи незалежно від їх фізичного змісту, поділяють на групи, як це показано на рис. 2.8.

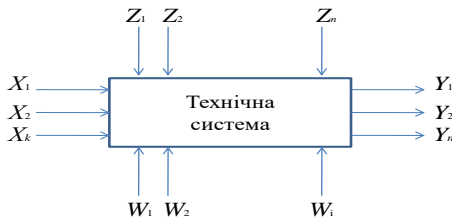


Рис. 2.8. Фактори, що впливають на технічну систему

Керовані фактори $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ – за їх допомогою заданий технічний режим реалізується й підтримується сталим протягом необхідного часу. До них належать режими різання у процесі механічної обробки деталі на металооброблювальному верстаті (глибина, подача, швидкість різання), геометричні параметри різального інструменту та ін.

Некеровані контрольовані фактори $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – які характеризують якість сировини чи проміжних продуктів, можливості технічних систем та підсистем. Вони не припускають цілеспрямованої зміни в ході експерименту. Початкову інформацію про значення цих змінних отримують у процесі попередніх досліджень та лабораторних аналізів. Змінні X і Z утворюють єдину групу контрольованих незалежних факторів досліджуваного процесу.

Некеровані неконтрольовані фактори $W = (w_1, w_2, \dots, w_i)$ – фактори, дію яких не можна врахувати під час експериментів. Під дією цих факторів істотно збільшується розсіювання результатів, тобто знижується точність і спостерігається безперервна повільна зміна параметрів досліджуваного процесу та об'єкта.

Прикладом некерованого фактора є температура навколишнього середовища. Під час планування експерименту фактори повинні бути керованими.

Залежно від способу опису всі фактори поділяються на кількісні та якісні.

Кількісні фактори – це змінні величини, які можна оцінити кількісно, тобто виміряти, зважити.

Якісні фактори – це змінні величини, які характеризуються якісними властивостями. До них належать властивості матеріалів вимірювального об'єкта та приладів, охолоджувальної рідини; способи вимірювання, метролог, тип вимірювального приладу чи установки та ін.

Хоча цим факторам не відповідає числова шкала, але в деяких випадках їх можна трансформувати в кількісні, використовуючи умовну порядкову шкалу, числа якої відповідають рівням якісного фактора.

У деяких випадках межа між поняттям якісного та кількісного фактора дуже умовна.

2.5. Властивості експериментальних факторів

Експериментальні фактори мають задовольняти певні вимоги, тобто бути керованими, однозначними, сумісними й незалежними.

Керованість гарантує можливість вибору та підтримування потрібного значення експериментального фактора протягом усього досліджу, тобто дає змогу активно й безпосередньо впливати на об'єкт дослідження. Поява некерованих факторів значно збільшує похибку експерименту, створює велике «шумове» поле, спричиняє безперервну зміну досліджуваних факторів, що призводить до тимчасового дрейфу параметра оптимізації. Тому під час дослідження потрібно врахувати й оцінити вплив якомога більшої кількості некерованих контрольованих факторів, що гарантує підвищення якості й точності дослідження.

У процесі досліджень бажано оперувати з однозначними факторами, які характеризують безпосередній вплив на об'єкт, оскільки керувати складними факторами (відношенням довжини вильоту заготовки до її діаметра або логарифмом будь-якої величини) важче. Проте складні фактори також можуть брати участь в експерименті.

Особливо важливою є вимога сумісності факторів, коли всі потрібні комбінації рівнів досліджуваних факторів можна безпечно реалізувати на практиці. Несумісність факторів зазвичай спостерігається на межах областей їх визначення, а тому усунути її в цих випадках можна лише внаслідок скорочення намічених областей визначення. Якщо несумісність факторів виявляється всередині областей визначення, то для її усунення необхідно розбити цю область на підобласті й розв'язати кілька паралельних завдань.

Вимога незалежності факторів передбачає можливість їх фіксації на будь-якому взятому рівні незалежно від рівнів інших факторів, тобто не повинно існувати лінійної кореляції між факторами. Уведення в експеримент кореляційних факторів, наприклад, сукупності кутів різця в плані (φ , φ_1 , ε) не сприяє отриманню нової інформації, оскільки один із факторів ($\varepsilon = 180 - (\varphi + \varphi_1)$) не містить жодної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт, але збільшує витрати часу й матеріалів. Тому, щоб оцінити наскільки тісний лінійний зв'язок між досліджуваними факторами, можна скористатися кореляційним аналізом.

Отже, фактори – це змінні величини, які відповідають засобам впливу зовнішнього середовища на об'єкт. Вони визначають як сам об'єкт, так і його стан. Вимоги до факторів: керованість та однозначність.

Керувати фактором означає встановити потрібне значення та

підтримувати його сталим під час експерименту або змінювати за заданою програмою. У цьому полягає особливість «активного» експерименту. Планування експерименту можливе лише у випадку, коли фактори підпорядковуються рішення експериментатора.

Фактори повинні безпосередньо впливати на об'єкт дослідження. Важко керувати фактором, якщо він є функцією інших змінних, але в плануванні експерименту можуть брати участь складні фактори, такі, як логарифми, співвідношення та ін.

Вимогами до сукупності факторів є сумісність та відсутність лінійної кореляції. Обрана кількість факторів має бути досить повною. Якщо будь-який значущий фактор пропущено, то це призведе до неправильного визначення умов або до великої похибки експерименту. Фактори можуть бути кількісними та якісними.

Точність фіксування факторів повинна бути високою. Значення точності визначається діапазоном зміни факторів.

Склад і кількість факторів визначає розмірність факторного простору, що вивчається. Тому вибір факторів – дуже відповідальний етап підготовки до планування експерименту. Від удалого вибору залежить успіх оптимізації, отримання достовірних та адекватних результатів.

Так, наприклад, будь-який процес вимірювання потрібно розглядати як складну технічну систему, на яку впливає багато різних факторів. Сила їх впливу на досліджувані вихідні параметри (продуктивність, точність, собівартість) різна й апіорі невідома. Тому до програми досліджень спочатку треба ввести всі фактори, виявлені на етапі аналізу даних з літературних джерел та виробничих даних, які справляють будь-який вплив на вихідні параметри.

Детально вивчити всі ці фактори майже неможливо через потребу проведення великої кількості експериментів та невиправданої витрати часу й матеріалів. Усунення зазначених недоліків потребує попереднього оцінювання сили впливу кожного фактора й формування на цій основі групи найістотніших факторів, які треба всебічно дослідити на подальших етапах.

Інтуїтивний добір істотних факторів досить суб'єктивний і може призвести до помилкових результатів. Тому на етапі попереднього дослідження широко використовуються статистичні методи підбору факторів, до яких належать:

– методи експертних оцінок, які ґрунтуються на статистичному

обробленні даних, отриманих у результаті опитування спеціалістів або аналізу наукових досліджень;

– експериментальні методи, за допомогою яких можна оцінити внесок кожного фактора та їх взаємодій за результатами попередньої серії дослідів.

Точність статистичних висновків залежить від обсягу експериментальних робіт, що визначається типом взятого плану, кількістю проаналізованих факторів та їх взаємодій.

На етапі попередніх досліджень найчастіше застосовуються ненасичені, насичені та наднасичені плани.

Ненасичені плани, для яких кількість степенів вільності $k > 0$, $k = N - k' > 0$, де N – загальна кількість серій дослідів; k' – кількість значущих коефіцієнтів, дають можливість окремо оцінити значущість усіх досліджуваних факторів та їх взаємодій, але потребують проведення досить великої кількості експериментів.

До цієї групи планів належать різні дисперсійні плани, а також повний і частковий факторні експерименти.

Насичені плани ($k = N - k' = 0$) дозволяють оцінити значущість усіх лінійних коефіцієнтів рівняння регресії та потребують постановки такої кількості експериментів, яка суворо відповідає кількості оцінюваних лінійних ефектів, включаючи вільний член. До цих планів належать плани Плакетта-Бермана, а також насичені репліки повного факторного експерименту.

Наднасичені плани забезпечують визначення істотних лінійних ефектів та парних взаємодій за від'ємної кількості степенів вільності ($k = N - k' < 0$), тобто коли кількість досліджуваних факторів та їх взаємодій перевищує кількість дослідів. При цьому різко скорочуються витрати на проведення експериментів, але збільшується похибка визначення значущих коефіцієнтів рівняння регресії.

2.6. Методи відбору факторів експериментів

Під час відбору факторів потрібно розв'язувати компромісне оптимізаційне завдання, яке впливає з мети розроблення математичної моделі. З одного боку, дослідник прагне розглянути якомога більше факторів, з другого – не можна включати до розгляду всі фактори, оскільки буде отримана дуже складна модель (беруться до уваги найбільш значущі фактори). Відомо три

основні методи проведення відсіювальних експериментів:

- 1) метод рангової кореляції;
- 2) метод дисперсного аналізу;
- 3) метод випадкового балансу.

Коротко розглянемо кожен із цих методів.

Метод рангової кореляції більш економічний щодо затрат матеріальних і трудових ресурсів, оскільки базується на систематизації апріорної інформації, яку отримують з літературних довідників та з опитування фахівців. Метод рангової кореляції не потребує виконання натурних чи машинних експериментів, достатньо психологічного експерименту.

Послідовність виконання методу рангової кореляції:

1. Порівняльна оцінка впливу факторів – починається з розроблення анкети опитування фахівців. Уводиться операційне визначення фактора, яке містить абсолютне значення (номінал), розмірність, точність зміни цього фактора, інтервал зміни фактора, наявність інших факторів.

2. Заповнення анкети шляхом очного чи заочного опитування фахівців. Вони розміщують фактори в порядку спадання впливу на технічну систему (ранжування факторів).

3. Систематизація отриманої інформації: перевірка коректності відповідей та заповнення загальної анкети (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Оброблення результатів опитування

Фахівці, які були опитані	Фактори				
	X_1	X_2	X_3	...	X_k
1. Петренко					
2. Іваненко					
3. Василенко					
...					
m . Симоненко					
Сума рангів $A = \sum a_{ij}$					
Відхилення від середньої суми рангів $\Delta(j) = A_j - T$					
Квадрати відхилень $\Delta(j)^2$					

4. Результати обробляються в такій послідовності:

а) за кожним j -м фактором визначають суму рангів

$$A_j = \sum_{i=1}^m a_{ij},$$

де a_{ij} – ранг j -го фактора на думку i -го фахівця; m – кількість опитаних фахівців;

б) обчислюють середню суму рангів

$$T = \frac{\sum_{j=1}^k A_j}{k},$$

де k – кількість факторів, включених в анкету;

в) визначають ступінь відповідності думок фахівців за коефіцієнтом конкордації W :

– для незв'язаних рангів

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k)},$$

де S – сума квадратів відхилень

$$S = \sum_{i=1}^m \Delta_{ji}^2;$$

– для зв'язаних рангів

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2 (k^3 - k) - mT},$$

$$T = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (t_{ij}^3 - t_{ij}),$$

де t_{ij} – j -те число однакових рангів у i -му ранжуванні.

Коефіцієнт W відображає ступінь взаємозв'язку ранжованими рядами і має такі властивості: змінюється від 0 до 1. Якщо $W \rightarrow 0$ – зв'язок між рядами слабкий, $W = 0$ – зв'язку немає, $W \rightarrow 1$ – усі ряди проранжовані однаково. Значення W свідчить про наявність або відсутність зв'язку між думками спеціалістів;

г) перевіряють W за χ^2 -критерієм:

$$\chi^2 = m(k-1)W.$$

Для п'ятивідсоткового рівня значущості та кількості степенів вільності $f = k - 1$, де f – кількість степенів вільності. Розрахункове значення порівнюють з табличним:

$$P = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot 100,$$

де P – імовірність; α – рівень значущості. У технічних дослідах користуються $\alpha = 5 - 20$ %.

Якщо $\alpha = 5$ %, то $P = 95$ %, якщо $\alpha = 20$ %, то $P = 80$ %.

Якщо $x^2 < x_2^2$, то x_2^2 – табличне значення розподілу, що відповідає рівню значущості α . За припущеної ймовірності можна констатувати, що існує визначення відповідності думок фахівців відносно ступеня впливу факторів на досліджуваний параметр;

д) визначають відповідність фахівців за кожним фактором.

Для зменшення кількості факторів

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k_i} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

де k_1 – кількість інтервалів рангу; P_i – теоретично очікувані частоти для нуль-гіпотези про рівномірне ранжування; n_i – частоти для факторів, що спостерігаються (кількість рангів, які потрапляють у цей інтервал).

Метод дисперсійного аналізу потребує виконання певних статистичних вимог:

1. Розсіювання параметра оптимізації відбувається за законом нормального розподілу Гауса.

2. Дисперсії, що характеризують розсіювання випадкової змінної у кожній серії, однорідні.

Однорідність дисперсій ω перевіряється розрахунком критеріїв та порівнянням його значення з табличним за вибраного рівня ймовірності

$$\omega = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^q a_{n-i+1} [y_{n_i(n-i+1)} - y_{n_i}] \right\}^2}{\sum_{i=1}^{n_u} y_{n_0}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n_q} y_{n_i}}{n_u}}$$

де a_{n-i+1} – коефіцієнт, значення якого задані в таблиці залежності кількості паралельних дослідів та кількості серії дослідів; $q = n_u / 2$ – за парної кількості паралельних дослідів; $q = (n_u - 1) / 2$ – за непарної; y_{n_i} – величини з ранжованої вибірки значень залежної змінної для кожної серії дослідів, тобто $y_{n_1} \leq y_{n_2} \leq \dots \leq y_{n_n}$.

Якщо $\omega_n \geq \omega_{\text{табл}}$ для вибраної ймовірності α , то гіпотеза приймається, якщо $\omega_n \leq \omega_{\text{табл}}$, то гіпотеза відхиляється.

Гіпотезу про однорідність дисперсії при $n_n = \text{const}$ можна перевірити за допомогою G -критерію Кохрена:

$$G = \frac{S_{n_{\max}}}{\tau S_n^2}, \quad \tau \rightarrow r,$$

де S_n^2 – дисперсія для кожної n -ї серії дослідів; $S_{n_{\max}}^2$ – максимальне значення дисперсії для досліджень.

Просторові дисперсії

$$S_n = \frac{1}{r-1} \cdot \sum_{j=1}^n (y_{n_j} - y_n)^2,$$

де y_{n_j} – результат вимірювання параметра оптимізації n -го рядка та j -го стовпця; y_n – середнє значення результатів досліджень для n -го дослідів.

За $G_{\text{табл}} > G$, за вибраної ймовірності α та заданого обсягу кількості дослідів і кількості степенів вільності $k = n - 1$ гіпотеза однорідності дисперсії приймається.

За $G_{\text{табл}} < G$ гіпотеза однорідності дисперсії не приймається.

Дисперсія на однорідність за $n_n \neq \text{const}$ перевіряється за критерієм Бартлетта.

Метод випадкового балансу ґрунтується на застосуванні дис-

першого аналізу та плануванні експерименту (за спеціальним планом). Фактори обчислюються на двох рівнях: верхньому та нижньому.

Кількість дослідів не перевищує кількості досліджуваних факторів і значення оцінюють за допомогою t -критерію Стьюдента.

Визначають важливість дії факторів на параметр оптимізації.

Проводять статистичну оцінку ефективності впливу факторів.

Використовують оцінку середньоквадратичних і середньоарифметичних значень. Для визначення відмінностей між двома дисперсіями обчислюють критерій Фішера:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

Якщо $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, де σ_1^2 і σ_2^2 – порівнювані дисперсії; F порівнюють з $F_{\text{табл}}$.

Обсяги вибірок N_1 і N_2 беруться до та після використання відповідних дій дослідника. Для перевірки гіпотези про рівність середньоквадратичних значень використовують критерій Стьюдента.

Якщо кількість вимірів більша за 25, то маємо:

$$t_{\sigma} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}}}.$$

Якщо $t_{\sigma} > 3$, то гіпотеза про рівність середньоквадратичних значень відхиляється і дослід вважається ефективним.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Які складові має технічна система як об'єкт дослідження?
2. Наведіть приклади технічних систем.
3. Поясніть сутність понять «елементи», «властивості» та «зв'язки» технічної системи.
4. За якими характеристиками класифікується структура системи?
5. Поясніть сутність поняття «структура технічної системи».
6. Дайте визначення поняття «технічна система».
7. Назвіть параметри технічної системи.
8. Поясніть сутність параметрів технічної системи.

9. Наведіть схеми процесів синтезу моделей технічних систем на підставі класичного підходу.
10. Наведіть схеми процесів синтезу моделей технічних систем на підставі системного підходу.
11. Наведіть визначення поняття «модель технічної системи».
12. Наведіть визначення поняття «моделювання».
13. Поясніть сутність понять «фізичні» та «абстрактні» моделі.
14. Назвіть види абстрактних моделей.
15. Наведіть визначення поняття «математична модель технічної системи».
16. Наведіть схему кібернетичної моделі технічної системи.
17. Поясніть сутність структурних елементів математичної моделі.
18. Наведіть схему структурних елементів об'єкта математичного моделювання.
19. Поясніть сутність поняття «фактор» як засобу впливу на об'єкт дослідження.
20. Назвіть види факторів та поясніть їх призначення.
21. Наведіть приклади факторів.
22. Назвіть основні вимоги до експериментальних факторів.
23. Поясніть послідовність використання методу рангової кореляції.
24. Поясніть метод дисперсійного аналізу.
25. Поясніть метод випадкового балансу.

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Необхідно знати:

1. Суб'єктивний та об'єктивний зміст поняття «технічна система».
2. Як проводити системний аналіз та формалізований опис технічних систем.
3. Зміст формалізованого опису параметрів технічної системи як об'єкта подальшого математичного моделювання.
4. Можливості та переваги традиційного (класичного) підходу до розроблення математичних моделей.
5. Особливості та переваги системного підходу до розроблення математичних моделей технічних систем.

6. Взаємозв'язок структурних елементів об'єкта моделювання: вхідних, внутрішніх, керувальних, збурювальних та вихідних параметрів.

7. Особливості вибору засобів впливу (факторів) на технічну систему.

8. Технічні вимоги до експериментальних факторів: керованість, однозначність, сумісність та незалежність.

9. Послідовність застосування методу рангової кореляції під час проведення відсіювальних експериментів.

10. Статистичні вимоги та послідовність застосування методу дисперсійного аналізу під час проведення відсіювальних експериментів.

11. Послідовність застосування методу випадкового балансу під час проведення відсіювальних експериментів.

12. Основи теорії планування експерименту.

Слід запам'ятати:

1. Визначення структурних складових об'єкта «технічна система»: елементи, властивості, зв'язки, структура системи.

2. Визначення понять «технічна система» та її параметрів: вхідних, керувальних, збурювальних, вихідних.

3. Відмінні особливості традиційного та системного підходів до математичного моделювання.

4. Визначення процесу моделювання, видів моделей, а також самого поняття «математична модель системи».

5. Визначення структурних елементів математичної моделі технічної системи: обмеження системи, цільової функції, вхідних, вихідних, керувальних і збурювальних параметрів.

6. Визначення та особливості застосування керованих і некерованих, кількісних і якісних факторів.

7. Розрахунки з відбору факторів експериментів за методом рангової кореляції.

8. Розрахунки з відбору факторів експериментів за методом дисперсійного аналізу.

9. Розрахунки з відбору факторів експериментів за методом випадкового балансу.

10. Формули:

$V = F(X, Q)$ – загальна математична модель об'єкта моделювання;

$A_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$ – сума рангів кожного j -го фактора;

$T = \frac{\sum_{j=1}^k A_j}{k}$ – середня сума рангів;

$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k)}$ – ступінь відповідності думок фахівців за коефіцієнтом конкордації W для незв'язаних рангів;

$S = \sum_{i=1}^m \Delta_{ji}^2$ – сума квадратів відхилень;

$W = \frac{S}{\frac{1}{12}m^2(k^3 - k) - mT}$, $T = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (t_{ij}^3 - t_{ij})$ – ступінь відповідності думок фахівців за коефіцієнтом конкордації W для зв'язаних рангів;

$\chi^2 = m(k-1)W$ – перевірка W за χ^2 -критерієм;

$P = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)100$ – P – імовірність, α – рівень значущості;

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k_i} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ – відповідність фахівців за кожним фактором;

$\omega = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^q a_{n-i+1} [y_{n_i(n-i+1)} - y_{n_i}] \right\}^2}{\sum_{i=1}^{n_u} y_{n_0}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n_q} y_{n_i}}{n_u}}$ – однорідність дисперсій ω ;

$G = \frac{S_{n_{\max}}}{\tau S_n^2}$, $\tau \rightarrow r$ – перевірка гіпотези про однорідність дисперсії при $n_n = \text{const}$ за допомогою G -критерію Кохрена;

$$S_n = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^n (y_{n_j} - y_n)^2 \quad - \text{просторова дисперсія } S_n ;$$

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad - \text{критерій Фішера};$$

$$t_\sigma = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}}} \quad - \text{критерій Стьюдента.}$$

Треба вміти:

1. Визначати досліджуваний чи проєктований об'єкт як технічну систему.

2. Проводити формалізований опис параметрів об'єкта «технічна система».

3. Визначати поняття: моделювання, фізична модель, абстрактна, гносеологічна, інформаційна, сенсуальна, концептуальна, математична модель системи.

4. Зображати структурні елементи математичної моделі об'єкта моделювання.

5. Визначати поняття: обмеження системи, цільова функція, вхідні, вихідні, керувальні та збурювальні параметри.

6. Проводити вибір та визначати в ході експериментальних досліджень фактори, що впливають на технічну систему.

7. Застосовувати метод рангової кореляції для відбору факторів експерименту.

8. Застосовувати метод дисперсійного аналізу для відбору факторів експерименту.

9. Застосовувати метод випадкового балансу для відбору факторів експерименту.

3. АНАЛІЗ СКЛАДОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

3.1. Класифікація математичних моделей

Математичні моделі будують на підставі встановлених дослідником законів та закономірностей, базуючись на теоріях та методах фундаментальних (фізика, математика, економіка та ін.) і прикладних (інформаційно-вимірювальні системи, гідравліка, інформаційні технології тощо) наук. Математичні моделі можна згрупувати за допомогою трьох основних критеріїв:

- 1) поведінки моделей у часі;
- 2) виду вхідної інформації, параметрів і виразів, які складають математичну модель;
- 3) типу математичного апарату.

Розглянемо детальніше класифікацію видів математичної моделі за кожним із вказаних критеріїв.

Критерій 1. Математичні моделі бувають:

- динамічними (час відіграє роль незалежної змінної і поведінка системи змінюється в часі);
- статичними (поведінка системи не залежить від часу);
- квазістатичними (поведінка системи змінюється від одного статичного стану до іншого залежно від зовнішнього впливу).

Критерій 2. Якщо елементи математичної моделі встановлені досить точно, і поведінку системи можна визначити, то математична модель детермінована, у протилежному випадку – стохастична. Якщо інформація й параметри є безперервними величинами, а математичні зв'язки постійними, то математична модель безперервна, в протилежному випадку – дискретна.

Критерій 3. Математичні моделі можуть мати лінійні й нелінійні складові та розглядатись, залежно від математичної проблеми, як такі типи:

- рівняння (алгебричні, диференціальні тощо);
- апроксимаційні задачі (інтерполяції, екстраполяції, числового інтегрування та диференціювання);
- задачі оптимізації;
- стохастичні задачі.

Розглянуті математичні моделі зображено на рис. 3.1.

Класифікація в будь-якій галузі знань надзвичайно важлива. Вона дозволяє узагальнити нагромаджений досвід, упорядкувати поняття предметної галузі. Не є винятком у цьому значенні і математичне моделювання. Види математичних моделей за різними ознаками класифікації наведено в табл. 3.1. Класифікація математичних моделей може бути застосована до будь-яких об'єктів. Розглянемо особливості різних видів моделей відносно об'єкта – технічної системи.

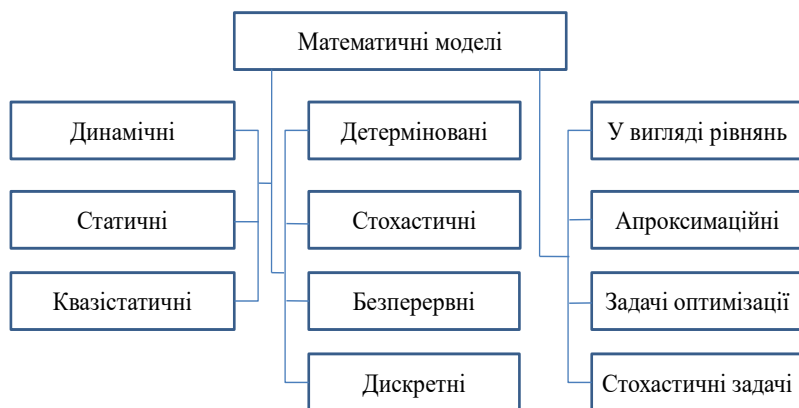


Рис. 3.1. Види математичних моделей

Математичні моделі на мікрорівні виробничого процесу відображають фізичні процеси. Наприклад, при вимірюванні під час дій приладу чи людини (структурна частина процесу).

Математичні моделі на макрорівні виробничого процесу описують в цілому робочі процеси як сукупність дій.

Математичні моделі на метарівні виробничого процесу описують такі технічні системи, як вимірювальна лабораторія або дільниця в цілому.

Структурні математичні моделі використовують для відображення структурних властивостей об'єктів. Наприклад, для подання структури технологічного процесу чи операції складання приладів застосовують структурно-логічні моделі [32].

Функціональні математичні моделі призначені для відображення інформаційних, фізичних, часових процесів, що перебігають у працюючому обладнанні, в ході виконання технологічних процесів та ін.

Класифікація математичних моделей

Ознаки класифікації	Види математичних моделей
Належність до ієрархічного рівня	1. Моделі макрорівня. 2. Моделі мезорівня. 3. Моделі метарівня
Характер властивостей об'єкта, що відображаються	1. Структурні. 2. Функціональні
Спосіб подання властивостей об'єкта	1. Аналітичні. 2. Алгоритмічні. 3. Імітаційні
Спосіб отримання моделі	1. Теоретичні. 2. Емпіричні
Особливості поведінки об'єкта	1. Детерміновані. 2. Стохастичні

Аналітичні математичні моделі є явними математичними виразами вихідних параметрів як функцій від вхідних та внутрішніх параметрів. Аналітичне моделювання ґрунтується на непрямому описі модельованого об'єкта за допомогою набору математичних формул. Мова аналітичного опису містить такі основні групи семантичних елементів: критерії, невідомі дані, математичні операції, обмеження. Найсуттєвіша характеристика аналітичних моделей полягає в тому, що модель не є структурно подібною до об'єкта моделювання. Під структурною подібністю тут розуміється однозначна відповідність елементів і зв'язків моделі елементам і зв'язкам об'єкта моделювання. До аналітичних належать моделі, побудовані на основі апарату математичного програмування, кореляційного, регресійного аналізу. Аналітичні моделі є ефективним інструментом для вирішення завдань оптимізації процесів, які відбуваються в технічних системах, а також для оптимізації та обчислення характеристик самих технічних систем.

Важливою є розмірність конкретної аналітичної моделі. Часто для реальних технічних систем (вимірювальних приладів, комп'ютерних систем) розмірність їх аналітичних моделей така велика, що оптимальне рішення виявляється надто складно отримати з обчислювальної точки зору. Для підвищення обчислювальної ефективності в цьому випадку використовують різні прийоми. Один із них полягає в розбитті задачі великої розмірності на підза-

дачі меншої розмірності так, щоб автономні розв'язки підзадач у певній послідовності давали розв'язок основної задачі. При цьому виникають проблеми організації взаємодії підзадач, які не завжди виявляються простими. Інший прийом припускає зменшення точності обчислень, внаслідок чого вдається скоротити час розв'язання задачі.

Алгоритмічні математичні моделі виражають зв'язки між вхідними, вихідними та внутрішніми параметрами у вигляді алгоритму.

Імітаційні математичні моделі – це алгоритмічні моделі, які відображають розвиток процесу (поведінка об'єкта дослідження) в часі при задані зовнішніх дій на процес (об'єкт). Наприклад, це моделі систем масового обслуговування, задані в алгоритмічній формі.

Імітаційне моделювання ґрунтується на описі об'єкта моделювання. Істотною характеристикою таких моделей є структурна подібність об'єкта та моделі. Це означає, що кожному істотному з погляду розв'язуваної задачі елемента об'єкта ставиться у відповідність елемент моделі. При побудові імітаційної моделі описуються закони функціонування кожного елемента об'єкта та зв'язки між ними.

Робота з імітаційною моделлю полягає в проведенні імітаційного експерименту. Процес, що перебігає в моделі в ході експерименту, подібний до процесу в реальному об'єкті. Тому дослідження об'єкта на його імітаційній моделі зводиться до вивчення характеристик процесу, що відбувається в ході експерименту.

Важливою особливістю імітації є можливість керувати масштабом часу. Динамічний процес в імітаційній моделі перебігає в системному часі. Системний час імітує реальний час. При цьому розрахунок системного часу в моделі можна виконувати двома способами. Перший спосіб полягає в «русі» за часом із постійним кроком, другий – у «русі» за часом від події до події, при цьому вважається, що в проміжках часу між подіями в моделі змін не відбувається.

Теоретичні математичні моделі створюються в результаті дослідження об'єктів (процесів) на теоретичному рівні. Наприклад, існують вирази для сил різання, отримані на підставі узагальнення фізичних законів. Але вони не прийнятні для практичного використання, оскільки дуже громіздкі та не зовсім адаптовані до

реальних процесів оброблення матеріалів.

Емпіричні математичні моделі створюються в результаті проведення експериментів (вивчення зовнішніх проявів властивостей об'єкта за допомогою вимірювання його параметрів на вході та виході) та оброблення їх результатів методами математичної статистики.

Детерміновані математичні моделі описують поведінку об'єкта з позицій повної визначеності в теперішньому часі і майбутньому. Приклади таких моделей: формули фізичних законів, процеси вимірювання деталей та ін.

Стохастичні математичні моделі враховують вплив випадкових факторів на поведінку об'єкта, тобто оцінюють його майбутнє з позицій імовірності тих або інших подій. Приклади таких моделей: опис очікуваних довжин черг у системах масового обслуговування, очікуваних обсягів випуску надпланової продукції виробничою дільницею, точність розмірів у партії деталей з урахуванням явища розсіювання тощо.

3.2. Вимоги до математичних моделей

Побудована математична модель технічної системи повинна відповідати таким вимогам:

- достатній точності;
- адекватності;
- економічності та простоті;
- забезпечуваності необхідної надійності;
- універсальності;
- мати стандартну форму;
- чіткості поставленого завдання;
- обов'язковій вираженості взаємозв'язків і взаємозалежностей у формальному вигляді.

Розглянемо детальніше основні з цих вимог.

Точність математичної моделі оцінюється ступенем збіжності значень вихідних параметрів реального об'єкта та значень тих самих параметрів, які розраховані за допомогою моделі.

Припустимо, що властивості об'єкта, відображені в математичній моделі, оцінюються вектором вихідних параметрів

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \bigcup_{i=1}^n X_i$, $y_{i,m}$ – i -й параметр, розрахований за допо-

могою математичної моделі, а y_{id} – дійсне значення цього параметра.

Тоді відносна похибка математичної моделі за i -м параметром

$$E_i = \frac{|y_{iM.M} - y_{id}|}{y_{id}}. \quad (3.1)$$

За формулою (3.1) розраховуються похибки для кожного вихідного параметра, у результаті вектор похибок $E = (E_1, E_2, \dots, E_m)$. У цілому для математичної моделі похибка оцінюється так:

$$E_{M.M} = \max_i E_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.2)$$

Наприклад, оцінимо похибку для математичної моделі (3.2). Вектор вихідних параметрів $Y = (P_X, P_Y, P_Z)$. Припустимо, що $E_{PX} = E_1 = 0,05$, $E_{PY} = E_2 = 0,07$, $E_{PZ} = E_3 = 0,03$, тоді в цілому похибка математичної моделі $E_{M.M} = \max_i E_i = 0,07$.

Адекватність математичної моделі – це її здатність відображати задані властивості об'єкта з похибкою, не більшою від заданої.

Оскільки вихідні параметри моделі є функцією $Y = F(X, Q)$ від внутрішніх і вхідних параметрів, то і точність моделі залежить від їх значень. Адекватність моделі характерна в обмеженій області зміни внутрішніх і вхідних параметрів. Якщо позначити область адекватності як OA , то

$$OA = \{X, Q / E_{M.M} \leq \delta\}, \quad (3.3)$$

де δ – задане число.

Економічність математичної моделі характеризується витратами обчислювальних ресурсів на її реалізацію. Якщо робота з математичною моделлю виконується вручну, то її економічність визначається витратами робочого часу проектувальника, якщо модель використовується в автоматизованому проектуванні, то економічність визначається витратами машинного часу та пам'яті комп'ютера. Оскільки вказані величини визначаються характеристиками конкретного комп'ютера, то використовувати їх для оцінювання економічності математичної моделі не коректно. Тому економічність самої математичної моделі оцінюють за іншими вели-

чинами, а саме:

- середньою кількістю операцій, виконуваних на одне звернення до математичної моделі;
- розмірністю системи рівнянь у математичній моделі;
- кількістю внутрішніх параметрів, використовуваних у моделі, та ін.

***Надійність математичної моделі** – забезпечення безпечної роботи з нею, правильність отриманих результатів, оптимального інтервалу розбіжності результатів моделювання з реальними показниками технічної системи.*

***Універсальність математичної моделі** характеризує повноту відображення в ній властивостей реального об'єкта. Математична модель відображає не всі, а лише деякі властивості реального об'єкта. Наприклад, формули для сил різання не враховують температуру навколишнього повітря, вологість, економічні параметри та ін.*

У протилежному випадку використання універсальних машинних методів оброблення математичної моделі за допомогою комп'ютера ускладнюється.

До математичних моделей висувається низка допоміжних вимог, серед яких:

1. ***Обчислюваність** – можливість ручного або за допомогою комп'ютера дослідження якісних і кількісних закономірностей функціонування об'єкта (технічної системи).*

2. ***Модульність** – відповідність конструкцій моделі структурним складовим об'єкта (технічної системи).*

3. ***Алгоритмізованість** – можливість розроблення відповідних алгоритму і програми, що реалізовує математичну модель на комп'ютері.*

4. ***Наочність** – зручне візуальне сприйняття моделі користувачем.*

Зазвичай модель виникає як необхідний етап вирішення конкретного завдання. Проте надалі може відбуватися відособлення моделі від завдання і модель починає жити самостійно. Прикладом може бути сюжет руху з постійною швидкістю, який виникав у людській діяльності так часто, що зрештою відокремився від завдань і став таким, що становить суть фізичного знання, названого «рівномірний прямолінійний рух». Тепер за потреби вирішити завдання, пов'язане з рівномірним рухом, користуються цією готовою мо-

деллю процесу. У одних завданнях результатом може виявитися час, у других – пройдений шлях, у третіх – швидкість. Решта параметрів моделі процесу стане початковими даними.

3.3. Структурні елементи математичних моделей

За структурою математична модель має такі елементи:

1. **Об'єкт моделювання** – це суцільна технічна система або її складові структурні частини (підсистеми).

2. **Постійні параметри** – величини, які в процесі всього моделювання залишаються незмінними.

3. **Змінні параметри** – величини, значення яких потрібно знайти при розв'язуванні задачі за допомогою математичного моделювання.

4. **Критерій оптимальності** – показник міри ефективності досліджуваної технічної системи, величина якого при екстремальному значенні цільової функції (максимальному чи мінімальному) визначає оптимальний рішення для заданих умов, тобто оптимальне значення змінних параметрів моделі.

5. **Обмеження** – області можливих значень змінних умов за заданих конкретних умов технічної системи, що вивчається і для якої обчислюється найкраще (оптимальне) рішення.

6. **Цільова функція** пов'язує критерій оптимальності зі змінними та постійними параметрами. У процесі створення моделей знаходиться оптимальне рішення та визначаються такі значення змінних параметрів, які надають цільовій функції мінімаксного значення.

Розглянемо для прикладу математичне моделювання процесу вимірювання деталей працівниками відділу технічного контролю механічного цеху приладобудівного підприємства. У загальному вигляді математична модель планування процесу контролю деталей може мати такий вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m d_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + \dots + d_{1m}x_m &\leq b_1; \\ d_{21}x_1 + \dots + d_{2m}x_m &\leq b_2; \\ d_{k1}x_1 + \dots + d_{km}x_m &\leq b_k; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

де F – загальна трудомісткість контролю всіх деталей, нормо-год.; m – кількість видів деталей; k – кількість видів контрольно-вимірювального обладнання; d_{ij} – норма часу (трудомісткість) на контроль j -го виду деталей в i -й групі обладнання, нормо-год.; x_j – кількість деталей j -го контрольованого виду; b_i – фонд часу роботи i -ї групи обладнання, нормо-год.

Змінними параметрами в моделі є кількість деталей кожного контрольованого виду. Постійні параметри – це кількість видів деталей m , кількість груп обладнання n , норма часу на контроль кожного виду деталей у відповідній групі обладнання d_{ij} та фактичний час роботи кожної групи контрольно-вимірювального обладнання b_i .

Критерієм оптимальності в моделі є загальна трудомісткість контролю всіх видів деталей F .

Вираз (3.4) є цільовою функцією. Обмеженнями в моделі є нерівності (3.5) і (3.6). Так обмеження (3.6) свідчить про те, що кількість деталей може дорівнювати нулю або бути тільки додатною. Обмеження (3.5) відображає області оптимізації задачі і вказує на те, що трудомісткість контролю усіх видів деталей у відповідній групі обладнання не повинна перевищувати відповідного ліміту часу.

Для побудови математичної моделі найважливішим є правильний вибір параметрів, умов їх обмежень та цільових функцій. Наприклад, для контролю деталей на контрольно-вимірювальному обладнанні основними параметрами є габаритні, точнісні, температурні та інші параметри контрольно-вимірювального обладнання.

Основними обмеженнями є допустимі похибки розмірів, форми та взаємного розміщення оброблюваних поверхонь, а також вимоги до шорсткості поверхні, її твердості та ін.

Цільова функція – це певний узагальнювальний техніко-економічний показник. Він відображає кількісний та якісний вплив кожного з параметрів на критерій оптимальності.

При оптимізації процесу контролю деталей на контрольно-вимірювальному обладнанні цільовою функцією може бути найменша технологічна собівартість, максимальна продуктивність та узагальнений показник найменших зведених затрат. У деяких випадках як цільова функція може бути прийнята допустима точність оброблення, вимірювань та ін.

Отже, можемо сформулювати термін «математична модель технічної системи». **Математична модель технічної системи** – це

сукупність математичних об'єктів (чисел, змінних, матриць, множин та ін.) та відношень між ними, яка адекватно відображає властивості, особливості та поведінку технічної системи, що цікавлять інженера, який розробляє або досліджує цю систему.

3.4. Параметри математичної моделі

Математична модель приблизно описує властивості досліджуваного об'єкта або технічної системи. За експериментально-статистичного методу отримання математичної моделі, виходячи з апріорної інформації, передбачають вид моделі. А за результатами експериментів, поставленими відповідно до спеціально розроблених планів – матриць планування (активний експеримент), визначають оцінки теоретичних коефіцієнтів регресії.

За такого методу отримання моделей застосовують кібернетичний підхід, використовуючи як модель піддослідного об'єкта «чорну скриньку» (див. рис. 2.3). Такий підхід найбільш формалізований та математично обумовлений до застосованих методів і потребує меншого часу та витрат для розроблення математичної моделі порівняно з теоретико-аналітичним.

Вибір вихідного параметра (параметра оптимізації) визначає повноту характеристики модельованого об'єкта. Оскільки математична модель лише приблизно описує окремі властивості технічної системи, неможливо і недоцільно розробляти математичну модель на всі випадки життя.

Залежно від мети моделювання та виду технічної системи вихідні параметри можуть різнитися. Це показники якості деталі, складальної одиниці, машини або технологічного процесу за кожною операцією окремо. Умовно їх можна поділити на економічні, техніко-економічні та статистичні.

До економічних показників можна віднести економічну ефективність використання технологічного процесу, собівартість виробництва виробу, рентабельність, витрати та ін.

Найбільш поширеними техніко-економічними показниками є:

- продуктивність;
- параметри якості продукції (точність, шорсткість, фізико-механічний стан поверхневого шару та ін.);
- кількісні характеристики технологічного процесу (відсоток браку, стійкість різального інструмента та ін.).

Статистичні показники часто використовують під час моделю-

вання точності продукції, що випускається, стабільності функціонування технічних систем, визначення шорсткості, мікротвердості тощо, тобто як вихідний параметр розглядають статистичну характеристику (дисперсію або математичне сподівання) цього параметра, а не його поточне значення.

Розглянемо, які вимоги висуваються до вихідного параметра (оптимізації) під час розроблення математичних моделей технологічних процесів. Він повинен мати передусім кількісну оцінку, тобто задаватися числовим значенням і вимірюватися за будь-якої зміни технологічного процесу. За неможливості визначення в кількісному вигляді доводиться використовувати ранговий підхід за допомогою суб'єктивних рангових критеріїв (сильно, помірно, слабо, добре, погано та ін.). Параметр має бути:

- статистично ефективним, тобто вимірюватись з найбільшою точністю, що дозволяє скоротити до мінімуму дублювання експериментів;

- інформаційним (універсальним), тобто всебічно характеризувати технологічний процес;

- фізично змістовним, тобто мати можливість досягнення корисних результатів визначеної властивості деталі, складальної одиниці у відповідних умовах процесу. Через технічні труднощі можна використовувати параметри, які дають непряму оцінку. У цих випадках важко інтерпретувати результати;

- однозначним, тобто має максимізуватись або мінімізуватись тільки одна властивість деталі, складальної одиниці або процесу. Вимога однозначності в статистичному змісті полягає в тому, що визначеному набору факторів відповідає тільки одне (з точністю помилки експерименту) значення вихідного параметра оптимізації.

Параметри оптимізації залежно від типу контрольованих параметрів та ознак якості деталей, складальних одиниць або технологічного процесу можуть бути:

- простору та часу (довжина, час, площа, об'єм, лінійна швидкість, кутова швидкість, лінійне прискорення та ін.);

- механічні (маса, густина, сила, момент сили (пари сил), в'язкість, кінетична в'язкість та ін.);

- теплові (температура, кількість теплоти, тепловий потік, теплоємність та ентропія, питома теплоємність та ентропія, поверхнева густина теплового потоку, коефіцієнт теплообміну та ін.);

- електричні та магнітні (кількість електрики), електричний за-

ряд, густина електричного струму, лінійна густина електричного струму, об'ємна густина електричного заряду, питомий електричний опір, напруга магнітного поля, магнітний потік та ін.);

– акустичні (звуковий тиск, об'ємна швидкість, акустичний опір, інтенсивність звуку та ін.);

– світлові величини енергетичної фотометрії (світловий потік, світлова енергія, світність, освітлення, яскравість та ін.);

– радіоактивність та іонізуюче випромінювання (поглинена доза випромінювання, потужність дози випромінювання, інтенсивність випромінювання та ін.);

– якісні (зовнішній вигляд деталі, складальної одиниці тощо).

Будь-який параметр повинен бути обмежений граничнодопустимими значеннями, у яких проводиться оптимізація.

Параметр оптимізації позначають символом «Y» відповідно до визначеного показника деталі, складальної одиниці або вимірювального процесу, усталених одиниць вимірювання.

Під час планування екстремального експерименту дуже важливо визначити параметр, який потрібно оптимізувати (виконати це не так легко, як здається на перший погляд). Мету дослідження потрібно формулювати дуже чітко та допускати кількісну оцінку.

Параметром оптимізації називають кількісне вираження характеристики мети дослідження. Бажано, щоб параметрів оптимізації було якомога менше. Проте не слід домагатися зменшити кількість параметрів оптимізації за рахунок повноти характеристики системи.

Параметр оптимізації – це ознака, за якою можна оптимізувати процес. Він повинен бути кількісним, тобто задаватись числовим значенням. Його потрібно вимірювати за будь-якою важливою комбінацією вибраних рівнів факторів. Множину значень, яких може набувати параметр оптимізації, називатимемо областю його визначення. Область визначення може бути неперервною і дискретною, обмеженою та безмежною.

Наприклад, вихід реакції – це параметр оптимізації з неперервною обмеженою областю визначення. Він може змінюватись у проміжку від 0 до 100 %. Кількість бракованих виробів, кількість кров'яних тілець у пробі крові – ось приклади параметрів із дискретною областю визначення, яка обмежена знизу.

Уміти вимірювати параметр оптимізації – це означає мати необхідний прилад. Іноді такого приладу може не бути або він надто

дорогий. Коли немає способу кількісного вимірювання результату, то користуються засобом, який називають ранжуванням (ранговим підходом). При цьому параметрам оптимізації присвоюються оцінки – ранги за обраною шкалою: двобальною, п'ятибальною і т.д. Ранговий параметр має дискретну обмежену ділянку визначення. У найпростішому випадку ділянка має два значення («так», «ні», «добре», «погано»). Це може відповідати якійсь продукції та браку.

Ранг – це кількісна оцінка параметра оптимізації, але вона має умовний (суб'єктивний) характер. У відповідності до якісної ознаки ставиться деяке число – ранг.

Наприклад, необхідно спекти яблуневий пиріг за новим рецептом. Цей процес потребує оптимізації. Мета процесу – виготовлення смачного пирога, але таке формулювання мети не дає можливості почати оптимізацію: треба вибрати кількісний критерій, який характеризує ступінь досягнення мети. Можна прийняти таке рішення: дуже смачний пиріг – оцінка «5», просто смачний – «4» і т.д. Інші приклади рангового підходу: визначення чемпіона світу з фігурного катання чи гімнастики, дегустації напоїв, порівняння виробів мистецтва та ін.

Вимоги до параметрів оптимізації:

– Параметр оптимізації повинен відображатися одним числом. Іноді це буває природно, як реєстрація показників приладу. Наприклад, швидкість руху машини визначається числом на спідометрі.

– Кількісною природою параметра оптимізації є однозначність у статичному значенні. Заданому набору значень факторів має відповідати одне з точністю до похибки експерименту значення параметра оптимізації.

– Оцінювання ефективності. Для успішного досягнення мети дослідження необхідно, щоб параметр оптимізації дійсно оцінював ефективність функціонування системи. Ця вимога є головною, яка визначає коректність постановки завдання. Уявлення про ефективність параметра не залишається постійним у ході дослідження. Воно змінюється з тим, як накопичується інформації та залежно від досягнутих результатів. Це приводить до послідовного підходу до обрання параметра оптимізації. Мало мати ефективний параметр оптимізації, треба, щоб він був ефективний у статичному змісті.

– Вимога універсальності або повноти. Під універсальністю параметра оптимізації розуміють його здатність всебічно характеризувати об'єкт. Наприклад, технологічні параметри оптимізації

недостатньо універсальні – вони не враховують економіку.

Бажано, щоб параметр оптимізації мав фізичну суть, був простим та легко вираховувався. Вимога фізичної суті пов'язана з наступною інтерпретацією результатів експерименту.

3.5. Системний підхід до розроблення та аналізу математичної моделі

Складність технічних систем, що моделюються, значною мірою залежить від різноманіття номенклатури об'єктів вимірювання, наявних вимірювальних приладів і систем та багатьох інших умов. При цьому завжди намагаються використовувати такі технологічні процеси, за допомогою яких можна досягати найбільшої продуктивності праці за найменшої собівартості та високої якості продукції в умовах певного підприємства.

До системного аналізу входять:

1. Постановка задачі, яка включає визначення кінцевих цілей та питання, що потребують вирішення умов, в яких функціонує система, визначення обмежень, що накладаються на умови функціонування системи та ін.

2. Дослідження: визначення, аналіз і узагальнення даних, необхідних для розв'язання задачі, визначення структури системи (проблеми), що аналізується, установлення зв'язків, виявлення методів та дій для розв'язання задачі.

3. Аналіз, що охоплює побудову моделей, вибір критеріїв ефективності їх використання для передбачення наслідків того чи іншого курсу дій, зіставлення різних варіантів рішень щодо цих наслідків.

4. Попереднє судження зводиться до вибору найоптимальніших шляхів досягнення мети, формулювання висновків та розроблення рекомендацій щодо подальших дій.

5. Експериментальна перевірка ухвалених рішень, результатів аналізу.

6. Заключне судження – заключний вибір найоптимальнішого варіанта вирішення завдання на підставі експериментальної перевірки результатів аналізу.

7. Реалізація ухваленого рішення, що включає доведення ухваленого рішення до конкретних результатів: креслень, технологій, організаційних заходів тощо.

Із позиції системного підходу послідовність опису будь-якого

об'єкта, який вивчається, здійснюється спочатку на рівні властивостей (входів, виходів), потім на рівні складу, і, нарешті, на рівні структури.

Модель етапів системного підходу (проблемна ситуація – мета – функція – структура – ресурси) задає обов'язкову послідовність аналізу і синтезу об'єктів, які розглядаються як технічна система.

Системний аналіз слід направляти від кінцевої до початкової стадії проблеми, тобто від вимог до виробу та технології кінцевих етапів виробництва до вимог сировини, напівфабрикатів, вихідних заготовок та ін.

Наприклад, технічна система – сукупність функціонально взаємозв'язаних засобів технологічного оснащення, призначених для виконання в умовах виробництва заданих процесів вимірювання відповідно до вимог технологічної документації. Підсистема – вимірювальний комплекс, пристосування, пристрій. Підсистему можна розбити ще на підсистеми і так далі. Вхідними елементами в технічній системі є параметри, які характеризують точність вимірювання, величина припуску, параметри пристосування (кількість опорних точок, зусилля закріплення, місце прикладання). Наприклад, вхідними параметрами певного вимірювального комплексу для досягнення точності є жорсткість, подача, швидкість та ін.

Під час розроблення та аналізу математичної моделі необхідно брати до уваги принципи системного підходу:

- 1) пропорційне та покрокове просування за станами створення моделі;
- 2) постійне узгодження інформаційних, ресурсних, надійнісних та інших характеристик;
- 3) контроль співвідношення окремих рівнів ієрархії в системі моделювання;
- 4) цілісність і взаємозв'язок окремих відособлених етапів побудови моделі.

Математична модель повинна відповідати заданій меті її створення, тому її окремі частини потрібно компонувати, виходячи з єдиного системного завдання. Мета може бути сформована якісно, тоді вона матиме більшу змістовність і тривалий час може відображати об'єктивні можливості моделювання. За кількісного формулювання мети виникає цільова функція, що точно відображає найбільш істотні чинники, що впливають на досягнення поставленої мети.

Системний підхід забезпечує побудову моделей і вирішення системних завдань математичного моделювання, при вирішенні яких синтезуються нові рішення на підставі великої кількості вихідних даних і на підставі пропозицій різних фахівців. Використання системного підходу за цих умов дозволяє не тільки побудувати модель реального об'єкта, а на підставі цієї моделі вибрати необхідну кількість керуваної інформації в реальних системах та оцінити показники її функціонування. Такий підхід до математичного моделювання дозволяє знайти найбільш ефективний варіант побудови і оптимальний режим функціонування або експлуатації реальної технічної системи.

Під час математичного моделювання необхідно також забезпечити максимальну ефективність отриманої моделі. Ефективність у загальному вигляді визначається як деяка різниця між показниками цінності результатів, отриманих у підсумку експлуатації моделі і витратами на її розроблення та створення.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Назвіть основні критерії, за якими групують математичні моделі.
2. Які є види математичних моделей?
3. Наведіть класифікацію математичних моделей.
4. У чому полягає суть аналітичних математичних моделей?
5. У чому полягає суть імітаційних математичних моделей?
6. Назвіть вимоги до математичних моделей технічних систем?
7. Як оцінюється точність математичної моделі?
8. Як оцінюється адекватність математичної моделі?
9. Назвіть структурні елементи математичної моделі.
10. Що таке цільова функція математичної моделі?
11. Дайте визначення математичної моделі технічної системи.
12. Назвіть вихідні параметри (оптимізації) моделювання.
13. У чому полягає суть системного підходу до математичного моделювання?
14. Назвіть принципи системного підходу до математичного моделювання?
15. Для яких задач розробляють математичні моделі?
16. Поясніть сутність понять «математична модель об'єкту і способу вимірювання» та «процес вимірювання».

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Необхідно знати:

1. Як формуються критерії побудови математичних моделей.
2. Відповідні ознаки класифікації математичних моделей технічних систем.
3. Як задовольняються (оцінюються) технічні вимоги до математичних моделей технічних систем: точність, адекватність, економічність, надійність, універсальність, обчислюваність, модульність, алгоритмізованість, наочність.
4. Вимоги до структурних елементів математичних моделей та наведений в п. 3.3 типовий приклад математичної моделі.
5. Від чого залежить та як встановлюються вихідні параметри математичної моделі.
6. Послідовність математичного опису технічних систем із позиції системного аналізу: постановка задачі, дослідження, аналіз, попереднє судження, експериментальна перевірка прийнятих рішень та отриманих результатів, заключне судження, реалізація прийнятого рішення.
7. Чотири базові принципи системного підходу до розробки та аналізу математичних моделей технічних систем.

Слід запам'ятати:

1. Які математичні моделі можна побудувати за трьома основними критеріями.
2. Класифікацію математичних моделей.
3. Визначення виду математичних моделей: мікро-, макро- та метарівня, структурних, функціональних, аналітичних, алгоритмічних, імітаційних, теоретичних, емпіричних, детермінованих, стохастичних.
4. Послідовність та зміст розрахунку основних вимог до математичних моделей – точності та адекватності.
5. Визначення понять: точність математичної моделі, її адекватність, економічність, надійність, універсальність, обчислюваність, модульність, алгоритмізованість, наочність.

6. Склад та визначення структурних елементів математичної моделі: об'єкт моделювання, постійні та змінні параметри, критерій оптимальності, обмеження, цільова функція.
7. Основні групи вихідних параметрів математичної моделі технічної системи: економічні, техніко-економічні та статистичні.
8. Конкретні приклади параметрів оптимізації технічної системи.
9. Визначення параметру оптимізації математичної моделі.
10. Що входить до складу етапів системного аналізу технічних систем.
11. Принципи системного підходу до розробки та аналізу математичних моделей технічних систем.
12. Формули:

$$E_i = \frac{|y_{iMM} - y_{i0}|}{y_{i0}}, \quad (3.1)$$

$$E_{MM} = \max_i E_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

– точність математичної моделі;

$$OA = \{X, Q / E_{MM} \leq \delta\}, \quad (3.3)$$

– адекватність математичної моделі;

$$F = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m d_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + \dots + d_{1m}x_m &\leq b_1; \\ d_{21}x_1 + \dots + d_{2m}x_m &\leq b_2; \\ (3.5) \quad d_{k1}x_1 + \dots + d_{km}x_m &\leq b_k; \end{aligned}$$

– загальний вигляд математичної моделі;

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, m}; \quad (3.6)$$

Треба вміти:

1. Розрізняти та виділяти за відповідними критеріями види математичних моделей технічних систем.
2. Проводити розрахунок точності та адекватності математичних моделей відповідно до формул (3.1)–(3.3).
3. Розрізняти та виділяти відповідно до визначень про структурні елементи математичних моделей: об'єкт моделювання, постійні та змінні параметри, критерій оптимальності, обмеження, цільову функцію.
4. Виходячи з конкретних умов аналізу досліджуваної чи проєктованої технічної системи визначати параметри оптимізації її математичної моделі.
5. Проводити системний аналіз технічних систем, що моделюються, з урахуванням рекомендованої послідовності аналізу та принципів системного аналізу.

4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЗАСОБІВ І ПРОЦЕСУ ВИМІРЮВАННЯ

Специфіка вивчення базових понять та набуття навичок з основ математичного моделювання студентами технічних спеціальностей вищих навчальних закладів, що навчаються за напрямом «Метрологія, вимірювальна техніка та інформаційно-вимірювальні технології», потребує застосування базових понять теорії метрології та вимірювань. Разом з тим ці поняття потрібно розглядати та застосовувати для побудови математичних моделей як об'єктів і засобів вимірювань, так і самого процесу вимірювання.

Основною проблемою моделювання об'єктів вимірювань є вибір таких моделей, які можуть адекватно описувати вимірювані величини (властивості) об'єкта. Важливо відзначити, що адекватність моделі обумовлюється не тільки тими властивостями об'єкта, які потрібно визначити у вимірювальній задачі, а й тими, які можуть впливати на результати вимірювання величини, яку треба знайти.

Побудова адекватних моделей засобів вимірювань дотепер є складним творчим та неформалізованим завданням. Його вирішення потребує високої кваліфікації, досвіду та звичайно інженерної інтуїції. При цьому найчастіше доводиться вирішувати два взаємовиключні завдання: модель повинна адекватно відображати всі властивості засобу вимірювання, необхідні для розв'язання вимірювальної задачі, і водночас бути простою та містити мінімум параметрів.

У більшості практичних інженерних завдань моделі об'єктів вимірювань досить очевидні і, як правило, нескладні. Об'єкт вимірювання характеризується набором властивостей і фізичних величин, які їх описують. ***Вимірювана величина*** – це фізична величина, яка підлягає визначенню відповідно до вимірювального завдання. Поняття «фізична величина» вважалося достатнім для постановки та вирішення всіх вимірювальних завдань. Однак через ширше застосування вимірювань, ускладнення їх завдань і посилення вимог до точності та достовірності іноді воно не задовольняє потреби в експериментальному визначенні властивостей різноманітних об'єктів.

Планування сучасних вимірювань потребує введення більш конкретних понять, які визначаються метою вимірювань, ніж узагальнене поняття «фізична величина». *На тепер вимірювана величина – це параметр (функціонал параметра) моделі об'єкта вимірювань, що відображає ту його властивість, кількісну оцінку якої потрібно отримати під час вимірювань.* Вимірювана величина завжди має розмірність певної фізичної величини, але являє собою її конкретизацію, обумовлену властивостями об'єкта вимірювань.

Вимірювання – експериментальна процедура оцінювання властивостей (сукупності властивостей) в якісному та кількісному вираженні. Це складний процес, в якому взаємодіє низка його структурних елементів. До них належать вимірюване завдання, об'єкт вимірювання, принцип, метод і засіб вимірювання та його модель, умови вимірювання (середовище, в якому виконується вимірювання), суб'єкт вимірювання, результат і похибка вимірювання (рис. 4.1). Зі структурної схеми, показаної на рис. 4.1, видно, що процес вимірювання перебігає по двох паралельних гілках. Верхня гілка відповідає реальності, нижня гілка – її відображенню. Елементи обох гілок нерозривно зв'язані між собою та відповідають один одному за типом «реальність – відображення (модель)».

Першим початковим елементом кожного вимірювання є його завдання (мета). *Завдання будь-якого вимірювання полягає у визначенні значення обраної (вимірюваної) фізичної величини з необхідною точністю в заданих умовах.* Постановку завдання вимірювання здійснює суб'єкт вимірювання – людина. При постановці завдання конкретизується об'єкт вимірювання, у ньому виділяється вимірювана фізична величина і визначається (задається) необхідна похибка вимірювання.

Об'єкт вимірювання – це реальний фізичний об'єкт, властивості якого характеризуються однією або кількома вимірюваними фізичними величинами. Він має багато властивостей (рис. 4.1) та перебуває в багатосторонніх і складних зв'язках з іншими об'єктами.

Суб'єкт вимірювання – людина – принципово не може уявити об'єкт загалом зі всіма його властивостями і зв'язками. Внаслідок цього взаємодія суб'єкта з об'єктом можлива тільки на основі математичної моделі об'єкта. **Суб'єкт вимірювання** об'єднує обидві гілки процесу вимірювання (реальності та відображення), активно впливає на нього і здійснює:

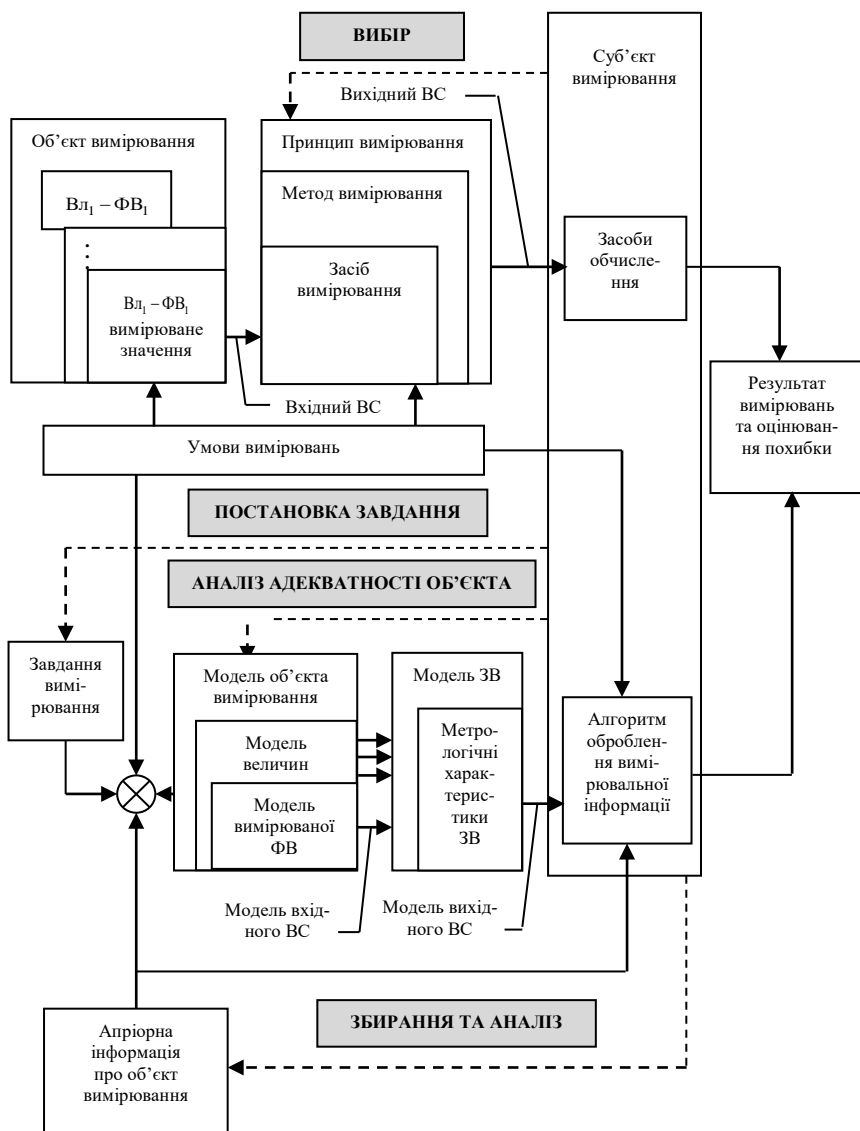


Рис. 4.1. Основні елементи процесу вимірювання: ЗВ – засіб вимірювань; МХ – метрологічні характеристики; ВС – вимірювальний сигнал; ФВ – фізична величина; Вл – властивість

- постановку вимірювального завдання;
- збирання та аналіз апіорної інформації про об'єкт вимірювання;
- аналіз адекватності об'єкта вимірювання вибраної моделі;
- оброблення результатів вимірювань.

Вимірювальна інформація, тобто інформація про значення вимірюваної фізичної величини, міститься у вимірювальному сигналі. **Вимірювальний сигнал** – це сигнал, який містить кількісну інформацію про вимірювану фізичну величину. Він надходить на вхід засобу вимірювання, за допомогою якого перетворюється на вихідний сигнал, що має форму, зручну для безпосереднього сприйняття людиною або для подальшого оброблення та передавання. Суб'єкт вимірювання (людина) вибирає принцип, метод та засоби вимірювання.

Принцип вимірювання – сукупність фізичних принципів, на яких ґрунтуються вимірювання, наприклад, застосування ефекту Джоузефсона для вимірювання електричної напруги або ефекту Доплера для вимірювання швидкості.

Метод вимірювання – це прийом або сукупність прийомів порівняння вимірюваної фізичної величини з її одиницею відповідно до реалізованих принципів вимірювання. Метод вимірювання повинен по можливості мати мінімальну похибку та сприяти виключенню систематичних похибок або переведення їх до розряду випадкових.

Методи вимірювання можна класифікувати за різними ознаками. Відома класифікація за основними вимірювальними операціями [33]. Вона тісно пов'язана з елементарними засобами вимірювання, які реалізують ці операції. Класифікація орієнтована на структурний опис засобів вимірювань і тому важлива для вимірювальної техніки, а також метрології інформаційно-вимірювальних систем.

Для метрологічного аналізу найважливішими є традиційні класифікації, що ґрунтуються на таких ознаках. Перша з них – фізичний принцип, покладений в основу вимірювання. За цією ознакою усі методи вимірювань поділяються на електричні, магнітні, акустичні, оптичні, механічні та ін. За другою ознакою класифікації використовують режим взаємодії засобів та об'єкта вимірювань. У цьому випадку всі методи вимірювань поділяються на статичні та динамічні. Третьою ознакою може бути застосований в засобах ви-

мірювання вид вимірювальних сигналів. Відповідно до нього методи поділяються на аналогові та цифрові.

Найбільш розробленою є класифікація за сукупністю прийомів використання принципів і засобів вимірювань. За цією класифікацією розрізняють метод безпосереднього оцінювання та методи порівняння (рис. 4.2). Ці усталені назви не зовсім вдалі, оскільки допускають можливість вимірювання без порівняння. Правильним вважається опосередковане та безпосереднє порівняння з мірою [34]. При цьому безпосереднім та опосередкованим порівнянням може бути як у часі, так і відносно фізичної природи вимірюваних величин.

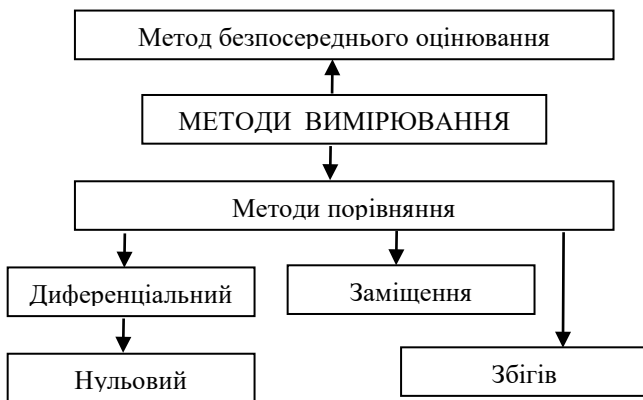


Рис. 4.2. Класифікація методів вимірювання

Суть методу безпосереднього оцінювання полягає в тому, що про значення вимірюваної величини судять за показниками одного (прямі вимірювання) або декількох (непрямі вимірювання) засобів вимірювань, які заздалегідь проградуйовані в одиницях вимірюваної величини або одиницях інших величин, від яких вона залежить. Це найбільш поширений метод вимірювання. Його реалізують більшість засобів вимірювань.

Найпростішими прикладами методу безпосереднього оцінювання можуть бути вимірювання напруги електромеханічним вольтметром магнітоелектричної системи або частоти імпульсної послідовності методом дискретного рахунку, реалізованим в електронно-рахунковому частотомірі.

Іншу групу утворюють методи порівняння: диференційний, нульовий, збігів, заміщення. До них належать усі методи, за якими вимірювана величина порівнюється з величиною, що відтворюється мірою. Отже, відмітною особливістю цих методів порівняння є безпосередня участь засобів у процесі вимірювання.

Відповідно до **диференційного методу** вимірювана величина X порівнюється безпосередньо чи опосередковано з величиною X_m , відтвореною мірою. Значення величини X залежить від вимірюваної приладом різниці $\Delta X = X - X_m$ та від відомої величини X_m , відтвореної мірою. Отже, $X = X_m + \Delta X$. Під час диференційного методу проводиться неповне зрівноваження вимірюваної величини. Він поєднує в собі частину ознак методу безпосередньої оцінки і може дати дуже точний результат вимірювання за умови, що вимірювана величина і величина, відтворена мірою, мало відрізняються одна від одної. Наприклад, якщо різниця цих величин становить 1 % і вимірюється з похибкою до 1 %, то похибка вимірювання шуканої величини зменшується до 0,01 % (якщо не враховувати похибку міри).

Прикладом диференційного методу може бути вимірювання вольтметром різниці двох напруг, з яких одна відома з великою точністю, а друга є шуканою величиною.

Нульовий метод є різновидом диференційного методу. Його відмінність полягає в тому, що результуючий ефект порівняння двох величин зводиться до нуля. Це контролюється спеціальним вимірювальним приладом високої точності – нуль-індикатором. У цьому випадку значення вимірюваної величини дорівнює значенню, яке відтворює міра. Висока чутливість нуль-індикаторів, а також вимірювання з високою точністю дозволяють отримати малу похибку вимірювання.

Приклад нульового методу – зважування на вагах, коли на одному плечі міститься вантаж, що зважується, а на другому – набір еталонних вантажів. Інший приклад – вимірювання опору за допомогою зрівноваженого моста.

Метод заміщення полягає в почерговому вимірюванні приладом шуканої величини і вихідного сигналу міри, однорідного з вимірюваною величиною. За результатами цих вимірювань обчислюється шукана величина. Оскільки обидва вимірювання виконуються одним приладом в однакових зовнішніх умовах, а шукана величина

визначається за показаннями приладу, похибка результату вимірювання суттєво зменшується. Оскільки похибка приладу різна в різних точках шкали, найбільшу точність вимірювання матимемо за однакових показів приладу.

Приклад методу заміщення – вимірювання великого електричного активного опору шляхом почергового вимірювання сили струму, що протікає через контрольований і зразковий резистори. Живлення кола під час вимірювань має здійснюватися від одного джерела постійного струму. Вихідний опір джерела струму і вимірювального приладу – амперметра – повинен бути дуже малим порівняно з вимірюваним опором.

За методу збігів різницю між вимірюваною величиною і величиною, що відтворюється мірою, визначають, використовуючи збіг відміток шкал (періодичних сигналів). Цей метод широко застосовується на практиці неелектричних вимірювань, наприклад, є вимірювання довжини за допомогою штангенциркуля з ноніусом. Прикладом застосування цього методу для електричних вимірювань є вимірювання частоти обертання тіла за допомогою стробоскопа.

4.1. Математичне моделювання об'єктів вимірювання

Об'єкти вимірювань як матеріальні об'єкти взаємодіють один із одним. Ця взаємодія полягає в тому, що величини, які характеризують властивості об'єкта вимірювання, є взаємозалежними. Тому математичні моделі величин, які вимірюють, повинні відображати зв'язки між ними. Наприклад, якщо йдеться про температуру в робочому об'ємі термокамери, то в загальному випадку вона залежатиме від положення точок у робочому об'ємі, тобто буде функцією $\Theta(x, y, z)$, де x, y, z – координати точок у прямокутній системі координат $Oxyz$. Аргументом цієї функції є фізичні величини.

Проте величини, що характеризують об'єкт вимірювання та середовище, не є сталими. Вони змінюються з плином часу. Ці зміни також мають відобразитися в математичних моделях, у яких аргументом має бути змінна величина – час. Вимірювані величини на часовому інтервалі вимірювання можуть бути сталими; такими, які повільно чи швидко змінюються; періодичними чи квазіперіодичними; неперервними; імпульсними тощо. Те саме стосується також величин, які характеризують середовище, у якому відбувається вимірювання.

Математична модель об'єкта вимірювання – це сукупність математичних символів (образів) і відношень між ними, у якій адекватно описано властивості об'єкта вимірювання, якими цікавиться суб'єкт.

Модель об'єкта вимірювання будується перед вимірюванням відповідно до поставленого завдання на підставі попередньої інформації про об'єкт та умови вимірювання. На рис. 4.1 це відображено у вигляді підсумовування відомостей про мету, умови вимірювання та попередню інформацію про об'єкт. Модель об'єкта вимірювання має відповідати таким вимогам:

- похибка, зумовлена невідповідністю моделі об'єкта вимірювання, не повинна перевищувати 10 %-ї граничнодопустимої похибки вимірювання;

- складова похибки вимірювання, зумовлена нестабільністю вимірюваної фізичної величини протягом часу, необхідного для проведення вимірювання, не повинна перевищувати 10 %-ї граничнодопустимої похибки.

Якщо вибрана модель не задовольняє ці вимоги, то слід перейти до іншої моделі об'єкта вимірювань.

Апріорна інформація, тобто інформація про об'єкт вимірювання, відома до проведення вимірювання, є найважливішим фактором, що обумовлює його ефективність. За цілковитої відсутності цієї інформації вимірювання зробити неможливо, оскільки невідомо, що потрібно виміряти, а отже, не можна вибрати необхідні засоби вимірювань. За наявності апріорної інформації про об'єкт у повному обсязі (відоме значення вимірюваної величини) вимірювання проводити не потрібно. Зазначена інформація визначає досяжну точність вимірювань та їх ефективність.

Вимірювана величина визначається як параметр моделі, а її значення, яке можна було б отримати в результаті абсолютно точного експерименту, береться як дійсне значення цієї величини. Ідеалізація, прийнята під час побудови моделі об'єкта вимірювання, спричиняє невідповідність параметра моделі досліджуваній властивості об'єкта. Цю *невідповідність* називають *граничною*. Зазвичай на практиці через складносці оцінювання граничну невідповідність намагаються зробити дуже малою.

Мета побудови моделі об'єкта вимірювання – виявлення конкретної фізичної величини, що підлягає визначенню. Слід говорити

не про модель об'єкта вимірювання взагалі, а про модель його вимірюваної властивості або вимірюваної фізичної величини.

Модель об'єкта вимірювання необов'язково повинна бути математичною. Її характер має визначатися видом і властивостями об'єкта вимірювань, а також метою вимірювань. Моделлю може бути будь-який наближений опис об'єкта, який дозволяє виділити параметр моделі (або функціонал параметрів), що є вимірюваною величиною та відображає ту властивість об'єкта вимірювання, яку необхідно оцінити для вирішення вимірювальної задачі. Модель повинна досить добре відображати дві групи властивостей об'єкта вимірювань: ті, що визначаються під час вимірювання, і ті, що впливають на результат вимірювання.

Розглянемо приклади.

1. Об'єкт вимірювання – поршень вантажопоршневого манометра. Мета вимірювання – визначення ефективної площі поршня.

Апріорна інформація полягає в тому, що поперечний переріз поршня незначно відрізняється від кола. Відповідно до цієї інформації, за модель поршня приймаємо прямий циліндр, поперечний переріз якого близький до кола. Ефективну площу поршня іноді визначають за середнім діаметром його поперечного перерізу. Відповідно до мети вимірювання як параметр моделі (вимірюваної величини) беремо середній діаметр поперечного перерізу поршня. Значення вимірюваної величини в цьому випадку можна виразити функціоналом вигляду

$$d = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b d(a_i),$$

де $d(a_i)$ – діаметр, що має кутову координату $a_i = 30(i-1)$, тобто функцію аргумента a_i , виражену в градусах.

2. Об'єкт вимірювання – змінна напруга. Мета вимірювання – оцінювання потужності, яка може бути виділена в навантаження.

До проведення вимірювань (апріорна інформація) відомо, що змінна напруга є періодичною і має форму, близьку до синусоїдної. У зв'язку з цим як модель береться функція синуса, а як параметр (вимірювана величина) – його середньоквадратичне значення, яке визначається за формулою

$$U = U_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

де U_m і ω – амплітуда та колова частота синусоїдної напруги відповідно.

Якщо апріорної інформації про форму напруги немає, то моделю напруги може бути, наприклад, довільна періодична функція $u(t)$. Тоді значення вимірюваної величини має бути виражене функціоналом вигляду

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt},$$

де T – період функції.

4.2. Математичне моделювання засобів вимірювання

Метод вимірювання реалізується в засобі вимірювання – технічному засобі, що застосовується під час вимірювання, який має нормовані метрологічні властивості. Під **засобом вимірювання** розуміють *технічний засіб, призначений для вимірювань, який дозволяє вирішувати вимірювальне завдання шляхом порівняння вимірюваної величини з одиницею або шкалою фізичної величини.*

Засіб вимірювань є узагальненим поняттям, що об'єднує найрізноманітніші конструктивно закінчені пристрої, яким властива одна з ознак:

- отримання сигналу (його показання), що містить інформацію про розмір (значення) вимірюваної величини;
- відтворення величини заданого (відомого) розміру.

Технічні засоби об'єднано за цими ознаками тільки з міркувань доцільності загального метрологічного аналізу, зручності викладу і регламентації метрологічних вимог та правил, єдиних для всіх видів засобів вимірювання.

Сучасні засоби вимірювань будуються із застосуванням елементів цифрової обчислювальної техніки та є цифровими засобами вимірювань. Їх характерною відмінністю є те, що вони:

- 1) вимірюють величини у дискретні моменти часу, які утворюють послідовність t_n , $n = 1, 2, \dots, i$;

2) результати вимірювань є не постійними, а квантовими (дискретними) за значенням величинами.

Вимірювана величина та результат вимірювання виражаються відповідними послідовностями $x(t_n)$, $Y(t_n)$, $n = 0, 1, \dots$. При цьому значення членів випадкової послідовності $Y(t_n)$, $n = 0, 1, \dots$ є квантовими (дискретними).

Далі розглянемо математичні моделі вимірювальних приладів двох типів – аналогових та цифрових засобів вимірювання. Застосовуючи засоби вимірювання, дуже важливо знати ступінь відповідності вихідної вимірювальної інформації до істинного значення величини, що визначається. Для її встановлення введемо правило, за яким потрібно нормувати метрологічні характеристики всіх засобів вимірювання. **Метрологічні характеристики** – це характеристики властивостей засобів вимірювання, які впливають на результат вимірювань і його похибки та призначені для оцінювання технічного рівня та якості засобів вимірювання, а також для визначення результатів вимірювань і розрахункової оцінки характеристик інструментальної складової похибки вимірювань.

Засіб вимірювання входить до обох гілок структури вимірювання (див. рис. 4.1). На практиці він взаємодіє з об'єктом вимірювань, у результаті чого з'являється вхідний (для засобу вимірювання) сигнал і відгук на нього – вихідний сигнал, що підлягає обробленню для отримання результату вимірювання та оцінювання його похибки. Засіб вимірювання описується моделлю, необхідною для ефективного оброблення дослідних даних. Ця модель являє собою сукупність його метрологічних характеристик.

Засоби вимірювання можуть бути елементарними (міри, пристрої порівняння, вимірювальні перетворювачі) та комплексними (вимірювальні прилади, які реєструють і показують, системи, вимірювально-обчислювальні комплекси).

Під час вимірювання засоби вимірювання взаємодіють із середовищем, об'єктом вимірювання як матеріальним об'єктом та вимірюваною величиною, яка характеризує об'єкт вимірювання [33; 34]. Найбільш повною математичною моделлю засобів вимірювання є динамічна модель – вагова функція $w(t) = kw_0(t)$. Нормована вагова функція $w_0(t)$ відображає динамічні властивості засобів вимірювання (інерційні, дисипативні тощо). Дія середовища

та об'єкта вимірювання на функцію $w_0(t)$ незначна, і нею можна знехтувати. Дія на коефіцієнт чутливості k величин, які впливають та характеризують середовище, виражається через відхилення

$$\Delta k_c = \sum_{j=1}^n \beta_j \Delta \rho_j,$$

де $\Delta \rho_j = \rho_j - \rho_{j0}$, $j = \overline{1, n}$ – відхилення величин, які мають вплив від номінальних значень.

Результат вимірювання взаємодії засобів вимірювання з об'єктом вимірювання можна отримати за допомогою введення додаткового відхилення коефіцієнта чутливості та адитивного збурення на вході та виході засобів вимірювання.

Результати отриманих висновків зображено в узагальненій структурній схемі формування результату вимірювання з використанням аналогового засобу вимірювання (рис. 4.3).

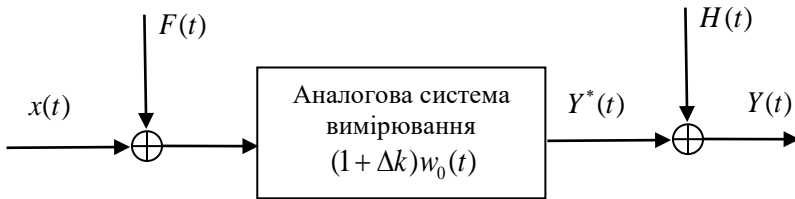


Рис. 4.3. Структурна схема отримання результату вимірювання засобами аналогової системи, де:

$x(t)$ – вимірювана величина; $F(t)$ – узагальнене адитивне випадкове збурення, що діє на вході засобів вимірювання; Δk – узагальнене відхилення коефіцієнта чутливості засобів вимірювання; $H(t)$ – узагальнене адитивне випадкове збурення, що діє на виході засобів вимірювання

Складовими узагальненого збурення $F(t)$ можуть бути вплив середовища на об'єкт вимірювання, а саме – на вимірювану величину та ефект взаємодії засобів вимірювання з об'єктом вимірювання.

Складовими узагальненого відхилення Δk є відхилення, зумовлені виробничо-технологічними факторами, величинами, які справляють вплив і характеризують середовище, та ефектами взаємодії засобів вимірювання з об'єктами вимірювання.

Складовими узагальненого збурення $H(t)$ можуть бути внутрішні шуми засобів вимірювання біля його виходу, ефекти заокруглення результатів вимірювання, дія середовища на результат вимірювання, ефекти взаємодії засобів вимірювання з об'єктом вимірювання, суб'єктивні похибки оператора, який виконує заміри.

Система рівнянь, яка відповідає структурній схемі формування результату вимірювання (див. рис. 4.3), має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= Y^*(t) + H(t); \\ Y^*(t) &= (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) [x(t - \tau) + F(t - \tau)] d\tau = y_x(t) + Y_f(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

де $y_x(t) = (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) x(t - \tau) d\tau$ – мультиплікативна складова результату вимірювання; $Y_f(t) = (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) F(t - \tau) d\tau$ – адитивна складова результату вимірювання, зумовлена узагальненим збуренням $F(t)$, що діє на вході засобів вимірювань; $H(t) = Y_h(t)$ – адитивна складова результату вимірювання, зумовлена узагальненим збуренням, що діє на виході засобів вимірювань.

Об'єднавши обидва рівняння (4.1), отримаємо

$$Y(t) = y_x(t) + Y_f(t) + Y_h(t).$$

Отже, результат вимірювання складається з трьох характерних складових, зумовлених:

- 1) вимірюваною величиною;
- 2) узагальненим збуренням на вході;
- 3) узагальненим збуренням на виході.

У сучасному світі інформаційних технологій і систем виконуються дуже багато вимірювань різних характеристик складних технічних систем, які часто функціонують в екстремальних умовах (наприклад, системи контролю безпеки автономних електростанцій, інформаційно-вимірювальні системи аерокосмічної техніки та ін.). Для таких систем особливу практичну значущість мають завдання із забезпечення малих похибок результатів вимірювань. Ці завдання вирішуються завдяки широкому застосуванню цифрових засобів вимірювань, основу яких становлять аналого-цифрові та цифро-аналогові перетворювачі.

Багатоваріантність завдань проектування цифрових засобів вимірювань із використанням аналого-цифрових перетворювачів та великі витрати на відпрацювання й перевірку робочих версій обумовлюють використання сучасних математичних методів моделювання. У праці [35] детально характеризуються галузі застосування аналого-цифрових та цифро-аналогових перетворювачів, специфіку яких можна визначити за значенням основних електричних і конструктивних параметрів, що значно спрощує роботу з проектування цифрових засобів вимірювання. Однак, попри це, істотним недоліком, з яким стикаються різні виробники цифрових засобів вимірювання, є відсутність єдиного математичного апарату, що забезпечує можливість оцінювання виконання вимог щодо похибки результатів вимірювань розрахунковим шляхом за мінімального обсягу експериментального матеріалу [33]. До того ж вирішення цього завдання з кожним роком ускладнюється, оскільки виникають додаткові фізико-технологічні, експлуатаційні та економічні обмеження у виробництві мікроелектроніки. Зокрема, дані з прогнозованого скейлінгу параметрів [36] інтегральних схем за період 2009–2010 рр., включаючи цифро-аналогові та аналого-цифрові перетворювачі, змінилися так: напруга живлення зменшилася з 0,9 до 0,6 В; розкид напруги живлення не перевищив 40 мВ; тактова частота збільшилася з 2,5 до 3,0 ГГц і т. ін.

Тому необхідно розробити математичні моделі цифрових засобів вимірювання, до складу яких входять різні цифрові пристрої, такі як дволанковий аналого-цифровий перетворювач послідовного наближення з наступним обробленням та застосуванням отриманих даних.

Наведемо приклад розроблення математичної моделі цифрового засобу вимірювання з дволанковим аналого-цифровим перетворювачем поступових наближень. На цьому прикладі розглянуто побудову математичної моделі цифрового засобу вимірювання з дволанковим аналого-цифровим перетворювачем послідовного наближення, що адекватно відображає властивості цифрового засобу вимірювання з урахуванням взаємного впливу метрологічних та експлуатаційних характеристик.

Відомо [33], що *математичною моделлю засобів вимірювання є математичний опис його особливостей і властивостей, що впливають на результат вимірювання.*

У процесі розроблення моделей вважається, що особливості та властивості засобу вимірювання визначаються динамічними шумовими параметрами внутрішніх елементів і схемотехніки. При цьому динамічні властивості засобу вимірювання враховуються оцінюванням його інерційності за допомогою визначення тривалості перехідних процесів до моменту часу T_r (рис. 3.5), коли прилад починає працювати в сталому (стійкому) режимі. На рис. 4.4 зображено нормовану вагову функцію $w_0(t)$, за допомогою якої можна отримати наочне уявлення про тривалість перехідного процесу в цифровому засобі вимірювання.

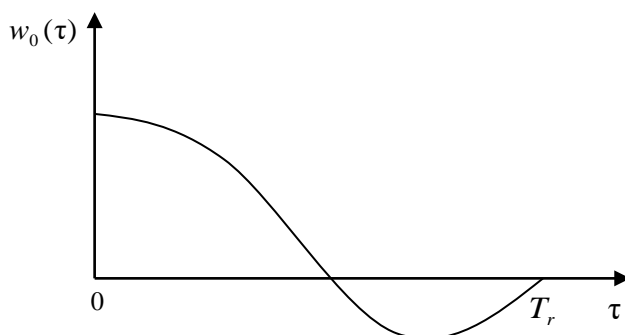


Рис. 4.4. Нормована вагова функція $w_0(\tau)$ засобу вимірювання

У теорії вимірювань поряд із нормованою ваговою $w_0(\tau)$ та перехідною $h_0(t)$ функціями як динамічні математичні моделі аналогових засобів вимірювання застосовуються три види моделей. Але якщо їх застосування не має особливих проблем для відображення властивостей аналогових засобів вимірювання, то при вирішенні аналогічного завдання для цифрових засобів вимірювання виникають труднощі, пов'язані з отриманням $w_0(\tau)$ і $h_0(t)$ у дискретній формі подання. Крім того, особливі труднощі виникають під час оцінювання взаємного впливу метрологічних та експлуатаційних характеристик. Розглянемо на прикладі розробленої моделі цифрові засоби вимірювання з аналого-цифровим перетворювачем послідовного наближення та як частково усуваються зазначені труднощі.

Основний внесок у формування похибок цифрового засобу вимірювання роблять аналогові вимірювальні та аналого-цифрові пе-

ретворювачі. Спрощену структурну схему цифрового засобу вимірювання зображено на рис. 4.5.

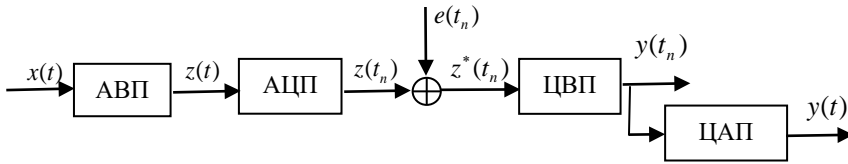


Рис. 4.5. Структурна схема цифрового засобу вимірювання:

АВП – аналоговий вимірювальний перетворювач; АЦП – аналого-цифровий перетворювач; ЦВП – цифровий вимірювальний перетворювач; ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач

За структурною схемою (див. рис. 4.5) до аналогової частини цифрового засобу вимірювання входять аналоговий вимірювальний та аналого-цифровий перетворювачі. За допомогою аналогового вимірювального перетворювача вимірювана величина $x(t)$ перетворюється у величину $z(t)$, яка є входною для аналого-цифрового перетворювача. Математична модель аналогового вимірювального перетворювача (без урахування адитивної похибки) записується як лінійне диференціальне рівняння вигляду [33]

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} = k_1 \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (4.2)$$

де $a_i, i = \overline{0, n}; b_j, j = \overline{0, m}$ – постійні коефіцієнти, де $a_0 = b_0 = 1; k_1$ – коефіцієнт чутливості аналогового вимірювального перетворювача.

Застосовувати співвідношення (4.2) для моделювання процесів функціонування аналогового вимірювального перетворювача дуже незручно та складно. Така ж ситуація виникає у разі застосування подібних моделей інших складових частин цифрових засобів вимірювання. Зокрема, у процесі побудови моделей аналого-цифрового перетворювача та цифрового вимірювального перетворювача потрібно враховувати їх коефіцієнти чутливості k_2 і k_3 відповідно. Тому для спрощення було створено узагальнену модель цифрового

засобу вимірювання [33], за якою результат вимірювання в дискретній формі має вигляд

$$y(t_n) = k \sum_{\xi=0}^{r-1} w_{0\xi} x(t_{n-\xi}), \quad (4.3)$$

де $k = k_1 k_2 k_3$ – коефіцієнт чутливості цифрового засобу вимірювання; $r = r_1 + r_3 - 1$; r_1, r_3 – кількість інтервалів перетворення аналогового вимірювального перетворювача та цифрового вимірювального перетворювача відповідно.

Рівняння (4.3) розглядається як основне результуюче співвідношення математичної моделі цифрового засобу вимірювання. За допомогою цього рівняння виконується операторне перетворення вимірюваної величини $x(t_{n-\xi})$ (поданої у вигляді послідовності) у результат вимірювання $y(t_n)$.

Коефіцієнти $w_{0\xi}$, $\xi = \overline{0, r-1}$ називають **нормованими ваговими коефіцієнтами** цифрових засобів вимірювання, а їх упорядковану сукупність – **нормованою дискретною ваговою функцією**. Вона спільно з коефіцієнтом чутливості є опорною математичною моделлю цифрових засобів вимірювання у формі дискретної вагової функції, тобто $k w_{0\xi}$, $\xi = \overline{0, r-1}$ [33].

Важливою властивістю нормованої дискретної вагової функції є те, що кожна сума співмножників правої частини рівняння (4.3) дорівнює одиниці. Отже, справедливим буде

$$\sum_{\xi=0}^{r-1} w_{0\xi} = 1. \quad (4.4)$$

Поведінку нормованої дискретної вагової функції цифрових засобів вимірювання залежно від часу показано на рис. 4.6.

З урахуванням фізичної сутності особливий інтерес становить поведінка нормованої дискретної вагової функції залежно від похибки цифрового засобу вимірювання і тривалості часу експлуатації. Для цього формально збільшимо об'єкт дослідження, перейшовши від спрощеної структурної схеми цифрового засобу вимірювання (див. рис. 4.5) до його подання у вигляді інерційного чотириполюс-

ника, процес функціонування якого можна описати за допомогою відповідних метрологічних характеристик (рис. 4.6)



Рис. 4.6. Графічне зображення нормованої дискретної вагової функції цифрових засобів вимірювання

Вважатимемо, що основним елементом цифрового засобу вимірювання, формалізовано виконаного у вигляді інерційного чотириполюсника, є аналого-цифровий перетворювач послідовного наближення. Будь-який аналого-цифровий перетворювач послідовного наближення можна розглядати як багатовимірний набір однорозрядних двійкових квантувачів [33]. Це дозволяє застосовувати відому дволанкову модель однорозрядного двійкового квантувача для оцінювання результатів вимірювань цифрових засобів вимірювання з урахуванням інерційних властивостей аналого-цифрового перетворювача послідовного наближення.

Дволанкова модель аналого-цифрового перетворювача послідовного наближення в першому наближенні враховує інерційні властивості цифрового засобу вимірювання. До її складу входять цифроаналоговий перетворювач і компаратор напруг, які подаються як послідовно включені ланки першого порядку зі сталими часу τ_0 і τ_k [34]. Передавальна функція цієї моделі має вигляд

$$W(p) = \frac{1}{(p\tau_0 + 1)(p\tau_k + 1)}. \quad (4.5)$$

Застосуємо обернене перетворення Лапласа до рівняння (4.5), вважаючи що $\tau_0 = \tau_k$

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} (1 + t - \tau_0). \quad (4.6)$$

Функція $w(t)$ є ваговою функцією дволанкового аналого-цифрового перетворювача послідовного наближення. Ураховуючи рівень формалізації задачі для моделі (4.4), за допомогою співвідношення (4.7) визначимо значення нормованих вагових коефіцієнтів $w_{0\xi}$, $\xi = \overline{0, r-1}$ цифрового засобу вимірювання.

Для побудови математичної моделі на підставі співвідношень (4.3), (4.4) запишемо коефіцієнт чутливості цифрового засобу вимірювання у вигляді $k = 1/q$, де q – розмір одиниці величини, що відтворюється цифровим засобом вимірювання. Відомо [33; 34], що основні особливості формування результату вимірювання враховуються через визначення значення q , а саме:

$$\frac{[x]}{[x_0]} = q \neq 1, \quad (4.7)$$

де $[x]$ – одиниця величини, яку відтворює цифровий засіб вимірювання з урахуванням адитивної та мультиплікативної складових похибки; $[x_0]$ – величина державного еталона.

Вираз (4.8) є математичною моделлю одиниці величини, що відтворюється цифровим засобом вимірювання. Найбільш раціональні операції визначення відношення $\frac{[x]}{[x_0]}$ розглянуто у праці [33].

За допомогою опорної моделі (співвідношення (4.3), (4.4)) оцінну модель для визначення вагової функції цифрового засобу вимірювання – інерційного чотириполюсника з аналого-цифровим перетворювачем послідовного наближення отримаємо як

$$w(t_n) = kw_0(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.8)$$

$$\text{де } w_0(t_n) = \begin{cases} = 1, & \text{якщо } n \leq r-1, \\ \sum_{\xi=0}^n w_{0\xi} & \\ = 0, & \text{якщо } n > r-1. \end{cases}$$

Розрахунки адекватності залежності вагової функції цифрового засобу вимірювання із дволанковим аналого-цифровим перетворювачем послідовного наближення виконувалися із застосуванням співвідношень (4.4)–(4.8) для випадку вимірювання постійної на-

пруги 0,1В (дійсного значення) за таких вихідних даних: роздільна здатність проєктованого цифрового засобу вимірювання становить $D = 0,01\text{мкВ}$; похибка вимірювання постійної напруги для відповідного піддіапазону змінюється від $\pm 0,05\% \pm 3D$ до $\pm 0,5\% \pm 3D$; стала часу ланок першого порядку $\tau_0 = 1\text{с}$.

Результати розрахунків, отримані із застосуванням основних співвідношень запропонованої математичної моделі, свідчать про адекватне відображення існуючих залежностей між основними характеристиками і параметрами цифрових засобів вимірювання. У розробленій математичній моделі основна увага приділена оцінюванню вагової функції для встановленого рівня формалізації подання об'єкта дослідження.

Подальші перспективи застосування отриманої математичної моделі пов'язані з вирішенням завдань з обґрунтування граничних значень різних параметрів і синтезу цифрових засобів вимірювання із заданими характеристиками.

4.3. Математичне моделювання середовища та умов вимірювання

Процес вимірювання завжди реалізується в конкретних умовах (середовищі), які характеризуються такими параметрами, як температура, тиск, вологість та ін. Крім того, у робочих умовах вимірювання існують детерміновані та випадкові збурення, які накладаються на вимірювану величину (збурення на вході засобів вимірювання) або на результат вимірювання (збурення на виході засобів вимірювання), або на те й те одночасно. Ці величини впливають на засіб вимірювання, на вимірювану величину, на об'єкт вимірювання та безпосередньо на результат вимірювання. Результат вимірювання залежить від робочих умов вимірювання.

Сукупність величин, які характеризують робочі умови вимірювання, поділяються на чотири групи:

1. Кліматичні величини (температура, вологість, тиск та ін.).
2. Електричні та магнітні величини (постійний і змінний струми та напруга, постійні та змінні магнітні поля тощо).
3. Величини, які характеризують механічний вплив на об'єкт вимірювання (вібрації, удари навантаження та ін.).
4. Величини, які характеризують газовий склад атмосфери (наприклад, радіоактивне випромінювання).

Під час вимірювання важливу роль відіграють *умови вимірювання* – сукупність величин, які чинять вплив та описують стан навколишнього середовища і засоби вимірювань. **Впливова величина** – це фізична величина, яка не вимірюється даними засобами вимірювання, але впливає на його результати.

Зміна умов вимірювання призводить до зміни стану об'єкта вимірювання. Це своєю чергою визначає вплив умов вимірювання на виділену і через неї на вимірювану величину і відхилення значення дійсної величини від тієї, що була визначена при формуванні вимірювальної задачі. Вплив умов вимірювання на засоби вимірювання позначається на зміні його метрологічних характеристик. *Частина похибки вимірювання, яка виникає унаслідок зміни умов, називається додатковою похибкою.*

Відповідно до встановлених для конкретних ситуацій діапазонів значень впливових величин розрізняють нормальні, робочі та граничні умови вимірювань. **Нормальні умови вимірювань** – це умови, за яких впливові величини мають нормальні значення або значення в межах нормальної області. **Нормальна область значень впливової величини** – це область значень, у межах якої зміною результату вимірювань під зумовленою впливовою величиною, можна знехтувати відповідно до встановлених норм точності. Нормальні умови вимірювань задаються у нормативно-технічній документації на засіб вимірювання. За нормальних умов визначається основна похибка засобу вимірювання. Номінальні значення фізичних величин, які мають вплив за нормальних умов зведено до табл. 4.1 [34].

Робочими називають *умови вимірювання*, за яких величини, що впливають, перебувають у межах своїх робочих областей. Робоча область значень впливової величини – це область, у межах якої нормується додаткова похибка або змінюються показання засобів вимірювання. Граничні умови вимірювань – це умови, які характеризуються екстремальними значеннями вимірюваної та впливової величин, які засоби вимірювання можуть витримати без руйнувань і погіршення їх метрологічних характеристик.

Кінцевою метою будь-якого вимірювання є його результат – значення фізичної величини, отриманої її вимірюванням. Результат вимірювання подається іменованим або неіменованим числом. За необхідності з результатом вимірювань наводять дані про умови вимірювань.

Таблиця 4.1

**Номінальні значення фізичних величин,
які чинять вплив за нормальних умов**

№ з/п	Величина, яка впливає	Значення
1	Температура для всіх видів вимірювання; °С (К)	20 (273)
2	Тиск навколишнього повітря для вимірювання іонізуючих випромінювань, теплофізичних, температурних, магнітних, електричних вимірювань, вимірювань тиску та параметрів руху, кПа (мм рт. ст.)	10 (750)
3	Тиск навколишнього повітря для лінійних, кутових вимірювань, вимірювань маси, сили світла і вимірювань в інших областях, крім зазначених у п. 2, кПа (мм рт. ст.)	101,3 (760)
4	Відносна вологість повітря для лінійних, кутових вимірювань, вимірювань маси, вимірювань у спектроскопії, %	58
5	Відносна вологість повітря для вимірювань електричного опору, %	55
6	Відносна вологість повітря для вимірювань температури, сили, твердості, змінного електричного струму, іонізуючих випромінювань, параметрів руху, %	65
7	Відносна вологість повітря для всіх видів вимірювань, крім зазначених у п.п. 4, 6, %	60
8	Густина повітря, кг/м ³	1,2
9	Прискорення вільного падіння, м/с ²	9,8
10	Магнітна індукція (Тл) та напруженість електричного поля (Вм) для вимірювань параметрів руху, магнітних та електричних величин	0
11	Магнітна індукція та напруженість електростатичного поля для всіх видів вимірювань, крім зазначених у п. 10	відповідає характеристикам поля Землі в географічному районі
12	Частота живильної мережі змінного струму, Гц	50±1
13	Середньоквадратичне значення напруги живильної мережі змінного струму, В	220±10

Використовуючи термін «результат вимірювання», слід вказати, яких показників він стосується: показників засобів вимірювання, вправленого або невиправленого результату, усереднених результатів декількох вимірювань. Варто зазначити, що **виправленим результатом вимірювань** називається отримане за допомогою засобів вимірювання значення величини та уточнене через уведення в нього необхідних поправок на дію передбачуваних систематичних похибок.

Якість вимірювань характеризується точністю, достовірністю, правильністю, збіжністю, відтворюваністю, а також розміром допустимих похибок. **Точність вимірювання** – характеристика якості вимірювання, що відображає близькість до нуля похибки його результату. Точність вимірювання є величиною якісною. Висока точність вимірювання відповідає малим похибкам і навпаки. Іноді точність кількісно оцінюють оберненою величиною модуля відносної похибки. Наприклад, якщо похибка становить 0,001, то точність дорівнює 1000. Однак кількісна оцінка точності поширення не набула.

Достовірність вимірювань визначається ступенем довіри до результату вимірювання та характеризується ймовірністю того, що істинне значення вимірюваної величини перебуває в зазначених межах. Така ймовірність називається довірчою.

Правильність вимірювань – це характеристика вимірювань, що відображає близькість до нуля систематичних похибок результатів вимірювань.

Збіжність результату вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї й тієї самої величини, виконуваних повторно одними й тими ж методами та засобами вимірювань, за одних і тих же умов. Збіжність вимірювань відображає вплив випадкових похибок на результат вимірювання.

Відтворюваність результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї й тієї ж величини, отриманих у різних місцях різними методами і засобами вимірювань, різними операторами, але зведених до одних і тих же умов.

Кількісна близькість вимірюваного та істинного значень вимірюваної величини описується похибкою результату вимірювань. **Похибка результату вимірювання** – це відхилення ΔX результату вимірювання $X_{\text{вим}}$ від істинного значення $X_{\text{іс}}$ вимірюваної величини, що визначається за формулою $\Delta X = X_{\text{вим}} - X_{\text{іс}}$.

Істинне значення та результат вимірювання належать і до гілки реальностей (див. рис. 4.1), і до гілки відображень (моделей). Внаслідок принципової неадекватності будь-якої моделі відображеної реальності неможливо, оперуючи реальними об'єктами і засобами вимірювання в реальних умовах, забезпечити тотожність отриманого результату та дійсного значення вимірюваної величини. Отже, принципово не можна точно визначити похибку вимірювання, оскільки введенням у результат поправки можна знайти дійсне значення.

Результат вимірювання та оцінювання його похибки визначаються суб'єктом вимірювання за допомогою обчислювальних засобів (гілка реальності), що працюють за певним алгоритмом оброблення вимірювальної інформації (модельна гілка).

Як приклад розглянемо спочатку вплив робочих умов вимірювання на засоби вимірювання. У математичній моделі засобів вимірювання, поданої у формі вагової функції $kw_0(t)$, коефіцієнт чутливості k залежить від розміру одиниці величини, що відтворюється засобами вимірювання, а нормативна вагова функція відображає інерційні, дисипативні та інші властивості засобів вимірювання. У статистичному режимі вимірювання впливом інерційних властивостей засобів вимірювання можна знехтувати. Тому в цьому режимі першочергове значення має вплив середовища на коефіцієнт чутливості засобів вимірювання.

У динамічному режимі вимірювання вплив нормованої вагової функції на результат вимірювання є істотним. Проте, як показує досвід технічних вимірювань, за незначних відхилень величин (які характеризують робочі умови вимірювання) від номінальних значень їх вплив на значення параметрів нормованої вагової функції незначний. Тому цим впливом можна знехтувати.

Як приклад розглянемо математичну модель впливу середовища на коефіцієнт чутливості засобів вимірювання.

Нехай коефіцієнтом чутливості засобів вимірювання є задана диференційована функція коефіцієнтів чутливості перетворювачів, які є складовими засобів вимірювання і формують результати вимірювання. Позначимо її як

$$k = k(k_1, \dots, k_m), \quad (4.9)$$

де k_i , $i = 1, m$ – коефіцієнт чутливості i -го перетворювача.

Вид функції (4.9) залежить від способу з'єднання перетворювачів у засобах вимірювання.

Нехай $k_i = k_{i0} + \Delta k_i$, $i = \overline{1, m}$, де k_{i0} – номінальне значення, Δk_i – відхилення від номінального значення коефіцієнта чутливості i -го перетворювача. Тоді отримаємо

$$k = k(k_{10} + \Delta k_1, \dots, k_{m0} + \Delta k_m) = k_0 + \Delta k, \quad (4.10)$$

де $k_0 = k(k_{10}, \dots, k_{m0})$ – номінальне значення коефіцієнта чутливості засобів вимірювання; Δk – відхилення величини k від номінального значення, зумовлене відхиленнями Δk_i , $i = \overline{1, m}$.

Знайдемо вираз для відхилення Δk . Для цього подамо функцію (4.10) рядом Тейлора відносно номінальних значень аргументів, у яких обмежимося тільки лінійними членами для відхилень.

У результаті отримаємо

$$\Delta k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial k_i} \Delta k_i = \sum_{i=1}^m \gamma_i \Delta k_i, \quad (4.11)$$

де $\gamma_i = \left. \frac{\partial k(k_1, \dots, k_m)}{\partial k_i} \right|_{\substack{k_i = k_{i0} \\ i = \overline{1, m}}}$, $i = \overline{1, m}$ – частинні похідні функції (4.10).

Відхилення Δk_i , $i = \overline{1, m}$ зумовлюється двома групами чинників:

1) виробничо-технологічними чинниками, тобто похибками технології виготовлення перетворювачів;

2) відхиленнями величин, які характеризують робочі умови вимірювання від їх номінальних значень. Сумарний вплив цих груп чинників подамо у вигляді

$$\Delta k_i = \Delta k_{in} + \Delta k_{ic}, \quad (4.12)$$

де Δk_{in} , $i = \overline{1, m}$ – відхилення, зумовлені першою групою чинників,

Δk_{ic} , $i = \overline{1, m}$ – відхилення, зумовлені другою групою чинників.

Складову Δk_{ic} виразимо через відхилення від номінальних значень величин, що утворюють другу групу чинників. Для цього застосуємо рівняння зв'язку

$$k_i = k_i(\rho_1, \dots, \rho_n), \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.13)$$

де $\rho_j, j = \overline{1, n}$ – величини, що впливають на коефіцієнти чутливості перетворювачів.

Нехай $\rho_j = \rho_{j0} + \Delta\rho_j, j = \overline{1, n}$, і застосувавши попередню процедуру, отримаємо

$$\Delta k_{ic} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta\rho_j, \quad (4.14)$$

де $\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial k_i(\rho_1, \dots, \rho_n)}{\partial \rho_j} \right|_{\substack{\rho_j = \rho_{j0} \\ j = \overline{1, n}}}, \quad i = \overline{1, m}$ – частинні похідні функції (4.14).

Підставивши вирази (4.12) і (4.14) у рівняння (4.11), отримаємо

$$\Delta k = \sum_{i=1}^m \gamma_i (\Delta k_{\bar{i}} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta\rho_j) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \Delta k_{\bar{i}} + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \gamma_i \alpha_{ij}) \Delta\rho_j = \Delta k_i + \Delta k_n,$$

де $\Delta k_i = \sum_{i=1}^m \gamma_i \Delta k_{\bar{i}}$ – відхилення коефіцієнта чутливості засобів вимірювання, зумовлене виробничо-технологічними чинниками;

$\Delta k_c = \sum_{j=1}^m \beta_j \Delta\rho_j$ – відхилення коефіцієнта чутливості засобів вимі-

рювання, зумовлене відхиленнями від номінальних значень величин, які впливають на коефіцієнти чутливості перетворювачів, що

входять до складу засобів вимірювання; $\beta_j = \sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_{ij}, \quad j = \overline{1, n}$ –

коефіцієнти, що виражають ступінь впливу відхилень $\Delta\rho_j, j = \overline{1, n}$ на відхилення коефіцієнтів чутливості перетворювачів, що входять до складу засобів вимірювання.

Перейдемо від відхилення коефіцієнта чутливості до відхилення розміру одиниці величини, відтвореної засобами вимірювання. Використовуючи залежність $k = \frac{1}{q}$, отримаємо

$$\Delta k = -\frac{1}{q^2} \Delta q \Big|_{q \approx 1} \approx -\Delta q \quad \text{або} \quad \Delta q = -\Delta k = \Delta q_n + \Delta q_c,$$

де $\Delta q_n = -\Delta k_n$ – відхилення розміру одиниці величини, що відтворюється засобами вимірювання, зумовлене виробничо-технологічними факторами; $\Delta q_c = -\Delta k_c$ – відхилення розміру одиниці величини, зумовлене відхиленнями Δr_j , $j = \overline{1, n}$.

Очевидно, що $k_0 = 1$. Тоді $k = 1 + \Delta k = 1 + \Delta k_n + \Delta k_c$ вплив робочих умов вимірювання виражається через складову Δk_n .

Розглянемо вплив середовища на об'єкт вимірювання. Цей вплив цікавить лише тому, що він змінює вимірювану величину, яка характеризує об'єкт вимірювання. Прикладом впливу середовища на вимірювану величину через об'єкт вимірювання є зміна довжини металевго стрижня при відхиленні робочої температури від її номінального значення. Нехай l – довжина стрижня. Вплив відхилення температури середовища, у якому проводиться вимірювання, на значення величини l у лінійному наближенні визначається виразом

$$l = l_0 + \alpha_{\Theta} (\Theta - \Theta_0) = l_0 + \Delta l_1,$$

де l_0 – довжина стрижня за номінального значення температури; α_{Θ} – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, з якого виготовлений стрижень; Θ – температура середовища; Θ_0 – номінальне значення температури; $\Delta l_1 = \alpha_{\Theta} (\Theta - \Theta_0)$ – відхилення довжини стрижня.

Розглянемо ще одну властивість середовища – запиленість. Частинки пилу, осідаючи на торцеві поверхні стрижня, утворюють шар товщиною δ і збільшують довжину стрижня, тобто

$$l = l_0 + 2\delta = l_0 + \Delta l_2,$$

де $\Delta l_2 = 2\delta$.

Якщо під час зміни одночасно спостерігається відхилення від номінального значення робочої температури та запиленість, то отримуємо

$$l = l_0 + \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Отже, вплив середовища на об'єкт вимірювання полягає в адитивному збуренні, прикладеному до входу засобів вимірювання.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Назвіть основні критерії, за якими групують математичні моделі.
2. Які є види математичних моделей?
3. Наведіть класифікацію математичних моделей.
4. У чому полягає суть аналітичних математичних моделей?
5. У чому полягає суть імітаційних математичних моделей?
6. Назвіть вимоги до математичних моделей технічних систем?
7. Як оцінюється точність математичної моделі?
8. Як оцінюється адекватність математичної моделі?
9. Назвіть структурні елементи математичної моделі.
10. Що таке цільова функція математичної моделі?
11. Наведіть визначення математичної моделі технічної системи.
12. Назвіть вихідні параметри (оптимізації) моделювання.
13. У чому полягає суть системного підходу до математичного моделювання?
14. Назвіть принципи системного підходу до математичного моделювання.
15. Для яких завдань розробляють математичні моделі?
16. Поясніть сутність понять «математична модель об'єкта і засобу вимірювання» та «процес вимірювання».

17. Наведіть визначення понять «вимірювання» та «вимірювальна величина».
18. Наведіть структурну схему процесу вимірювання.
19. Які дії здійснює суб'єкт вимірювання під час самого вимірювання?
20. Назвіть методи вимірювання.
21. Назвіть принципи відмінності математичного моделювання аналогової та цифрової системи вимірювання.
22. Якими параметрами характеризується якість вимірювання?
23. Наведіть приклади математичного моделювання об'єкта вимірювання.
24. Наведіть приклади математичного моделювання засобу вимірювання.
25. Наведіть приклади впливу робочих умов вимірювання на процес вимірювання.

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Необхідно знати:

1. Як формуються критерії побудови математичних моделей.
2. Відповідні ознаки класифікації математичних моделей технічних систем.
3. Як задовольняються (оцінюються) технічні вимоги до математичних моделей технічних систем: точність, адекватність, економічність, надійність, універсальність, обчислюваність, модульність, алгоритмізованість, наочність.
4. Вимоги до структурних елементів математичних моделей та типовий приклад математичної моделі.
5. Від чого залежить та як встановлюються вихідні параметри математичної моделі.
6. Послідовність математичного опису технічних систем із позиції системного аналізу: постановка завдання, дослідження, аналіз, попереднє судження, експериментальна перевірка прийнятих рішень та отриманих результатів, заключне судження, реалізація прийнятого рішення.
7. Чотири базові принципи системного підходу до розроблення та аналізу математичних моделей технічних систем.

8. Специфіку та особливості математичного моделювання об'єктів вимірювання.
9. Специфіку та особливості математичного моделювання засобів вимірювання.
10. Специфіку та особливості математичного моделювання процесу та умов вимірювання.
11. Взаємозв'язки основних елементів процесу вимірювання відповідно до рис. 3.2: об'єкта, суб'єкта, засобу вимірювання, умов та процесу вимірювання.
12. Відмінності та застосування методів вимірювання.
13. Особливості математичного моделювання об'єктів вимірювання з урахуванням технічних вимог до похибки вимірювання.
14. Як проводити математичне моделювання об'єктів вимірювання; конкретні приклади математичного моделювання.
15. Послідовність отримання результатів вимірювання засобами аналогової системи.
16. Математичне моделювання аналітичних засобів вимірювання (урахування характерних складових – вимірювальної величини, узагальненого збурення на вході та виході).
17. Послідовність отримання результатів цифровим засобом вимірювання.
18. Особливості математичного моделювання цифрових засобів вимірювання.
19. Приклад математичного моделювання аналого-цифрового перетворювача послідовного наближення.
20. Яким чином враховуються при математичному моделюванні робочі умови вимірювання.
21. Особливості та послідовність математичного моделювання середовища та умов вимірювання.
22. Приклади побудови математичних моделей впливу середовища та умов вимірювання.

Слід запам'ятати:

1. Математичні моделі, які можна побудувати за трьома основними критеріями.
2. Класифікацію математичних моделей.
3. Визначення виду математичних моделей: мікро-, макро- та

- метарівня, структурних, функціональних, аналітичних, алгоритмічних, імітаційних, теоретичних, емпіричних, детермінованих, стохастичних.
4. Послідовність та зміст розрахунку основних вимог до математичних моделей – точності та адекватності.
 5. Визначення понять: точність математичної моделі, її адекватність, економічність, надійність, універсальність, обчислюваність, модульність, алгоритмізованість, наочність.
 6. Склад та визначення структурних елементів математичної моделі: об'єкт моделювання, постійні та змінні параметри, критерій оптимальності, обмеження, цільова функція.
 7. Основні групи вихідних параметрів математичної моделі технічної системи: економічні, техніко-економічні та статистичні.
 8. Конкретні приклади параметрів оптимізації технічної системи.
 9. Визначення параметра оптимізації математичної моделі.
 10. Склад етапів системного аналізу технічних систем.
 11. Принципи системного підходу до розроблення та аналізу математичних моделей технічних систем.
 12. Базові визначення напряму «Метрологія, вимірювальна техніка та інформаційно-вимірювальні технології»: вимірювальна величина, вимірювання, завдання, об'єкт та суб'єкт вимірювання, вимірювальний сигнал, принцип та метод вимірювання.
 13. Структурну схему елементів процесу вимірювання, їх взаємозв'язок та взаємний вплив на результат вимірювання.
 14. Класифікаційні ознаки метрологічного аналізу методів і засобів вимірювання.
 15. Визначення понять, пов'язаних із класифікацією методів вимірювань: метод безпосереднього оцінювання, диференційний метод, нульовий метод, метод заміщення та метод збігів.
 16. Визначення поняття «математична модель об'єкта вимірювання».
 17. Методику математичного моделювання засобів аналогової системи вимірювання.
 18. Методику математичного моделювання цифрових засобів вимірювання.
 19. Чотири групи величин, що характеризують робочі умови процесу вимірювання.
 20. Визначення базових понять, що характеризують процес вимірювання: умови вимірювання; впливова величина; додаткова похибка; нормальні умови вимірювання; нормальна область значень

впливової величини; робочі умови вимірювання; точність, достовірність і правильність вимірювання; збіжність і відтворюваність результатів вимірювання; похибка.

21. Методику (послідовність) математичного моделювання впливу середовища на об'єкт вимірювання.

22. Формули:

$$E_i = \frac{|y_{iM.M} - y_{iД}|}{y_{iД}} \quad \text{– точність математичної моделі;}$$

$$E_{M.M} = \max_i E_i; \quad i = \overline{1, m}$$

$OA = \{X, Q / E_{i1} \leq \delta\}$ – адекватність математичної моделі;

$$F = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m d_{ij} x_j \rightarrow \max,$$

$$d_{11} x_1 + \dots + d_{1m} x_m \leq b_1;$$

$$d_{21} x_1 + \dots + d_{2m} x_m \leq b_2;$$

$$d_{k1} x_1 + \dots + d_{km} x_m \leq b_k,$$

$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, m}$ – загальний вигляд математичної моделі;

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= Y^*(t) + H(t); \\ Y^*(t) &= (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) [x(t - \tau) + F(t - \tau)] d\tau = y_x(t) + Y_1(t), \end{aligned} \right\}$$

$Y(t) = y_x(t) + Y_f(t) + Y_h(t)$ – приклад математичної моделі отримання результату засобами аналогової системи вимірювання;

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} = k_1 \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j} \quad \text{– математична модель аналогового вимірювального перетворення;}$$

$y(t_n) = k \sum_{\xi=0}^{r-1} w_{0\xi} x(t_{n-\xi})$ – узагальнена математична модель цифрового засобу вимірювання;

$w(t_n) = kw_0(t_n)$, $n = 0, 1, \dots$ – оціночна модель для визначення вагової функції цифрового засобу вимірювання (наприкладі інерційного чотириполосника з аналого-цифровим перетворювачем послідовного наближення);

$$\Delta k = \sum_{i=1}^m \gamma_i (\Delta k_{ii} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta \rho_j) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \Delta k_{ii} + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \gamma_i \alpha_{ij}) \Delta \rho_j = \Delta k_i + \Delta k_{ii}$$

– математична модель відхилення від номінального значення коефіцієнта чутливості i -го перетворювача залежно від умов і середовища вимірювання.

Треба вміти:

1. Розрізняти та виділяти за відповідними критеріями види математичних моделей технічних систем.
2. Виконувати розрахунок точності та адекватності математичних моделей відповідно до формул (4.1) – (4.3).
3. Розрізняти та виділяти відповідно до визначень структурні елементи математичних моделей: об'єкт моделювання, постійні та змінні параметри, критерій оптимальності, обмеження, цільову функцію.
4. Відповідно до конкретних умов аналізу досліджуваної чи спроектованої технічної системи визначати параметри оптимізації її математичної моделі.
5. Проводити системний аналіз модульованих технічних систем з урахуванням рекомендованої послідовності аналізу та принципів системного аналізу.
6. Формулювати постановку завдання вимірювання, збирати та аналізувати вимірювальну інформацію, аналізувати адекватність моделі об'єкта вимірювання та моделі засобів вимірювання відповідно до структурної схеми елементів процесу вимірювання (рис. 4.2).
7. Проводити класифікацію засобів та методів вимірювання згідно з базовими ознаками метрологічного аналізу.
8. Виконувати математичне моделювання об'єктів вимірювання.
9. Виконувати математичне моделювання аналогових засобів та систем вимірювання.

10. Виконувати математичне моделювання цифрових засобів вимірювання.
11. Визначати нормальні, робочі та граничні умови вимірювання.
12. Визначати якісні параметри вимірювання: точність, достовірність, правильність, збіжність результату, відтворюваність результатів вимірювань, похибку результату вимірювань.
13. Виконувати математичне моделювання впливу середовища та умов вимірювання на об'єкт вимірювання.

5. УЗАГАЛЬНЕНА МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

5.1. Узагальнені етапи математичного моделювання

Єдиної концепції розроблення математичних моделей немає та і не може бути через різноманіття завдань і ситуацій, що виникають, напрямів, математичних методів та шляхів їх вирішення. Якість моделі значною мірою визначається творчими здібностями та уявою як окремого інженера, так і всього колективу інженерів.

Інтуїція, знання, досвід та інші інтелектуальні здібності не піддаються чіткому алгоритмуванню, проте відіграють головну роль у процесі побудови моделі. Тому неможливо написати конкретну інструкцію чи підручник із побудови моделей, адже це творчий, індивідуальний процес кожного дослідника та інженера. Якби такий підручник було написано, то він швидше обмежував би творчі можливості, ніж їх розвивав.

Утім, попри різноманіття технічних систем і широкі можливості моделювання на сучасних персональних комп'ютерах, можна виділити основні закономірності переходу від побудови концептуальної математичної моделі об'єкта моделювання до проведення комп'ютерного моделювання технічних систем та подальшого оброблення результатів моделювання.

Аналіз нагромадженого досвіду побудови моделей та проведення комп'ютерного моделювання дозволяють виділити вимоги до математичної моделі та розробити загальну рекомендаційну послідовність дій. До математичних моделей технічних систем висувають такі основні вимоги [23; 24]:

1. Повнота моделі має надавати користувачу можливість отримати вичерпні характеристики системи із заданою точністю та достовірністю.
2. Процес розроблення та реалізації моделі технічної системи повинен зводитися до мінімальних затрат часу.
3. Структура моделі має складатись із блоків, що зручно у разі перебудови моделі.
4. Гнучкість системи повинна дозволяти відтворювати різні ситуації у разі зміни її структури, алгоритмів і параметрів моделі.
5. Інформаційне забезпечення процесу моделювання має надавати можливість ефективної роботи моделі з базами даних пакетів прикладних систем та спеціалізованих САЕ-систем.

6. Програмні й технічні засоби повинні забезпечувати швидке створення комп'ютерної моделі та зручну роботу дослідника з нею.

Загальна схема математичного моделювання технічних систем включає такі основні узагальнені етапи:

1. Схематизація реальних процесів, що відбуваються в технічній системі, визначення їх (її) структури, складу дій та операцій для постановки завдання.

2. Теоретичний аналіз елементарних операцій та побудова концептуальної моделі системи для знаходження залежності між вхідними та вихідними величинами.

3. Побудова математичної моделі технічної системи (за потреби програмування) та комп'ютерне моделювання.

4. Експериментальна перевірка отриманих результатів та коригування математичної моделі для коригування моделі та отримання достовірних результатів моделювання.

5. Аналіз та подання результатів моделювання технічної системи.

Загалом послідовність етапів математичного моделювання залежить від складності технічної системи, досвіду дослідника, багатьох інших причин та зумовлена, передусім, використанням допоміжних інструментів – комп'ютера та розрахункових пакетів прикладних програм або САЕ-систем.

Розглянемо більш детально способи організації процесу математичного моделювання, від якого і залежить вибір тих чи інших етапів та підетапів моделювання.

5.2. Способи організації процесу математичного моделювання

Математичне моделювання є методом дослідження технічних систем шляхом побудови їх математичних моделей із подальшим аналізом та дослідженням цих моделей. Разом із тим використання сучасних мов програмування, персональних комп'ютерів та інформаційних технологій значно розширило можливості математичного моделювання.

Тому можна виділити три типові способи організації процесу математичного моделювання. Перший – «традиційний», який ґрунтується на побудові математичної моделі з подальшим її аналізом та аналітичним дослідженням.

Для технічних систем, простих за структурою і процесом функціонування, побудова математичної моделі з подальшим її дослідженням є достатньою умовою для отримання результатів моделювання. Дослідник, під час аналізу моделі, у кожному ітераційному

циклі порівнює показники отриманої моделі з їх допустимими значеннями. За умови невиконання обмежень вибираються нові параметри та коригується модель, після чого цикл дослідження повторюється. Схема «традиційного» математичного моделювання матиме вигляд (рис. 5.1).

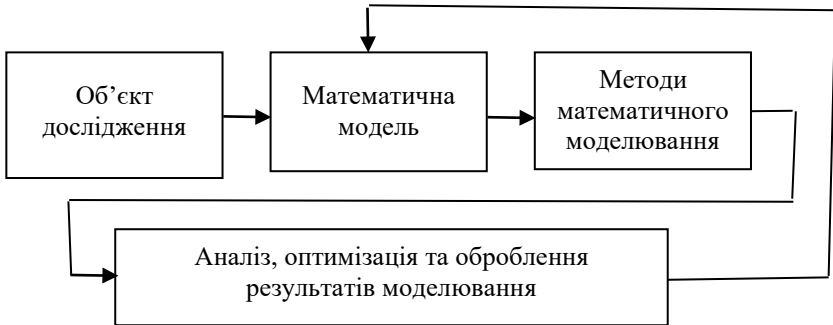


Рис. 5.1. Загальна схема процесу «традиційного» математичного моделювання

Процес моделювання за цією схемою реалізується для тих технічних систем, для яких були відомі основні закони їх функціонування та які зберігаються під час переходу від моделі до реального об'єкта моделювання. Ці закони (знання) дозволяють апріорно задати типовий клас моделей, що використовуються, та звести завдання дослідження до знаходження параметрів моделі за експериментальними даними.

Принципова зміна схеми організації процесу математичного моделювання відбувається при переході до аналізу (дослідження) технічної системи для малодосліджених об'єктів, де сама структура і клас моделей можуть і повинні уточнюватися під час дослідження. При цьому структура математичної моделі не може бути задана апріорі, а тому й не може використовуватись існуючий типовий клас моделей або пакет прикладних програм.

Тому другим типовим способом організації процесу математичного моделювання вважатимемо спосіб, за якого дослідник, попри наявність великого арсеналу математичних алгоритмів та прикладних програм, самостійно розробляє комп'ютерні програми.

Для цього він повинен знати мову програмування, мати навички програмування, проектувати структуру програми, а також програмувати, тестувати й налагоджувати програми.

Схему типового способу організації математичного моделювання з використанням комп'ютера як інструментального засобу наведено на рис. 5.2.

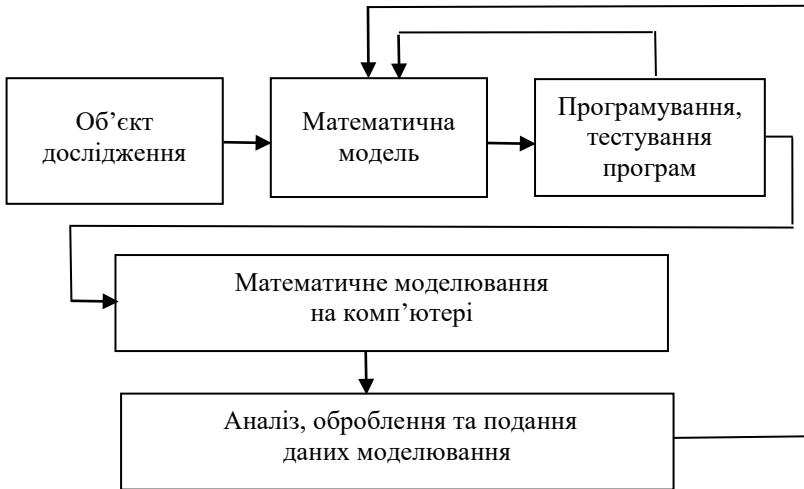


Рис. 5.2. Загальна схема процесу математичного моделювання з використанням комп'ютера

Дослідник у процесі математичного моделювання може використовувати сучасні інформаційні технології для проведення багатоваріантних досліджень, що залежать від різних управляючих чинників та впливу чинників навколишнього середовища. З алгоритмічного погляду організація моделювання – це процес математичного оброблення вихідних даних для отримання певного набору результатів. Процес дослідження складних динамічних об'єктів (зміна стану та просторового положення в часі) може потребувати проведення багатопараметричних та ітераційних (що повторюються) розрахунків за незмінного вигляду отриманих математичних моделей. Саме для таких розрахунків розроблено велику кількість пакетів прикладних програм математичного моделювання та розрахункових САЕ-систем.

Істотною особливістю таких пакетів прикладних програм та систем є те, що в них більшість або всі допоміжні параметри математичних моделей можуть бути без (або ж принципово не мають) фізичної інтерпретації.

Третій типовий спосіб організації процесу математичного моделювання з використанням пакетів прикладних програм та САЕ-систем ілюструє рис. 5.3.

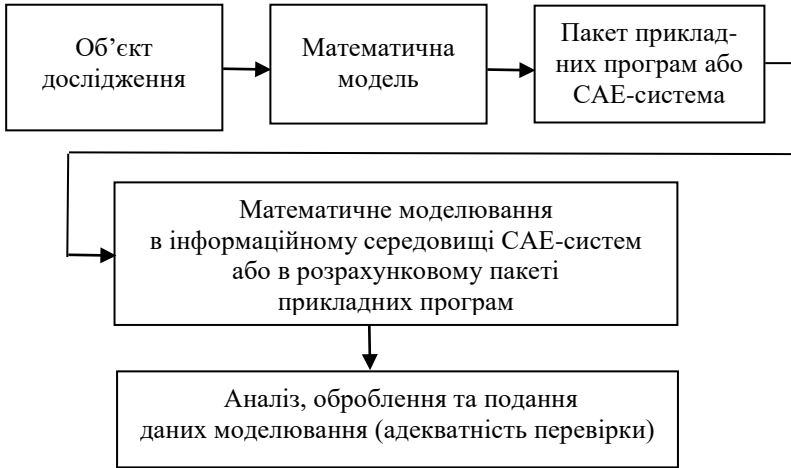


Рис. 5.3. Загальна схема процесу математичного моделювання з використанням розрахункових комп'ютерних програм або САЕ-систем

Наведені схеми організації процесу математичного моделювання є узагальненими і не містять всієї сукупності можливих дій дослідника. Такій сукупності дій (етапів та підетапів) можна надати вигляду формалізованої загальної методики математичного моделювання технічних систем як послідовність із семи етапів.

5.3. Послідовність математичного моделювання

Процес математичного моделювання – це творчий ітераційний процес, який починається з відомої інформації про об'єкт моделювання та продовжується доти, доки не буде отримано модель, адекватну вимогам поставленого завдання.

Увесь комплекс робіт із математичного моделювання відповідно до наведених вище загальних схем, можна поділити на етапи та підетапи:

1. Постановка задачі.
 - 1.1. Отримання, аналіз та встановлення вимог до початкової інформації про об'єкт моделювання.
 - 1.2. Визначення структури та параметрів технічної системи.
 - 1.3. Декомпозиція технічної системи.
 - 1.4. Аналіз отриманої інформації, висування гіпотез та прийняття припущень.
 - 1.5. Формулювання завдання моделювання технічної системи.
 - 1.6. Підготовка технічної інформації (документації) за етапом 1.
2. Розроблення концептуальної математичної моделі.
 - 2.1. Установлення параметрів і змінних математичної моделі.
 - 2.2. Установлення основного змісту моделі.
 - 2.3. Обґрунтування критеріїв оцінювання ефективності технічної системи.
 - 2.4. Визначення процедур апроксимації.
 - 2.5. Опис концептуальної математичної моделі.
 - 2.6. Перевірка достовірності концептуальної моделі.
 - 2.7. Підготовка технічної інформації (документації) за етапом 2.
3. Побудова та аналіз математичної моделі технічної системи.
 - 3.1. Побудова логічної схеми математичної моделі.
 - 3.2. Отримання математичних співвідношень.
 - 3.3. Перевірка достовірності та адекватності моделі технічної системи.
 - 3.4. Використання розрахункового пакета прикладних програм чи САЕ-систем для комп'ютерного моделювання відповідно до етапу 5 або виконання робіт із програмування моделі відповідно до етапу 4 з переходом до етапу 6.
Для нескладних математичних моделей перехід до виконання підетапів 3.5, 3.6 та етапу 6.
 - 3.5. Тестування моделі параметрами та змінними даними.
 - 3.6. Підготовка технічної інформації (документації) за етапом 3.
4. Програмування математичної моделі.
 - 4.1. Розроблення плану виконання робіт із програмування моделі.
 - 4.2. Побудова схеми програми.

- 4.3. Програмування математичної моделі.
- 4.4. Тестування отриманої програми, налагодження та перевірка достовірності вихідних даних.
- 4.5. Математичне моделювання за допомогою комп'ютера.
- 4.6. Підготовка технічної інформації (документації) за етапом 4.
5. Комп'ютерне моделювання в середовищі розрахункових пакетів прикладних програм або САЕ-систем.
 - 5.1. Визначення початкових умов моделювання технічної системи.
 - 5.2. Задання граничних умов моделі технічної системи.
 - 5.3. Опис поведінки технічної системи на основі фундаментальних законів (щодо предметної області дослідження).
 - 5.4. Знаходження числового, аналітичного та інших розв'язків системи вихідних рівнянь, що визначають математичну модель.
 - 5.5. Підготовка технічної інформації (формування звіту про роботу) за етапом 5.
6. Експериментальна перевірка моделі та оптимізаційні експерименти.
 - 6.1. Планування експерименту з моделлю системи.
 - 6.2. Установлення відповідності критеріям оптимізації системи.
 - 6.3. Оцінювання похибок та ефективності функціонування об'єктів і процесів системи.
 - 6.4. Підготовка технічної інформації (документації) за етапом 6.
7. Аналіз та інтерпретація результатів моделювання технічної системи.
 - 7.1. Комплексний аналіз результатів моделювання.
 - 7.2. Подання результатів моделювання.
 - 7.3. Підбиття підсумків моделювання та підготовка заключних рекомендацій.
 - 7.4. Підготовка загальної інформації (документації) за результатами математичного моделювання.

Загальна методика математичного моделювання включає наведені вище етапи та підетапи, які можуть використовуватися послідовно, ітераційно чи одночасно. У разі отримання нової або додаткової інформації про об'єкт дослідження потрібно її проаналізувати і за потреби переглянути отримані раніше результати.

Більшість етапів загальної методики математичного моделювання достатньою мірою розкриті в підручниках та навчальних посібниках [18 – 27]. Утім вважаємо за необхідне більш детально розкрити такі слабкоформалізовані етапи моделювання, як: постановка задачі; концептуальне моделювання; експериментальна перевірка моделі та оптимізаційні експерименти, а також надати коротку інформацію щодо інших етапів і підетапів математичного моделювання.

5.4. Постановка задачі математичного моделювання

На вибір математичної теорії та методу моделювання впливає, передусім, постановка завдання та наявність вхідних даних. Не дарма вважають, що правильно поставлене завдання – це вже половина його вирішення. Тому спочатку розглянемо суть самого поняття «завдання».

Для вирішення будь-якого завдання спочатку потрібно зрозуміти ситуацію, що склалася, поставити та чітко сформулювати питання, на які потрібно отримати відповіді після моделювання. Для цього потрібно з'ясувати суть завдання та необхідність його вирішення методом математичного моделювання.

Розгляд умов, що спричиняють виникнення завдання, дозволяє виділити деякі з них за характером ситуацій, у яких перебуває дослідник:

1. Є один або декілька кінцевих результатів, яких прагнуть досягти внаслідок вирішення технічного питання.
2. Існує дві чи більше стратегій досягнення потрібних результатів, які мають неоднакову ефективність при досягненні заданої мети.
3. Існує сумнів щодо того, яка стратегія є найкращою, тобто оптимальною.

Інакше кажучи, завдання виникає тоді, коли суб'єкту (технічній системі чи процесу) потрібно досягнути заданої мети та існують деякі шляхи її досягнення. Кожен із них характеризується різною ефективністю, причому невідомо, яким конкретним шляхом досягнути мети та вибрати стратегію.

Залежно від знань щодо характеру вхідних даних або результату прийняття рішення існують три типи задач:

1. **Детерміновані задачі.** Виникають за ситуацій, коли кожна стратегія приводить до єдиного результату.

2. **Імовірнісні задачі** (задачі з ризиком). Внаслідок їх розв'язання можуть бути отримані різні результати, ймовірності досягнення яких відомі або можуть бути оцінені.

3. **Задачі в умовах невизначеності**. Виникають у ситуаціях, коли невідомо, які результати можуть бути отримані. Тому не можна порівняти ймовірності з результатами.

Наведемо приклади цих типів задач та їх комбінацій, що виникають в інженерній практиці.

1. Державне науково-технічне об'єднання має 25 підприємств і щорічно одержує бюджетне фінансування на закупівлю обладнання. Кожний директор підприємства складає заявку на необхідне йому обладнання. Як правило, сума бажаного ними фінансування набагато вища від виділеної. Задача полягає в тому, щоб знайти спосіб вибору із загальної заявки тієї номенклатури обладнання, яка найбільш необхідна та яку потрібно закупити.

2. Підприємству потрібно виконати важливе замовлення до певного терміну. Але, відповідно до раніше затвердженого плану, робоче обладнання підлягає профілактиці та ремонту, які можуть затягнутися на невизначений термін. Є декілька варіантів досягнення результату роботи в заданий термін: відмовитися (на певний термін) від профілактичних робіт; провести профілактику згідно з планом чи в обмеженому обсязі. Але ступені ризику (ймовірності) досягнення кінцевого результату різні, різні їх економічні та стратегічні наслідки.

3. Заплановано впровадити у виробництво вимірювальних комплексів новітні методи механічної обробки полімерних матеріалів. Проте невідомо, якої якості заготовки постачатиме спеціалізоване підприємство. Можливо, необхідність в механічній обробці буде зведена до мінімуму чи зовсім не буде потрібною. Треба за три місяці до підписання контракту вибрати конкретні методи обробки та замовити обладнання й інструмент. Невизначеність з обсягами робіт вносить умови невизначеності в процес вибору рішення про вкладення коштів у розвиток виробництва.

Постановка задачі включає, насамперед, формулювання питань, на які потрібно отримати відповіді під час моделювання, та детальне викладення ситуації, що склалась (проблеми, умови завдання, обмеження). Розуміння того, що саме невідомо і про що потрібно дізнатися, не тільки дозволяє сформулювати задачу, але й

визначає напрям та методи її розв'язання.

Постановка задачі повинна включати сукупність основних шляхів її розв'язання, але не мусить обмежувати ініціативу дослідників під час пошуку та вибору ними оптимального напрямку дій. Такий підхід припускає можливість використання дослідником математичної моделі для розв'язання інших (найчастіше обернених) задач з тими ж вихідними даними (або атрибутами моделі), тобто передбачає можливість удосконалення моделювання.

На етапі постановки задачі потрібно отримати відповіді на питання й виконати такі роботи:

1. Підготувати перелік питань, на які треба відповісти наприкінці моделювання.

2. Вивчити ситуацію (існуючі процеси в сукупності чи поагрегатно та ін.).

3. Сформулювати перелік вхідних, вихідних та керувальних параметрів і збурювальних впливів.

4. Сформулювати виробничі дані для основного (початкового) варіанта.

5. З'ясувати, чи достатньо даних для основного (початкового) варіанта. Якщо ні, то провести виробничі (лабораторні) досліди або використати додаткові (експериментальні) дані літературних джерел.

6. Вибрати:

- цільову функцію;
- вхідні та вихідні змінні;
- обмеження.

7. Увести умовні позначення всіх атрибутів майбутньої моделі.

8. Визначити та описати структурні складові (компоненти) технічної системи.

9. Виявити зв'язки та описати поведження параметрів (змінних) у межах компонентів системи або встановити співвідношення між ними у вигляді функціональних залежностей.

10. За потреби (певної структурної складності) провести декомпозицію технічної системи.

Декомпозиція системи (або розбиття задачі на підзадачі) проводиться для складних систем у разі, коли неможливо або надто складно побудувати набір співвідношень між характеристиками системи. Тому систему доводиться ділити на елементи, які можна

математично описати.

Конкретного способу спрощення (ускладнення) моделі не існує, але є основні принципи. Це:

- компроміс між повнотою, трудомісткістю побудови моделі та складністю експериментування з нею;
- відповідність точності окремих елементів моделі точності вихідних даних для моделювання;
- поділ процесів моделювання на послідовні незалежні етапи;
- точне відтворення одних частин системи і спрощене відтворення інших;
- вилучення окремих частин системи із заміною їх еквівалентними випадковими впливами;
- організація послідовності моделей зростаючої складності з перевіркою збіжності результатів.

Процес декомпозиції моделі потрібно розглядати як процес мінімізації її складності, тобто як розв'язання мінімізаційної задачі на етапі підготовки математичної моделі:

$$L \Rightarrow \min \Rightarrow D^*, \quad D \in \{D\},$$

де L – складність декомпозиційної системи (задачі); D – операція декомпозиції; $\{D\}$ – множина припустимих варіантів декомпозиції; D^* – оптимальна декомпозиція, яка мінімізує L .

Отож, мета декомпозиції моделі полягає у спрощенні попереднього синтезу (постановки задач) моделі об'єкта «розщепленням» її на простіші елементи.

Під час проведення теоретичного аналізу об'єкт ділиться на скінченну кількість підсистем, які своєю чергою, діляться на дрібніші аж поки не стануть достатньо простими для вивчення та математичного опису. Вони й будуть елементами опису складного об'єкта. Оскільки складний об'єкт ділиться зі збереженням зв'язків між виділеними елементами, то математична модель складного об'єкта складатиметься з математичних моделей елементів і математичних моделей зв'язків між ними.

Опишемо математично процес декомпозиції. Так, S_0 – технічна система, що декомпонується, то після застосування до S_0 декомпозиції D_0 отримаємо множину підсистем S_1, S_2, \dots, S_n . Отримані

підсистеми розчленовуються на підсистеми нижчого рівня, тобто S_i розбивається на $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{in}$ і т.д. Кожна підсистема допускає декомпозицію процесів, які своєю чергою, можуть розділитись на функції, тобто кожний процес може бути поданий у вигляді вектора:

$$MF_{ij} = \{MF_{ij1}, MF_{ij2}, \dots, MF_{ijm}\},$$

де MF_{ijm} – i -та функція j -го процесу; m – кількість процесів.

Розглянемо приклад (рис. 5.4), який відображає методичні проблеми, що виникають унаслідок поділу об'єкта для його математичного опису.

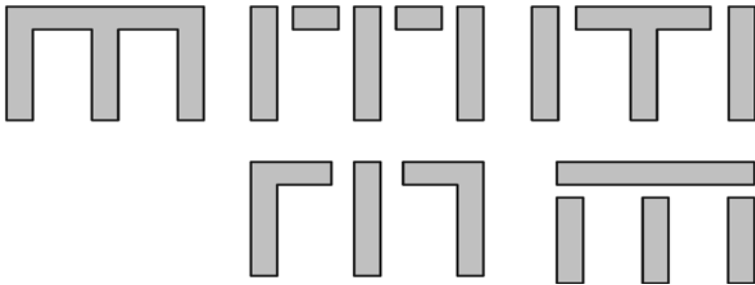


Рис. 5.4. Варіанти розділення при декомпозиції об'єкта

Опис кожного способу розділення матиме такий вигляд:

- три паралельні бруски, розділені двома короткими поперечинами, що трохи відстають від країв об'єкта;
- два паралельні бруски, розділені тавром, що трохи відстає від країв об'єкта;
- два дзеркально симетричні елементи, що мають профіль швелера;
- три паралельні бруски, з'єднані зверху однією поперечиною, що трохи відстає зверху.

Звідси можна зробити такі висновки:

1) виділення більш складних елементів для опису і моделювання об'єкта дослідження ускладнює їх опис, але спрощує опис зв'язків між ними і навпаки;

2) декомпозиційний об'єкт можна використовувати як елемент для опису і моделювання більш складних технічних систем.

Отож, математичне моделювання технічних систем ґрунтується на реальних процесах, які відбуваються в них під час функціонування. Їх поділяють на елементарні дії або операції, які описуються простими математичними залежностями, що встановлюють зв'язок між вхідними та вихідними впливами.

Через складність процесів функціонування реальних технічних систем можна будувати математичні моделі, які описують лише їх основні характеристики. За математичного опису елементів технічної системи становлять інтерес ті з їх властивостей, які безпосередньо впливають на властивості всієї технічної системи. На всіх етапах моделювання (виділення простих елементів, визначення їх зв'язків) математичний опис об'єкта спрощують шляхом прийняття певних припущень.

При моделюванні технічної системи на етапі декомпозиції потрібно виявити чинники, що значною мірою впливають на характер функціонування системи. Так, наприклад, для моделювання технологічного процесу складання вимірювального приладу на підставі технологічної схеми механоскладального виробництва потрібно:

- скласти інформаційну схему, в якій приблизно дотримувався б матеріальний баланс;
- подати у вигляді переліку пунктів обчислювальні блоки, що входять до схеми;
- записати наближені моделі (які надалі повинні відповідати реальному технологічному режиму) для елементів, моделей яких не існує серед типових математичних схем.

Аналіз отриманої інформації, висування гіпотез та прийняття припущень. Проведення аналізу забезпечує отримання кількісних та якісних вхідних даних, необхідних для подальшої формалізації та вирішення цієї задачі. Ці дані допомагають зрозуміти суть задачі та методи її розв'язання. Аналіз інформації про систему та її навколишнє середовище дозволяє оцінити наявність чи відсутність апріорних (апріорно до досліду, незалежно від досліду, завідомо) та експериментальних даних, а також вибрати методи і засоби попереднього оброблення інформації.

Від якості вхідної інформації про об'єкт моделювання та організації її аналізу істотно залежать адекватність отриманої моделі та достовірність результатів моделювання.

Гіпотези на етапі постановки задачі необхідні для заповнення прогалін у розумінні суті задачі дослідником. Також висуваються гіпотези щодо можливих результатів моделювання технічної системи, справедливості яких перевіряється при проведенні як традиційного, так і комп'ютерного моделювання.

Припущення передбачає, що деякі дані невідомі або їх не можна отримати. Припущення можуть також висуватися щодо відомих даних, але які не відповідають висунутим раніше вимогам до вхідної інформації про об'єкт моделювання.

У цілому припущення дають досліднику додаткову можливість для спрощення майбутньої математичної моделі відповідно до вибраної загальної схеми процесу математичного моделювання (див. рис. 5.1–5.3). При висуванні гіпотез та припущень ураховуються такі чинники:

- обсяг отриманої інформації для розв'язання;
- необхідність поділу задачі на підзадачі, для яких недостатньо інформації;
- обмеження ресурсів часу для розв'язання задачі;
- очікувані результати моделювання.

Слід зазначити, що на етапі концептуального моделювання (етап 2) досліднику бажано переглянути прийняті раніше гіпотези і припущення та ухвалити за ними остаточне рішення.

Формулювання задачі моделювання технічної системи. Формально задача моделювання ставиться перед дослідником ще до початку математичного моделювання. Сам етап 1 призначений для уточнення суті задачі та формалізованого її подання на базі вхідної інформації про технічну систему та опису впливу навколишнього середовища.

Тобто формулювання задачі моделювання технічної системи на цьому етапі подібне до розроблення технічного завдання на проектування (виготовлення) промислового виробу. Так, розроблення технічного завдання завжди є необхідним етапом проектних робіт. Воно потребує певного часу для аналізу вхідної інформації, її уточнення та коригування. Важливим є те, що основу технічного завдання повинен розробляти (формулювати) замовник цього проєк-

ту (роботи) за участю безпосереднього виконавця. Отож, і дослідник (інженер) повинен уточнювати постановку задачі та її формалізований опис з керівником (замовником) процесу математичного моделювання.

Результатом формулювання задачі мають бути формалізований опис вхідних даних, існуючих обмежень на вхідні та вихідні параметри технічної системи та подана в загальному вигляді цільова функція математичного моделювання.

Підготовка технічної (звітної) інформації (документації) за етапом 1. Цей підетап завершує кожний етап і є обов'язковою умовою успішного проведення математичного моделювання. Потреба в коригуванні процесу моделювання, можлива участь інших дослідників (інженерів) у цьому процесі зумовлюють необхідність документування проміжних результатів моделювання.

По завершенні етапу 1 складають детальний технічний звіт цього етапу. Він має містити детальний формалізований опис постановки задачі математичного моделювання технічної системи за відповідними вимогами.

5.5. Розроблення концептуальної математичної моделі технічної системи

Концептуальність як система поглядів на процеси досліджень та розроблення технічних систем властива й математичному моделюванню їх предметної області. Тому сукупність таких моделей називають концептуальною математичною моделлю предметної області технічних систем.

Побудова концептуальної моделі відповідає переходу від описового подання знань до їх формального подання декларативною мовою, яка допускає єдину інтерпретацію. Після формалізованої постановки задачі дослідник (або колектив розробників) може виконувати підетапи етапу 3. Але математичне моделювання технічних систем, наприклад складних сучасних інформаційно-вимірювальних комплексів, виробничих процесів промислових підприємств, сучасних приладів із вбудованими мікросхемами та інше, безумовно, потребує проведення робіт відповідно до етапу 2 (етапу концептуального моделювання).

Концептуальне моделювання використовують у тих випадках, коли технічна система не може бути описана кількісними характе-

ристиками, які дозволили б описати закономірності її функціонування чи розроблення у вигляді аналітичних залежностей.

Розглянемо детальніше методологічні аспекти цього виду моделювання. Концептуальна модель разом з описом структури технічної системи (об'єкта дослідження процесів як функціонування об'єкта, так і процесів оброблення інформації), способів взаємодії структурних елементів відображає такі властивості, як належність технічної системи до певного типу та її кількісні характеристики. Тому, крім поділу елементів моделі на об'єкти та відношення між ними, можна виділити клас атрибутів (властивостей), які вступають з елементами моделі (інформаційними об'єктами та процесами) у бінарні (взаємно однозначні) відношення, які можуть бути описані функціонально.

Отож, концептуальна математична модель технічної системи містить такі компоненти:

- множину елементів моделі (об'єктів і процесів);
- відношення, які задаються над множиною елементів моделей;
- множину атрибутів об'єктів і відношень;
- множину функцій (функціональних відношень між інформаційними об'єктами, процесами та їх атрибутами).

Два перші компоненти утворюють схему об'єктів і процесів технічної системи, а два інші – моделі атрибутів і кількісні характеристики.

Формалізацію концептуальної математичної моделі можна подати короткем

$$S_{kmm} = \langle P, O, I_p, H_i, I_n, O_{ut}, S \rangle, \quad (5.1)$$

де $P = \{p_i\}$ – множина процесів оброблення інформації; $O = \{o_j\}$ – множина інформаційних об'єктів (даних); H_p, H_o – відношення ієрархії інформаційних об'єктів; $I_n : P \rightarrow B(o)$ – відповідність I_n множини вхідних інформаційних об'єктів $B(o)$ множині процесів p (I_n – інформаційна відповідність «вхідні інформаційні об'єкти процесу – процес»); $O_{ut} : P \rightarrow B(o)$ – відповідність «процес – вихідні інформаційні об'єкти» множини вхідних інформаційних об'єктів $B(o)$ множині процесів P ; $\delta : P \rightarrow B(\emptyset), \{p_m\} = s\{p_i\}$ – ві-

дношення проходження процесів (відповідність підмножини вхідних інформаційних процесів $B(p)$ множині P на цю множину, де $\{P_m\}$ – множина процесів, виконання яких має суворо передувати виконанню певного процесу $p_i(p_m \in S(p_i))$; $S = \{S_k\}$ – множина компонентів концептуальної математичної моделі; $i = \overline{1, \dots, I}$; $j = \overline{1, \dots, J}$; $m = \overline{1, \dots, M}$; $k = \overline{1, \dots, K}$ – лічильники індексів.

Формалізація (5.1) відображає суть концептуального моделювання як процесу, під яким розуміють певне перетворення (i_n, O_{ut}) вхідної підмножини об'єктів (даних про них) на іншу підмножину, яку називають вихідною.

Під час побудови концептуальної математичної моделі процес розглядають як декларативне подання задачі, розв'язання якої полягає в описі причинно-наслідкових зв'язків щодо виробленого в предметній галузі перетворення інформації.

Кожен із перерахованих компонентів концептуальної математичної моделі має свою семантичну інтерпретацію – декларативну чи процедурну. Взаємна несуперечність цих видів інтерпретації дозволяє їх сумістити і використовувати перший для побудови опису об'єктів предметної галузі, а другий – для отримання на їх основі процедурних специфікацій і самих алгоритмів.

Кожній трійці «вхідні об'єкти процесу – процес – вихідні об'єкти процесу» можна поставити у відповідність вираз

$$I_{n(p_i)} \xrightarrow{p_i} O_{ut(p_i)}.$$

Цей вираз означає відповідність процедурного процесу p_i відношення $O_{ut(p_i)}$ відношенню $I_{n(p_i)}$. Відповідність p_i є відношенням обчислюваності під час розв'язання задачі, яке може розглядатись у двох аспектах: як аксіома обчислюваності для процесів нижнього рівня ієрархії та як теорема обчислюваності для процесів проміжної ієрархії, доказом існування якої є одна з умов коректності моделі, що перевіряється в процесі аналізу розв'язності концептуальної математичної моделі.

Поданою формалізацією процесу концептуального математичного моделювання показано суть інформаційних процесів із формалізовано-

го опису структурних елементів математичної моделі та функціональних відношень між ними. Такі інформаційні процеси відбуваються згідно з підетапами, описаними в підрозд. 5.3. Розглянемо коротко особливості організації концептуального моделювання.

Метою підетапу *встановлення параметрів і змінних моделі* є уточнення та остаточне встановлення всіх вхідних та вихідних даних з оцінкою впливу всіх параметрів і змінних моделі на процес функціонування досліджуваних структурних елементів технічної системи та їх функціональних процесів. Опис кожного параметра і змінної повинен мати такий вигляд:

- визначення і коротка характеристика;
- установлене позначення та одиниця вимірювання;
- діапазон змін;
- місце застосування в математичній моделі.

Отримавши елементи, атрибути і функції моделі та зв'язок між ними, можна встановити основний зміст математичної моделі. На цьому кроці етапу часто застосовують апроксимацію (наближення) – математичний метод, який полягає в заміні одних математичних об'єктів іншими, близькими до оригіналу та простішими. Процедура апроксимації дозволяє досліджувати числові характеристики та якісні властивості технічної системи. При цьому задача математичного моделювання спрощується до вивчення простіших об'єктів (наприклад, характеристики яких легко розрахувати та властивості яких вже відомі). Так, у теорії чисел вивчаються діофантові наближення – наближення ірраціональних чисел до раціональних. Для наближеного обчислення інтеграла застосовується формула прямокутників (формула трапецій) або більш складна квадратурна формула. При цьому фактично відбувається наближення підінтегральної функції ступеневою функцією або вписаною ламаною. Для обчислення значень складних функцій часто застосовують розрахунок значень відрізка ряду, що апроксимують функцію.

На другому етапі в загальному вигляді формулюються можливі критерії оцінювання ефективності технічної системи (вартісні, часові, функціональні та ін.). Завершується цей етап описом отриманої концептуальної моделі технічної системи, перевіркою достовірності та підготовкою необхідної інформації (документації для цього етапу).

Розглянемо інші етапи загальної методики. Етапи 3 та 4 достатньо формалізовані та описані в навчальній літературі [18 – 24].

Етап 5 – комп’ютерне моделювання в середовищі розрахункових пакетів прикладних програм або САЕ-систем розглянуто в розділі 7 цього навчального посібника.

Задачі синтезу та оптимізації технічної системи виникають як на концептуальному етапі 2, так і на інших (етапи 3 – 6). Ці задачі складні та неоднозначні. Вирішення цих задач на початковому етапі моделювання та їх обґрунтування та рекомендації до виконання майже не подаються в навчальній літературі [18 – 26]. Їх вирішення описано в авторському навчальному посібнику [27].

Щодо завершальних етапів (6 і 7) математичного моделювання варто зауважити таке. Розробляється план проведення експериментів із моделлю для досягнення поставлених цілей. Основна мета планування експериментів – вивчення поведінки модельованої системи за найменших витрат під час експериментів. Зазвичай проводять такі експерименти:

- порівнюють середні значення і дисперсії різних альтернатив;
- визначають важливість урахування впливу змінних та обмежень, які накладаються на ці змінні;
- визначають оптимальні значення із множини можливих значень змінних.

Проведення експериментів планують для пошуку незначущих чинників. У разі оптимізації будь-якого числового критерію формують гіпотези щодо вибору оптимальних варіантів структур модельованої технічної системи або режимів її функціонування, визначають діапазон значень параметрів (режимів функціонування) моделі, у межах якого знаходиться оптимальний розв’язок. Визначають кількість реалізацій та час прогону моделі кожної реалізації. Проводять екстремальний експеримент, за результатами якого визначають оптимальне значення критерію та відповідні значення параметрів. Для оцінювання точності стохастичних моделей будують довірчі інтервали для отриманих вихідних змінних.

Далі аналізують та оцінюють результати. Наводять результати комп’ютерних експериментів у вигляді графіків, таблиць, роздруківок, а також визначають якісні та кількісні оцінки результатів моделювання. Для наочності моделі використовують анімацію. Обговорюють процес створення моделі та її достовірність, щоб підвищити рівень довіри до неї.

За отриманими результатами формують висновки з проведених досліджень і визначають рекомендації щодо використання моделі та ухвалення рішень.

Наведені етапи моделювання взаємопов'язані, а сама методика створення моделі ітераційна. Це пояснюється тим, що після виконання кожного етапу перевіряється правильність і достовірність моделі та у разі невідповідності моделі об'єкта повертається до попередніх етапів для коригування та підстроювання моделі. Залежно від характеру внесених змін повертаються до попереднього етапу або до більш ранніх етапів.

На останньому етапі моделювання документально оформлюють усі результати дослідження та готують програмну документацію для використання їх під час розробки поточних і майбутніх проєктів [24].

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Які основні вимоги до математичних моделей технічних систем?
2. Назвіть основні етапи математичного моделювання.
3. Наведіть загальну схему процесу традиційного математичного моделювання.
4. Наведіть загальну схему процесу математичного моделювання із застосуванням комп'ютера.
5. Наведіть загальну схему процесу математичного моделювання з використанням розрахункових комп'ютерних програм або САЕ-систем.
6. Обґрунтуйте переваги та недоліки застосування типових способів організації процесу математичного моделювання.
7. Назвіть узагальнені типи дослідницьких завдань та їх приклади.
8. Поясніть сутність етапу «постановка задачі математичного моделювання».
9. У чому полягає мета та принципи декомпозиції технічної системи?
10. Назвіть складові концептуальної математичної моделі.
11. Що розуміють під апроксимацією математичної моделі?
12. Які задачі розв'язують на етапі 3 математичного моделювання?
13. Назвіть задачі етапу «програмування і тестування математичного моделювання».

14. Поясніть сутність етапу «експериментальна перевірка математичного моделювання та оптимізаційні експерименти».
15. Поясніть коротко задачі етапів загальної методики математичного моделювання технічних систем.

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 5

Необхідно знати:

1. Основні вимоги до математичних моделей технічних систем.
2. Відмінності та специфічні особливості трьох типових способів організації процесу математичного моделювання.
3. Узагальнену методику математичного моделювання технічних систем.
4. Суть та склад робіт, які потрібно виконати на етапі «Постановка задачі» математичного моделювання технічної системи.
5. Умови та принципи кваліфікованого виконання процесу мінімізації складності технічної системи (декомпозиція).
6. Порядок виконання робіт етапу «Розроблення концептуальної математичної моделі технічної системи».
7. Структурні складові концептуальної математичної моделі технічної системи.
8. Формалізоване подання концептуальної математичної моделі.
9. Процедура апроксимації (наближення) математичної моделі.
10. Особливості виконання третього – сьомого етапів запропонованої методики математичного моделювання технічної системи.

Слід пам'ятати:

1. Узагальнені етапи математичного моделювання технічних систем.
2. Три типові способи (схеми) організації процесу математичного моделювання.
3. Усі сім етапів та 38 підетапів узагальненої методики математичного моделювання.
4. Три типи задач, які постають перед дослідником технічної системи залежно від характеру вихідних даних або результату прийняття рішення: детерміновані задачі, ймовірнісні задачі та задачі в умовах невизначеності.

5. Визначення понять: «постановка задачі» та «декомпозиція технічної системи».

6. Перелік робіт, які потрібно виконати на етапі постановки задачі математичного моделювання.

7. Принципи спрощення математичної моделі (декомпозиції технічної системи).

8. У яких випадках необхідно виконувати роботи етапу 2 методики математичного моделювання технічної системи.

9. Структурні складові формалізованого опису (подання) концептуальної математичної моделі.

10. Суть процесу концептуального моделювання та семантичну інтерпретацію структурних компонентів концептуальної математичної моделі.

11. Послідовність застосування процедури апроксимації математичної моделі.

12. Зміст та призначення завершальних шостого – сьомого етапів методики математичного моделювання технічної системи.

13. Структурні схеми – рис. 5.1 – 5.3.

Треба вміти:

1. Будувати типові схеми організації процесу математичного моделювання: традиційну, із застосуванням комп'ютера та розрахункових комп'ютерних програм або САЕ-систем.

2. Застосовувати методику математичного моделювання відповідно до вибраної типової схеми організації процесу математичного моделювання технічної системи.

3. Визначати поняття: «постановка задачі» та «декомпозиція технічної системи».

4. Виконувати всі роботи етапу «постановка задачі».

5. Формалізовано описувати структурні складові концептуальної математичної моделі технічної системи: множину елементів моделі; відношення, які задаються надмножиною елементів моделі; множину атрибутів об'єктів і відношень; множину функцій.

6. Правильно трактувати опис причинно-наслідкових зв'язків перетворення інформації в побудованій (розробленій) концептуальній математичній моделі.

7. Застосовувати проектну процедуру математичної апроксимації до структурних складових і числових характеристик та якісних властивостей технічної системи.

8. Виконувати роботи завершальних шостого і сьомого етапів методики математичного моделювання технічної системи.

6. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

6.1. Математичне планування експерименту

Сучасний інженер у своїй практичній діяльності часто змушений проводити експериментальні дослідження, які потребують планування дослідів. Встановлення оптимальних умов досліджуваного процесу пов'язане із застосуванням спеціальних математичних методів. Одним з таких методів, що отримали інтенсивний розвиток за останні роки, є *метод математичного планування експерименту* (МПЕ).

На противагу розповсюдженому раніше класичному методу – однофакторному експерименту, математичне планування значно скорочує кількість дослідів, матеріальні витрати та терміни проведення досліджень. МПЕ дозволяє отримати математичні моделі, кількісно оцінити вплив факторів на вихідний параметр та їх статистичну значущість.

Моделлю або функцією відгуку в МПЕ називають залежність між параметром оптимізації та факторами [37, 38]:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (6.1)$$

де Y – параметр оптимізації; k – кількість факторів; X_1, X_2, \dots, X_k – фактори.

Рівнянню (6.1) відповідає певна гіперповерхня у багатовимірному просторі (поверхня відгуку), а простір, в якому вона перебуває – факторний простір. У загальному випадку, коли досліджується k факторів, рівняння (6.1) описує поверхню відгуку в $(k + 1)$ – вимірному просторі.

У найпростішому випадку, коли досліджується функція відгуку від одного фактора, поверхня відгуку – це лінія на площині, тобто у двовимірному просторі, коли від двох факторів – поверхня у тривимірному просторі (рис. 6.1).

Як правило, при дослідженні процесу експериментатор має ду-

же обмежені відомості про його механізм, тобто аналітичний вираз функції відгуку невідомий. Тому необхідно обмежуватись її алгебричним рівнянням

$$Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + \dots + B_k \cdot X_k + B_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + \dots + B_{(k-1)k} \cdot X_{(k-1)} \cdot X_k + B_{11} \cdot X_1^2 + \dots + B_{kk} \cdot X_k^2 + \dots, \quad (6.2)$$

де $B_0, B_1, \dots, B_k, B_{12}, \dots, B_{(k-1)k}, B_{11}, \dots, B_{kk}$ – коефіцієнти полінома або коефіцієнти регресії; k – кількість факторів.

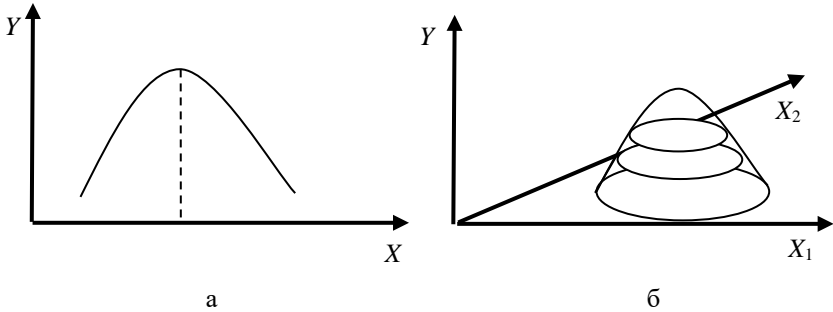


Рис. 6.1. Геометричні інтерпретації рівняння моделі при одно- (а) та двофакторному експериментах (б)

*Операцію заміни однієї функції іншою, еквівалентною, називають **апроксимацією**.* Отже, дослідник апроксимує первісну функцію відгуку алгебричним поліномом. Експеримент проводять для того, щоб знайти чисельні значення коефіцієнтів полінома.

Поліноми бувають нульового ступеню, першого, другого та іншого, які, своєю чергою, бувають повними та неповними. Користуючись формулою (6.2) легко скласти математичну модель певного ступеня для будь-якої кількості факторів.

На практиці найбільш розповсюджені моделі першого та другого ступеня. Математичне планування експерименту для отримання моделі першого або другого ступеня відповідно отримало назву планування першого або другого ступеню.

При плануванні експерименту до моделі висувають одну вимогу – адекватність. **Під адекватністю розуміють властивість моделі передбачати результати експерименту на певній ділянці з потрібною точністю.** Адекватність моделі перевіряється після реалізації експериментів.

Оскільки ступінь моделі (полінома) задалегідь передбачити

неможливо, то користуються ідеєю покрокового пошуку. Відповідно до цієї ідеї, на першій стадії намагаються описати технічну систему простою лінійною моделлю – поліномом першого ступеня

$$Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + \dots + B_k \cdot X_k.$$

Потім оцінюють якість лінійної моделі. Якщо вона буде незадовільною, то збільшують кількість членів полінома, тобто на другій стадії отримують лінійну модель із взаємодіями:

$$Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + \dots + B_k \cdot X_k + B_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + \dots + B_{(k-1)k} \cdot X_{(k-1)} \cdot X_k.$$

Знову оцінюють якість цієї моделі і, якщо вона буде незадовільною, то збільшують ступінь полінома, тобто на третьому етапі отримують модель другого ступеня, для чого користуються плануванням другого порядку. Потім оцінюють якість моделі другого ступеня і, якщо модель буде неадекватною – збільшують її ступінь. Цей процес продовжують доти, поки не буде отримано адекватну модель.

6.1.1. Етапи планування експерименту

При плануванні експерименту розрізняють два етапи – попередній та основний (рис. 6.2). **Попередній етап** – це збір, вивчення та аналіз усіх даних про об'єкт. Апріорна інформація (отримана до початку експерименту) може бути обмеженою або чисельною, але саме вона є тією **основою**, на якій базуються перші кроки дослідження. Що більше знань про об'єкт, то швидше дослідник знайде остаточне вирішення поставленої задачі.

У результаті проведення *попереднього* (апріорного) *етапу* дослідник повинен:

- 1) обрати параметр оптимізації відповідно до поставленої задачі;
- 2) скласти повний перелік факторів, виходячи з того, що краще назвати декілька несуттєвих факторів, ніж пропустити один суттєвий;
- 3) задати орієнтовні межі змінних факторів з урахуванням вимог до їх сумісності;

4) обрати математичну модель (цільова функція та обмеження).



Рис. 6.2. Загальний алгоритм планування експерименту

Основний етап містить:

- 1) планування експерименту;
- 2) проведення експерименту;
- 3) обробку результатів експерименту;
- 5) інтерпретацію результатів експерименту.

Перед плануванням проводиться вибір ділянок експерименту. Спочатку треба оцінити межі ділянок визначення факторів. При цьому слід брати до уваги **обмеження декількох типів**.

Перший тип – принципів обмеження для значень факторів, які не можуть бути порушені ні за яких обставин. Наприклад, якщо фактор – температура, то нижньою межею буде абсолютний нуль.

Другий тип – це обмеження, пов'язані з техніко-економічними міркуваннями, наприклад, із вартістю справи, дефіцитністю окремих компонентів, часом проведення процесу.

Третій тип – це обмеження, з якими найчастіше доводиться мати справу. Вони визначаються конкретними умовами проведення процесу, наприклад, існуючою апаратурою, технологією, організацією. У реакторі, виготовленому з певного матеріалу, не можна підняти температуру вище температури плавлення цього матеріалу чи вище робочої температури даного каталізатора.

Оптимізація, як правило, починається за умов, коли об'єкт вже досліджувався. Інформацію, яка міститься в результатах попередніх досліджень, називатимемо апріорною (отриманою до початку експерименту). Ми можемо використовувати апріорну інформацію для отримання уявлення про параметр оптимізації, про фактори, про найкращі умови проведення процесу та характерні поверхні відгуку, тобто про те, як сильно змінюється параметр оптимізації за невеликих змін значень факторів, а також про кривизну поверхні відгуку. Для цього можна використовувати графіки (або таблиці) однофакторних експериментів, які існували в попередніх дослідженнях або описані в літературі. Отже, вибір експериментальної ділянки факторного простору пов'язаний із попереднім аналізом апріорної інформації.

6.1.2. Вибір основного рівня та інтервалів варіювання

Найкращими умовами, за аналізом апріорної інформації, є комбінація рівнів факторів. Кожна комбінація є багатомірною точкою у

факторному просторі. Її можна розглядати як початкову точку для побудови експерименту (нульовий рівень). Побудова плану експерименту зводиться до вибору екстремальних точок, симетричних відносно нульового рівня (рис. 6.3).

Рівень варіювання – це значення кожного фактору за час проведення дослідю. Інтервал варіювання вибирається, виходячи з досвіду, та охоплює діапазон дослідження. Цей діапазон – *факторний простір*. При цьому враховується:

1. Точність вимірювання факторів.
2. Сила впливу фактора.
3. Величина помилки вимірювання параметра оптимізації. При існуванні одного фактору маємо лінію на площині (рис. 6.3, а), при двох факторах – просторовий образ (рис. 6.3, б).

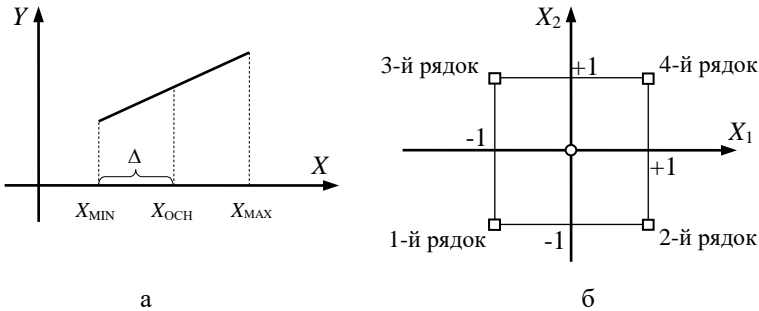


Рис. 6.3. Факторное пространство:
а) при $k = 1$ (один фактор); б) при $k = 2$ (два фактора)

Інтервалом варіювання факторів називають число (своє для кожного фактора), додавання якого до основного рівня дає верхній, а віднімання – нижній рівень фактора:

$$X_{\text{MAX}} = X_{\text{OCH}} + \Delta; \quad X_{\text{MIN}} = X_{\text{OCH}} - \Delta, \quad (6.3)$$

де Δ – інтервал варіювання; X_{MAX} – верхнє значення фактора; X_{MIN} – нижнє значення фактора; X_{OCH} – значення фактора на основному рівні.

Із наведених виразів (6.3) випливає значення фактора на основному рівні

$$X_{\text{осн}} = \frac{X_{\text{MAX}} + X_{\text{MIN}}}{2}.$$

При розв'язуванні екстремальних задач вибирають:

- 1) основний рівень фактора;
- 2) основний інтервал варіювання та рівні.

При розв'язуванні інтерполяційних задач діють навпаки:

- 1) встановлюють рівні фактора (верхній та нижній);
- 2) вибирають основний рівень фактора.

Планування повного факторного експерименту (ПФЕ) складається з двох обов'язкових етапів:

- кодування факторів;
- складання матриці планування експерименту.

6.1.3. Кодування факторів і складання матриці планування

Кодування факторів потрібне для переведення натуральних факторів у безрозмірні величини, щоб побудувати матриці планування експерименту.

Зв'язок між кодовим X та натуральним значенням фактора виражається формулою кодування:

$$X = \frac{2(X - X_{\text{MAX}})}{X_{\text{MAX}} - X_{\text{MIN}}} + 1, \quad (6.4)$$

де X – значення фактора, взяте всередині інтервалу варіювання в натуральних одиницях вимірювання; X_{MAX} , X_{MIN} – відповідно верхній та нижній рівні фактора в натуральних одиницях вимірювання.

Із формули (6.4) випливає, що кодоване значення верхнього рівня фактора завжди дорівнює $(+1)$, нижнього – (-1) , а основного – 0 (нуль). При кодуванні якісних факторів, які мають два рівні, один рівень позначається $(+1)$, а інший – (-1) .

Матриця планування експерименту містить умови проведення експериментів, в якій рядки відповідають різним експериментам, а стовпці – різним значенням факторів.

Матриця експерименту складається за правилом чергування знаків: для першого фактора рівні чергуються в кожному експерименті, для другого – через два експерименти, для третього – через

чотири експерименти, для четвертого – через вісім і т.д. за ступенями двійки. Кількість експериментів N ПФЕ визначається за формулою:

$$N = p^k,$$

де p – кількість рівнів; k – кількість факторів.

Плануючи експеримент, на першому етапі, дослідник прагне отримати лінійну модель (табл. 6.1 та 6.2). Наприклад, для ПФЕ типу 2^2 лінійна модель має вигляд

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2,$$

а для ПФЕ типу 2^3 такий вигляд

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3.$$

Якщо лінійна модель буде неадекватною, то намагаються отримати нелінійну модель.

Один із видів нелінійності, що часто зустрічається, є нелінійність, пов'язана з тим, що ефект одного фактора залежить від рівня, на якому перебуває інший фактор. У цьому разі кажуть, що спостерігається ефект взаємодії факторів. Математична модель при цьому є лінійною із взаємодіями. Наприклад, для ПФЕ типу 2^2 лінійна модель із взаємодіями матиме вигляд

$$Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + B_{12} \cdot X_1 \cdot X_2,$$

а для ПФЕ типу 2^3 такий вигляд

$$Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + B_3 \cdot X_3 + B_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + B_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + B_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + B_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

Матриця планування з урахуванням взаємодій факторів (розширена матриця) складається так:

- 1) будується матриця без взаємодій факторів;
- 2) до матриці добудовуються стовпці взаємодій факторів за правилом перемноження стовпців факторів, які входять до ефекту взаємодії (табл. 6.3).

Таблиця 6.1

Матриця планування ПФЕ
типу 2^2

№ з/п	X_1	X_2	Y
1	+	+	Y_1
2	-	+	Y_2
3	+	-	Y_3
4	-	-	Y_4

Таблиця 6.2

Матриця планування ПФЕ
типу 2^3

№ з/п	X_1	X_2	X_3	Y
1	+	+	+	Y_1
2	-	+	+	Y_2
3	+	-	+	Y_3
4	-	-	+	Y_4
5	+	+	-	Y_5
6	-	+	-	Y_6
7	+	-	-	Y_7
8	-	-	-	Y_8

Ефект взаємодії двох факторів називається ефектом першого порядку. Ефект взаємодії максимального порядку у ПФЕ має порядок, на одиницю менший від кількості факторів.

Таблиця 6.3

Розширена матриця планування ПФЕ типу 2^3 з ефектами взаємодії

№ з/п	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	+	+	+	+	+	+	+	Y_1
2	-	+	+	-	-	+	-	Y_2
3	+	-	+	-	+	-	-	Y_3
4	-	-	+	+	-	-	+	Y_4
5	+	+	-	+	-	-	-	Y_5
6	-	+	-	-	+	-	+	Y_6
7	+	-	-	-	-	+	+	Y_7
8	-	-	-	+	+	+	-	Y_8

6.1.4. Проведення та оцінювання експериментів

Проводячи експеримент, враховують помилку експерименту. Помилка експерименту оцінюється за паралельними експериментами, які повторюють декілька разів за одних і тих же зна-

чень факторів.

Для оцінки помилки паралельних експериментів використовують дисперсію. **Дисперсією** S_j^2 називається середнє значення квадрата відхилень випадкової величини від її середнього значення:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{n-1},$$

де u – номер паралельного експерименту; n – кількість паралельних експериментів; y_u – значення параметра оптимізації в u -му паралельному експерименті; \bar{y} – середнє арифметичне значення параметра оптимізації в n паралельних експериментах визначається як

$$\bar{y} = \frac{\sum_{u=1}^n y_u}{n}.$$

Помилку експерименту S (середнє квадратичне відхилення, стандарт або квадратична помилка) визначають як корінь квадратний із дисперсії експерименту:

$$S = +\sqrt{S^2},$$

де S^2 – дисперсія експерименту.

Дисперсія та помилка експерименту – це міра розсіяння або змінності. Що більша дисперсія та помилка експерименту, то більше розсіяння значення паралельного експерименту навколо середнього значення, яке визначається похибками вимірювань, неоднорідністю матеріалів, зміною умов випробування тощо.

Велике розсіяння досліджуваної величини може відбутися через наявність в експерименті помилкових експериментів, які дають сумнівні результати.

Для відкидання помилкових експериментів застосовують критерій Стьюдента t_p :

$$t_p = \frac{|Y - \bar{Y}|}{S},$$

де Y – значення параметра оптимізації, поставлене під сумнів; \bar{Y} – середнє арифметичне значення параметра оптимізації в паралельних експериментах без урахування результату експерименту, поставленого під сумнів; S – помилка паралельного експерименту без урахування результату експерименту, поставленого під сумнів.

Значення t_p порівнюють із табличним значенням критерію Стьюдента. Якщо виявиться, що $t_p > t_T$, то експеримент вважають помилковим (бракованим), і, навпаки, якщо $t_p < t_T$ – експеримент не помилковий.

Процедура порівняння обчисленої характеристики з табличним значенням називається перевіркою гіпотези. Застосування t_T потребує пояснень. *Вхідними параметрами* для його визначення є кількість ступенів вільності f та рівень значимості α .

Поняття кількості ступенів вільності надалі уточнюватиметься. У цьому випадку $f = n - 1$, де n – кількість паралельних експериментів без урахування помилкового експерименту.

Щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних зовнішніми умовами (зміна температури, сировини, експериментатора тощо), рекомендується випадкова послідовність при постановці експерименту, яка запланована матрицею. Експеримент необхідно рандомізувати за часом. Термін «рандомізація» походить від англійського слова *random* – випадковий.

Рівень значимості – міра вимог до відповіді. Досвід застосування статистики за різних ситуацій упродовж десятиріч показав, що при вирішенні інженерних завдань рівень значимості приймають рівним 0,05. Це значення ще називають 5-відсотковим рівнем ризику та відповідає імовірності правильної відповіді при перевірці нашої гіпотези $p = 1 - \alpha = 0,95$ або 95 %. При цьому кажуть, що в середньому тільки у 5 % випадків перевірка гіпотези в аналогічних ситуаціях має помилку. Звісно, ніколи не можна дати стовідсоткової гарантії. Таке бажання призводить до необхідності виконувати нескінченно багато експериментів, що абсурдно.

Важливо підкреслити, що дослідник завжди вільний у виборі рівня значимості, і можливі ситуації, в яких потрібна більш достовірна відповідь. Якщо ж немає особливих міркувань, то можна завжди приймати $\alpha = 0,05$. Надалі дотримуватимемося цієї умови.

Дисперсія всього експерименту або дисперсія параметра опти-

мізації S_y^2 має вигляд:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_j^2}{N}, \quad (6.5)$$

де j – номер експерименту; N – кількість експериментів у матриці планування; S_j^2 – дисперсія j -го експерименту матриці, яка визначається за формулою (6.5).

На практиці дуже часто трапляється, що кількість паралельних експериментів неоднакова. Це пов'язано з відкиданням помилкових експериментів або невпевненістю експериментатора в тому чи іншому результаті (тоді з'являється бажання ще раз повторити експеримент). У таких випадках:

$$S_y^2 = \frac{S_1^2 \cdot f_1 + S_2^2 \cdot f_2 + \dots + S_N^2 \cdot f_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum_{j=1}^N (S_j^2 \cdot f_j)}{\sum_{j=1}^N f_j}, \quad (6.6)$$

де j – номер експерименту; N – кількість експериментів у матриці; S_j^2 – дисперсія j -го експерименту; f_j – кількість ступенів вільності в j -му експерименті дорівнює:

$$f_j = n_j - 1,$$

де n_j – кількість паралельних експериментів в j -му експерименті.

Формулу (6.6) можна застосовувати, коли кількість паралельних експериментів однакова у всій матриці.

На практиці часто зустрічаються випадки, коли експеримент, запланований матрицею, не дублюється, тобто паралельні експерименти не проводяться. Як правило, так вчиняють, коли експерименти дорого коштують, а головне, коли в дослідника є впевненість у тому, що розсіяння значень параметрів оптимізації не перевищує розсіяння у нульовій точці. У таких випадках для обчислення дисперсії параметра оптимізації спеціально здійснюється декілька паралельних експериментів у нульовій точці, тобто при перебуванні всіх факторів на основному рівні. Дисперсія параметра оптимізації при цьому визначається за формулою:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j_0=1}^{n_0} (Y_{j_0} - \bar{Y}_0)^2}{n_0 - 1}, \quad (6.7)$$

де n_0 – кількість паралельних експериментів у нульовій точці; j_0 – номер експеримента в нульовій точці; Y_{j_0} – значення параметра оптимізації в j_0 -й точці; \bar{Y}_0 – середнє арифметичне значення параметра оптимізації з n_0 паралельних експериментів, проведених у нульовій точці.

Треба зазначити, що формули (6.6) та (6.7) справедливі, коли дисперсія для кожного експерименту матриці однорідна. Тому, насамперед, потрібно здійснювати перевірку дисперсій на їх однорідність.

Однорідність дисперсій перевіряється за допомогою різних статистичних критеріїв. Найпростішим із них є критерій Фішера (F -критерій), який служить для порівняння двох дисперсій та є відношенням більшої дисперсії до меншої:

$$F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2},$$

де S_1^2 та S_2^2 – дисперсії, які порівнюються ($S_1^2 > S_2^2$).

Розраховане значення критерію F_p порівнюють із табличним значенням критерію Фішера F_T . Якщо при цьому виявиться, що $F_p < F_T$ для відповідної кількості степенів вільності та прийнятого рівня значимості, то дисперсії однорідні, і навпаки – якщо $F_p > F_T$, то дисперсії неоднорідні, тобто суттєво відрізняються одна від одної.

Вхідними параметрами для визначення F_T є f_1 та f_2 . Під f_1 розуміють кількість степенів вільності для більшої дисперсії, під f_2 – кількість степенів вільності для меншої дисперсії.

При порівнянні великої кількості дисперсій їх однорідність перевіряють за критерієм Кохрена або за критерієм Бартлета.

Якщо для всіх рядків матриці виконано однакову кількість паралельних експериментів і при цьому одна дисперсія значно перевищує інші, то однорідність ряду дисперсій перевіряють за допомогою критерію Кохрена G_p (G -критерій), який є відношенням максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій:

$$G_p = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_N^2} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{j=1}^N S_j^2},$$

де S_{\max}^2 – максимальне значення серед всіх порівнюваних дисперсій; j – номер дисперсії; N – кількість порівнюваних дисперсій; S_j^2 – значення j -ї дисперсії.

Гіпотеза про однорідність дисперсій підтверджується, якщо G_p не перевищує табличного значення G_T . Якщо розраховане значення критерію Кохрена більше за табличне ($G_p > G_T$), то дисперсії неоднорідні.

Для визначення G_T вхідними параметрами є N та f . Під N розуміють кількість порівнюваних дисперсій, під f – кількість степенів вільності, яка дорівнює $f = n - 1$, де n – кількість паралельних експериментів.

У випадках із неоднорідними дисперсіями можна змінити масштаб для параметра оптимізації. При цьому пропонується математична функція від параметра оптимізації, наприклад, квадратний корінь або логарифм.

6.1.5. Побудова регресійної математичної моделі

У загальному випадку для будь-якої кількості факторів коефіцієнти моделі визначаються за формулою:

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^N \bar{Y}_j \cdot X_{ij}}{N},$$

де i – номер фактора, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (нуль для розрахунку B_0); j – номер експерименту; \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації в j -му експерименті; X_{ij} – кодове значення (± 1) фактора i (ефекту взаємодії факторів) у j -му експерименті.

Оскільки кожний фактор (окрім X_0 , який додатково вводиться у матрицю планування для обчислення коефіцієнта B_0) варіюється

(змінюється) на двох рівнях «+1» або «-1», то обчислення зводять до приписування стовпцю « Y » у матриці планування знаків стовпця відповідного фактора (або ефекта взаємодії факторів) та алгебричного складання отриманих значень.

Ділення результату на кількість експериментів у матриці планування дає результат (відповідні значення коефіцієнтів відповідної математичної моделі):

$$B_0 = \frac{\bar{Y}_1 \cdot (+1) + \bar{Y}_2 \cdot (+1) + \bar{Y}_3 \cdot (+1) + \bar{Y}_4 \cdot (+1)}{4};$$

$$B_1 = \frac{\bar{Y}_1 \cdot (+1) + \bar{Y}_2 \cdot (-1) + \bar{Y}_3 \cdot (+1) + \bar{Y}_4 \cdot (-1)}{4};$$

$$B_2 = \frac{\bar{Y}_1 \cdot (+1) + \bar{Y}_2 \cdot (+1) + \bar{Y}_3 \cdot (-1) + \bar{Y}_4 \cdot (-1)}{4};$$

$$B_{12} = \frac{\bar{Y}_1 \cdot (+1) + \bar{Y}_2 \cdot (-1) + \bar{Y}_3 \cdot (-1) + \bar{Y}_4 \cdot (+1)}{4}.$$

Значимість для кожного коефіцієнта перевіряється незалежно. Це робиться за допомогою побудови довірчого інтервалу:

$$\Delta B_i = t \cdot S_{B_i},$$

де t – табличне значення критерію Стьюдента при вибраному рівні значимості (як правило, $\alpha = 0,05$) та кількості степенів вільності, за якими визначалася дисперсія; S_{B_i} – квадратична помилка i -го коефіцієнта.

Квадратична помилка i -го коефіцієнта дорівнює:

$$S_{B_i} = +\sqrt{S_{B_i}^2},$$

де $S_{B_i}^2$ – дисперсія i -го коефіцієнта, яка визначається як:

$$S_{B_i}^2 = \frac{S_y^2}{N},$$

де S_y^2 – дисперсія параметра оптимізації; N – кількість експериментів у матриці, результати яких використовуються при підрахунку коефіцієнту моделі.

Коефіцієнт моделі вважають значимим, коли його абсолютна величина більша за довірчий інтервал:

$$|B_i| > \Delta B_i.$$

Адекватність моделі перевіряють за критерієм Фішера (F -критерій) F_P :

$$F_P = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2}, \quad (6.8)$$

де S_{ad}^2 – дисперсія адекватності з кількістю степенів вільності $f_{ad} = f_1$; S_y^2 – дисперсія параметра оптимізації з кількістю степенів вільності $f_y = f_2$.

Модель вважають адекватною з відповідною довірчою ймовірністю, якщо розрахункове значення критерію F_P (6.8) менше, ніж табличне F_T для відповідної кількості степенів вільності та навпаки – неадекватною, якщо $F_P > F_T$.

Кількість степенів вільності для S_{ad}^2 – це кількість експериментів, відмінних один від одного, результати яких застосовувались під час підрахунку коефіцієнта моделі за виключенням кількості значимих коефіцієнтів.

Кількість степенів вільності f_y для S_y^2 :

1) у випадку рівномірного дублювання

$$f_y = N \cdot (n - 1),$$

де N – кількість експериментів (рядків) у матриці планування; n – однакова для всіх рядків матриці планування кількість паралельних експериментів;

2) у випадку нерівномірного дублювання

$$f_y = \sum_{j=1}^N (n_j - 1),$$

де j – номер експерименту або точка матриці планування; N – кількість експериментів (рядків) у матриці планування; n_j – кількість паралельних експериментів у j -й точці матриці планування;

3) у випадку проведення паралельного експерименту тільки в

нульовій точці

$$f_y = n_0 - 1,$$

де n_0 – кількість паралельних експериментів у нульовій точці.

При визначенні дисперсії адекватності $S_{ад}^2$ можливі такі випадки:

1. За однакової кількості експериментів у всіх точках матриці планування:

$$S_{ад}^2 = \frac{n \cdot \sum_{j=1}^N (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2}{f_{ад}},$$

де n – однакова для всіх рядків матриці планування кількість паралельних експериментів; j – номер експерименту або точка матриці планування; N – кількість експериментів (рядків) у матриці планування; \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації з n паралельних експериментів у j -й точці матриці планування; \hat{Y}_j – значення параметра оптимізації у j -му експерименті, яке обчислене за формулою моделі; $f_{ад}$ – кількість степенів вільності для $S_{ад}^2$.

2. За неоднакової кількості паралельних експериментів

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N n_j \cdot (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2}{f_{ад}},$$

де j – номер експерименту або точка матриці планування; N – кількість експериментів (рядків) у матриці планування; n_j – кількість паралельних експериментів у j -й точці матриці планування; \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації з n_j паралельними експериментами у j -й точці матриці планування; \hat{Y}_j – значення параметра оптимізації у j -му експерименті, вираховане за формулою моделі; $f_{ад}$ – кількість ступенів свободи для $S_{ад}^2$.

3. Якщо експерименти в матриці планування не дублювались, то інформацію про дисперсію параметра оптимізації беруть із паралел-

льних експериментів у нульовій точці.

Крім прямих методів визначення адекватності ϵ й непрямі. Наприклад, коли розглядають лінійну модель, значимість хоча б одного з коефіцієнтів ефектів взаємодії ϵ надійною ознакою того, що ця модель неадекватна. При цьому доцільно провести серію додаткових паралельних експериментів у нульовій точці. Якщо розрахункове значення критерію Стьюдента t_p менше або дорівнює табличному t_T , то модель адекватна:

$$t_p = \frac{B_0 - \bar{Y}}{S_{B_i}} \leq t_T,$$

де B_0 – вільний член лінійного рівняння із взаємодіями; S_{B_i} – квадратична помилка визначення коефіцієнта моделі B_i ; \bar{Y} – середнє арифметичне значення параметра оптимізації з n_0 паралельних експериментів, приведених у нульовій точці.

6.1.6. Інтерпретація результатів експерименту

Переклад терміна «адекватна модель» з абстрактної математичної мови мовою експериментатора означає інтерпретація моделі.

Інтерпретація – це складний процес, який здійснюється у декілька етапів:

- 1) оцінка величини і напрямку впливу факторів та їх взаємодій;
- 2) порівняння впливу сукупності факторів;
- 3) перевірка правильності апріорних уявлень про вплив факторів.

Перший етап. Встановлюється вплив кожного з факторів на параметр оптимізації. Величина коефіцієнтів моделі – це кількісна міра цього впливу за умови, що інтервали варіювання факторів порівнювальні. Що більший коефіцієнт, то сильніший вплив фактора.

Про характер впливу факторів говорять знаки коефіцієнтів. Знак «+» означає, що зі збільшенням значення фактора збільшується величина параметра оптимізації, а знак «-» – зменшується.

На другому етапі з'ясовується, як розмістити фактори за силою їх впливу на параметр оптимізації. Фактори, коефіцієнти яких не значимі, не інтерпретуються. Можна тільки говорити, що за цих інтервалів варіювання та помилки параметра оптимізації вони не

суттєво впливають на параметр оптимізації.

Оскільки величина коефіцієнта залежить не тільки від ступеня впливу цього фактора на параметр оптимізації, але й від величини інтервалу варіювання фактора, то його вплив на зміну параметра оптимізації може бути дійсно малим. Але на підставі цього не можна говорити про те, що фактор незначимий. Тому завжди статистичний сигнал про незначимість фактора повинен бути перевірений або обговорений із технологічної точки зору.

На третьому етапі перевіряють правильність апріорних відомостей. Наприклад, очікувалось, що зі збільшенням якогось фактора повинен збільшитися параметр оптимізації, коефіцієнт при цьому має бути додатнім. Якщо ж коефіцієнт від'ємний, то з'являється протиріччя.

Це може відбутися через дві причини:

- неправильне апріорне уявлення;
- в експерименті було допущено помилку і його треба перевірити.

Тому дослідник завжди має бути впевнений, що експеримент проведено коректно. Окрім цього, апріорна інформація часто базується на однофакторних залежностях. При багатofакторному плануванні особливу увагу звертають на інтерпретацію ефектів взаємодії факторів. Цей випадок з'являється тому, що коефіцієнти при ефекті взаємодії є значимі.

Якщо ефект взаємодії має знак « + », то для збільшення параметра оптимізації потрібно одночасно збільшувати або зменшувати значення факторів. Для зменшення параметра оптимізації фактори повинні змінюватись одночасно в різних напрямках.

Якщо ж ефект взаємодії має знак « - », то для збільшення параметра оптимізації фактори повинні одночасно змінюватись в різних напрямках. Для зменшення параметра оптимізації потрібно одночасно збільшувати або зменшувати фактори.

Отже, інтерпретація ефектів взаємодії не така однозначна, як лінійних ефектів. У кожному випадку є два варіанти. При виборі варіанта треба взяти до уваги знаки лінійних ефектів відповідних факторів. Але можливі випадки, коли знаки лінійних ефектів різні. Тоді треба зважити на чисельні значення коефіцієнтів та нехтувати найменшим ефектом.

В інтерполяційних задачах потрібно отримати рівняння матема-

тичної моделі для натуральних значень факторів. Таке рівняння можна легко отримати після підстановки в рівняння полінома замість кодових значень факторів їх значення у натуральних одиницях вимірювання. Після елементарних математичних перетворень отримують рівняння математичної моделі для натуральних значень факторів. Треба зазначити, що коефіцієнти моделі тепер зміняться. При цьому зникає можливість інтерпретації впливу факторів на величини та знаки коефіцієнтів моделі.

6.1.7. Особливості отримання рівняння моделі у вигляді степеневі функції

На практиці у багатьох галузях науки і техніки широко застосовують рівняння моделі у вигляді степеневі функції:

$$Y = C \cdot X_1^{B_1} \cdot X_2^{B_2} \cdot \dots \cdot X_k^{B_k},$$

де Y – параметр оптимізації; C – сталий коефіцієнт, який враховує вплив на параметр оптимізації сталих умов проведення експерименту; X_1, X_2, \dots, X_k – значення факторів у натуральних одиницях вимірювання; B_1, B_2, \dots, B_k – показники ступеню відповідного фактору; k – кількість факторів.

Для отримання такого рівняння, а також у випадках неоднорідної дисперсії при плануванні експерименту вводять математичну функцію від параметра оптимізації $\lg Y$.

За такого планування змінюється формула кодування факторів і набуває вигляду:

$$X_i = \frac{2(\lg Z_i - \lg Z_{i\max})}{\lg Z_{i\max} - \lg Z_{i\min}} + 1, \quad (6.9)$$

а значення фактора на основному (нульовому) рівні виглядатиме як

$$\lg Z_{i\text{осн}} = \frac{\lg Z_{i\max} + \lg Z_{i\min}}{2},$$

де X_i – кодоване значення i -го фактора (X_1, X_2, \dots, X_k); k – кількість факторів; Z_i – значення i -го фактора, взяте всередині інтервалу ва-

ріювання в натуральних одиницях вимірювання; $Z_{i\max}, Z_{i\min}$ – відповідно верхній та нижній рівні фактора в натуральних одиницях вимірювання; Z_i осн – значення i -го фактора на нульовому рівні в натуральних одиницях вимірювання.

Отримуємо рівняння математичної моделі:

$$\lg Y_x = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \dots + B_k X_k,$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ – коефіцієнти моделі; X_1, X_2, \dots, X_k – кодоване значення факторів; k – кількість факторів.

Внаслідок підстановки в рівняння замість кодованих значень факторів їх значення в натуральних одиницях вимірювання відповідно до формули (6.9) після елементарних математичних перетворень отримаємо рівняння математичної моделі для натуральних значень факторів:

$$\lg Y_z = B_0' + B_1' Z_1 + B_2' Z_2 + \dots + B_k' Z_k,$$

де B_0', B_1', \dots, B_k' – коефіцієнти відповідних факторів; Z_1, Z_2, \dots, Z_k – значення факторів у натуральних одиницях вимірювання.

Потім після потенціювання рівняння отримують початкове рівняння математичної моделі у вигляді степеневої функції.

6.1.8. Загальні уявлення про планування другого порядку

Частина поверхні відгуку біля екстремуму, як правило, називають квазістаціонарною ділянкою та описують її за допомогою нелінійних рівнянь. При цьому часто виявляється достатньо поліномів другого порядку:

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i \cdot X_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^k B_{ij} \cdot X_i \cdot X_j + \sum_{i=1}^k B_{ii} \cdot X_i^2,$$

де B_0, B_1, \dots, B_{ii} – коефіцієнти полінома; k – кількість факторів.

Для розв'язання такої задачі користуються плануванням другого порядку. Кількість коефіцієнтів B для полінома розраховують за

$$\text{формулою } l = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

Але треба мати план, в якому кожний фактор варіювався б не менше ніж на трьох різних рівнях. Дійсно, у квадратичній моделі для двох факторів ($k = 2$) треба визначити $l = ((2 + 1)(2 + 2))/2 = 6$ коефіцієнтів регресії. Варіюючи фактори лише на двох рівнях, треба зробити $2^2 = 4$ експерименти, що недостатньо для визначення шести коефіцієнтів. Якщо ж реалізувати експеримент із трьома різними факторів, то дев'яти експериментів буде достатньо ($3^2 = 9$).

Було доведено, що ставити експеримент типу 3^k недоцільно. Найбільш вигідно використовувати процедуру послідовної добудови лінійних планів. Ця процедура допускає реалізацію повного факторного експерименту (з кількістю факторів менше 5) або дробових реплік від нього (з кількістю факторів більше 5). Потім – додавання до цих експериментів певної кількості спеціально розташованих точок. Такі плани називають **центральними** (всі експерименти симетрично розташовані навколо центра основного рівня та **композиційними** (будуються послідовно).

Вибирати розташування додаткових точок треба так, щоб загальна кількість експериментів не набагато перевищувала кількість коефіцієнтів, а фактори при цьому варіювались на невеликій кількості рівнів.

На рис. 6.4 та 6.5 зображено центральне композиційне планування другого порядку з кількістю факторів $k = 1$ та $k = 2$. Біля кожної точки плану вказано їх координати в кодовому масштабі.

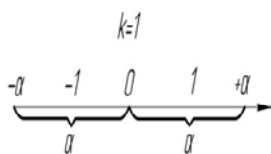


Рис. 6.4. Схема планування при $k = 1$

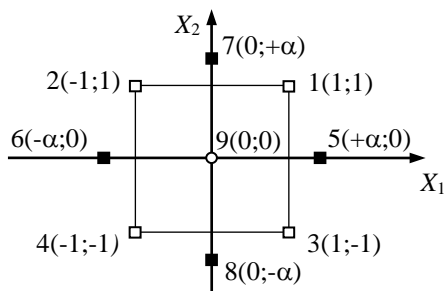


Рис. 6.5. Центральне композиційне планування другого порядку для $k = 2$

Для прикладу в табл. 6.4 наведено матрицю центрального композиційного планування (ЦКП) при $k = 2$ фактори.

Матриця центрального композиційного планування для $k = 2$

№ експерта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	Примітка
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Повний факторний експеримент 2^2
2	+1	-1	+1	-1	+1	+1	
3	+1	+1	-1	-1	+1	+1	
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	
5	+1	$+\alpha$	0	0	2	0	«Зоряні точки»
6	+1	$-\alpha$	0	0	2	0	
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	2	
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	2	
9	+1	0	0	0	0	0	Нульова точка

Кругла точка (рис. 6.5) – це центр плану (основний рівень), квадратні (світлі) точки – ядро плану (повний факторний експеримент), квадратні (темні точки) – додаткові, «зоряні точки», на відстані «зоряного плеча» α від центру експерименту.

Загальна кількість експериментів N при k факторах буде:

$$N = N_{\text{я}} + 2k + N_0,$$

де $N_{\text{я}}$ – кількість експериментів ядра плану (як правило, $N_{\text{я}} = 2^k$ при $k < 5$ та $N_{\text{я}} = 2^{(k-p)}$ при $k \geq 5$, $p > 0$); N_0 – кількість експериментів на основному рівні.

Таке планування потребує набагато меншої кількості експериментів порівняно з повним факторним експериментом типу 3^k . Наприклад, у випадку трьох факторів ($k = 3$) для повного факторного експерименту необхідно $3^3 = 27$ експериментів. Для центрального композиційного планування при:

$$- N_0 = 1: 2^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 15;$$

$$- k = 4: 3^4 = 81 \text{ та } 2^4 + 2 \cdot 4 + 1 = 25;$$

$$- k = 5: 3^5 = 243 \text{ та } 2^5 + 2 \cdot 5 + 1 = 43 \text{ або } 2^{(5-1)} + 2 \cdot 5 + 1 = 27.$$

Послідовність розв'язання задач дуже логічна. Наприклад, у випадку двох факторів спочатку здійснюють експерименти 1–4 (рис.

6.5, табл. 6.4), які складають ядро плану та дозволяють наблизитись до поверхні відгуку на заданій локальній ділянці лінійної моделі. Якщо ж остання виявиться неадекватною, то додають експерименти у «зоряних точках» 5–6 та в центрі експерименту 9, що дозволяє знайти квадратичну модель квазістаціонарної ділянки.

Величина плеча «зоряних точок» α та кількість нульових точок N_0 залежить від критерію оптимальності композиційного плану. Наразі ще немає прийнятого критерію. Пошуком такого універсального критерію оптимальності планів займається математична теорія планування експерименту.

Одним із критеріїв оптимальності, який широко використовують, є критерій ортогональності. Щоб задовольнявся цей критерій, необхідно досягти такого положення, за якого алгебрична сума покомпонентного множення будь-яких двох стовпців матриці планування дорівнювала б нулю, тобто

$$\sum_{u=1}^N X_{iu} \cdot X_{ju} = 0,$$

де u – номер експерименту (рядка); N – загальна кількість експериментів (кількість рядків у матриці планування); $i, j = 0, 1, \dots, k$ (k – кількість факторів), $i \neq j$.

Ця умова в загальному випадку для матриці центрального композиційного планування другого порядку (табл. 6.5) не виконується, оскільки

$$\sum_{u=1}^N X_{0u} X_{iu}^2 \neq 0 \quad \text{та} \quad \sum_{u=1}^N X_{iu}^2 X_{ju}^2 \neq 0.$$

Плани, що задовольняють вищезгадану умову, називають ортогональними. Перевага цих планів полягає в малому обсягу розрахунків, оскільки усі коефіцієнти моделі визначаються незалежно один від одного.

Кількість експериментів ортогонального композиційного плану N , параметр ϕ та величина «зоряного плеча» α визначаються за табл. 6.5, а кількість параметрів експериментів у нульовій точці $N_0 = 1$.

Параметри ортогональних композиційних планів

Ядро плану	N	ϕ	α
2^2	9	$0,6667 = 2/3$	1,0000
2^3	15	0,7307	1,2154
2^4	25	0,6000	1,4142
2^{5-1}	27	0,7696	1,5467
2^5	43	0,6627	1,5960
2^{6-1}	45	0,6433	1,7244
2^6	77	0,7117	1,7606
2^{7-1}	79	0,9001	1,6646
2^7	143	0,9461	1,9095

Матриця плану складається з:

- 1) матриці планування ПФЕ типу 2^k або напіврепліки від нього;
- 2) умов експериментів у «зоряних точках» та на нульовому рівні факторів.

Для визначення умов проведення експериментів у натуральних одиницях вимірювання факторів заповнюють табл. 6.6, в якій перші чотири рядки заповнюють відомостями, отриманими при побудові матриці ПФЕ типу 2^k або напівреплік від неї.

Із-за ортогональності матриці планування всі коефіцієнти моделі визначаються незалежно один від одного за формулою

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\bar{Y}_j \cdot X_{ij})}{\sum_{j=1}^N X_{ij}^2}, \quad (6.10)$$

де i – номер фактору в матриці планування $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (нуль записано для визначення B_0); j – номер експерименту; N – кількість експериментів (рядків матриці) (табл. 6.6); \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації у j -му експерименті (рядку матриці); X_{ij} – кодоване значення i -го фактору (ефекту взаємо-

дії факторів або квадратичного ефекту) у j -му експерименті матриці планування.

Таблиця 6.6

Умови експериментів у натуральних одиницях вимірювання

Найменування	Фактори		
	X_1	X_2	X_3
Нульовий рівень X_{i0}	340	3	15
Інтервал варіювання Δ_i	10	0,5	1
Верхній рівень $X_{i0+\Delta_i}$	350	3,5	16
Нижній рівень $X_{i0-\Delta_i}$	330	2,5	14
Зоряні точки для $k = 3, \alpha = 1,2$			
$X_{i0} + \alpha \cdot \Delta_i$	352	3,6	16,2
$X_{i0} - \alpha \cdot \Delta_i$	326	2,4	13,8

Наприклад, величини коефіцієнтів $B_0, B_1, B_2, B_{12}, B_{11}$ та B_{22} відповідно до формули (6.10) обчислюється так:

$$B_0 = \frac{Y_1 \cdot (+1) + Y_2 \cdot (+1) + Y_3 \cdot (+1) + Y_4 \cdot (+1) + Y_5 \cdot (+1) + Y_6 \cdot (+1) + Y_7 \cdot (+1) + Y_8 \cdot (+1) + Y_9 \cdot (+1)}{9};$$

$$B_1 = \frac{Y_1 \cdot (-1) + Y_2 \cdot (+1) + Y_3 \cdot (-1) + Y_4 \cdot (+1) + Y_5 \cdot (-1) + Y_6 \cdot (+1)}{6};$$

$$B_2 = \frac{Y_1 \cdot (-1) + Y_2 \cdot (-1) + Y_3 \cdot (+1) + Y_4 \cdot (+1) + Y_7 \cdot (-1) + Y_8 \cdot (+1)}{6};$$

$$B_{12} = \frac{Y_1 \cdot (+1) + Y_2 \cdot (-1) + Y_3 \cdot (-1) + Y_4 \cdot (+1)}{4};$$

$$B_{11} = \frac{Y_1 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_2 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_3 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_4 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_5 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_6 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + Y_8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + Y_9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2};$$

$$B_{22} = \frac{Y_1 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_2 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_3 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_4 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + Y_6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + Y_7 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_8 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) + Y_9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2}.$$

Перевірка значимості коефіцієнтів

Така перевірка проводиться, як і при плануванні першого порядку, за формулою:

$$\Delta B_i = t \cdot S_{B_i} ,$$

де ΔB_i – довірчий інтервал; t – табличне значення критерію Стьюдента; S_{B_i} – квадратична помилка коефіцієнтів.

Коефіцієнти вважають значимими, якщо $|B_i| > \Delta B_i$ та незначимими, якщо $|B_i| < \Delta B_i$.

Перевірка адекватності моделі

Ця перевірка проводиться, як і при плануванні першого порядку, за формулою:

$$F_P = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2},$$

де F_P – розрахункове значення критерію Фішера; S_y^2 – дисперсія параметра оптимізації; $S_{ад}^2$ – дисперсія адекватності.

Дисперсія адекватності $S_{ад}^2$ визначається за формулою:

$$S_{ад}^2 = \frac{S_R}{f_{ад}},$$

де S_R – залишкова сума квадратів; $f_{ад}$ – кількість степенів вільності для $S_{ад}^2$.

Залишкова сума квадратів визначається за формулою:

$$S_R = \sum_{j=1}^N (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2,$$

де j – номер експерименту (рядок) матриці; N – кількість експериментів (рядків) матриці планування; \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації з n паралельних експериментів у j -й точці (рядку) матриці планування; \hat{Y}_j – значення параметра оптимізації у j -му експерименті, яке обчислюється за поліномом отриманої моделі або за формулою:

$$S_R = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_j^2 - \sum_{i=0}^{K_1} B_i - \sum_{j=1}^N \bar{Y}_j \cdot X_{ij},$$

де $\sum_{i=0}^{K_1} B_i$ – алгебрична сума коефіцієнтів моделі; $\sum_{j=1}^N \bar{Y}_j \cdot X_{ij}$ – сума,

яка підраховується в процесі обчислення коефіцієнтів моделі; K_1 – кількість визначених коефіцієнтів моделі.

Кількість степенів вільності $f_{ад}$ для дисперсії адекватності визначається за формулою:

$$f_{ад} = N - K_1,$$

де N – кількість експериментів матриці планування; K_1 – кількість визначених коефіцієнтів моделі.

Кількість визначених коефіцієнтів моделі дорівнює

$$K_1 = 0,5 \cdot (k + 2) \cdot (k + 1),$$

де k – кількість факторів.

Побудова математичної моделі

Оскільки було проведено перетворення квадратичної змінної, то рівняння моделі має вигляд:

$$Y = B_0' + B_1 X_1 + \dots + B_k X_k + B_{12} X_1 X_2 + \dots + B_{(k-1)k} X_{(k-1)} X_k + B_{11} (\bar{X}_1^2 - \varphi) + \dots + B_{kk} (\bar{X}_k^2 - \varphi).$$

Для переходу до звичайної форми запису знаходять величину

$$B_0 = B_0' - B_{11} \cdot \varphi - \dots - B_{kk} \cdot \varphi,$$

яка оцінюється за дисперсією

$$S_{B_0}^2 = S_{B_0'}^2 + S_{B_{11}}^2 \cdot \varphi^2 + \dots + S_{B_{kk}}^2 \cdot \varphi^2.$$

6.1.9. Використання планування експерименту для процесу вимірювання величин

Серед методів вимірювання, що ґрунтуються на прецесійному обертанні вимірюваної поверхні (датчика), на практиці застосовують різницеві схеми. Це схеми вимірювання круглості при зміні радіуса-вектора напрямку вимірювання. У різницевих схемах можливий незбіг вісі вимірюваної поверхні з центром прилеглого кола (рис. 6.6).

Досліджувана модель створена шляхом обертання змінного радіуса-вектора навколо центра координат у межах допуску за таблицею факторів (табл. 6.7).

Модель вимірювання була параметризована за двома нерухомими опорами і вектором напрямку положення, вздовж якого проводились вимірювання.

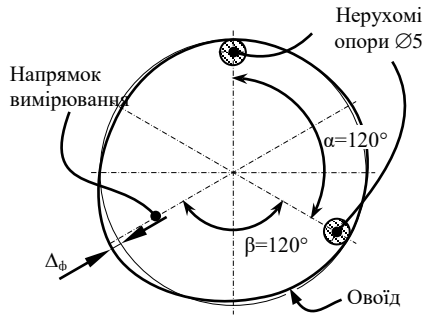


Рис. 6.6. Схема вимірювання

Під час обертання овоїда (замкненої кривої, утвореної обертанням некруглого зразка) проводились заміри відстані від центра координат (початок радіуса-вектора) до однієї з контрольованих точок моделі, яка в певний проміжок часу перетинала радіус-вектор. Відхилення від круглості (емпіричне значення) визначалось максимальною відстанню, яке замітається профілем овоїда на векторі напрямку датчика.

Таблиця 6.7

Фактори та рівні їх варіювання

Рівні варіювання досліджуваних факторів	Досліджувані фактори					
	Кут між опорами α		Кут від опори до датчика β		Допуск форми $\Delta\phi$	
	$X_1, ^\circ$	X_1	$X_2, ^\circ$	X_2	$X_3, \text{мм}$	X_3
«Зоряна точка» $+\alpha$	140	+1,662	140	+1,662	0,37	+1,662
Верхній рівень $X_i \text{ max}$	120	+ 1	120	+ 1	0,30	+ 1
Нульовий рівень X_{0i}	90	0	90	0	0,20	0
Нижній рівень $X_i \text{ min}$	60	-1	60	-1	0,10	-1
«Зоряна точка» $-\alpha$	40	-1,662	40	-1,662	0,03	-1,662
Інтервал варіювання ΔX_i	30	1	30	1	0,10	1

Теоретичне значення відхилення від круглості задавалось і вносилося у модель овоїда під час створення об'єкта вимірювання.

Для побудови математичної моделі вибрано три фактори, які найбільше впливають на точність вимірювання: положення базових опор α , положення датчика β , дійсна величина похибки форми Δf . Розсіювання параметрів рандомізувалось у межах допуску на діаметр контрольованого кільця.

Результати вимірювання в машинних експериментах обчислювались за аксіомою рототабельного планування.

Математична теорія планування експерименту базується на поєднанні методів математичної статистики і методів пошуку екстремуму, що дозволяє скласти економні експериментальні плани для машинного моделювання. Мінімально необхідна і достатня для проведення статистичного аналізу кількість експериментів дозволяє витягувати максимальну кількість інформації про об'єкт дослідження, способи проведення експериментів, способи обробки експериментальних даних, способи інтерпретації та застосування отриманих результатів для всебічного аналізу та оптимізації досліджуваних об'єктів. Як залежну змінну Y , яку називатимемо цільовою функцією або параметром оптимізації, приймаємо один із показників процесу контролю, властивий усім триточковим схемам.

За чинники приймають контрольовану величину об'єкта (виробу, процесу, операції) – величину, що характеризує певну властивість об'єкта або режим технологічного устаткування. Величина, числове значення якої вимірюється в межах зміни, повинна впливати на параметр оптимізації. При визначенні величин кількісних оцінок враховують тільки ті чинники, які мають чіткий метрологічний сенс (точне вимірювання). Перевірка коефіцієнтів у пакеті Statistica дозволила отримати адекватну модель досліджуваного процесу вимірювання круглості (рис. 6.7):

$$\hat{y} = 0,0766 + 0,1119x_3 + 0,2575x_1x_2 + 0,1783x_1^2 + 0,1046x_2^2 .$$

Case or Run	Observed, Predicted, and Residual Values (Spreadsheet2) 3 factors, 1 Blocks, 20 Runs; MS Residual=,0205335 DV: Y					
	Observed	Predictd	Resids			
1	0,303000	0,503316	-20%			
2	0,058000	-0,017391	8%			
3	0,061000	-0,006471	7%			
4	0,304000	0,502822	-20%			
5	0,913000	0,734540	18%			
6	0,121000	0,208833	-9%			
7	0,119000	0,214754	-10%			
8	0,899000	0,719046	18%			
9	0,583000	0,574203	1%			
10	0,606000	0,588008	2%			
11	0,391000	0,372784	2%			
12	0,383000	0,372426	1%			
13	0,145000	0,258757	-11%			
14	0,025000	-0,117547	14%			
15	0,081000	0,076653	0%			
16	0,074000	0,076653	-0%			
17	0,083000	0,076653	1%			
18	0,076000	0,076653	-0%			
19	0,072000	0,076653	-0%			
20	0,069000	0,076653	-1%			

Рис. 6.7. Таблиця розбіжностей між емпіричними та теоретичними даними відхилень від круглості

Проаналізувавши результати комп'ютерного моделювання в програмному пакеті Statistica V7 отримали, що при певних значеннях факторів модель не відповідає дійсності на певних ділянках області вимірювання. Це пов'язано з тим, що зі зміною величини відхилення від круглості (допуск форми) змінюються й величини кутів, що визначають положення опор та датчика. Отже, даний фактор є корельованим і потрібно повторно провести експерименти для кута α , що визначає положення базових опор, та кута β , що визначає положення вимірювального елемента (датчика).

Моделювання проводилося для вимірювання похибок форми – тригранної огранки та овальності. Величина похибки форми $\Delta\phi=0,2$ мм. Для цього в модулі програми Design of Experiments (планування експерименту) задаємо матрицю планування експерименту та вводимо отримані дані при проведенні експерименту (рис. 6.8).

Оцінка адекватності застосування таблиці дисперсійного аналі-

зу забезпечує оцінку адекватності розробленої моделі (рис. 6.9).

	1 X1	2 X2	3 Y
1	-1	-1	0,399
2	1	-1	0,401
3	-1	1	0,404
4	1	1	0,005
5	-1,41421	0	0,488
6	1,41421	0	0,272
7	0	-1,41421	0,361
8	0	1,41421	0,203
9	0	0	0,401
10	0	0	0,401

	1 X1	2 X2	3 Y
1	-1	-1	0,609
2	1	-1	0,076
3	-1	1	0,077
4	1	1	0,601
5	-1,41421	0	0,477
6	1,41421	0	0,529
7	0	-1,41421	0,394
8	0	1,41421	0,382
9	0	0	0,073
10	0	0	0,075

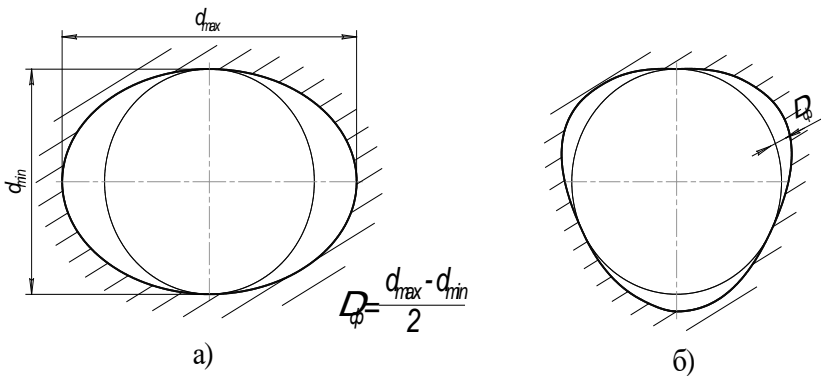


Рис. 6.8. Матриця планування експерименту та результати вимірювання круглості: *a* – овальність, *б* – огранка

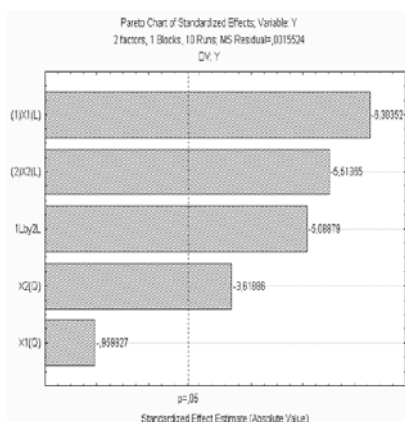
Із карти Парето (рис. 6.10) видно, які члени моделі дають значимі ефекти. Відповідні їм колонки перетинають вертикальну лінію, яка становить 95%-відсоткову довірливу ймовірність.

Графічне представлення поверхонь відгуку застосовувалося для визначення ступеня впливу факторів (рис. 6.11). Для детальнішого розгляду області максимуму доцільно розглянути контурні графіки. На графіку показані лінії рівня поверхні відгуку, що свідчить про нелінійність одержаної залежності.

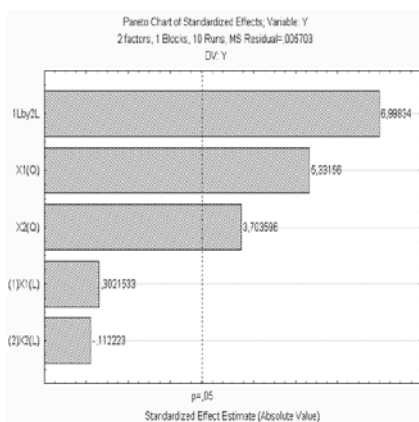
ANOVA; Var.: Y; R-sqr=,96477; Adj: ,92074 (Spreadsheet5) 2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=,0015524 DV: Y					
Factor	SS	df	MS	F	p
(1)X1 (L)	0,061683	1	0,061683	39,73437	0,003238
X1 (Q)	0,001430	1	0,001430	0,92127	0,391496
(2)X2 (L)	0,047193	1	0,047193	30,40030	0,005281
X2 (Q)	0,020330	1	0,020330	13,09612	0,022380
1L by 2L	0,040200	1	0,040200	25,89579	0,007037
Error	0,006210	4	0,001552		
Total SS	0,176281	9			

ANOVA; Var.: Y; R-sqr=,95236; Adj: ,89282 (Spreadsheet6) 2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=,005703 DV: Y					
Factor	SS	df	MS	F	p
(1)X1 (L)	0,000521	1	0,000521	0,09130	0,777594
X1 (Q)	0,162109	1	0,162109	28,42553	0,005959
(2)X2 (L)	0,000072	1	0,000072	0,01259	0,916053
X2 (Q)	0,078225	1	0,078225	13,71663	0,020770
1L by 2L	0,279312	1	0,279312	48,97677	0,002194
Error	0,022812	4	0,005703		
Total SS	0,478886	9			

Рис. 6.9. Таблиці дисперсійного аналізу: *a* – овальність, *б* – огранка



a

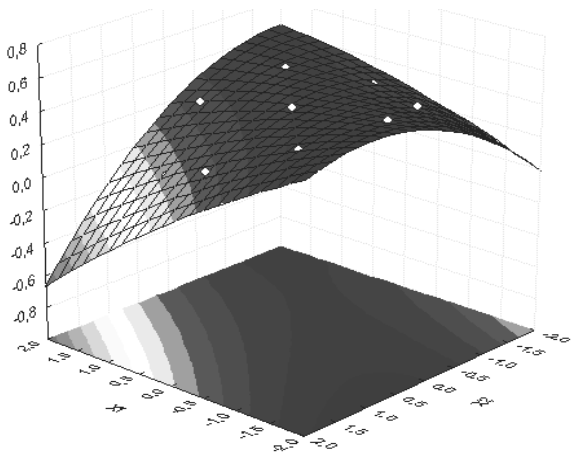


б

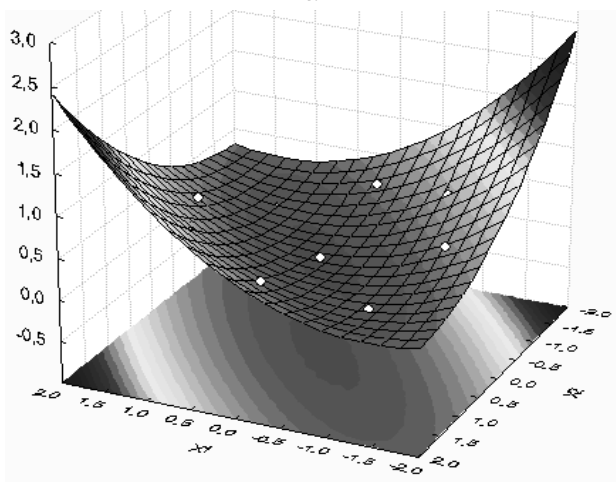
Рис. 6. 10. Карти Парето: *a* – овальність, *б* – огранка

При визначенні величин кількісних оцінок до уваги повинні братися тільки ті чинники, які мають чіткий метрологічний сенс (можливість вимірювання чинника з певною точністю).

Опис досліджуваного об'єкта не можна отримати у вигляді точної формули функції, справедливої у всьому діапазоні існування аргументів. Він може бути лише наближеним і на невеликій ділянці в межах інтервалу варіювання.



а



б

Рис. 6.11. Поверхні відгуку для вимірювання овальності (а) та огранки (б)

Коефіцієнти рівняння регресії для контролю овальності та огранки (рис. 6.12) не значно відрізняються між собою, але в випадку контролю огранки вони відповідають фізичному змісту процесу вимірювання.

Regr. Coefficients; Var.:Y; R-sqr=.96477; Adj.:92074 (Spreadsheet5) 2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=.0015524 DV: Y						
Factor	Regressn Coeff.	Std.Err.	t(4)	p	-95,% Cnf.Limt	+95,% Cnf.Limt
Mean/Interc.	0,401000	0,027860	14,39328	0,000135	0,323648	0,478353
(1)X1 (L)	-0,087809	0,013930	-6,30352	0,003238	-0,126485	-0,049133
X1 (Q)	-0,017688	0,018428	-0,95983	0,391496	-0,068852	0,033476
(2)X2 (L)	-0,076806	0,013930	-5,51365	0,005281	-0,115482	-0,038130
X2 (Q)	-0,066688	0,018428	-3,61886	0,022380	-0,117852	-0,015524
1L by 2L	-0,100250	0,019700	-5,08879	0,007037	-0,154946	-0,045554

Regr. Coefficients; Var.:Y; R-sqr=.95236; Adj.:89282 (Spreadsheet6) 2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=.005703 DV: Y						
Factor	Regressn Coeff.	Std.Err.	t(4)	p	-95,% Cnf.Limt	+95,% Cnf.Limt
Mean/Interc.	0,074001	0,053399	1,385798	0,238064	-0,074259	0,222261
(1)X1 (L)	0,008067	0,026700	0,302153	0,777594	-0,066063	0,082197
X1 (Q)	0,188313	0,035320	5,331560	0,005959	0,090248	0,286378
(2)X2 (L)	-0,002996	0,026700	-0,112223	0,916053	-0,077126	0,071134
X2 (Q)	0,130812	0,035320	3,703596	0,020770	0,032747	0,228878
1L by 2L	0,264250	0,037759	6,998340	0,002194	0,159414	0,369086

Рис. 6.12. Таблиця розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії:
а – для овальності; б – для огранки

Після аналізу даних та відхилення незначущих факторів рівняння регресії набуде вигляду:

– для овальності

$$\hat{y} = 0,4010 - 0,0878x_1 - 0,0768x_2 - 0,1003x_1x_2 - 0,0667x_2^2;$$

– для огранки

$$(n = 3) \hat{y} = 0,1883x_1^2 + 0,2643x_1x_2 + 0,1308x_2^2.$$

У програмному пакеті Statistica V7 порівняльні таблиці розрахункових даних (рис. 6.13) наочно відображають можливі похибки вимірювання.

Observed, Predicted, and Residual Values (Spreadsheet5)			
2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=,0015524			
DV: Y			
Case or Run	Observed	Predictd	Resids
1	0,399000	0,380989	2%
2	0,401000	0,405872	-0%
3	0,404000	0,427878	-2%
4	0,005000	0,051760	-5%
5	0,488000	0,489805	-0%
6	0,272000	0,241445	3%
7	0,361000	0,376245	-2%
8	0,203000	0,159006	4%
9	0,401000	0,401000	-0%
10	0,401000	0,401000	-0%

Observed, Predicted, and Residual Values (Spreadsheet6)			
2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=,005703			
DV: Y			
Case or Run	Observed	Predictd	Resids
1	0,609000	0,652305	-4%
2	0,076000	0,139939	-6%
3	0,077000	0,117812	-4%
4	0,601000	0,662447	-6%
5	0,477000	0,439215	4%
6	0,529000	0,462033	7%
7	0,394000	0,339861	5%
8	0,382000	0,331387	5%
9	0,073000	0,074001	-0%
10	0,075000	0,074001	0%

Рис. 6.13. Порівняльна таблиця отриманих та розрахункових даних

Після обробки результатів експериментів та побудови математичних моделей видно, що вони точніше описують процес вимірювання. У більшості випадків застосування математичної моделі у вигляді полінома другого порядку адекватно забезпечить моделювання процесу вимірювання [38].

Зі зміною величини відхилення від круглості змінюються й величини кутів, що визначають положення опор та датчика, тому властивість фактора вносила значну похибку в математичну модель. Отже, схема математичної моделі однозначно визначається значенням кутів α (положення базових опор) та β (напрямок вимірювання).

6.2. Елементи теорії дослідження операцій

При аналізі, дослідженні та проектуванні будь-яких технічних об'єктів, процесів і систем завжди розв'язують задачі вибору та ухвалення оптимальних рішень. Задачею ухвалення рішення називають кортеж (сукупність) [39, 40]

$$\Omega = \langle X, O \rangle,$$

де X – варіанти розв'язків задачі; O – принцип оптимальності, який дає уявлення про якість варіантів. У найпростішому випадку це правило їх переваги одного над іншим.

Задачі ухвалення рішень класифікуються за наявністю інформації про X та O і бувають трьох видів:

1. X та O невідомі. Це загальна задача ухвалення рішень. Дані для отримання $X_{\text{опт}}$ у цій задачі визначають під час її розв'язування.
2. X – невідоме, O – відоме (задача пошуку варіантів).
3. X та O відомі (задача оптимізації).

У загальному випадку задачу ухвалення рішень розв'язують у два етапи.

1 етап. Задача формалізується – будується її математична модель, в якій конкретні фізичні, технічні, технологічні, економічні умови та вимоги до об'єкта реалізуються як задачі оптимізації з цільовою функцією і допустимою множиною варіантів.

2 етап. Розв'язування задачі оптимізації з використанням відомих методів.

6.2.1. Основи теорії оптимізації

Теорія оптимізації є як самостійною наукою, так і складовою частиною науки «Дослідження операцій».

Операція – це сукупність взаємоузгоджених дій, направлених на досягнення поставленої мети.

Обов'язково повинна бути сформульована мета. Якщо є різні шляхи досягнення цієї мети, то необхідно знайти найкращий із них.

Постановка задачі оптимізації має безліч допустимих рішень $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ і числову функцію f , визначену в цій множині, тобто цільову функцію.

Цільова функція – це аналітична залежність між критерієм (критеріями) оптимальності та параметрами, які підлягають оптимізації із зазначенням напрямку екстремуму.

Відмінність між термінами «критерій» та «цільова функція» полягає в такому:

1. Цільова функція може мати не менше одного критерію.
2. Для цільової функції обов'язково вказується вид екстремуму: $f(x) \rightarrow \max$ або $f(x) \rightarrow \min$.

Щоб розв'язати **задачу мінімізації** функції f на множині X , необхідно знайти такий вектор $x_0 \in X$ відповідного значення цільової функції $f(x_0)$, щоб нерівність $f(x_0) \leq f(x)$ виконувалася для всіх $x \in X$. При цьому x_0 називають оптимальним рішенням (мінімальним рішенням), а $f(x_0)$ – оптимумом (мінімумом).

Щоб розв'язати **задачу максимізації** функції f на множині X , потрібно знайти такий вектор $x_0 \in X$ відповідного значення цільової функції $f(x_0)$, де нерівність $f(x_0) \geq f(x)$ виконувалася б для всіх $x \in X$. При цьому x_0 називають оптимальним (максимальним) рішенням, а $f(x_0)$ – оптимумом (максимумом).

У загальному вигляді визначається саме вектор x_0 , оскільки при розв'язуванні двопараметричної задачі він матиме два параметри, трипараметричної – три параметри і т.д.

При розв'язуванні задач оптимізації треба брати до уваги те, як має виглядати цільова функція. Наприклад, $a \leq x \leq b, f(x) \rightarrow \min$. Цільова функція має вигляд, як зображено на рис. 6.14. Тут точка x_0 – глобальний мінімум, а точка x_1 – локальний мінімум цільової функції.

Якщо $a \leq x \leq b, f(x) \rightarrow \max$, а цільова функція має вигляд, як зображено на рис. 6.15, де x_0 – точка глобального максимуму, а x_1 – точка локального максимуму цільової функції.

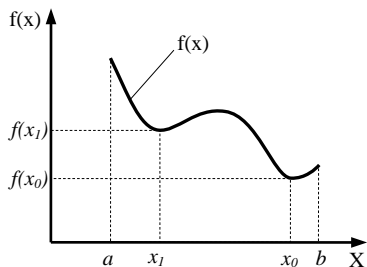


Рис. 6.14. Графічне зображення «локальний мінімум» та «глобальний мінімум» цільової функції

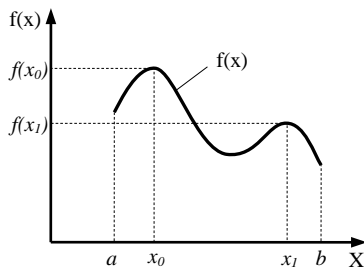


Рис. 6.15. Графічне зображення «локальний максимум» та «глобальний максимум» цільової функції

Існують задачі, в яких неможливо знайти оптимальне рішення та екстремум цільової функції. Наприклад, не існує точок мінімуму функції однієї змінної f на множині X ($f(x) \rightarrow \min$) у випадках, зображених на рис. 6.16–6.17.

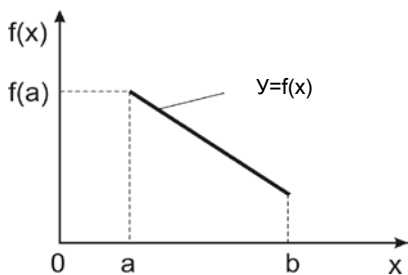


Рис. 6.16. Графічне зображення випадку, коли множина допустимих рішень незамкнена

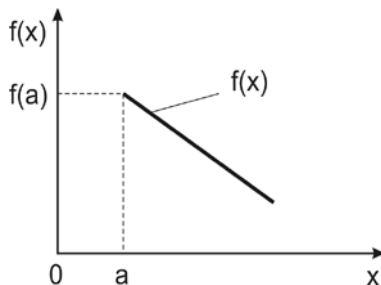


Рис. 6.17. Графічне зображення необмеженості множини допустимих рішень

Тут межа « a » – множина допустимих рішень, що входить в інтервал, а межа « b » – ні.

$X = [a, b)$ – множина X незамкнена, отже $f(b)$ не існує.

У випадку, зображеному на рис. 6.17, визначена лише одна ліва межа множини допустимих рішень.

$X = [a, \infty)$ – множина допустимих рішень необмежена.

На рис. 6.18 зображено ще один випадок, коли задача оптимізації не має однозначного розв'язання.

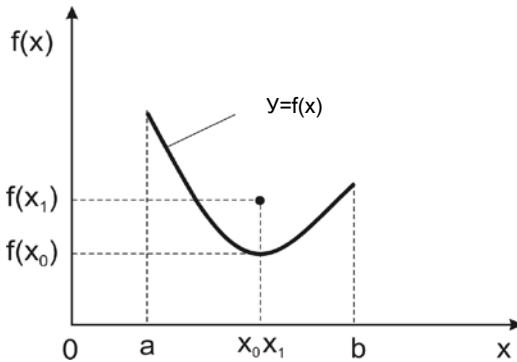


Рис. 6.18. Графічне зображення випадку, коли функція $f(x)$ не безперервна

2. Множина X обмежена.
3. Цільова функція $f(x)$ неперервна.

Функція $f(x)$ не неперервна, оскільки в точці x_0, x_1 існують два значення функції – $f(x_0)$ та $f(x_1)$.

Отже задача оптимізації вирішується, коли виконуються три умови (теорема Вейерштрасса):

1. Множина допустимих рішень X замкнена, тобто граничні точки належать цій множині.

6.2.2. Графоаналітичний метод розв'язування задач математичного програмування

Задачами математичного програмування називають однокритерійні задачі оптимізації. Методи їх розв'язування оперують з детермінованими математичними моделями. Детермінована математична модель відображає поведінку об'єкта з позиції цілковитої визначеності в теперішньому та майбутньому часі.

У дослідженні операцій такі моделі посідають одне з головних місць. Це обумовлено тим, що в них відображено різноманітні проблеми розподілу обмежених ресурсів в економіці, військовій справі, створенні нової техніки тощо.

Термін «програмування» тут розуміють як пошук найкращих планів.

Задача математичного програмування формулюється так: обчислити значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які забезпечують максимум (мінімум) заданої цільової функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умов:

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq, =) b_j, \quad (j = \overline{1, m}).$$

Розрізняють два види задач математичного програмування:

1. Задачі лінійного програмування.
2. Задачі нелінійного програмування.

У задачах першого виду функція y та обмеження g_j лінійні щодо змінних x . У задачах другого виду цільова функція y та (або) умови g_j мають різні нелінійності.

Розглянемо однопараметричну однокритерійну задачу оптимізації.

Постановка задачі. Дано критерій y . Об'єкт (процес) описано рівнянням (рівняннями), яке має один параметр $y = f(x)$, який треба визначити. Є система обмежень:

$$\begin{aligned} x &\geq a_1; \\ a_2 &\leq x \leq b_1. \end{aligned}$$

Потрібно обчислити оптимальне значення параметра $x - x_{\text{опт}}$, яке перетворює цільову функцію $f(x)$ на максимум або мінімум.

Задача розв'язується в два етапи:

1. Побудова області допустимих рішень (ОДР).
2. Знаходження в межах ОДР оптимального рішення.

При побудові ОДР на першому етапі розглядається система обмежень. Усі обмеження повинні бути виконані. Виконання першого обмеження в наведеній вище постановці задачі оптимізації означає, що значення параметра x , яке визначається, повинне розміщуватися праворуч від a_1 , причому a_1 входить в дозволений інтервал (рис. 6.19).

При вирішенні практичних задач оптимізації завжди треба знати, яка цільова функція. Це значно спрощує роботу як при вирішенні задач оптимізації вручну (із застосуванням графоаналітичного методу), так і при вирішенні задач на комп'ютері. Це стосується випадку використання готових програм, і, що особливо важливо, – розробки власних програм. Розглянемо випадок, коли цільова функція лінійна (рис. 6.20).

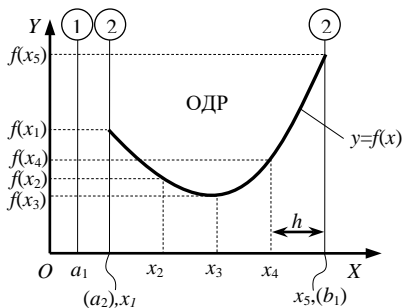


Рис. 6.19. Графічне представлення вирішення однопараметричної однокритеріальної задачі оптимізації

цьому межі інтервалу входять в інтервал.

Коли однопараметрична однокритеріальна задача оптимізації розв'язується із застосуванням графоаналітичного методу вручну, то на другому етапі застосовують метод перебору. Його суть полягає в наступному. У межах ОДР через певний інтервал h вибирають ряд

значень параметра x . У випадку, який розглядаємо, ОДР розбито на чотири відрізки і вибрано п'ять значень параметра x . Для цих значень параметра x розраховуються відповідні значення цільової функції. Серед них знаходять мінімальне (максимальне) значення. Значення параметра x_i , яке перетворює цільову функцію на мінімум (максимум), є оптимальним. Якщо в нашому випадку $f(x)$ прагне до мінімуму, то $x_{\text{опт}} = x_3$; якщо до максимуму, то $x_{\text{опт}} = x_5$.

Розглянемо графоаналітичний метод вирішення *багато-*

У цьому випадку на другому етапі обчислюють значення цільової функції тільки в межах ОДР. Ці значення порівнюють та вибирають найменше або найбільше значення. У прикладі, наведеному на рис. 6.19, якщо $f(x) \rightarrow \min$ $x_{\text{опт}} = b_1$; при $f(x) \rightarrow \max$ $x_{\text{опт}} = a_2$.

Виконання другого обмеження означає, що значення параметра x , яке визначається, повинне знаходитися в інтервалі (на відрізку) $[a_2, b_1]$. При

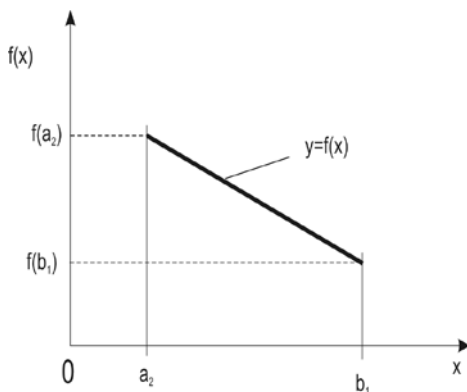


Рис. 6.20. Графічне зображення вирішення однопараметричної однокритеріальної задачі оптимізації для випадку лінійної цільової функції

параметричної однокритерійної задачі оптимізації. Вручну за допомогою цього методу можна розв'язати щонайбільше двопараметричну задачу оптимізації.

Постановка задачі. Дано критерій y . Об'єкт (процес) описано рівнянням (рівняннями), яке має ряд параметрів $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Є система обмежень:

- 1) $a_1 \leq x_1 \leq b_1$;
- 2) $a_2 \leq x_2 \leq b_2$;
-
- n) $a_n \leq x_n \leq b_n$;
-
- $n+1$) $x_1 \cdot x_2 \leq c_1$;
- $n+2$) $x_2 \cdot x_3 \leq c_2$;
-

Потрібно визначити оптимальне значення ряду параметрів $x_{1\text{опт}}$, $x_{2\text{опт}}$, ..., $x_{m\text{опт}}$ ($m \leq n$), які перетворюють цільову функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на максимум або мінімум.

Приклад 1. Дано критерій $y = x_2/x_1$. Потрібно обчислити $x_{1\text{опт}}$ та $x_{2\text{опт}}$, які перетворюють на максимум цільову функцію $y = x_2/x_1 \rightarrow \max$. Обмеження:

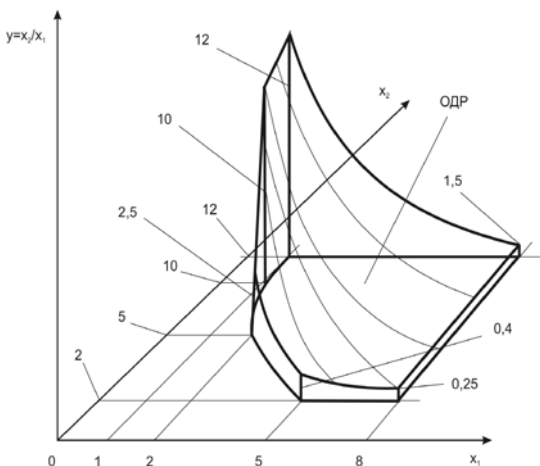
- $1 \leq x_1 \leq 8$;
- $2 \leq x_2 \leq 12$;
- $x_1 \cdot x_2 \geq 10$.

Задача розв'язується в два етапи:

1. Побудова ОДР.
2. Знаходження в межах ОДР оптимального рішення.

Побудова ОДР в цій задачі, на відміну від однопараметричної задачі, полягає в тому, що працювати потрібно в двох напрямках. У результаті в площині $x_1 O x_2$ ОДР буде багатогранником (рис. 6.21).

Для побудови нелінійного обмеження $x_1 \cdot x_2 \geq 10$ спочатку необхідно прирівняти ліву і праву частини нерівності та побудувати відповідну криву



$$x_1 \cdot x_2 = 10; x_2 = 10/x_1;$$

x_1	1	2	5
x_2	10	5	2

Після цього потрібно визначити напрям допустимості параметрів x_1 та x_2 . Щоб не помилитися, можна застосувати такий прийом. Ви-

Рис. 6.21. Графічне зображення розв'язання двопараметричної однокритерійної задачі оптимізації

беремо довільну точку на площині $x_1 O x_2$ з будь-якого боку кривої. Наприклад, точку з координатами $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, тобто «праворуч – угорі» від кривої. Обчислимо значення лівої частини нерівності – $5 \cdot 5 = 25$; $25 > 10$. Отже, нерівність виконується, вибрана точка знаходиться в допустимій області параметрів, які шукають. Тобто допустима область параметрів, які шукають, розташована «праворуч – угорі» від кривої.

На другому етапі потрібно визначити значення цільової функції в межах ОДР. У цьому прикладі точка, яка визначає оптимальні значення параметра, що обчислюється, знаходиться в межах ОДР – $x_{1\text{опт}} = 1$; $x_{2\text{опт}} = 12$. Якщо $x_2/x_1 \rightarrow \min$, то $x_{1\text{опт}} = 6$, $x_{2\text{опт}} = 2$.

Приклад 2. Обчислити оптимальні значення $x_{1\text{опт}}$, $x_{2\text{опт}}$.
Цільова функція

$$y = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max .$$

Обмеження:

$$2x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0.$$

1-й етап. Побудова ОДР.

Для формування ОДР необхідно в системі координат x_1Ox_2 побудувати лінії, які відповідають обмеженням, прирівнюючи їх ліві та праві частини, і визначити напрями розташування допустимих значень змінних, що визначаються відповідно до знаків нерівностей (рис. 6.22).

Обчислимо перші два обмеження:

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 10 - 2x_1;$$

x_1	0	5
x_2	10	0

$$x_1 + 3x_2 \leq 18 \Rightarrow x_1 + 3x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = (18 - x_1) / 3.$$

x_1	0	6
x_2	6	4

Напрямки допустимості значень змінних x_1 та x_2 відповідно до перших двох обмежень – «вниз–ліворуч». Відповідно до третього обмеження, значення змінної x_1 повинні розміщуватися вище осі Ox_2 , а відповідно до четвертого обмеження правіше осі Ox_1 . Зауважимо, що межі ОДР входять до області допустимих рішень. Це пояснюється тим, що в обмеженнях застосовуються знаки нерівностей «менше – дорівнює» та «більше – дорівнює».

2-й етап. Остаточне визначення оптимальних значень змінних x_1 та x_2 .

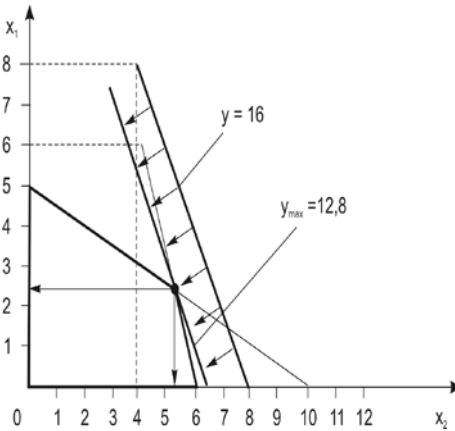


Рис. 6.22. Графічне зображення розв'язання задачі лінійного програмування

x_1	0	6
x_2	6	4

$$y = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; x_1 + 2x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = (16 - x_1) / 2.$$

Після цього побудуємо пряму лінію, паралельну цій прямій, так щоб вона торкалася межі ОДР. Координати точки дотику цієї прямої з межею ОДР є оптимальними значеннями змінних $x_{1\text{опт}}$ та $x_{2\text{опт}}$.

Для точного визначення координат точки дотику лінії цільової функції межі ОДР (точних значень $x_{1\text{опт}}$ та $x_{2\text{опт}}$) потрібно розв'язати систему із двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10; \\ x_1 + 3x_2 = 16; \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 10 - 2x_1.$$

Підставимо значення x_2 у друге рівняння та отримаємо:

$$x_1 + 3(10 - 2x_1) = 16 \Rightarrow x_1 + 30 - 6x_1 - 18 = 0 \Rightarrow -5x_1 + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 12/5 = 2,4;$$

$$x_2 = 10 - 2 \cdot 2,4 = 5,2.$$

При $x_{1\text{опт}} = 2,4$; $x_{2\text{опт}} = 5,2$ максимальне значення цільової функції $y_{\max} = x_1 + 2x_2 = 2,4 + 2 \cdot 5,2 = 12,8$.

Приклад 3. Розподілити ресурси по об'єктах від трьох джерел (рис. 6.23), ефективність використання яких різна на кожному об'єкті (табл. 6.8).

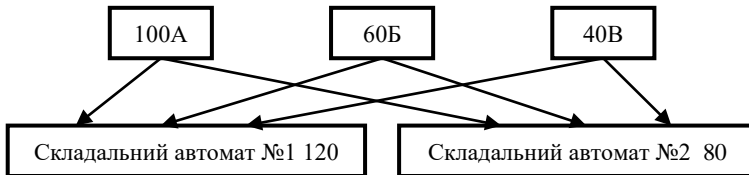


Рис. 6.23. Джерела ресурсів

Таблиця 6.8

Ефективність застосування ресурсів

Виробничі модулі	Складальні автомати	
	№1	№2
А	16	12
Б	10	16
В	6	6

Виробничі об'єкти характеризуються потужностями та ресурсами: X_{A2} – кількість деталей, що розподіляються на об'єкті A_2 (№2)

$$100 = X_{A1} + X_{A2},$$

$$60 = X_{B1} + X_{B2},$$

$$40 = X_{B1} + X_{B2}.$$

Складальний автомат №1 (об'єкт №1) може прийняти лише 120 тис. одиниць деталей, а об'єкт №2 – 80 тис., тоді:

$$120 = X_{A1} + X_{B1} + X_{B2},$$

$$80 = X_{A2} + X_{B2} + X_{B2}.$$

Ефективність при розподілі ресурсів

$$E = 16 X_{A1} + 12 X_{A2} + 10 X_{B1} + 16 X_{B2} + 6 X_{B1} + 6 X_{B2} = L,$$

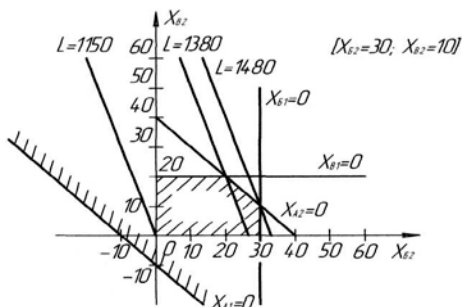


Рис. 6.24. Графічне зображення розподілу ресурсів

де L – максимальне значення ефективності.

Графічне зображення вирішення задачі розподілу ресурсів за об'єктами наведено на рис. 6.24.

6.2.3. Методи розв'язання багатокритерійних задач оптимізації

На практиці розв'язання багатокритерійних задач оптимізації виникає, коли технічну систему або процес не можна описати однокритерійною залежністю або не можна об'єднати окремі критерії в єдиний критерій. Таке об'єднання, як правило, буває формальним, штучним. З математичної точки зору не існує ідеального способу вирішення таких задач. Кожний із них має свої переваги та недоліки. Розглянемо деякі методи розв'язання багатокритерійних задач оптимізації.

Метод пошуку Парето-оптимальних рішень розглянемо на прикладі використання двох рівнозначних критеріїв.

Припустимо, що існує безліч варіантів вирішень зі своїми критеріями і безліч оцінок варіантів рішень у просторі критеріїв (рис. 6.25). За кожним із варіантів визначені значення всіх критеріїв.

У прикладі використано такі позначення:

- K_1 та K_2 – критерії оцінки варіантів рішення;
- $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – безліч оцінок альтернативних варіантів рішення;
- $K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1m}$ – значення першого критерію для 1-, 2-, m -го варіанта рішення;
- $K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2m}$ – значення другого критерію для 1-, 2-, m -го варіанта рішення;

– $P(Y)$ – множина Парето-оптимальних оцінок рішень.

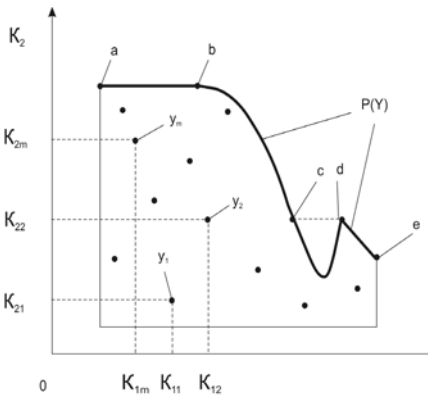


Рис. 6.25. Графічне зображення пошуку Парето-ефективних рішень

Правило. Множина Парето-оптимальних оцінок $P(Y)$ є «північно-східна межа» множини Y без тих його частин, які паралельні одній із координатних осей або лежать у «глибоких провалах».

Для випадку на рис. 6.25 Парето-оптимальні оцінки складаються з точок кривої bc (без точки c та лінії de).

Переваги методу – критерії рівнозначні, метод математично об'єктивний.

ний.

Недолік методу – кінцева кількість Парето-оптимальних рішень, як правило, більше одного. Єдиного кінцевого рішення майже не буває.

Приклад. Маємо 10 варіантів контрольних пристроїв, серед яких для нового проекту необхідно вибрати найкращий. Пристрої оцінені експертами за двома показниками (критеріями): продуктивність та надійність. Оцінювання проводилося за 10-бальною шкалою (від 0 до 10). Результати оцінки контрольних пристроїв зведено до табл. 6.9.

Таблиця 6.9

Експертні оцінки вимірювальних пристроїв за критеріями продуктивності та надійності

Критерій	Оцінки експертів (бали) для пристроїв									
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Продуктивність (П)	6	4	10	3	10	0	2	4	6	7
Надійність (Н)	6	2	1	7	4	4	10	4	6	2

Нехай існує безліч оцінок варіантів пристроїв у просторі критеріїв (рис. 6.26). Парето-оптимальними рішеннями тут є варіанти пристроїв C5, C7 та C9.

Суть методу рішення багатокритерійних задач оптимізації з використанням узагальненого (інтегрального) критерію полягає в тому, що окремі критерії $F_i(X)$, $i=1, n$ певним чином об'єднуються в один інтегральний критерій $F(X) = \Phi(F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$, а потім визначається максимум або мінімум цього критерію.

Якщо об'єднання критеріїв проводиться, виходячи з об'єктного взаємозв'язку окремих критеріїв та узагальненого критерію, то оптимальне рішення буде коректне. Таке об'єднання здійснити дуже складно або неможливо. Як правило, узагальнений критерій – це результат формального об'єднання окремих критеріїв.

Залежно від того, як критерії об'єднуються в узагальнений критерій, розрізняють:

1. Адитивний критерій.
2. Мультиплікативний критерій.
3. Максимінний (мінімаксний) критерій.

В адитивному критерію цільова функція визначається шляхом складання нормованих значень окремих критеріїв. Цільова функція має такий вигляд:

$$F(X) = \sum_{i=1}^n C_i \frac{F_i(X)}{F_i^0(X)} = \sum_{i=1}^n C_i f_i(X) \rightarrow \max(\min), \quad (6.11)$$

де n – кількість критеріїв; C_i – ваговий коефіцієнт i -го критерію; $F_i(X)$ – числове значення i -го критерію; $F_i^0(X)$ – i -й нормуючий дільник; $f_i(X)$ – нормоване значення i -го критерію.

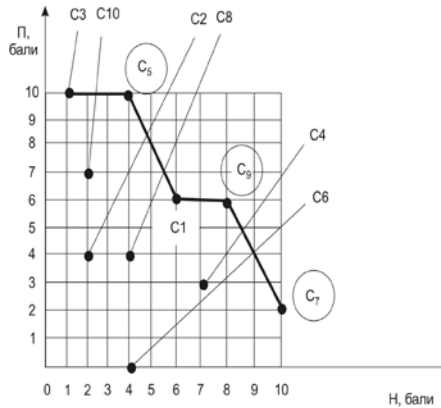


Рис. 6.26. Графічне зображення пошуку Парето-оптимальних рішень

Кожен критерій має різну фізичну природу і різну розмірність, що не дозволяє їх підсумувати. У зв'язку з цим у формулі 6.11 значення критеріїв діляться на нормувальні дільники, які призначаються так:

1. Нормувальними дільниками є директивні значення параметрів або критеріїв, задані замовником. Вважається, що значення параметрів, закладені в технічному завданні, є оптимальними або найкращими.

2. Нормувальні дільники отримують максимальні (мінімальні) значення критеріїв, яких досягають в області допустимих рішень.

Розмірності окремих критеріїв та відповідних нормувальних дільників однакові. Тому в результаті узагальнений адитивний критерій має безрозмірну величину.

Приклад. Визначити оптимальний варіант вимірювальних приладів з використанням узагальненого (інтегрального) адитивного критерію. Критеріями, за допомогою яких оцінені варіанти вимірювальних приладів, є їх продуктивність та надійність (напрацювання на відмову). Обидва критерії «працюють» на максимум, тобто найкращими варіантами вимірювальних приладів є ті, які забезпечують найбільшу їх продуктивність та надійність. Початкові дані для вирішення задачі зведено до табл. 6.10.

Цільову функцію на підставі адитивного критерію запишемо так:

$$F(X) = C_1 \frac{F_1(X)}{F_1^{(0)}(X)} + C_2 \frac{F_2(X)}{F_2^{(0)}(X)} \rightarrow \max.$$

Таблиця 6.10

Початкові дані для визначення оптимального варіанта вимірювальних приладів

Критерій F_i	Ваговий коефіцієнт C_i	Значення критерію для варіанта		
		1	2	3
Продуктивність F_1 , шт./год	0,6	1000	2000	4000
Надійність (напрацювання на відмову) F_2 , год	0,4	1500	1000	500

Нормувальними дільниками в задачі вважатимемо найкращі (максимальні) значення окремих критеріїв:

$$F_1^{(0)}(X) = 4000 \text{ шт./год,}$$

$$F_2^{(0)}(X) = 1500 \text{ шт./год.}$$

Значення узагальненого адитивного критерію розраховуються для кожного варіанта:

- варіант 1 – $F(X) = 0,6(1000/4000) + 0,4(1500/1500) = 0,55$.
- варіант 2 – $F(X) = 0,6(2000/4000) + 0,4(1000/1500) = 0,556$.
- варіант 3 – $F(X) = 0,6(4000/4000) + 0,4(500/1500) = 0,732$.

Оптимальним є третій варіант, оскільки йому відповідає максимальне значення узагальненого адитивного критерію.

Одним із недоліків цього методу є те, що вагові коефіцієнти призначає проектувальник. Різні проектувальники можуть призначати різні вагові коефіцієнти.

Наприклад, $C_1 = 0,4$; $C_2 = 0,6$. Визначимо значення адитивних критеріїв для варіантів:

- варіант 1 – $F(X) = 0,4 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 1 = 0,7$;
- варіант 2 – $F(X) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,67 = 0,602$;
- варіант 3 – $F(X) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0,33 = 0,596$.

За такої зміни значень вагових коефіцієнтів оптимальним буде перший варіант.

Перевага цього методу – завжди вдається визначити єдиний оптимальний варіант рішення.

Але метод має суттєві недоліки:

1. Труднощі (суб'єктивізм) у визначенні вагових коефіцієнтів.
2. Адитивний критерій не впливає з об'єктної ролі окремих критеріїв і тому виступає як формальний математичний прийом.
3. В адитивному критерії відбувається взаємна компенсація окремих критеріїв, тобто зменшення одного з них може бути компенсовано збільшенням іншого критерію.

Для мультиплікативного критерію цільова функція записується так:

$$F(X) = \prod_{i=1}^n C_i F_i(X) \rightarrow \max(\min),$$

де Π – знак добутку; C_i – ваговий коефіцієнт i -го критерію; $F_i(X)$ – числове значення i -го критерію.

Переваги мультиплікативного критерію:

1. Не потрібне нормування критеріїв.
2. Практично завжди визначається одне оптимальне рішення.

Недоліки:

1. Труднощі (суб'єктивізм) у визначенні вагових коефіцієнтів.
2. Перемножування різних розмірностей.
3. Взаємна компенсація значень критеріїв.

Максимінний (мінімаксний) критерій працюють за принципом компромісу, який базується на ідеї рівномірності. Сутність принципу максимінна полягає в тому, що при проектуванні складних систем, за наявності великої кількості критеріїв, встановити між ними аналітичний взаємозв'язок дуже складно. Тому прагнуть знайти такі значення змінних (параметрів) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, за яких нормовані значення всіх критеріїв однакові між собою:

$$C_i f_i(X) = K, \quad (6.12)$$

де C_i – ваговий коефіцієнт i -го критерію; $f_i(X)$ – нормоване значення i -го критерію; K – константа.

За великої кількості окремих критеріїв через складні взаємозв'язки добитися виконання співвідношення (6.12) дуже складно. Тому на практиці варіюють значеннями змінних проектування x_1, x_2, \dots, x_m . При цьому послідовно «підтягуються» ті нормовані критерії, чисельні значення яких у початковому рішенні виявилися найменшими. Оскільки операція проводиться в області компромісу, підтягання «відстаючого критерію» неминуче приводить до зниження значень частини критеріїв. Але при проведенні певних кроків можна добитися певного ступеня урівноваження суперечливих критеріїв, що і є метою принципу максиміна.

Принцип максиміна полягає в тому, щоб вибрати такий набір змінних $X^{(0)} \in X$, за якого реалізується максимум із мінімальних нормованих значень критеріїв, тобто $F(X^{(0)}) = \max \min f_i(X)$.

Такий принцип вибору $X^{(0)}$ іноді називають гарантованим результатом. Його запозичено з теорії ігор, де він є основним принципом.

Якщо критерії потрібно мінімізувати, то найбільш відстаючим

критерієм є той, який набуває максимального значення. У цьому випадку застосовують принцип мінімакса $F(X^{(0)}) = \min \max f_i(X)$.

Вибір критерію – складне завдання, оскільки мета при проектуванні будь-якого об'єкта, як правило, – річ суперечлива (забезпечення мінімальної вартості та максимальної надійності, максимальної продуктивності та мінімальної енергоємності та ін.).

Якщо вимагають оптимізувати один із показників якості проєктованого об'єкта при дотриманні обмежувальних вимог на решту показників, то потрібно сформулювати один окремий критерій. Задача оптимізації при цьому зводиться до задачі максимізації (мінімізації) критерію з урахуванням заданих обмежень.

За наявності декількох критеріїв вибирають:

- а) адитивний критерій – якщо найбільше значення мають абсолютні значення критеріїв при вибраному векторі параметрів X ;
- б) мультиплікативний критерій – якщо головну роль відіграє зміна абсолютних значень окремих критеріїв при варіації вектора X ;
- в) максимінний (мінімаксний) критерій – якщо задачею є досягнення рівності нормованих значень суперечливих (конфліктних) окремих критеріїв.

6.2.4. Об'ємне планування роботи технічних систем

Постановка задачі. Розглядається m вимірювальних комплексів, на яких можуть бути проведені вимірювання n типів приладів. Трудомісткість вимірювання j -го приладу на i -му вимірювальному комплексі становить t_{ij} годин. Відомо фонд часу роботи кожного вимірювального комплексу – V_i . Початкові дані для вирішення задачі зведено до табл. 6.11.

Визначити кількість приладів кожного найменування (x_1, x_2, \dots, x_n) , при вимірюванні яких досягається максимальне завантаження вимірювального комплексу.

Початкові дані задачі

Вимірювальний комплекс	Трудомісткість при вимірюванні приладів				Фонд часу роботи вимірювального комплексу
	1	2	...	n	
1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1n}	B_1
2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2n}	B_2
...
m	t_{m1}	t_{m2}	...	t_{mn}	B_m

У загальному вигляді математична модель для вирішення задачі включатиме такі складові:

- обмеження:

$$\begin{aligned}
 t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n &\leq B_1; \\
 t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n &\leq B_2; \\
 t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \dots + t_{mn}x_n &\leq B_m;
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\forall x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n});$$

- керовані параметри $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- цільова функція $y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j \rightarrow \max$.

Задача розв'язується методом лінійного програмування. При цьому слід пам'ятати, що кількість обмежень виду (6.13) в математичній моделі повинна дорівнювати кількості вимірювальних комплексів. При вирішенні задачі на комп'ютері кількість вимірювальних комплексів, а також типів приладів практично не обмежена.

6.2.5. Задача про мінімальне завантаження обладнання

Представлена далі задача проводиться на рівні постановки задачі та формування математичної моделі для її вирішення. Їх розв'язують також методами лінійного програмування.

Є m пристроїв, на яких можуть вимірюватися та контролюватися n типів деталей. Продуктивність i -го вимірювального пристрою при контролі деталі j -го типу становить C_{ij} .

Величини планових завдань A_j на контроль j -ї деталі та ресурс часу B_i роботи i -ї вимірювальної системи зведено до табл. 6.12.

Потрібно, враховуючи ресурси часу роботи кожного вимірювального пристрою, розподілити завдання між вимірювальними системами так, щоб загальний час роботи всіх був мінімальним.

Нехай t_{ij} – час контролю j -ї деталі на i -му пристрої. Складемо обмеження за ресурсом часу для кожного пристрою:

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq B_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таблиця 6.12

Початкові дані для вирішення задачі

Пристрої	Тип деталей				Ресурс часу
	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	B_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	B_2
...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	B_m
Потрібна кількість деталей	A_1	A_2	...	A_n	–

Умови виконання планових завдань мають вигляд:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} t_{ij} = A_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Рішення поставленої задачі полягає в мінімізації лінійної цільової функції (сумарного часу)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \rightarrow \min$$

за обмежень та умови, де всі змінні $t_{ij} \geq 0$.

6.2.6. Приклад ухвалення рішень в умовах невизначеності

Діюче виробництво здебільшого супроводжується певною неви-

значеністю. Наприклад, термінами аварійних зупинок обладнання, затримками постачання матеріалів та комплектуючих та ін. Математична постановка задачі моделювання таких виробничих процесів складається зі складових:

- маємо m можливих рішень k_i , де $i = 1, \dots, m$;
- існують умови: j -те настання певної обстановки – Q_j ($j = 1, \dots, n$), кожна обстановка досягає певної ефективності a_{ij} (табл. 6.13).

Таблиця 6.13

Таблиця ефективності

	Q_1	Q_2	...	Q_n
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
R_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Величина ризику визначається як $r = a_{max} - a_{ij}$.

Ризик вказує, наскільки вигідна стратегія, що використовується за даної ситуації з урахуванням ступеня її невизначеності. Вибір найкращого рішення в умовах невизначеності залежить від ступеня невизначеності.

Розглянемо приклад (табл. 6.14), в якому існує три види розв'язання задачі.

Таблиця 6.14

Таблиця ефективності

	Q_1	Q_2	Q_3
R_1	0,25	0,35	0,40
R_2	0,70	0,20	0,30
R_3	0,35	0,65	0,20
R_4	0,60	0,10	0,35

1. Вибір найкращого розв'язання, коли ймовірність можливих обставин відома.

Вибирають таке рішення, яке дає максимальне значення виграшу. Воно визначається за правилами «теорії ймовірності» як сума добутків імовірностей різних варіантів обставин на відповідні виграші:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0,50 \cdot 0,25 + 0,30 \cdot 0,35 + 0,20 \cdot 0,40 = 0,31, \\
 R_2 &= 0,50 \cdot 0,70 + 0,30 \cdot 0,20 + 0,20 \cdot 0,30 = 0,47, \\
 R_3 &= 0,50 \cdot 0,35 + 0,30 \cdot 0,65 + 0,20 \cdot 0,20 = 0,47, \\
 R_4 &= 0,50 \cdot 0,60 + 0,30 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,35 = 0,50.
 \end{aligned}$$

2. За відомих імовірностей виберемо максимально можливу ефективність, тобто R_4 .

2.1. Ефективність характеризується тим, що ймовірність можливих обставин невідома, не існує варіантів про їх відносне значення. Використовується принцип недостатньої основи Лапласа, який базується на тому, що ймовірності рівні між собою.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0,33 \cdot 0,25 + 0,33 \cdot 0,35 + 0,33 \cdot 0,40 = 0,330, \\
 R_2 &= 0,33 \cdot 0,70 + 0,33 \cdot 0,20 + 0,33 \cdot 0,30 = 0,306, \\
 R_3 &= 0,33 \cdot 0,35 + 0,33 \cdot 0,65 + 0,33 \cdot 0,20 = 0,462, \\
 R_4 &= 0,33 \cdot 0,60 + 0,33 \cdot 0,10 + 0,33 \cdot 0,35 = 0,410.
 \end{aligned}$$

2.2. Імовірності назначаються членами арифметичної прогресії.

2.3. Імовірності назначаються на підставі досвіду спеціалістів.

3. Вибір найкращого варіанта, коли ймовірності обставин не відомі, але використовуються принципи підходу до оцінки результату дії.

3.1. «Розраховуй на гірше» – R_1 .

Застосовується критерій Вальда, коли потрібна гарантія, що виграш буде максимальним із найгірших. Оцінка здійснюється за таблицею ефективності.

3.2. Критерій Севіджа – R_3 .

Застосовується для випадку «Розраховуй найкраще». Використовується таблиця ризику (табл. 6.15).

Таблиця 6.15

Таблиця ризику

	Q_1	Q_2	Q_3
R_1	0,55	0,50	0
R_2	0,10	0,65	0,10
R_3	0,45	0	0,20
R_4	0	0,75	0,05

Оптимальним буде рішення, для якого максимальний ризик за різних видів обставин буде мінімальним.

3.3. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца (табл. 6.16)

$$\sigma_r = \max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right),$$

де a_{ij} – вигреш, що відповідає i -му рішенню за j -го варіанта обставин, α – коефіцієнт, що вибирається між 0 та 1: за $\alpha = 0$ – лінія поведінки нормальна; за $\alpha = 1$ – лінія поведінки погана.

Таблиця 6.16

Таблиця ризику

R_i	α				
	0	0,25	0,50	0,70	1,00
R_1	0,40	0,36	0,32	0,29	0,25
R_2	0,70	0,57	0,45	0,33	0,20
R_3	0,65	0,69	0,52	0,36	0,20
R_4	0,60	0,62	0,45	0,26	0,10
Оптимальне рішення	R_2	R_3	R_3	R_3	R_1

6.3. Елементи теорії множин та графів

Множина – це об'єднання в одне ціле об'єктів, добре розрізненіх нашою інтуїцією або нашою думкою (автор визначення – засновник теорії множин Кантор). Множини позначаються великою латинською літерою, а їх елементи – малими:

- $m_i \in M$ – елемент m_i належить множині M ;
- $m_i \notin M$ – елемент m_i не належить множині M ;
- $M' \subset M$ – M' є підмножиною множини M ;

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\},$$

де m_1, m_2, \dots, m_n – елементи множини.

Множина вважається **визначеною**, якщо вказані всі її елементи. Множина заданої кількості елементів – кінцева. Теорію кінцевих множин називають **комбінаторикою**.

Кількість елементів множини позначають $N(M)$.

Дві множини дорівнюють одна одній, якщо елементи першої є елементами другої та, навпаки, елементи другої – елементами першої.

Якщо A та B – дві множини, то множина C , якій належать всі елементи множин, що входять до множин A або до B , називається сумою або об'єднанням множин A та B і позначається $C = A \cup B$.

Ця операція складання множин задовольняє комутативному та асоціативному закону

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

Множина C , якій належать елементи, що є загальними для множин A і B (елементи, які входять в обидві ці множини), називається перетином множин A і B та позначаються $C = A \cap B$. Перетин множин задовольняє комутативному та асоціативному законам

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Операції об'єднання та перетину множин задовольняють також дистрибутивному закону

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Множина $A \cap B$ може бути невизначеною, якщо A та B не мають загальних елементів. Щоб запобігти цьому, розглядають порожню множину ϕ , яка виконує роль нуля в операціях над множинами

$$A \cup \phi = A, \quad A \cap \phi = \phi.$$

У теорії множин для опису технічних систем і процесів центральне місце посідає теорія відносин [41]. На її основі узагальнюються поняття функції, особливо виділяються три типи бінарних відносин: еквівалентність, упорядкованість та толерантність, які найчастіше зустрічаються на практиці. Сприйняття та використання абстрактної мови теорії відносин дозволяють об'єднати та викори-

стовувати з єдиних позицій такі поняття, які можуть здаватись далекими та різними.

Декартовим (прямим) добутком двох множин M_a та M_b називається множина виду:

$$M = M_a \cdot M_b = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\},$$

де (m_i, m_j) – упорядкована множина із заданим порядком елементів.

Приклад 1. Дано дві множини $M_a = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $M_b = \{b_1, b_2\}$. Декартовим добутком цих множин буде множина:

$$M = M_a \times M_b = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}.$$

Кількість елементів декартового добутку (для нашого прикладу) визначається так:

$$|M_a \cdot M_b| = |M_a| \cdot |M_b| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Квадратом множини M називається декартовий добуток двох рівних між собою множин: $M \cdot M = M^2$.

Бінарним відношенням T в множині M називається підмножина його квадрата.

Приклад 2. Нехай $M = \{m_1, m_2\}$. Квадрат цієї множини матиме вигляд:

$$M^2 = M \cdot M = \{(m_1, m_1), (m_1, m_2), (m_2, m_1), (m_2, m_2)\}.$$

Бінарним відношенням у цій множині є:

$$T = \{(m_1, m_2)\}, T \subset M^2.$$

Для зображення зв'язків і співвідношення між підсистемами використовується теорія графів.

Об'єкти, що розглядаються, зображуються у вигляді точок (вершин). Зв'язки між вершинами зображуються у вигляді ліній (рис. 6.27).

Сукупність множини M із заданим у ньому бінарним відношенням T називається *графом* G :

$$G = \langle M, T \rangle.$$

Множина вершин, зв'язки між якими визначені множиною ребер, називається графом $G = |V, E|$.

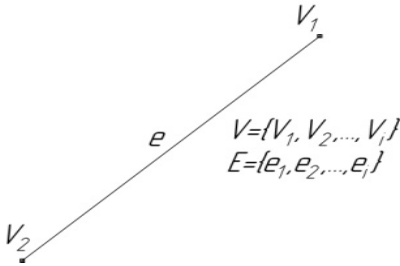


Рис. 6.27. Зв'язки між вершинами

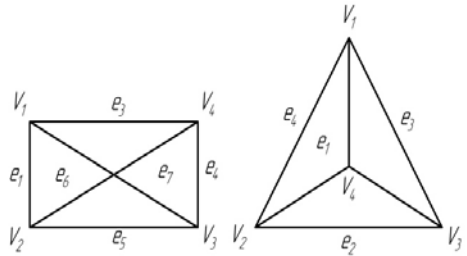


Рис. 6.28. Ізоморфні графи

Існують такі види графів:

- повний та неповний (рис. 6.27);
- орієнтовний ($G = |V, \vec{E}|$) та неорієнтовний ($G = |V, E|$), а також змішаний $G = |V, E, \vec{E}|$ (рис. 6.28);
- кінцевий граф, якщо множина вершин графів кінцева.

Ребро, для якого одна вершина одночасно є початковою і кінцевою, – це петля.

Ребра з однаковими граничними вершинами називаються паралельними або кратними.

Якщо степінь вершин дорівнює нулю – це ізолювана вершина. Якщо є петля, то кількість ребер дорівнює двом. Сума степенів всіх вершин дорівнює подвійній кількості ребер. Кількість вершин непарного степеня завжди парна. Якщо граф має степені вершин однакові, то граф однорідний. Повний граф із p вершинами завжди однорідний, його степінь $(p - 1)$. Порожній граф однорідний, степінь дорівнює нулю.

Інцидентність – це відношення між різними об'єктами, а суміжність – відношення між однорідними об'єктами. У матричному вигляді граф задають у вигляді таблиці інцидентності (рис. 6.29).

Інцидентність полягає в тому, що якщо вершина є кінцем ребра, то ребро інцидентне вершині.

Взагалі, існує декілька способів задання графа – рисунком, матрицею інцидентностей та матрицею суміжностей.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
1						V_1
1	1	1	1			V_2
	1	1		1		V_3
						V_4
			1	1		V_5
						V_6

Рис. 6.29. Приклад графа у матричному вигляді

Правила складання матриці інцидентності (для неорієнтованого графа).

Елементи матриці визначаються за такими правилами: ij елемент матриці дорівнює 1, якщо вершина V_i інцидентна ребру; елемент e_i дорівнює 0, якщо вершина та ребро не інцидентні. Для орієнтованого графа ij елемент дорівнює +1, якщо V_i вершина початкова e_i ; ij елемент дорівнює

– 1, якщо вершина кінцева ребру.

Властивості матриці інцидентності:

1. Нульовий рядок відповідає ізольованій вершині.
2. Нульовий стовпчик відповідає петлі.
3. Кожний стовпчик матриці обов'язково містить два одиничні елементи.
4. Кількість одиниць у рядку дорівнює степені відповідної вершини.

Графи, які не мають циклів, – це дерева. Дерева бувають ізоморфні та неізоморфні. Будь-яке дерево за $p \geq 2$ має скінченні вершини.

Кількість ребер q повного графа з p -вершинами виражається відношенням:

$$q = \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Для виявлення екстремального дерева використовується граф-дерево. Екстремальне дерево будується так, щоб сума мас гілок була мінімальною або максимальною.

Алгоритм побудови екстремального дерева базується на послідовному введенні в дерево ребер із перевагою до найменшої маси:

1. Для дерева вибирається ребро з найменшою масою.
2. Розглядаємо найменше за масою із залишених ребер, і якщо воно не утворює циклу з раніше утвореними гілками, то воно вводиться в дерево.
3. Побудова закінчується після відбору $(p - 1)$ ребер.

Наприклад, граф, зображений матрицею інцедентності, можна уявити як структуру з належними зв'язками між елементами (рис. 6.30).

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

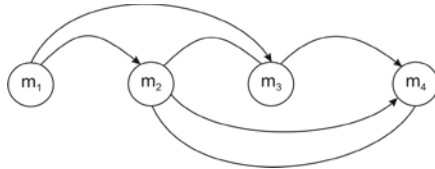


Рис. 6.30. Граф і його представлення у вигляді матриці

Використання графів формалізує знаходження розмірних ланцюгів (зв'язків) процесів виготовлення та вимірювання. Для виявлення розмірного ланцюга достатньо в графі геометричної структури об'єкта знайти той єдиний маршрут між двома вершинами, який є простим ланцюгом.

Усі ребра, які входять до простого ланцюга, будуть складовими ланками, а ребро між кінцевими вершинами – замикаючою ланкою (або ребро між кінцевою вершиною, або іншою вершиною, яка не має зв'язку у графі-дереві).

Побудову графа розмірного ланцюга можна починати з будь-якої вершини, за яку приймається будь-який параметр об'єкта. Граф розмірного ланцюга не тільки полегшує виявлення мети, але й дозволяє знайти помилки в дослідженнях.

6.4. Елементи теорії масового обслуговування

Сучасність вимагає вирішення безлічі проблем, що виникають у галузях, пов'язаних із використанням комп'ютерної техніки, серед яких – проблема використання нових математичних методів, які б реалізували алгоритмічний підхід. Тобто підхід, який на відміну від традиційно-аналітичного методу, орієнтувався б на створення комп'ютерних пакетів прикладних програм, що є важливим для

вирішення практичних задач.

Саме теорія масового обслуговування є прикладною математичною дисципліною, яка займається вивченням та дослідженням продуктивності технічних систем, розглядаючи їх як системи масового обслуговування (СМО). Теорія масового обслуговування відрізняється високою наочністю відображення модельованих об'єктів, що дозволяє достатньо просто переходити від реальних об'єктів до математичних моделей. Ця теорія розглядає ймовірнісні математичні моделі, які враховують вплив випадкових чинників на поведінку технічної системи чи процесу та оцінюють майбутнє з позицій імовірності тих чи інших подій.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, які встановлюють залежності між чинниками, що визначають функціональні можливості (кількість каналів, їх продуктивність, правила роботи, характер потоку замовлень), та ефективністю функціонування СМО [42].

Прикладами СМО можуть бути станції технічного обслуговування автомобілів, телефонні станції, аеропорти, виробничі підприємства, підприємства сфери послуг, ремонтні майстерні, оброблювальні центри, координатно-вимірювальні машини, технологічні процеси, складальні та контрольні операції, роботи з налагодження автоматизованого обладнання робото-технічних комплексів, системи управління тощо.

Кожна СМО складається з обслуговуючих апаратів, які називають каналами обслуговування (верстати, транспортні візки, роботи, лінії зв'язку, продавці та інше). Здебільшого всі параметри, що описують системи масового обслуговування, є випадковими величинами або функціями, тому такі системи належать до стохастичних систем.

По закінченні обслуговування даного замовлення канал звільняється і приймає наступне замовлення. Випадковий характер потоку замовлень і часу обслуговування приводить до того, що в інтервали часу на вході СМО скупчується надлишкова кількість замовлень. Вони або стають у чергу, або залишають СМО не обслуженими. В інші проміжки часу СМО працює з недовантаженням або взагалі простоює.

Процес роботи СМО – це випадковий процес роботи з дискретними станами і безперервним часом. Стан СМО змінюється при

появі випадкових подій (надходження нового замовлення; закінчення обслуговування; моменту, коли замовлення, не дочекавшись своєї черги, залишає її).

Основними критеріями ефективності функціонування СМО (залежно від характеру задачі) можуть бути (рис. 6.31):

- середня кількість замовлень, які виконує система масового обслуговування за одиницю часу;
- імовірність негайного обслуговування замовлення;
- середня кількість замовлень у черзі;
- імовірність відмови в обслуговуванні замовлення;
- відносна та абсолютна пропускна здатність системи;
- відсоток замовлень, які отримали відмову в обслуговуванні;
- середній час очікування обслуговування в черзі;
- середня кількість зайнятих каналів;
- середній дохід від функціонування системи за одиницю часу тощо.

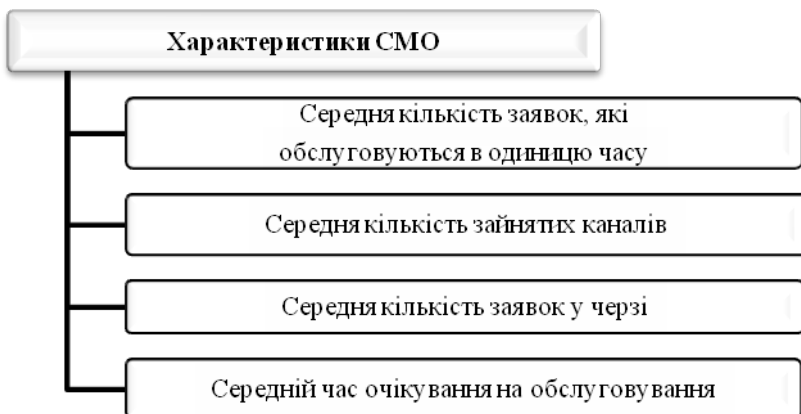


Рис. 6.31. Загальні характеристики систем масового обслуговування

Випадковий характер потоку замовлень (вимог), а в загальному випадку і тривалість обслуговування приводить до того, що в системі відбувається випадковий процес. Незалежно від характеру процесу, що протікає в системі масового обслуговування, розрізняють два основні види СМО:

- *системи з відмовами*, в яких замовлення, що надійшло в систему в момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову і відразу ж залишає чергу;
- *системи з очікуванням (чергою)*, в яких замовлення, що надійшло на момент, коли всі канали системи обслуговування зайняті, стає в чергу і чекає доти, доки не звільниться один із каналів.

Системи масового обслуговування з очікуванням діляться на системи з обмеженим і необмеженим очікуванням.

У системах із обмеженим очікуванням може обмежуватися довжина черги (кількість замовлень у черзі) та час перебування замовлення в черзі.

У системах із необмеженим очікуванням замовлення, яке стоїть у черзі, чекає на обслуговування доти, доки не настане його черга.

Теорія масового обслуговування є частиною теорії ймовірності та вирішує задачі аналізу роботи різних технічних систем (комп'ютерних сіток, телефонного вузла зв'язку, морського порту, аеродрому, цеху тощо). Спільним для цих систем є необхідність кількісного аналізу процесу обслуговування різних замовлень. Наприклад, літаків, що злітають з аеродрому чи роблять на ньому посадку; абонента, який звертається на телефонну станцію з проханням з'єднати його з іншим абонентом; суден, що прибувають у порт для розвантаження та завантаження; заготовок, що надходять для обробки на верстат; деталей, які підлягають контролю на виміральному пристрої, та інше.

Слід зазначити, що характерним для теорії масового обслуговування є розробка та аналіз математичних моделей із достатнім ступенем абстракції, в яких описується процес обслуговування множини об'єктів. Оскільки розглядаються абстрактні моделі, то не важливо знати природу та фізичні властивості об'єктів, що обслуговуються.

Теорія масового обслуговування розглядає системи, до яких через певні (регулярні чи нерегулярні) проміжки часу надходять замовлення, які обробляють постійно чи з інтервалами (з постійною чи випадковою тривалістю).

Першою характерною ознакою СМО є наявність потоку однорідних об'єктів – замовлень, вимог, подій, другою – наявність правил (порядку) дисципліни обслуговування.

Для СМО характерним є те, що вони працюють під впливом випадкових чинників. Моменти надходження вимог є випадковими величинами, тривалість обслуговування яких – також випадкова величина. Тому процес функціонування системи масового обслуговування має випадковий характер.

У зв'язку з цим методи дослідження систем масового обслуговування зводяться до побудови випадкового процесу, який описує еволюцію системи та дослідження цього процесу.

Усі системи масового обслуговування розрізняють за кількістю каналів обслуговування, а саме – одноканальні та багатоканальні.

Оскільки на практиці найчастіше системи масового обслуговування є змішаними, то розглянемо їх умовну класифікацію (рис. 6.32).

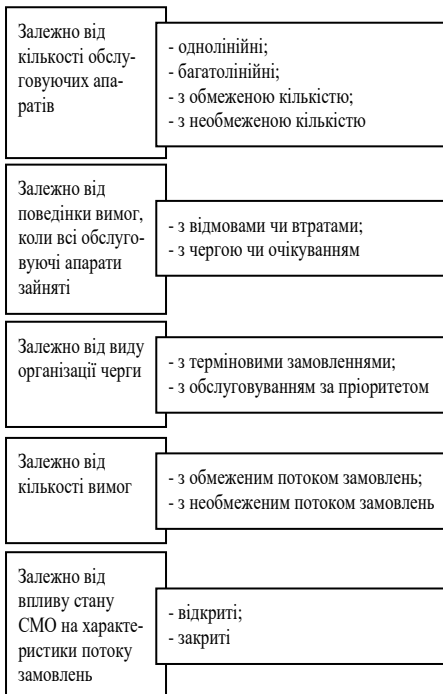


Рис. 6.32. Класифікаційні ознаки системи масового обслуговування

Розглянемо приклад. Замовлення чекають на обслуговування до певного часу. Після цього система починає працювати як система з відмовами або змінює кількість каналів обслуговування тощо.

Розширене поняття «обслуговування» означає різні технологічні процеси. За своїм змістом задачі масового обслуговування можуть бути різними, але в їх структурі та постановці є багато спільного. Тому для вирішення цих задач створено узагальнені методи.

Кожна СМО складається з обслуговуючих апаратів, які називаються каналами обслугову-

вання (прилади, верстати, транспортні візки, роботи, лінії зв'язку і т.д.).

Будь-яка СМО призначена для обслуговування потоку замовлень (вимог), які надходять у випадкові моменти часу. Обслуговування замовлення триває певний час, після чого канал звільнюється і готовий прийняти наступне замовлення.

Випадковий характер потоку замовлень і часу обслуговування приводить до того, що в певні проміжки часу на вході СМО накопичується надмірна кількість замовлень, які стають у чергу або залишають СМО, не дочекавшись на своє обслуговування. В інші ж проміжки часу СМО працюватиме з недовантаженням або взагалі простоюватиме.

Процес роботи СМО – випадковий процес із дискретними станами і безперервним часом. Стан СМО змінюється в моменти появи випадкових подій (нове замовлення; закінчення обслуговування; момент, коли замовлення, яким набридло чекати, залишають чергу).

Процеси масового обслуговування вивчають для їх раціональної організації (забезпечення максимальної продуктивності та мінімальних затрат) або виявлення закономірностей при проектуванні чи експлуатації технічних систем.

6.4.1. Визначення систем масового обслуговування

Використовуючи теорію масового обслуговування для математичного моделювання потрібно однозначно розуміти терміни цієї математичної дисципліни. На рис. 6.33 зображено загальну структуру СМО, основними термінами якої є:

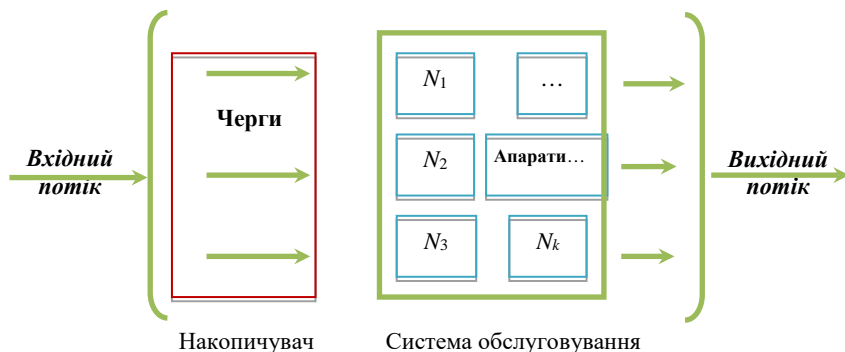


Рис. 6.33. Загальна структура системи масового обслуговування

- вимога;
- обслуговування;
- обслуговуючі та допоміжні апарати;
- час обслуговування;
- потік вимог.

Завдання теорії масового обслуговування полягає у знаходженні функціональних залежностей величин, що характеризують якість функціонування обслуговуючої системи, від характеристик вхідного потоку; параметрів, які задають можливості одного обслуговуючого апарата і способів організації всієї обслуговуючої системи в цілому. Якість функціонування системи дуже залежить від того, як організовано управління процесом обслуговування. Тому завдання зі знаходження кількісних характеристик організації управління є дуже важливим.

Ці залежності можуть мати як детермінований, так і ймовірнісний характер. В обох випадках вони визначають, як добре працюватиме обслуговуюча система за даних значень вхідних параметрів (рис. 6.34).

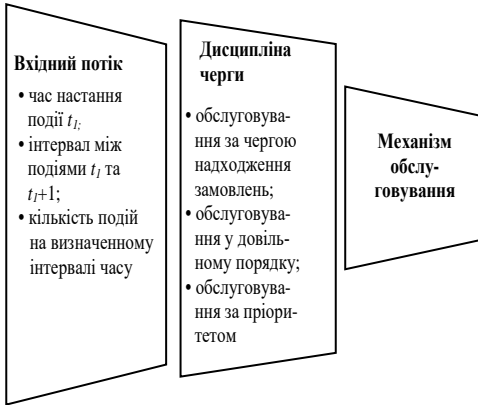


Рис. 6.34. Необхідні компоненти математичного опису СМО

Після вибору кількісних характеристик з'являється не менш важливе завдання – визначення набору значень параметрів, за яких обслуговуюча система функціонує найкраще.

Кожна обслуговуюча система функціонує для того, щоб виконувати замовлення (вимоги). Тому потік вимог є одним із основних і найбільш важливих тер-

мінів теорії масового обслуговування.

Вивчення потоку вимог – це перше завдання, яке виникає як під час теоретичної розробки проблем масового обслуговування, так і під час практичного застосування її методів до вирішення конкретних задач. Це легше зрозуміти, якщо уявити будь-яку задачу масового обслуговування. Якою б не була мета, щоб зробити конкретні кроки в реорганізації обслуговуючої системи для покращення якості її функціонування, ми, насамперед, повинні якнайкраще вивчити потік вимог, який надходить до цієї системи. Дуже важливо вміти кількісно описувати потік вимог.

Вимогою (замовленням) називається запит на виконання певних робіт. Так, якщо з ладу вийшов прилад, то з'являється вимога на його налагодження; якщо підготовлена інформація для внесення в комп'ютер, то з'являється вимога на її обробку.

Обслуговування – виконання (обробка) потоку замовлень (вимог), що надходять до обслуговуючої системи у випадковий момент часу. Обслуговування триває визначений (випадковий) час, після чого апарат N_1 звільняється (як правило, складається з n -ї кількості апаратів) і готовий прийняти наступне замовлення.

Коли обслуговуючу та обслуговувану системи підрозділяють на окремі частини, то виникає поняття *обслуговуючого та обслугову-*

ваного апарата. Під апаратом розуміють контрольно-вимірні прилади, верстати тощо.

Часом обслуговування вважається час виконання вимоги на обслуговування з моменту надходження замовлення до обслуговуючої системи. У загальному випадку час на обслуговування складається з часу на очікування замовлення, яке надходить, та часу на його обслуговування $T_{\text{обсл}}$ (виконання):

$$T_{\text{обсл}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{вик}} ,$$

де $T_{\text{оч}}$ – час очікування; $T_{\text{вик}}$ – час виконання.

На практиці час обслуговування часто описується показовим законом

$$B(t) = 1 - e^{-\mu t} ,$$

де e – основа натурального логарифму; μ – інтенсивність обслуговування.

Фізичний зміст параметра μ – середня кількість заявок за одиницю часу. Величина, обернена до $1/\mu$ – середній час обслуговування.

Послідовність вимог на обслуговування називається *поток*ом вимог. При цьому розрізняють *вхідний та вихідний потоки* вимог.

Вхідний потік вимог (регулярний чи випадковий) – це *послідовність однорідних подій, які надходять через рівні чи випадкові інтервали часу*. Приклади вхідних потоків: потяги, що прибувають на станцію; телефонні виклики; деталі, що надходять для складання приладу тощо.

Потік вимог, що отримав обслуговування в системі, називають **вихідним** (деталі, які пройшли стадію вимірювання).

У теорії масового обслуговування використовують термін «потік подій». На рис. 6.35 подано класифікацію потоку подій в СМО залежно від часу.

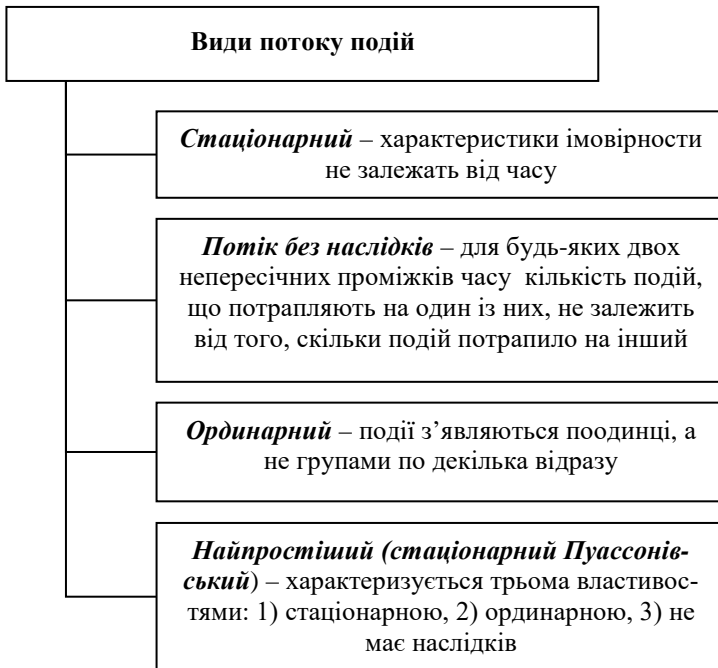


Рис. 6.35. Потоки подій

6.4.2. Типи систем масового обслуговування

Місце для очікування обслуговування вимог називають накопичувачем. Місткість накопичувача може бути обмеженою і необмеженою. За обмеженої місткості накопичувача черга перед апаратом обслуговування іноді впливає на вхідний потік, змінюючи його параметри. За нескінченної місткості накопичувача такого впливу немає.

Залежно від кількості (один або декілька обслуговуючих апаратів) системи поділяють на одно- та багатолінійні (див. рис. 6.32).

На практиці зустрічаються системи, в яких вхідний потік після обслуговування на одному апараті надходить на інший. Такі системи називаються послідовними або багатофазними.

Системи відрізняються одна від одної й дисципліною очіку-

вання – сукупністю відносин чи порядком переваг в обслуговуванні вимог. Переваги можуть бути абсолютними та відносними.

Вимоги з абсолютною перевагою, надійшовши в систему, можуть навіть перервати обслуговування попередньої вимоги та зайняти обслуговуючий прилад. Вимоги з відносною перевагою не переривають обслуговування, а займають перше місце в черзі.

Залежно від поведінки вимог, що надійшли, при зайнятості всіх обслуговуючих апаратів, системи поділяються на:

- СМО з відмовами або втратами;
- СМО з чергою або очікуванням.

СМО з відмовами (втратами) – це коли замовлення, яке надійшло, отримує відмову, оскільки всі канали зайняті, та залишає СМО і більше не обслуговується.

СМО з чергою (очікуванням) – це коли замовлення, яке надійшло, не йде далі, а стає в чергу й чекає на обслуговування, оскільки всі канали зайняті.

Залежно від того, як організовані черги СМО, їх розділяють на обмежені та необмежені. Обмеження можуть стосуватися як тривалості черги, так і часу очікування, «дисципліни обслуговування».

Отже, розглядають СМО з:

- терміновими замовленнями (тривалість черги та час обслуговування обмежені);
- пріоритетним обслуговуванням, тобто замовлення обслуговуються позачергово.

Крім цього СМО поділяються на відкриті та замкнені. У відкритій СМО характеристики потоку замовлень не залежать від стану самої СМО (від кількості зайнятих каналів); у замкненій СМО – залежать. Наприклад, якщо один робітник обслуговує групу верстатів, які час від часу потребують налагодження, то інтенсивність потоку «вимог» із боку верстатів залежить від того, скільки верстатів вже відремонтовано та чекають налагодження.

Усі системи поділяються на системи з обмеженою та необмеженою кількістю обслуговуючих апаратів.

Системи також розрізняють за кількістю вимог – з обмеженим та необмеженим потоком вимог.

Обслуговування в системі може бути впорядкованим (вимоги обслуговуються в порядку надходження) і невпорядкованим (порядок обслуговування випадковий).

Класифікація СМО не обмежується наведеними різновидами, але їх вистачає для подальшого моделювання технічних систем.

6.4.3. Математичний опис системи масового обслуговування

Основними компонентами математичних моделей систем масового обслуговування будь-якого виду є:

- вхідний потік вимог (замовлень), що надходить на обслуговування;
- дисципліна черги;
- механізм обслуговування.

Вхідний потік однорідних вимог – це послідовність подій, однорідних за фактом настання чи ненастання у визначений момент часу (рис. 6.36).

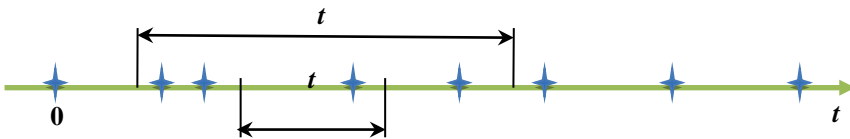


Рис. 6.36. Потік вимог

Вхідний потік однорідних вимог описується:

- часом настання події t_i ;
- інтервалами між подіями t_1 та $t_1 - 1$;
- кількістю подій на визначеному інтервалі часу t .

За характером випадкового процесу, що відбувається в СМО, розрізняють **марківські і немарківські системи**. У марківських системах потік вхідних вимог і потік виконаних вихідних вимог (замовлень) є пуасонівським. Пуасонівські потоки дозволяють легко описувати й будувати математичну модель системи масового обслуговування. Ці моделі мають прості рішення, тому більшість відомих додатків теорії масового обслуговування використовують марківську схему. У немарківських процесах дослідження систем масового обслуговування значно ускладнюється і вимагає застосування статистичного моделювання та чисельних методів із використанням комп'ютера.

Дисципліна черги замовлень – це визначена послідовність об-

слуговування замовлень. Розрізняють обслуговування:

- в порядку надходження заявок (перший прийшов – перший пішов);
- у випадковому порядку;
- пріоритетне.

Механізм обслуговування.

Час обслуговування $f(t)$ найчастіше описується показовим законом

$$f(t) = \nu \cdot e^{-\nu t},$$

де ν – параметр обслуговування, який характеризує швидкість обслуговування.

Якщо в момент часу t виконується вимога (замовлення), то ймовірність того, що тривалість обслуговування буде не меншою за t , визначають за допомогою інтегральної функції показового закону розподілу ймовірностей

$$F(t) = P(T > t) = e^{-\nu t}.$$

Ймовірність того, що тривалість обслуговування закінчиться до настання часу t , можна визначити як

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

У деяких системах час обслуговування може мати й інший характер розподілу: нормальний, за законом Релея та інші.

Приклад. Математичне сподівання кількості виходів з ладу вимірювального приладу за 10 000 хв роботи дорівнює 10.

Визначити ймовірність виходу з ладу вимірювального приладу при вимірюванні партії деталей одного найменування, тобто за 1000 хв роботи.

Розв'язання. Інтенсивність виходу з ладу приладу за 1 хв $\lambda = \frac{10}{1000} = 0,01$; ймовірність виходу з ладу приладу за 1 000 хв

$$F(t \leq 1000) = F(t = 1000) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - 0,3679 = 0,6321.$$

Теорія масового обслуговування є одним із розділів теорії ймові-

ності. У ній розглядаються задачі імовірності та математичні моделі (раніше було розглянуто детерміновані математичні моделі). Нагадаємо, що:

Детермінована математична модель відображає поведінку об'єкта (системи, процесу) з позицій цілковитої визначеності в теперішньому та майбутньому часі.

Математична модель імовірності враховує вплив випадкових чинників на поведінку об'єкта (системи, процесу), тобто оцінює майбутнє з позицій імовірності тих чи інших подій.

В теорії ігор задачі розглядаються в умовах невизначеності.

Розглянемо поняття, які характеризують стохастичну невизначеність, коли невизначені чинники задачі є випадковими величинами. Таку невизначеність ще називають сприятливою, доброякісною.

Випадкові збурення властиві будь-якому процесу. Легше навести приклади випадкового, ніж не випадкового процесу. Навіть хід годинника (начебто чітко вивірена робота – «працює як годинник») схильний до випадкових змін (відхід вперед, відставання, зупинка). Доти, поки ці збурення незначні (мало впливають на параметри, які нас цікавлять), ми можемо ними нехтувати та розглядати процес як детермінований, не випадковий.

Припустимо, що існує система S (технічний пристрій, група пристроїв тощо), в якій протікає випадковий процес, що може переходити з одного стану в інший.

Приклад 2. Система S – технічна система, наприклад, ділянка верстатів. Верстати періодично виходять з ладу та ремонтуються. Процес, який протікає в цій системі, є випадковим.

Приклад 3. Система S – літак, який здійснює рейс на заданій висоті за певним маршрутом. Збуджуючі чинники – метеоумови, помилки екіпажу та інше, наслідки – бовтанка, порушення графіка польотів тощо.

6.4.4. Марківський випадковий процес

Випадковий процес, що протікає в системі, називається марківським, якщо для будь-якого моменту часу t_0 характеристики імовірності процесу в майбутньому залежатимуть тільки від його стану в момент t_0 і не залежатимуть від того, коли і як система опиниться в цьому стані.

Нехай зараз t_0 і система перебувають у стані S_0 ; маємо характеристики стану системи в теперішньому часі $t_0 \rightarrow S_0$ та все, що було за $t < t_0$ (передісторію процесу). Чи можна передбачити (спрогнозувати) майбутнє, тобто що буде за $t > t_0$? У деталях – ні, але деякі характеристики імовірності процесу в майбутньому можна знайти. Наприклад, імовірність того, що через час τ система S перебуватиме в стані S_1 або залишиться в стані S_0 і т.д.

Приклад. Система S – група літаків, задіяних у повітряному бою. Припустимо, що x – кількість «червоних літаків», y – кількість «синіх літаків». До моменту часу t_0 кількість не збитих літаків буде відповідно x_0 та y_0 . Цікавою є імовірність того, що в момент часу $t_0 + \tau$ чисельна перевага буде на боці «червоних». Ця імовірність залежить від стану, в якому перебувала система в момент часу t_0 , а не від того, коли і в якій послідовності були збиті літаки до моменту t_0 .

На практиці марківські процеси в чистому вигляді не зустрічаються. Але є процеси, для яких впливом «передісторії» можна нехтувати. Під час вивчення таких процесів можна застосовувати марківські моделі. У теорії масового обслуговування також розглядаються не марківські системи масового обслуговування, але математичний апарат, який їх описує, набагато складніший.

Під час математичного моделювання велике значення мають марківські випадкові процеси з дискретними станами та безперервним часом.

Процес називається *процесом з дискретним станом*, якщо його можливі стани S_1 і S_2 можна визначити наперед, а перехід системи з одного стану в інший відбувається за допомогою «стрибка», тобто миттєво.

Процесом з безперервним часом називається процес, в якого моменти можливих переходів з одного стану в інший попередньо не визначені, тобто випадкові, і можуть відбуватися в будь-який момент часу.

Далі розглянемо процеси тільки з дискретним станом та безперервним часом.

Приклад. Технічна система S має два вимірювальні комплекси, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу (відмовити). Після цього відбуватиметься ремонт вузла, який продовжуватиметься невизначений випадковий час. Можливі такі стани

системи:

- S_0 – обидва вимірювальні комплекси справні;
- S_1 – перший вимірювальний комплекс ремонтується, другий справний;
- S_2 – другий вимірювальний комплекс ремонтується, перший справний;
- S_3 – обидва вимірювальні комплекси ремонтуються.

Переходи системи S з одного стану в інший відбуваються майже миттєво у випадкові моменти виходу з ладу того чи іншого вимірювального комплексу або закінчення ремонту.

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – графом станів. Вершини графа – стани системи, дуги графа – можливі переходи зі стану в стан. Для нашого прикладу граф станів виглядатиме як на рис. 6.37.

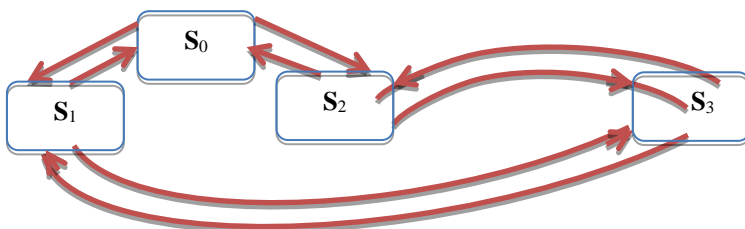


Рис. 6.37. Граф станів технічної системи

Примітка. Перехід зі стану S_0 в S_3 на рис. 6.37 не позначено, оскільки передбачається, що вимірювальні комплекси виходять з ладу незалежно один від одного. Імовірність одночасного виходу з ладу обох вимірювальних комплексів ми не враховуємо.

6.4.5. Потіки подій

Потік подій – послідовність однорідних подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

У попередньому прикладі – це потік відмов та потік відновлень. Інші приклади: потік викликів на телефонній станції, потік покупців у магазині та ін.

Потік подій можна зобразити у вигляді рядка з точок на осі часу Ot (рис. 6.38). Положення кожної точки випадкове, зображено ли-

ше одну реалізацію потоку.

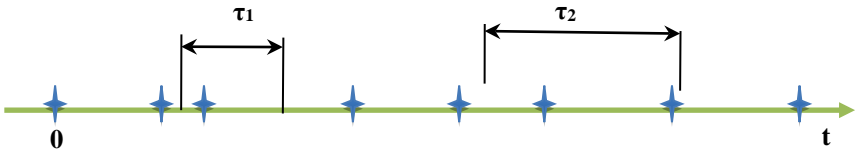


Рис. 6.38. Зображення потоку подій на осі часу

Інтенсивність потоку подій λ – це середня кількість подій, яка відбувається за одиницю часу.

Розглянемо властивості (види) потоків подій.

Потік подій називається стаціонарним, якщо характеристики його імовірності не залежать від часу. Зокрема, інтенсивність λ стаціонарного потоку – стала величина. Потік подій обов'язково має згущення або розрідження, але вони не мають закономірного характеру, і середня кількість подій, що відбувається за одиницю часу – стала величина, яка не залежить від часу.

Потік подій називається потоком без наслідків, якщо для будь-яких двох ділянок часу τ_1 та τ_2 (див. рис. 6.38), які не перетинаються, кількість подій, що потрапляє на один із них, не залежить від кількості подій, які потрапили на інший. Іншими словами – це події, які створюють потік, з'являються незалежно одна від одної та викликані власними причинами.

Потік подій називається ординарним, якщо події з'являються поодиноці, а не по декілька груп відразу.

Потік подій називається найпростішим (стаціонарним пуассонівським), якщо він має відразу три властивості: 1) стаціонарну, 2) ординарну, 3) не має наслідків.

Найпростіший потік має найпростіший математичний опис. Серед потоків він виконує таку ж особливу функцію, як і закон нормального розподілу серед інших законів розподілу. А саме: при накладанні великої кількості незалежних, стаціонарних та ординарних потоків (порівнянних між собою за інтенсивністю) виходить потік, близький до найпростішого.

Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ інтервал T між сусідніми подіями має показовий (експоненціальний) розподіл із

щільністю

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

де λ – параметр показового закону.

Для випадкової величини T , що має показовий розподіл, математичне очікування m_T – це величина, обернена до параметра, де середнє квадратичне відхилення σ_T дорівнює математичному сподіванню

$$m_T = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}.$$

6.4.6. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів

Дослідники марківських процесів із дискретними станами та безперервним часом вважають, що всі переходи системи S зі стану в стан відбуваються під дією найпростіших потоків подій (потоки викликів, потоки відмов, потоки відновлень та ін.). Якщо всі потоки подій, що переводять систему S зі стану в стан, є найпростішими, то процес, що протікає в системі, буде марковським.

Отже, на систему, що перебуває в стані S_i , діє найпростіший потік подій. Щойно з'явиться перша подія цього потоку, відбувається «стрибок» системи зі стану S_i у стан S_j (на графі станів за стрілкою $S_i \rightarrow S_j$) (рис. 6.39).

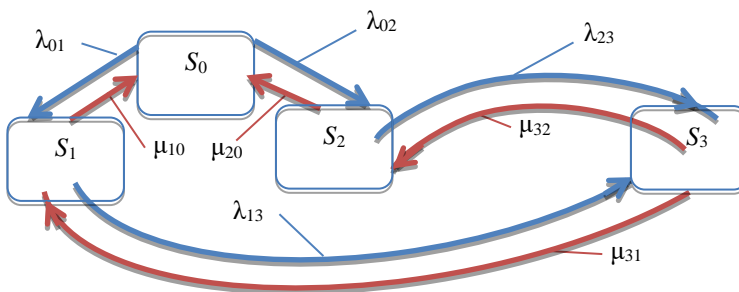


Рис. 6.39. Розмічений граф станів системи S

Для наочності на графі станів системи біля кожної дуги проставляють інтенсивність того потоку подій, який переводить систему по даній дузі (стрілці). λ_{ij} – інтенсивність потоку подій, які переводять систему із стану S_i в S_j . Такий граф називається розміченим. Для нашого прикладу розмічений граф наведено на рис. 6.39, де λ_{ij} – інтенсивність потоку відмов; μ_{ij} – інтенсивність потоку відмовлень.

Припустимо, що середній час ремонту приладу не залежить від того, ремонтується один прилад чи обидва відразу. Ремонт кожного приладу зайнятий окремий фахівець.

Нехай система перебуває в стані S_0 . У стан S_1 її переводить потік відмов першого приладу. Його інтенсивність визначають за формулою

$$\lambda_{01} = \frac{1}{T_{\text{ср.роб.1}}},$$

де $T_{\text{ср.роб.1}}$ – середній час безвідмовної роботи першого приладу.

Зі стану S_1 в S_0 систему переводить потік «закінчень ремонтів» першого приладу. Його інтенсивність визначається як

$$\mu_{01} = \frac{1}{T_{\text{ср.рем.1}}},$$

де $T_{\text{ср.рем.1}}$ – середній час ремонту першого приладу.

Аналогічно обчислюється інтенсивність потоків подій, які переводять систему по всіх дугах графа. Маючи розмічений граф станів системи, будують математичну модель цього процесу.

Припустимо, що дана система S має n можливих станів S_1, S_2, \dots, S_n . Імовірність i -го стану $p_i(t)$ – це імовірність того, що у момент часу t система перебуває в стані S_i . Очевидно, що для будь-якого моменту часу сумарна імовірність станів дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Для обчислення сумарної імовірності станів $p_i(t)$ (як функції часу) складаються та розв'язуються рівняння Колмогорова. Це рівняння особливого виду, в яких невідомими є функції імовірності

станів. Правило складання цих рівнянь розглянемо без доказів. Але спершу пояснимо поняття фінальної імовірності стану.

Що відбуватиметься з імовірності станів за $t \rightarrow \infty$? Чи прямуватимуть $p_1(t), p_2(t), \dots$ до якихось меж? Якщо такі межі існують і не залежать від початкового стану системи, то це фінальна імовірність станів:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = \overline{1, n},$$

де n – кінцева кількість станів системи.

Кінцева імовірність станів – це не змінні величини (функції часу), а сталі числа.

Очевидно, що

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Фінальна імовірність стану S_i – це середній відносний час перебування системи в цьому стані.

Правило складання системи рівнянь Колмогорова. У кожній лівій частині рівняння системи міститься фінальна імовірність даного стану p_i помножена на сумарну інтенсивність всіх потоків, а в правій його частині – сума добутку інтенсивностей усіх потоків (що входять в i -й стан) на імовірності тих станів, з яких ці потоки виходять.

Користуючись цим правилом, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0 = \mu_{10} p_1 + \mu_{20} p_2; \\ (\mu_{10} + \lambda_{13}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \mu_{31} p_3; \\ (\mu_{20} + \lambda_{23}) p_2 = \lambda_{02} p_0 + \mu_{32} p_3; \\ (\mu_{31} + \lambda_{32}) p_3 = \mu_{13} p_1 + \mu_{23} p_2. \end{cases}$$

Систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими p_0, p_1, p_2, p_3 , здавалося б, можна розв'язати. Але ці рівняння однорідні (не мають вільного члена) і визначають невідомі величини тільки з точністю до довільного множника.

Проте можна скористатись умовою нормування:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (6.14)$$

За допомогою (6.14) розв'язують систему. При цьому одне (будь-яке) з рівнянь можна відкинути, бо воно є наслідком інших.

Приклад. Система S має три стани S_1 , S_2 та S_3 . Їх фінальна імовірність дорівнює відповідно 0,2; 0,3 та 0,5. Це означає, що система в граничному стаціонарному стані в середньому $2/10$ часу проводить в стані S_1 ; $3/10$ – в стані S_2 та $5/10$ – в стані S_3 .

Припустимо, що значення інтенсивностей потоків дорівнюють:

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= \lambda_{23} = 1; \\ \lambda_{13} &= \lambda_{02} = 2; \\ \mu_{10} &= \mu_{32} = 2; \\ \mu_{20} &= \mu_{31} = 3. \end{aligned}$$

Четверте рівняння відкидаємо, додаючи замість нього умову нормування:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

$$p_0 = 6/15 = 0,4; \quad p_1 = 3/15 = 0,2; \quad p_2 = 4/15 \approx 0,27; \quad p_3 = 2/15 \approx 0,13.$$

Тобто в граничному стаціонарному режимі система S в середньому 40 % часу проводитиме в стані S_0 (обидва прилади справні), 20 % – в стані S_1 (перший прилад ремонтується, другий – працює), 27 % – в стані S_2 (другий прилад ремонтується, перший – працює), 13% – в стані S_3 (обидва прилади ремонтуються). Знаючи фінальну імовірність можна оцінити середню ефективність роботи системи та завантаження ремонтних органів.

Нехай система S в стані S_0 (повністю справна) приносить за одиницю часу дохід в розмірі 8 умовних одиниць (у.о.), в стані S_1 – 3 у.о., в стані S_2 – 5 у.о., в стані S_3 – не приносить доходу. Тоді в граничному стаціонарному режимі середній дохід за одиницю часу дорівнюватиме $W = 0,4 \cdot 8 + 0,2 \cdot 3 + 0,27 \cdot 5 = 5,15$ у.о.

Вимірювальний комплекс №1 ремонтують за час $p_1 + p_2 = 0,2 +$

$$+ 0,13 = 0,33.$$

Вимірювальний комплекс №2 ремонтують за час $p_1 + p_2 = 0,27 + 0,13 = 0,4$.

Виникає задача оптимізації. Припустимо, що можна зменшити середній час ремонту першого або другого вимірювального комплексу (чи обох), але це обійдеться в певну суму. Виникає питання: «Чи окуплять себе підвищені витрати на ремонт, пов'язані з пришвидшенням ремонту?». Потрібно буде розв'язати систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими.

6.4.7. Приклади систем масового обслуговування

6.4.7.1. Одноканальна система масового обслуговування з відмовами

Припустимо, що до системи надходить пуассонівський потік замовлень з інтенсивністю q , а обслуговування кожного замовлення триває випадковий час і має експонентний розподіл із параметром μ . Визначимо абсолютну та відносну пропускну здатність СМО.

Вихідний потік із системи в загальному випадку матиме інтенсивність, нижчу за вхідний потік через втрату частини заявок. Інтенсивність вихідного потоку характеризує абсолютну пропускну здатність. Одноканальна система може знаходитись в одному з двох можливих станів: система вільна (індекс 0) та система зайнята обслуговуванням заявки (індекс 1). На підставі цього графа запишемо диференціальне рівняння

$$P_0'(t) = -qP_0(t) + mP_1(t).$$

Його варто доповнити рівнянням нормування

$$P_0(t) + P_1(t) = 1$$

та початковими умовами $P_0(0) = 1$, тобто в початковий момент часу немає жодної заявки.

Запишемо цю систему рівнянь у канонічній формі:

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt + qP_0(t) - mP_1(t) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь відносно P_0 , одержимо

$$P_0(t) = \frac{m}{q+m} + \frac{q}{q+m} e^{-(q+m)t}.$$

Зрозуміло, що $P_0(t)$ – це відносна пропускна здатність системи, тобто це частка потоку, яка пропускається системою в момент часу t . У межах, де t прагне до нескінченності, одержимо

$$P_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = \frac{m}{q+m} = \frac{T}{T+t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Важливою характеристикою багатоканальної СМО є середня кількість зайнятих каналів. Цю характеристику можна визначити за стандартною формулою математичного сподівання за відомих P_k :

$$M_k = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + n \cdot P_n.$$

Середню кількість зайнятих каналів у багатоканальній СМО можна легко визначити за абсолютною пропускною здатністю системи, як

$$M_k = \frac{A}{m} = \frac{q(1 + P_n)}{\mu} = \rho(1 - P_n).$$

Дійсно, A – середня кількість заявок, які обслуговуються за одиницю часу, а один канал обслуговує в середньому μ заявок за одиницю часу.

Приклад. Система має один канал обслуговування, на який надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Потік обслуговувань має інтенсивність μ . Заявка, що застала систему зайнятою, відразу ж залишає її. Обчислити абсолютну та відносну пропускну

спроможність СМО та імовірність того, що заявка, яка прийшла у момент часу t , отримає відмову.

Система за будь-якого $t > 0$ може перебувати в двох станах: S_0 – канал вільний; S_1 – канал зайнятий. Перехід із S_0 у S_1 пов'язаний із появою заявки та негайним початком її обслуговування.

Перехід із S_1 до S_0 здійснюється, щойно чергове обслуговування завершиться (рис. 6.40).

Вихідні характеристики (характеристики ефективності) цієї та інших СМО даватимуться без висновків та доказів.

Абсолютна пропускна здатність (середня кількість заявок, які обслуговуються за одиницю часу)

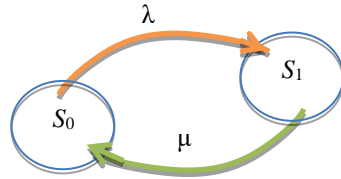


Рис. 6.40. Граф станів одноканальної СМО з відмовами

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu},$$

де λ – інтенсивність потоку заявок (величина, обернена до середнього проміжку часу між заявками, що надходять, $\overline{t_z}$); μ – інтенсивність потоку обслуговувань (величина, обернена до середнього часу обслуговування $\overline{t_{зв}}$).

Відносна пропускна здатність (середня частка заявок, які обслуговуються системою)

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Імовірність відмови (заявка залишить СМО невиконаною):

$$P_{\text{від}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Очевидними є співвідношення:

$$Q = 1 - P_{\text{від}};$$

$$P_{\text{від}} = 1 - Q.$$

Приклад. Технічна система складається з одного вимірювального приладу. Наприклад, надходять замовлення на вимірювання деталей у середньому через 0,5 год. ($\bar{t}_3 = 0,5$ год.). Середній час вимірювання однієї деталі дорівнює $\bar{t}_{\text{від}} = 0,6$ год. Якщо під час надходження заявки на вимірювання деталі прилад зайнятий, то деталь прямує на інший прилад. Обчислити абсолютну і відносну пропускну здатність системи та імовірність відмови щодо вимірювання деталі.

Розв'язання:

$$\lambda = 1/\bar{t}_3 = 1/0,5 = 2;$$

$$\mu = 1/\bar{t}_{\text{зв}} = 1/0,6 \cong 1,67;$$

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \frac{2 \cdot 1,67}{2 + 1,67} = 0,91;$$

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1,67}{2 + 1,67} = 0,455 \cong 0,46.$$

Тобто в середньому майже 46 % деталей вимірюється цим приладом, а майже 54 % деталей направляють вимірювати іншими приладами

$$P_{\text{від}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{2}{2 + 1,67} \cong 0,54.$$

6.4.7.2. Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням

Розглянемо одноканальну СМО, на вхід якої надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю q . Інтенсивність обслуговування – m . Припустимо, що маємо n місць для чекання, тобто заявка, що прийшла в систему, коли в ній зайняті всі n місць для чекання, залишає систему необслугованою. Така система може перебувати в одному з $(m + 2)$ станів:

- система вільна;
- система зайнята, але черги немає;
- система зайнята, в черзі перебуває одна заявка;

- система зайнята, в черзі перебуває дві заявки;
-;
- система зайнята, в черзі перебуває n заявок.

Позначимо ці стани відповідно S_0, S_1, \dots, S_{n+1} . Використовуючи позначення $\rho = \frac{q}{m}$, запишемо:

$$P_k = \rho^k P_0,$$

$$P_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n+1})^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{n+1} \rho^j \right)^{-1}.$$

Записавши суму геометричної прогресії $\sum_{j=0}^{n+1} \rho^j$ у вигляді $\frac{(1-\rho^{n+2})}{1-\rho}$, одержуємо

$$P_0 = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}.$$

Відносна пропускна здатність системи

$$1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+1}(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}.$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = q(1 - P_{\text{отк}}).$$

Середня довжина черги визначається за формулою

$$M_R = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)P_k = \rho^2 P_0 \sum_{k=1}^n k\rho^{k-1}.$$

Провівши перетворення, одержимо:

$$M_R = \rho^2 \frac{[1 - \rho^n(n+1) - n\rho]}{(1-\rho^{n+2}) \cdot (1-\rho)}.$$

Обчислимо математичне сподівання кількості заявок, які перебувають безпосередньо у фазі обслуговування. Для одноканальної

системи випадкова величина, яка нас цікавить, може набувати двох значень: 1 – канал зайнятий; 0 – канал вільний. Таким чином, середня кількість заявок, які перебувають у фазі обслуговування, дорівнює:

$$M_W = 0 \cdot P_0 + 1(1 - P_0) = 1 - P_0.$$

Підсумкове значення середньої кількості заявок, які перебувають у системі:

$$M_K = M_R + M_W.$$

Часом очікування є сума випадкової кількості випадкових величин:

$$t_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^r \xi_k.$$

У теорії ймовірностей існує тотожність Вальда: математичне сподівання суми випадкової кількості R однакового розподілу випадкових величин e дорівнює добутку математичного сподівання кількості доданків множників на математичне сподівання кожного доданка множника. Відповідно до тотожності Вальда маємо середній час сподівання обслуговування:

$$M \cdot t_{\text{оч}} = M_R \cdot M_{\xi} = \frac{M_{\xi}}{q}.$$

Якщо в СМО необмежена кількість місць для чекання, то стаціонарний режим встановлюється (черга не зростає безмежно) тільки при виконанні умови $\rho < 1$. Якщо зазначена умова виконується, то можна записати, що $P_k = p_k \cdot (1 - p)$.

Зрозуміло, що за відсутності обмежень на довжину черги кожна із заявок, що надійшла до системи, рано чи пізно буде виконана, тому абсолютна пропускна здатність системи дорівнює q . Середню кількість заявок у черзі визначимо як

$$M_R = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Середня кількість заявок у системі визначається за формулою:

$$M_K = M_R + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Середній час очікування обчислюється за формулою:

$$M \cdot t_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{q \cdot (1-\rho)}.$$

Середній час перебування заявки в системі визначається так:

$$M \cdot t_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)}.$$

6.4.7.3. Багатоканальна система масового обслуговування з очікуванням

Розглянемо n -канальну СМО з очікуванням, на вхід якої надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю q . Інтенсивність обслуговування на кожному каналі дорівнює μ .

У системі маємо m місць для очікування, з яких заявка може надходити на будь-який канал, що звільнився. Нехай S_k – k зайнятих каналів; S_{n+1} – зайняті всі n каналів та 1 заявка стоїть у черзі ($1 < m$). Введемо позначення $\rho = \frac{q}{\mu}$.

Запишемо показники ефективності розглянутої СМО. Імовірність відмови в цій системі

$$P_{\text{відм}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^n \cdot n!} P_0.$$

Відносна пропускна здатність системи дорівнює додатковій ве-

личині

$$q = 1 - P_{\text{оч}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0.$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = q \cdot g = q \cdot \left(1 - P_0 \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right).$$

Середня кількість зайнятих каналів визначається як

$$M_Z = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - P_0 \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right).$$

Середня кількість заявок у черзі

$$M_R = \sum k \cdot P_{n+k} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{n \cdot n!} \cdot \sum_{k=1}^m k \cdot \bar{\rho}^{k-1}.$$

Застосувавши вираз похідної для суми геометричної прогресії, одержуємо, що

$$M_R = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{n \cdot n!} = \frac{1 - (m+1 - m \cdot \bar{\rho}) \cdot \bar{\rho}^m}{(1 - \bar{\rho})^2}.$$

Середню кількість заявок у системі можна обчислити як суму $M_K = M_Z + M_R$.

Середній час очікування визначається як

$$M \cdot t_{\text{оч}} = \frac{1}{n \cdot \mu} \cdot \sum k \cdot P_{n+k} = \frac{\rho^n \cdot P_0}{\mu \cdot n \cdot n!} \cdot \sum_{k=1}^m k \cdot \bar{\rho}^{k-1} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{\mu \cdot n \cdot n!} \cdot \frac{(m+1 - m \cdot \bar{\rho}) \cdot \bar{\rho}^m}{(1 - \bar{\rho})^2}.$$

Очевидно, що $M t_{\text{оч}}$ можна було б одержати безпосередньо, знаючи середню кількість заявок у черзі M_T :

$$M \cdot t_{\text{оч}} = \frac{M_R}{\mu}.$$

Середній час перебування заявки в системі:

$$M \cdot t_{\text{сист}} = M \cdot t_{\text{оч}} + \frac{g}{\mu}.$$

6.4.7.4. *N*-канальна СМО з відмовами (задача Ерланга)

Це одна з основних задач теорії масового обслуговування, яка виникла в результаті практичних потреб телефонії та була вирішена на початку ХХ століття датським математиком Ерлангом.

Дано систему з n каналів, на які надходить потік заявок з інтенсивністю λ . Потік обслуговувань має інтенсивність μ . Заявка, що застала систему зайнятою, відразу ж залишає її.

Обчислити абсолютну та відносну пропускну здатність СМО; імовірність того, що заявка, яка прийшла у момент часу t , отримає відмову; середню кількість заявок, які обслуговуються одночасно (середню кількість зайнятих каналів).

Розв'язання

Стан системи S нумерується за максимальною кількістю заявок, які перебувають у системі, та збігається з кількістю зайнятих каналів:

- S_0 – в СМО немає жодної заявки;
- S_1 – в СМО міститься одна заявка (один канал зайнятий, інші вільні);
- S_2 – в СМО міститься дві заявки (два канали зайняті, інші вільні);
- ...
- S_n – в СМО міститься n заявок (всі n каналів зайняті).

Граф станів СМО представлено на рис. 6.41.

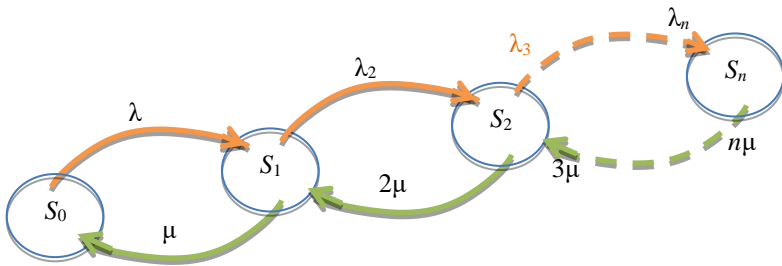


Рис. 6.41. Граф станів для n -канальної СМО з відмовами

Чому граф станів розмічено саме так? Зі стану S_0 в стан S_1 систему переводить потік заявок з інтенсивністю λ . Як тільки надходить заявка, система переходить зі стану S_0 в S_1 . Якщо система знаходилася в стані S_1 і надійшла ще одна заявка, то вона переходить в стан S_2 і т.д.

Чому такі інтенсивності у нижніх стрілок (дуг графа)? Припустимо, що система перебуває в стані S_1 (працює один канал). Він здійснює μ обслуговувань за одиницю часу. Тому дуга переходу зі стану S_1 в стан S_0 навантажена інтенсивністю μ .

Припустимо, що система перебуває в стані S_2 (працюють два канали). Щоб їй перейти в S_1 , потрібно, щоб перший або другий канал закінчив обслуговування. Сумарна інтенсивність їх потоків дорівнює 2μ і т.д.

Вихідні характеристики (характеристики ефективності) цієї СМО визначаються так.

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \frac{p_0}{n!} \right],$$

де n – кількість каналів СМО; p_0 – імовірність знаходження СМО в початковому стані, коли всі канали вільні (фінальна імовірність знаходження СМО в стані S_0).

Для написання формули з визначення p_0 , розглянемо рис. 6.42.

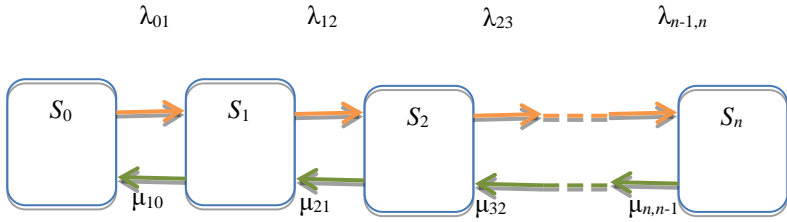


Рис. 6.42. Граф станів для схеми «знищення та розмноження»

Граф на рис. 6.42 ще називають графом станів для схеми «загибелі та розмноження». Загальна формула (без доказу) для p_0 матиме вигляд:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{n,n-1} \dots \mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}} \right)^{-1}.$$

Решту фінальної імовірності станів СМО запишемо так:

– імовірність того, що СМО перебуває в стані S_1 (один канал зайнятий):

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} p_0;$$

– імовірність того, що СМО перебуває в стані S_2 (два канали зайняті):

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} p_0;$$

– імовірність того, що СМО перебуває в стані S_n (всі канали зайняті):

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{n,n-1} \dots \mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}} p_0.$$

Для n -канальної СМО з відмовами

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \right)^{-1}, \quad (6.15)$$

при цьому:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0; \quad (6.16)$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0. \quad p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0; \quad (6.17)$$

(6.18)

Відносна пропускна здатність

$$Q = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \frac{p_0}{n!}.$$

Нагадаємо, що це середня частина заявок, які обслуговуються системою, при цьому

$$A = \lambda Q; \quad Q = 1 - P_{\text{відм}}.$$

Імовірність відмови

$$P_{\text{відм}} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \frac{p_0}{n!}. \quad (6.19)$$

Існує ймовірність того, що замовлення залишить СМО не виконаним. Очевидно, що $P_{\text{відм}} = 1 - Q$.

Середня кількість зайнятих каналів (середня кількість заявок, які обслуговуються одночасно):

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{p_0}{n!} \right],$$

при цьому

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} Q.$$

Приклад. Технічна система (ділянка вимірювальних комплексів) складається із трьох однакових вимірювальних комплексів. До системи на вимірювання надходять прилади приблизно через 0,5 год. (\bar{t}_3). Середній час вимірювання одного приладу $\bar{t}_{\text{відм}} = 0,6$ год. Якщо під час надходження заявки на вимірювання приладу всі вимірювальні комплекси зайняті, то прилад прямує на іншу ділянку таких же вимірювальних комплексів.

Обчислити фінальну імовірність станів системи та характеристики (показники ефективності) даної СМО можна як

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_3} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Маємо в середньому дві заявки на вимірювання приладів за годину:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_{\text{від}}} = \frac{1}{0,6} \cong 1,67.$$

Граф станів системи зображено на рис. 6.43.

Можливі такі стани системи:

- S_0 – у СМО (на ділянці) немає жодної заявки;
- S_1 – у СМО одна заявка;
- S_2 – у СМО дві заявки;
- S_3 – у СМО три заявки (зайнято всі три верстати).

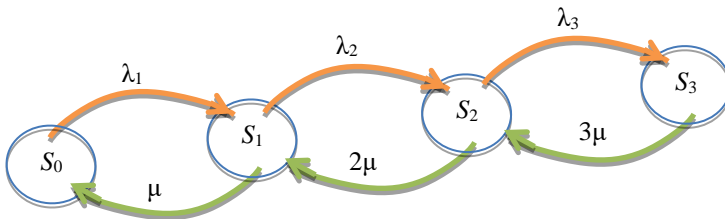


Рис. 6.43. Граф станів системи

Імовірність того, що всі вимірювальні комплекси вільні відповідно до (6.15) має такий вигляд:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3\mu^3}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2}{1,67} + \frac{2^2}{2 \cdot 1,67^2} + \frac{2^3}{2 \cdot 3 \cdot 1,67^3}\right)^{-1} = \frac{1}{3,21} \cong 0,31.$$

Імовірність того, що один вимірювальний комплекс зайнятий за (6.16) така:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{2}{1,67} 0,31 \cong 0,37.$$

Імовірність того, що два вимірювальні комплекси зайняті за (6.17) має такий вигляд:

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = \frac{2^2}{2 \cdot 1,67^2} 0,31 \cong 0,22.$$

Імовірність того, що всі три вимірювальні комплекси зайняті за (6.18) має вигляд:

$$p_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0 = \frac{2^3}{2 \cdot 3 \cdot 1,67^3} 0,31 \cong 0,09.$$

$$A = \lambda \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right] = 2 \left[1 - \left(\frac{2}{1,67}\right)^3 \frac{0,31}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] \cong 1,82.$$

$$Q = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!} = 1 - \left(\frac{2}{1,67}\right)^3 \frac{0,31}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cong 0,91;$$

$$P_{\text{віль}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!} = 1 - Q \cong 0,09.$$

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right] = \frac{2}{1,67} 0,91 \cong 1,09.$$

Тобто в середньому в цій технічній системі вимірюється 1,82 приладів за годину (майже 91 % приладів, що надійшли на вимірювання), при цьому приблизно 9 % приладів прямує для вимірювання на інші ділянки. Одночасно працює, як правило, один вимірювальний комплекс ($\bar{k} = 1,09$). Але через випадкові характеристики потоку заявок іноді працюють одночасно всі три вимірювальні комплекси ($p_3 = 0,09$), звідси 9 % відмов.

Можливі постановки задач оптимізації n -канальних СМО з від-
мовами. Визначити оптимальну кількість каналів, які забезпечують
мінімум витрат на систему, за умови досягнення необхідного рівня
її безвідмовної роботи.

Приклад. Нехай $\frac{\lambda}{\mu} = 1$, $P_{\text{від}} \leq 0,03$, цільова функція (витрати на
СМО) $y = c n \rightarrow \min$, де $c - \text{const}$.

Визначити $n_{\text{опт}}$.

Розв'язання. За формулою (6.19):

$$P_{\text{від}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!};$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1 \Rightarrow P_{\text{від}} = \frac{P_0}{n!};$$

$$P_{\text{від}} \leq 0,03 \Rightarrow \frac{P_0}{n!} \leq 0,03 \quad \text{або} \quad \frac{P_0}{n!} \geq 33.$$

Інакше можна записати як $n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \geq 33$. Остання нерів-
ність починає виконуватися за $n_{\text{опт}} = 4$, оскільки

$$n = 1 \rightarrow 1 \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2 < 33; \quad n = 2 \rightarrow 1 \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) = 5 < 33;$$

$$n = 3 \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) = 16 < 33;$$

$$n = 4 \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) = 65 > 33.$$

Визначити оптимальну кількість каналів, які забезпечують мак-
симальний прибуток від експлуатації СМО за одиницю часу.

Використання кожного каналу за одиницю часу обходиться в
певну суму. Що більше каналів, то більше витрат на експлуатацію
СМО. Разом з тим, що більше каналів (за λ та $\mu - \text{const}$), то більша
частка виконаних заявок. А кожна виконана заявка дає певний при-
буток за одиницю часу.

При збільшенні кількості каналів зростають доходи D , але зрос-
тають і витрати на експлуатацію СМО – R . Щоб розв'язати цю за-
дачу, необхідно визначити оптимальну кількість каналів $n_{\text{опт}}$, яка
забезпечує максимум цільової функції $P = D - R \rightarrow \max$, тобто по-

трібно максимізувати прибуток за одиницю часу.

6.5. Елементи теорії розкладів

Якість функціонування сучасного виробництва багато в чому визначається рішеннями, які узвальноються на етапах календарного планування та оперативного управління. Особливо це актуально у зв'язку із впровадженням та застосуванням сучасних комп'ютеризованих виробництв, роботизованих вимірювальних та діагностичних систем і комплексів. Оперативне управління та планування таких систем та комплексів базується на досягненнях теорії розкладів [43].

Теорія розкладів – це наука, що займається дослідженнями детермінованих обслуговуючих систем щодо оптимізації розкладів їх функціонування.

Приклади таких систем:

- цех, ділянка, комплекс, на яких здійснюються вимірювання;
- вищий навчальний заклад, де викладачі навчають студентів і т.д.

У будь-якому випадку є кінцева множина вимог (деталей, викладачів тощо) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ та кінцева множина приладів (верстатів, груп студентів та ін.) $M = \{1, 2, \dots, m\}$.

Передбачається, що i -та вимога на кожній стадії його обслуговування q (наприклад, на кожній операції технологічного процесу) може бути обслужена будь-яким із приладів $L \in M$ (але одночасно не більше як один). Передбачається також, що кожний прилад одночасно може виконувати не більше однієї вимоги.

У теорії розкладів розглядають різні системи обслуговування:

- системи потокового типу, в яких кожна вимога $i \in N$ спочатку обслуговується приладами першої групи, потім другої групи і так далі, доки не буде обслужено приладами останньої r -ї групи;
- системи з різним порядком (маршрутами) проходження приладів, вимогами і т.д.

В останніх системах із послідовними приладами для кожної вимоги $i \in N$ задається своя, специфічна для цієї вимоги послідовність $L^i = (L_1^i, L_2^i, \dots, L_{ri}^i)$ обслуговування приладами. Вимога i спочатку обслуговується приладом L_1^i , потім L_2^i і т.д. доки не буде обслужено приладом L_{ri}^i . Послідовності обслуговування можуть бути

різними для різних вимог та можуть містити повторення приладів.

У будь-якому разі, якщо вимога i на стадії q повинна або може бути обслужена приладом $L = L_q^i$, то передбачається задана тривалість $t_{iL} \geq 0$ його обслуговування приладом. Запис $t_{iL} = 0$, як правило, означає, що за умовою задачі вимога i на стадії q приладом L не обслуговується.

Разом із величинами t_{iL} також можуть бути задані момент $d_i \geq 0$ надходження вимоги i в систему та директивний термін $D_i > 0$, до якого необхідно завершити обслуговування вимоги.

Процес функціонування обслуговуючої системи може бути описано шляхом задавання розкладу (календарного плану, тимчасового графіка і т.п.).

Розклад – сукупність вказівок щодо того, які саме вимоги та якими саме приладами обслуговуються в кожний момент часу.

Розклад розглядається як сукупність $\{S_1(t), S_2(t), \dots, S_m(t)\}$ шматково-постійних безперервних зліва функцій, кожна з яких задана на інтервалі $0 \leq t \leq \infty$ та набуває значення $0, 1, \dots, n$.

Якщо $S_L(t') = i \neq 0$ (i – номер вимоги), то в момент часу t' прилад $L \in M$ обслуговує вимогу $i \in N$. Якщо $S_L(t') = 0$, то в момент часу t' прилад L простоє.

При завданні розкладу повинні дотримуватися всі умови та обмеження, які впливають з постановки даної задачі, тобто розклад повинен бути допустимим.

Приклад. На рис. 6.44 наведено графік розкладу $S_i(t)$, $i \in N$ обслуговування вимог $N = \{1, 2, 3, 4\}$ приладами $M = \{1, 2, 3\}$ при різних маршрутах обслуговування вимог. Усі тривалості обслуговування дорівнюють «1».

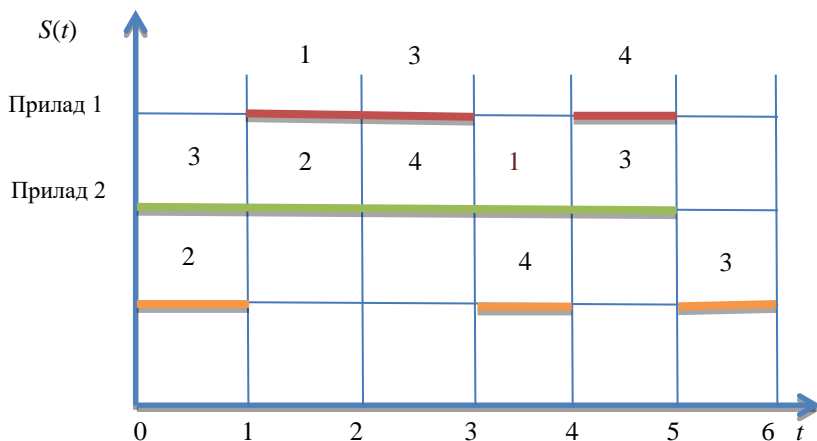


Рис. 6.44. Графік розкладу обслуговування вимог $N = \{1, 2, 3, 4\}$ приладами $M = \{1, 2, 3\}$

Тут $L^1=(1, 2)$, тобто перша вимога обслуговується першим та другим приладами; $L^2=(3, 2)$ – друга вимога обслуговується третім та другим приладами; $L^3=(2, 1, 2, 3)$ – третя вимога обслуговується другим, першим, знову другим та третім приладами; $L^4=(2, 3, 1)$ – четверта вимога обслуговується другим, третім і першим приладами. $d_1 = 1$ – момент надходження вимоги 1 до системи; $d_2 = d_3 = 0$ – моменти надходження вимог 2 та 3 до системи; $d_4 = 2$ – момент надходження вимоги 4 до системи.

$D_1 = 4$ – директивний термін завершення обслуговування вимоги 1; $D_2 = 2$ – директивний термін завершення обслуговування вимоги 2; $D_3 = 6$ – директивний термін завершення обслуговування вимоги 3; $D_4 = 5$ – директивний термін завершення обслуговування вимоги 4.

Прилад 1 в часовому інтервалі $(1, 2]$ обслуговує вимогу 1; в інтервалі $(2, 3]$ – вимогу 3; в інтервалі $(4, 5]$ – вимогу 4.

Прилад 2 в інтервалі $(0, 5]$ без простоїв обслуговує вимоги 3, 2, 4, 1, 3 і т.д. Цей розклад можливий, тобто кожний прилад одночасно обслуговує не більше однієї вимоги й i -та вимога обслуговується одночасно одним приладом.

Якщо існує декілька допустимих розкладів, то потрібно вибрати кращий із них. У теорії розкладів якість розкладу у багатьох випадках оцінюють так. Кожний (допустимий) розклад S однозначно ви-

значає вектор $\bar{t}(S) = (\bar{t}_1(S), \bar{t}_2(S), \dots, \bar{t}_n(S))$ моментів завершення обслуговування вимог. Задається дійсна неспадна за кожною зі змінних функція $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Якість розкладу S оцінюється значенням цієї функції за $x = \bar{t}(S)$. Із двох розкладів кращим вважається той, якому відповідає менше значення $F(x)$. Розклад, якому відповідає найменше значення $F(x)$ (серед усіх допустимих розкладів), називається оптимальним.

При побудові оптимального за швидкістю розкладу $F(x) = \max\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. У цьому випадку $F(\bar{t}(S)) = t_{\max}(S)$, де $t_{\max}(S) = \max\{t_i(S)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

При побудові розкладу з найменшим сумарним часом обслуговування $F(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, при цьому $F(\bar{t}(S)) = \sum_{i=1}^n t_i(S)$.

При побудові розкладу з найменшим часом зсуву моментів завершення обслуговування вимог i щодо термінів D_i функція $F(x) = \max\{x_i - D_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

При цьому $F(\bar{t}(S)) = L_{\max}(S)$, де $L_{\max}(S) = \max\{\bar{t}_i(S) - D_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Оптимальний розклад може бути знайдено в результаті перебору кінцевої множини можливих варіантів. При цьому основна складність полягає в тому, що кількість таких варіантів дуже велика та зростає експоненціально зі зростанням розмірності задачі. Існують евристичні алгоритми формування розкладів, алгоритми на підставі методів лінійного та динамічного програмування. Задачі складання розкладів для деяких складних систем обслуговування не вирішено дотепер (NP – важкі задачі).

6.5.1. Формування розкладу роботи технічних систем методами лінійного та динамічного програмування

Ця методика розроблена в лабораторії дослідження операцій Ленінградського (Санкт-Петербурзького) державного університету під керівництвом професора І. В. Романовського.

Початкові дані для вирішення задачі (рис. 6.45):

1. Кількість даних видів приладів M . Види приладів нуме-

- руються числами $m = 1, 2, \dots, M$.
2. Кількість груп однотипних вимірювальних комплексів I . Групи нумеруються числами $i = 1, 2, \dots, I$.
 3. Технологічні маршрути (ТМ) вимірювання приладів. ТМ не містять зовнішніх операцій, які виконуються на вимірювальних комплексах іншої ділянки.

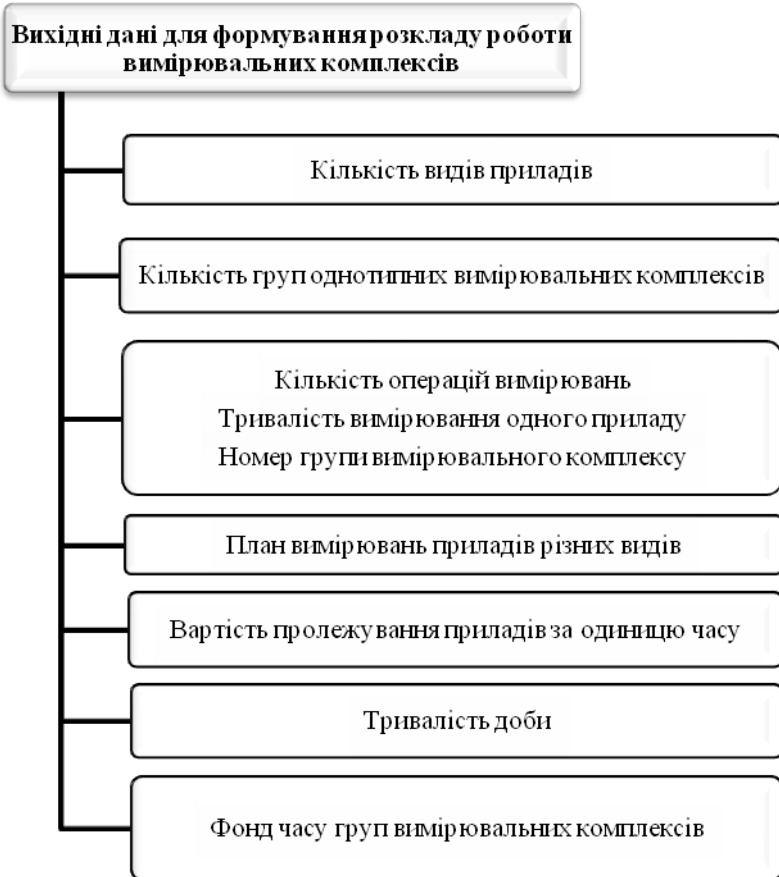


Рис. 6.45. Вихідні дані до задачі формування розкладу роботи вимірювальних комплексів

Для кожного виду приладів m ($m = \overline{1, M}$) задають:

1. Кількість операцій в ТМ – J^m . Номери операцій в ТМ позна-

- чають через j ($j = 1, 2, \dots, J^m$).
2. Тривалість вимірювання одного приладу j - t_j^m (при вимірюванні приладів m) $j = \overline{1, J^m}$.
 3. Номер групи вимірювальних комплексів – i_j^m , на якому виконуються вимірювання j , $j = \overline{1, J^m}$.
 4. План вимірювання приладів M видів – вектор $D = (d^1, d^2, \dots, d^M)$.
 5. Вартість γ^m пролежування приладів виду m ($m = \overline{1, M}$) за одиницю часу.

Нехай відрізок (термін) планування розбито на S частин, які для простоти називатимемо добою і нумеруватимемо числами $s = 1, 2, \dots, S$. Для кожної доби повинні бути задані тривалість доби σ_s , $s = 1, 2, \dots, S$ та фонд часу груп приладів i в добі s – f_{is} , $i = 1, 2, \dots, I$; $s = 1, 2, \dots, S$.

План випуску деталей кожного виду розбивається на партії обробки. Позначимо кількість партій вимірювань P та введемо для них єдину нумерацію, яка не залежить від виду приладів: $p = 1, 2, \dots, P$. Відома функція $m(p)$ за номером партії p , $p = \overline{1, P}$ дає номер виду деталі m , $m = \overline{1, M}$. В окремому випадку, коли здійснюється вимірювання за однією партією кожного виду приладів, то $p = m$ та $P = M$.

Кількість деталей у партії обробки p позначимо x_p , $p = \overline{1, P}$.

Тоді маємо рівність

$$\sum_{m(p)=m} x_p = d^m, \quad (6.20)$$

$$m = \overline{1, M},$$

де сума розмірів усіх партій для кожного приладу дорівнює плану її вимірювань.

Потрібно визначити кількість партій вимірювань P , кількість приладів x_p у партіях вимірювань $p = 1, 2, \dots, P$ та розклади роботи вимірювальних комплексів (вимірювань кожної партії) оптимальні з погляду критерію.

Допускається вибір критерію, який широко використовується. Надалі як критерій використовуватимемо вартість пролежування де-

талей.

Постановка задачі в термінах лінійного програмування позначимо:

$$Q = S \cdot I,$$

де S – кількість діб; I – кількість груп приладів.

Розглянемо Q -мірний вектор F і зведемо його параметри до табл. 6.17.

Таблиця 6.17

Визначення Q -мірного вектора F

Вектор F	11	12	...	1s	...	f_{11}	f_{12}	...	f_{1s}
Номер доби, s	1	2	...	S	...	1	2	...	S
Номер групи вимірювальних комплексів, i	I				...	S			

Першими компонентами вектора F є фонд часу першої групи вимірювальних комплексів в 1, 2, ..., S добі відрізка планування, другими – фонд часу другої групи вимірювальних пристроїв в тій же добі тощо. Наприклад, f_{22} – фонд часу другої групи обладнання в другій добі.

$$\sum_{p=1}^P r_{qp} x_p \leq F_q, \quad q = \overline{1, Q}. \quad (6.21)$$

Обчислимо вартість C_p пролежування одного приладу партії p при його вимірюванні за елементарним розкладом r_p . Визначимо час пролежування T_{sp} одного приладу партії p в добі s за цією методикою.

Якщо прилади партії вимірювались у добі s , то вважається, що $T_{sp} = 0$, якщо не вимірювались, то T_{sp} дорівнює тривалості доби $s - \sigma_s$. Припустимо, що повне вимірювання приладів партії p за розкладом r_p починається в добі s_1 та закінчується в добі s_2 . Тоді час пролежування T_p одному приладу партії p за розкладом можна визначити як суму часу пролежування за кожною добою, протягом яких прилад перебував у процесі вимірювання:

$$T_p = \sum_{s=s_1}^{s_2} T_{sp}.$$

Вартість пролежування c_p одного приладу партії p при його вимірюванні за розкладом r_p :

$$c_p = \gamma^{m(p)} T_p, \text{ де } p = \overline{1, P}.$$

а вартість пролежування всіх приладів партії p при їх вимірюванні за розкладом R_p дорівнюватиме $c_p x_p$, $p = \overline{1, P}$. Отже, вартість пролежування всіх партій дорівнює

$$C_{pp} = \sum_{p=1}^P c_p x_p. \quad (6.22)$$

У результаті приходимо до наступної задачі лінійного програмування: визначити цілочисельні невідомі P та x_p , ($p = \overline{1, P}$), мінімізуючи вартість пролежування всіх партій C_{pp} (6.22) при обмеженнях (6.20) та (6.21). Кількість обмежень дорівнює $M + Q = M + S \cdot I$.

Для вирішення задачі на персональному комп'ютері симплекс-методом використовують спеціальні алгоритми. При цьому задачу заздалегідь записують у матричній формі (тут не розглядається). Елементарні розклади формуються за допомогою методів динамічного програмування.

Динамічне програмування – методи вирішення оптимізаційних задач, в основі яких лежить ідея розбиття початкової задачі на послідовний ряд більш простих задач, що вирішують багатокрокові процеси, які протікають у часі (дискретному або безперервному).

Якщо записати вектор F як $F = (F_1, \dots, F_q, \dots, F_Q)$, то $F_q = f_{is}$, коли $q = (i-1)S + s$, $i = [(q-1)/S] + 1$, $s = q - (i-1)S = q - [(q-1)/S]S$, де $[a]$ – ціла частина числа a .

Ці рівняння дозволяють за номером групи вимірювальних комплексів i та номером доби s визначити номер q компоненти вектора F_q . І навпаки – за порядковим номером q компоненти вектора F_q –

відповідні йому номери груп вимірювальних комплексів i та доби s у компоненти вектора f_{is} .

Приклад. Розрахувати компоненти розкладу, якщо термін відрізка часу планування S дорівнює 30 діб.

Визначимо порядковий номер компоненти вектора F_q для другої групи вимірювальних комплексів на третій добі його роботи ($i = 2, s = 3$):

$$q = (i-1) S + s = (2-1) 30 + 3 = 33.$$

Обчислимо i та s при $q = 33$:

$$\begin{aligned} i &= [(33 - 1)/30] + 1 = 1 + 1 = 2, \\ s &= 33 - [(33 - 1)/30] 30 = 33 - 1 \cdot 30 = 3. \end{aligned}$$

Для кожної партії з номерами $p, p = \overline{1, P}$ розглянемо вектор r_p , структура якого аналогічна структурі вектора $F - r_p = (r_1, \dots, r_{qp}, \dots, r_{Qp})$.

Вектор r_p – елементарний розклад обробки партії p . Його компоненти визначають так.

Якщо процес j з вимірювання приладу з партії p виконується у добу s на групі вимірювальних комплексів $i = i_j^{m(p)}$, то в компоненту r_{qp} вектора з порядковим номером $q(i, s)$, розраховані за наведеними вище формулами для q, i, s , заносять час $i_j^{m(p)}$ вимірювання цього приладу в процесі j . Решта компонентів r_{qp} , які в добі s не вимірюються, вважаються рівними нулю.

Елементарним розкладом є розклад вимірювання одного приладу партії p . Розклад R_p для всієї партії p отримаємо, помноживши вектор елементарного розкладу r_p на кількість приладів у партії x_p : $R_p = r_p x_p$. Кожна компонента R_{qp} , $p = \overline{1, Q}$ вектора розкладу R_p дорівнює тривалості вимірювання партії p на групі вимірювальних комплексів $i(q)$ у добі $s(q)$: $R_{qp} = r_{qp} x_p$.

Загальна тривалість використання групи вимірювальних комплексів $i(q)$ в добі $s(q)$ всіма партіями $p, p = \overline{1, P}$ дорівнює:

$$\sum_{p=1}^P R_{qp} = \sum_{p=1}^P r_{qp} x_p.$$

Ця величина не повинна перевищувати фонд часу F_q групи вимірювальних комплексів $i(q)$ в добі $s(q)$.

6.6. Елементи теорії надійності в моделюванні технічних систем

Однією з основних проблем сучасного виробництва є проблема досягнення ефективності як вже існуючих, так і нових процесів технічних систем. Можливим напрямком вирішення даної проблеми є розробка методів забезпечення необхідних значень показників якості технічної системи, до яких можна віднести і показники її надійності.

Проблеми підвищення надійності та довговічності приладів та інформаційно-діагностичних комплексів є найважливішими при проектуванні та експлуатації. Завдання інтенсифікації створення нової техніки потребують перебудови процесу створення конструкцій, істотного розвитку, поглиблення та конкретизації методів досліджень і розрахунків технічних систем, а також розрахунків на надійність [44, 45].

Досягнення в галузі визначення надійності створених та експлуатованих складних технічних систем очевидні. За правильної організації випробувань досить легко визначити показники їх безвідмовності та довговічності. Гірші справа з новим проектуванням конструкцій, розрахунок надійності яких практично зводиться до визначення коефіцієнтів запасу. Головною перешкодою тут є відсутність ефективних і точних алгоритмів розрахунку, що ґрунтуються на узагальненні та комплексному використанні інформації за умови експлуатації проєктованих об'єктів та випробуванні аналогів.

Останні роки характеризуються інтенсивним упровадженням теоретично-ймовірнісних і статистичних методів аналізу та синтезу складних технічних систем, у тому числі й при оцінці надійності та довговічності.

Надійність – це здатність системи зберігати свою працездатність (якість) за певних умов експлуатації протягом заданого терміну служби.

Під **працездатністю** розуміють такий стан системи, за якого вона в даний момент часу відповідає усім вимогам, встановленим до основних параметрів, які характеризують належне виконання заданих функцій.

Надійність технічних систем є комплексною властивістю, яка залежить від призначення виробу, його якості та умов експлуатації.

*Властивість системи постійно зберігати свою працездатність за заданих режимів та умов експлуатації називається **безвідмовністю***. У технічній та економічній літературі поняття «безвідмовність» часто ототожнюють з «надійністю».

Безвідмовність системи можна оцінити за допомогою показників. Найбільш розповсюдженим показником безвідмовності є ймовірність безвідмовної роботи протягом певного часу, інтенсивність відмов, напрацювання на відмову тощо.

До основних показників безвідмовності відносять:

1. Імовірність безвідмовної роботи $P(t)$ – це імовірність того, що в заданому інтервалі часу t у виробі технічної системи не виникає відмови:

$$0 \leq P(t) \leq 1; P(0) = 1; P(\infty) = 0.$$

Функція $P(t)$ монотонно спадає, тобто в процесі експлуатації і зберігання надійність тільки знижується. Для визначення $P(t)$ використовують таку статичну оцінку:

$$P(t) = \frac{N - N_0}{N};$$

де N – кількість виробів, що входять до технічної системи, поставлених на випробування (експлуатацію); N_0 – кількість виробів технічної системи, що відмовили в перебігу часу t .

2. Імовірність безперервної роботи $P_{зб}(t)$ – це імовірність того, що в заданому інтервалі часу t не буде збою при експлуатації технічної системи

$$P_{зб}(t) = 1 - Q_{зб}(t);$$

де $Q_{зб}(t)$ – функція розподілу збоїв протягом часу t .

Для визначення стабільності оцінки маємо формулу

$$P_{зб}(t) = \frac{N - N_0}{N};$$

де N – кількість виробів технічної системи, які надійшли в експлуатацію; N_0 – кількість виробів, в яких відбувся збій протягом часу t .

3. Інтенсивність відмови $\lambda(t)$ – це умовна густина імовірності виникнення відмови невідновлюваного об'єкта певного моменту часу за умови, що до цього моменту відмова не виникла.

Для $\lambda(t)$ використовується така статистична оцінка:

$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{\text{сер}}(\Delta t)};$$

де $n(\Delta t)$ – кількість виробів технічної системи, що відмовили за інтервал часу (Δt) ; $N_{\text{сер}}(\Delta t)$ – середня кількість справних виробів технічної системи за інтервал часу (Δt)

$$N_{\text{сер}} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2}.$$

4. Середнє напрацювання (середній час безвідмовної роботи) T – це математичне очікування напрацювання до першої відмови:

$$T = \int_0^{\infty} P(t)d(t).$$

Ці показники розраховані для виробів технічної системи, які не підлягають відновленню.

Тому проблема оцінки надійності зводиться до прогнозування імовірності безвідмовної роботи системи залежно від можливих режимів роботи та умов експлуатації, інакше кажучи, до прогнозування величини часу, протягом якого не наступить подія – «відмова від роботи».

У теорії надійності розглядають такі узагальнюючі об'єкти:

1. Виріб (відновлюваний та невідновлюваний) – це одиниця продукції, яка випускається підприємством, цехом, дільницею тощо.

2. Елемент – це найпростіша складова частина об'єкта моделювання.

Наприклад, деталь складальної одиниці, вимірювальний прилад, карбюратор автомобіля.

3. Система або комплекс – сукупність спільно діючих елементів, призначена для самостійного виконання заданих функцій.

Наприклад, вимірювальний прилад при визначенні його надійності розглядається як система (комплекс), що складається з окремих елементів (привід та ін.), а при вивченні (моделюванні) надійності інформаційно-вимірювального комплексу – як елемент.

Надійність, згідно з ГОСТ 27.002–87, характеризується основними станами та подіями, що можуть виникати при їх функціонуванні (рис. 6.48). Для кожного типу технічної системи існують свої показники надійності. Визначення показників надійності тісно пов'язане з поняттями працездатного стану і відмови.



Рис. 6.48. Основні характеристики надійності

Відмова – це порушення працездатного стану об'єкта.

Працездатність – стан об'єкта, за якого значення всіх його параметрів, які дозволяють виконувати задані функції, відповідають вимогам нормативно-технічної та (або) конструкторської документації.

Коефіцієнт працездатності

$$K_p = \frac{T_{б.п}}{T_{ц} + T_{пр}},$$

де $T_{б.р}$ – час безвідмовної роботи; $T_{ц}$ – час обробки (вимірювання); $T_{пр}$ – час простоїв.

Термін служби – календарна тривалість від початку експлуатації об'єкта (або її відновлення після ремонту) до переходу його в граничний стан.

Напрацювання до відмови – напрацювання об'єкта від початку його експлуатації до виникнення первинної відмови (випадкова величина). **Напрацювання на відмову** – відношення часу напрацювання відновлюваного об'єкта до сумарної кількості простоїв.

Технічний ресурс – напрацювання об'єкта від початку експлуатації (або її відновлення після ремонту) до переходу у граничний стан (невипадкова, детермінована величина).

Довговічність – оцінюється кількісно як середній термін служби між ремонтами.

Ремонтпридатність – це пристосованість об'єкта до попередження та виявлення причин виникнення відмов, пошкоджень та усунення їх наслідків за допомогою ремонту і технічного обслуговування. Оцінюється кількісно через трудомісткість попередження виявлення й усунення несправності – середній час відновлення працездатності.

Показниками ремонтпридатності є:

1. Імовірність відновлення $S(t)$ – це імовірність того, що технічна система, що відмовила, буде відновлена протягом часу t :

$$S(t) = \frac{n_b}{N_{об}};$$

де n_b – кількість виробів технічної системи, час відновлення яких менше заданого часу t ; $N_{об}$ – кількість виробів технічної системи, що залишилися на відновленні.

2. Інтенсивність відновлення $M(t)$ – умовна густина розповсюдження часу відновлення для моменту часу t за умови, що до цього моменту відновлення виробу не відбулося:

$$M(t) = \frac{n_b(\Delta t)}{N_{в.ср}(\Delta t)};$$

де $n_b(\Delta t)$ – кількість відновлених виробів технічної системи за час Δt ; $N_{в.ср}(\Delta t)$ – середня кількість виробів технічної системи, які не

були відновлені протягом часу Δt .

3. Середній час відновлення T_B – це натуральна величина очікування відновлення:

$$T_B = \int_0^{\infty} (1 - S(t)) dt.$$

Статистична оцінка $T_d = \frac{\sum_{i=1}^{N_{CB}} t_{ib}}{N_{OB}}$,

$\sum_{i=1}^{N_{CB}} t_{ib}$ – сумарний час, витрачений на відбір та ліквідацію відмов (кількість відновлених відмов дорівнює кількості відмов).

4. Коефіцієнт готовності $K_r(t)$ – це імовірність того, що всі виробу технічної системи робочі у будь-який момент часу t .

Стационарний режим: $t \rightarrow \infty$, $K_r = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t)$.

Стационарна оцінка: $K_r = \frac{\sum_{i=1}^n t_{pi}}{\sum_{i=1}^n t_{pi} + \sum_{i=1}^n t_{bi}}$;

де t_{pi} – i -й інтервал часу справної роботи виробу технічної системи; t_{bi} – інтервал часу відновлення виробу технічної системи; n – кількість відмов виробу технічної системи.

Коефіцієнт оперативної готовності $K_{опер.}(t, \tau)$ робочий у будь-який момент часу t . **Коефіцієнт оперативної готовності** $K_{опер.}(t, \tau)$ – це імовірність того, що прилад буде робочий у будь-який момент часу t і безвідмовно пропрацює заданий час τ :

$$K_{опер.}(t, \tau) = K_r(t) \cdot P(\tau).$$

Визначають $K_{опер.}$ за статистичною оцінкою:

$$K_{опер.}(t, \tau) = \frac{N_i(\tau)}{N_0}.$$

Подія – це якісна характеристика випадкового результату дослідження. Наведемо приклади реальних випробувань (експериментів).

1. Підкидають монету, в результаті чого можуть випасти два результати: 1 – монета випаде догори «гербом» і 2 – догори написом.

2. Із колоди карт (36 шт.) навмання вибирають одну карту. Існує 36 можливих випадків, які можна пронумерувати числами 1, 2, ..., 36.

3. Стріляють по мішені. Зв'язавши з мішенню декартову систему координат, можна ототожнити з будь-яким результатом випробувань точку (x, y) координатної площини.

Спробуємо знайти спільні риси всіх наведених прикладів:

1) у кожному із випробувань існує визначений простір (множина) Ω можливих результатів ω випробувань, які називають елементарними подіями. У прикладі 1 $\Omega = \{0, 1\}$, у прикладі 2 $\Omega = \{1, \dots, 36\}$, у прикладі 3 $\Omega = \{x_1, x_2\}$;

2) результати випробувань детерміновані. Монета може впасти догори як «гербом», так і написом;

3) існує об'єктивна міра можливості різних результатів випробувань.

Отже, можна ввести поняття «випадкова подія» як множина A елементарних подій, якій відповідає ймовірність $P(A)$ – об'єктивна міра можливості цієї події.

Крім якісної характеристики випадкового результату дослідження існує й кількісна характеристика. Такою характеристикою є також випадкова величина, наприклад:

- кількість приладів, які накопичуються для запуску у виробництво нових інформаційно-вимірювальних комплексів;
- кількість приладів, які перебувають у накопичувачі для діагностувального центру;
- час безвідмовної роботи обладнання та інше.

Випадковою називається величина, яка в результаті дослідження набуває значення невідомого наперед. Випадкові величини можуть набувати як кінцевих значень, так і всіх значень із заданого відрізка (числової осі).

Випадкові величини існують двох видів: дискретні та безперервні.

Якщо кожному результату A_i випробування відповідає дійсне

число x_i , то кажуть, що задано дискретну випадкову величину.

6.6.1. Характеристики надійності технічних систем

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірними. Знаючи розподіл ймовірностей між можливими значеннями випадкової величини, можна до проведення випробувань робити висновки про те, які її значення з'являтимуться частіше, а які – рідше. Найпростішою формою представлення закону розподілу дискретної випадкової величини X є **ряд розподілу випадкової величини**:

X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_n
P_i	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Ряд розподілу можна зобразити графічно: усі можливі значення випадкової величини відкладають на осі абсцис, а відповідні їм імовірності – на осі ординат.

Вершини ординат з'єднують відрізками прямих (рис. 6.49). Така фігура називається багатокутником розподілу і є однією з форм задання дискретної випадкової величини X .

Більш наочне уявлення про це дає функція, яка називається щільністю розподілу ймовірності.

Крива, яка зображує щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини, називається кривою розподілу (рис. 6.50).

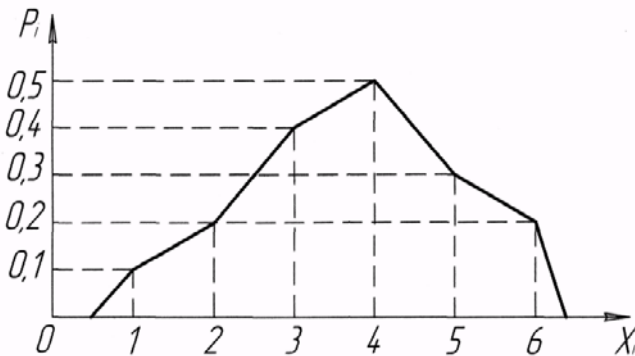


Рис. 6.49. Багатокутник (полігон) розподілу випадкової величини

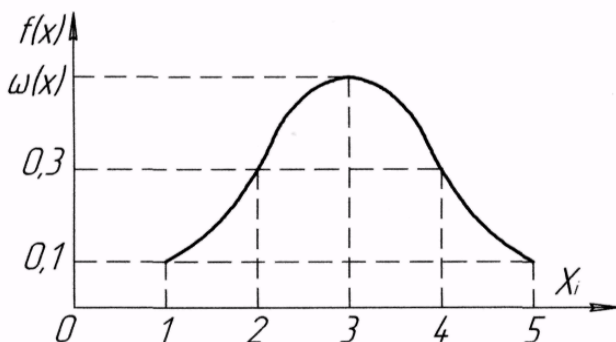


Рис. 6.50. Крива густини розподілу випадкової величини

Найбільш загальною формою вираження закону розподілу випадкової величини є так звана функція розподілу. Функція розподілу справедлива для всіх випадкових величин (дискретних і безперервних) та цілковито характеризує їх.

Недоліком є те, що за нею важко визначити характер розподілу недалеко від точки на числовій осі.

У теорії надійності розглядають різні види розподілу щільності ймовірності, аналітичні вирази та графіки для визначених областей застосування (табл. 6.18).

Основні причини, що визначають надійність виробів технічної системи, пов'язані з випадковими явищами, для опису яких застосовується математичний апарат теорії ймовірностей.

Надійність характеризується певними показниками.

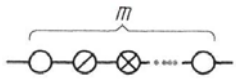
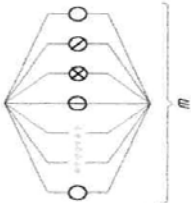
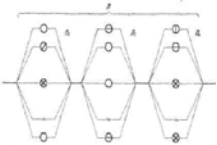
Розглянемо результати випробувань значного циклу N_0 елементів протягом часу t . Припустимо, що до кінця випробувань залишається $N_{\text{спр}}$ справних (тих, які не відмовили) елементів виробу та $N_{\text{відм}}$ тих, що відмовили. Тоді відносна кількість відмов $O(t)$

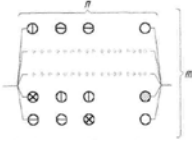
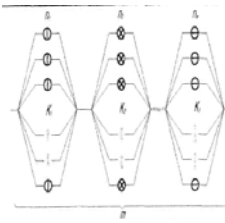
$$O(t) = \frac{N_{\text{відм}}}{N_3},$$

де $N_{\text{відм}}$ – кількість елементів виробу, що відмовили; N_3 – загальна кількість елементів.

Таблиця 6.18

Основні структурні схеми технічних систем

Вид системи	Характеристика об'єкта	Характер відмови	Імовірність безвідмовної роботи
Послідовна			
	Послідовне з'єднання m різнотипних i -их елементів ($i = l, \dots, m$)	Відмова будь-якого i -го елемента	$P(\tau) = \prod_{i=1}^m P_i(\tau)$
Паралельна			
	Паралельне з'єднання m різнотипних i -их елементів ($i = l, \dots, m$)	Відмова всіх m елементів	$P(\tau) = \prod_{i=1}^m (1 - P_i(\tau))$
Послідовно-паралельна			
<p>Паралельне з'єднання m різних елементів у послідовно створених n підсистемах</p> 	Послідовно з'єднані i -ті підсистеми з різнотипними паралельно створеними j -ми елементами $i = l, \dots, m$; $j = l, \dots, m$	Відмова будь-яких i -их підсистем з n_j елементами	$P(\tau) = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{n_j} (1 - P_{ij}(\tau)) \right]$

Вид системи	Характеристика об'єкта	Характер відмови	Імовірність безвідмовної роботи
Послідовно-паралельна			
Паралельно з'єднані m різних підсистем із n елементів 	m паралельно з'єднаних підсистем із n послідовно з'єднаних елементів	Відмова всіх m підсистем	$P(\tau) = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - \prod_{j=1}^{n_i} P_{ij}(\tau)]$
Паралельно-послідовна			
	m послідовно з'єднаних підсистем ($i = l, \dots, m$) із паралельним та з'єднаннями k_i однотипних елементів	Відмова i -ї підсистеми при відмові k_i або більше її елементів	$P(\tau) = \prod_{i=1}^m \left[\sum_{j=0}^{k_i-1} P_i^j - (1 - P_i(\tau))^y \times P_i^{n_i-j(\tau)} \right]$

Основні причини, що визначають надійність виробів технічної системи, пов'язані з випадковими явищами, для опису яких застосовується математичний апарат теорії ймовірностей.

Надійність характеризується певними показниками.

Розглянемо результати випробувань значного циклу N_0 елементів протягом часу t . Припустимо, що до кінця випробувань залишається $N_{\text{спр}}$ справних (тих, які не відмовили) елементів виробу та $N_{\text{відм}}$ тих, що відмовили. Тоді відносна кількість відмов $O(t)$

$$O(t) = \frac{N_{\text{відм}}}{N_3},$$

де $N_{\text{відм}}$ – кількість елементів виробу, що відмовили; N_3 – загальна кількість елементів.

Якщо випробування проводиться як вибіркове для прогнозування надійності, то $O(t)$ можна розглядати як оцінку ймовірності відмови або якщо N_3 досить велике, то – як ймовірність відмови.

Ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ визначається як

$$P(t) = \frac{N_{\text{спр}}}{N_3} = 1 - \left(\frac{N_{\text{відм}}}{N_3} \right) = 1 - O(t).$$

Щільність ймовірності відмов або ймовірність відмов $f(t)$ за одиницю часу

$$f(t) = \frac{dO(t)}{dt} = \left(\frac{1}{N_3} \right) \cdot \left(\frac{dN_{\text{відм}}}{dt} \right) = \frac{dP(t)}{dt}.$$

Ймовірність безвідмовної роботи як функція щільності ймовірності виражається залежністю

$$P(t) = 1 - O(t).$$

Інтенсивність відмов $\lambda(t)$, тобто ймовірність відмов за одиницю часу за умови, що відмова до цього часу не настала, визначається за формулою:

$$\lambda(t) = \left(\frac{1}{N_{\text{спр}}} \right) \cdot \left(\frac{dN_{\text{відм}}}{dt} \right). \quad (6.23)$$

Вираз імовірності безвідмовної роботи через інтенсивність відмов одержимо, помноживши праву частину виразу (6.23) для $\frac{dP(t)}{dt}$

на $\frac{N_{\text{спр}}}{N_3}$ та провівши перетворення:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left(\frac{N_{\text{спр}}}{N_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{N_{\text{спр}}}\right) \cdot \left(\frac{dN_{\text{відм}}}{dt}\right) = P(t) \cdot \lambda(t). \quad (6.24)$$

Після перетворення й інтегрування виразу (6.24) отримаємо

$$P(t) = e^{\int \lambda(t) dt}.$$

Напрацювання до відмови визначається як величина, протилежна інтенсивності відмов:

$$M = \frac{1}{\lambda(t)}.$$

Чисельні значення показників надійності визначають необхідний рівень надійності технічної системи. Ці значення вибирають, виходячи з того, що потрібно, щоб технічна система виконувала задані функції. Показник надійності технічної системи позначають узагальненим символом R , вважаючи, що він може бути будь-яким показником чи набором показників. Значення $R = 1$ відповідає абсолютно надійному виробу, а $R = 0$ – абсолютно ненадійному.

6.6.2. Види відмов та резервування технічних систем

Основною ознакою, яка характеризує різні види відмов, є характер виникнення та протікання процесів, які призводять до відмови. Існують два основні види відмов: поступові та раптові.

Поступові відмови виникають внаслідок процесу старіння, що погіршує початкові параметри виробів технічної системи. Основною ознакою поступової відмови є те, що ймовірність її виникнення $P_B(t)$ протягом заданого періоду часу від t_1 до t_i залежить від тривалості попередньої роботи виробу. Що більше експлуатувався виріб, то вища ймовірність виникнення відмови, тобто $P_B'(t') > P_B''(t'')$, якщо $t' > t''$, де $P_B(t)$ – ймовірність відмови за період від t до

$(t + \Delta t)$.

До цього виду належить більшість відмов виробів технічної системи. Вони пов'язані з процесами зношування, корозії, втоми та повзучості матеріалів.

Формування поступової відмови виробів технічної системи призводить до зміни вихідного параметра технічної системи. Відмова виникає при досягненні параметром гранично допустимого значення через певний випадковий проміжок часу роботи виробів технічної системи. Спочатку відбувається розсіювання параметрів виробів відносно всього математичного сподівання. Це пов'язано з розсіюванням початкових показників нової машини, з можливістю її роботи за різних режимів та з протіканням супутніх шкідливих процесів (вібрація, деформація). На параметри виробу під час експлуатації впливають процеси, що протікають повільно, наприклад, зношування. У загальному випадку процес зміни параметра може початися через певний проміжок часу, що також є випадковою величиною, і пов'язаний із накопиченням пошкоджень або з дією зовнішніх чинників.

Внаслідок цих явищ відбувається формування закону розподілу параметра у часі, який визначає ймовірність виходу параметра за обмеження (гранично допустиме значення), тобто ймовірність безвідмовної роботи. У загальному випадку граничне значення параметра також може розсіюватися, якщо воно оцінює діапазон вимог споживача до граничних значень показників машини.

Раптові відмови характеризуються стрибкоподібною зміною значень одного чи декількох параметрів об'єкта. Відмова виникає через певний проміжок часу t , який є випадковою величиною. Відмова оцінюється інтенсивністю λ – умовна щільність імовірності (вимірюється в одиницях щільності ймовірності).

Імовірність безвідмовної роботи виробів технічної системи $P(t)$ залежить від імовірностей $P_v(t)$ та $P_n(t)$ попередніх відмов та визначається як

$$P(t) = P_v(t) \cdot P_n(t).$$

Існують різні види резервування, які зображено на рис. 6.51 та рис. 6.52.

Види резервування:

- функціональне;
- тимчасове;
- інформаційне;
- структурне (пасивне та активне).

Рис. 6.51. Види резервування

Якщо різні пристрої або системи виконують подібні функції, то здійснюється функціональне резервування. Таке резервування застосовується для технічних систем.



Рис. 6.52. Основні види резервування

Тимчасове резервування полягає в тому, що допускається перерва функціонування системи або пристрою через відмову певного елемента. Воно здійснюється внаслідок введення акумулюючих ємностей, складу сировини та напівфабрикатів, а також через акумулюючу здатність самого об'єкта.

Інформаційне резервування існує як можлива компенсація втрати інформації при передачі її з одного каналу на інший.

Для локальних систем найбільш характерне структурне резервування. Підвищення надійності досягається шляхом введення додаткових елементів до структури системи.

Розглянемо методи структурного резервування (рис. 6.53).

Найчастіше застосовується структурне резервування. Якщо структура об'єкта така, що з появою відмови вона перебудовується і об'єкт відновлює свою працездатність (тобто відбувається «саморемонт» об'єкта), то це **активне резервування**.

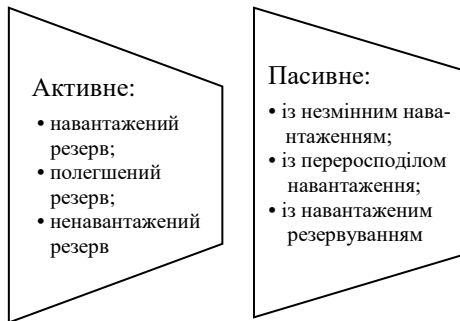


Рис. 6.53. Методи структурного резервування

Частковим випадком активного резервування є **резервування заміщенням**, за якого функції основного елемента передаються резервному лише після відмови основного елемента.

При резервуванні заміщенням той же резерв може бути використаний для заміни кожного з ряду однотипних елементів. Такий спосіб **резервування називають змінним або з неоднозначною відповідністю**.

Особливості активного резервування

В об'єктах з **активним резервуванням** велике значення мають умови роботи (навантаження) резерву до появи відмови, тобто до перебудови структури.

Розрізняють:

1) *навантажений резерв* – резервні елементи перебувають у тому ж режимі, що й основні елементи. Інтенсивність відмов основного та резервного елементів однакова;

2) *полегшений резерв* – резервні елементи знаходяться в менш навантаженому режимі, ніж основні. Інтенсивність відмов резервних елементів нижча, ніж в основних працюючих;

3) *ненавантажений резерв* – резервні елементи практично не несуть навантажень до початку виконання ними функцій основного елемента. Імовірністю відмов елементів у стані резерву нехтують.

У системах керування рухомими об'єктами, як правило, існують умови роботи першого виду, що пояснюються двома обставинами:

а) значну частину відмов становлять раптові відмови через важкі динамічні навантаження, однакові для резервних та основних елементів (вібрації, удари тощо);

б) час включення резервного елемента після відмови працюючого елемента за ненавантаженого резерву часто неприпустимо великий.

Особливості пасивного резервування

За пасивного резервування об'єкта відмова одного або декількох елементів не впливає на його роботу. Елементи з'єднані постійно, структура не змінюється. Об'єкт немов би пасивно опирається появі відмов елементів. Оскільки елемент, що відмовляє, не викликається, то при створенні систем доводиться враховувати різні наслідки, до яких може призвести відмова елементів. При відмові хоча б одного елемента може змінитися навантаження, яке сприймається елементами, що залишилися працездатними. За цією ознакою розрізняють три види об'єктів із пасивним резервуванням:

1) системи з незмінним навантаженням – при відмові одного або декількох елементів не змінюється навантаження на елементи, які залишилися працездатними;

2) системи з перерозподілом навантаження – при відмові хоча б одного елемента змінюється (як правило, збільшується) навантаження на елементи, які залишилися працездатними;

3) системи з навантажувальним резервуванням (залежно від навантаження), в яких при відмові хоча б одного елемента система виходить з ладу, але інтенсивність відмов елементів зменшується внаслідок того, що навантаження, яке повинен сприймати один

елемент, сприймається декількома елементами.

За пасивного резервування найбільший виграш у надійності досягається в системах із незмінним навантаженням, найменший – у системах із резервуванням за навантаженням.

Обидва методи резервування (активний і пасивний) можуть бути здійснені шляхом прийняття різних схем резерву. Прийнято розрізняти такі види резервування (рис. 6.54): загальне, автономне, роздільне, одиничне, внутрішньоелементне та з виборчими схемами.

Принципового розходження між видами схем резерву немає. Загальне резервування, зображене на рис. 6.55, полягає в резервуванні об'єкта в цілому. Завдяки своїй простоті цей спосіб найбільш відомий.



Рис. 6.54. Основні схеми резерву

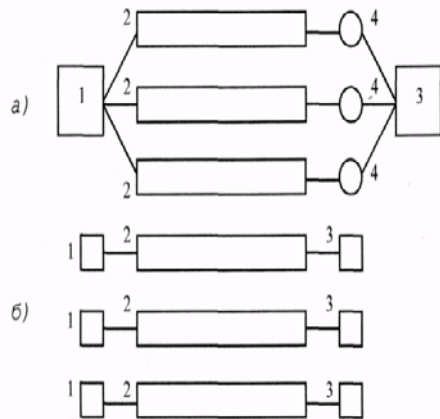


Рис. 6.55. Варіанти загального резервування

a – схема загального активного резервування;

б – схема автономного резервування;

1 – вхідний елемент (блок);

2 – робочий ланцюг;

3 – вихідний елемент (блок);

4 – ланцюги перемикача.

Автономне резервування є одним із варіантів загального. Воно полягає в застосуванні декількох незалежних об'єктів, що виконують однакове завдання. Кожен із цих об'єктів має свій вхід та вихід, і, як правило, незалежні джерела живлення. Автономне резервування здебільшого застосовують при проведенні відповідальних експериментів у системах відповідального призначення. Автономне резервування завжди пасивне.

Роздільне резервування полягає в резервуванні об'єкта по окремих елементах або їх групами (ділянками). Об'єкт з активним загальним резервуванням можна вважати частковим випадком об'єкта з роздільним резервуванням при одній ділянці резервування.

Одиничне резервування полягає в заміні елементів об'єкта елементами резервованих схем (як правило, пасивними). Схеми резервування різних об'єктів щоразу доводиться корегувати заново, що вимагає значних витрат часу. Тому одиничне резервування, за якого найпростіші схеми резерву типових елементів можуть виконуватись у вигляді готових блоків, часто виявляється через простоту побудови складних резервованих систем. За одиничного резервування не потрібно складати спеціальних схем, а можна просто ставити на місце кожного елемента у функціональній схемі об'єкта його аналог – типовий резервованій осередок (рис. 6.56).

При резервуванні одного елемента, в якого можуть бути відмови лише типу «замикання», потрібно послідовно з цим елементом включити не менше одного резервного елемента.

При резервуванні одного елемента, що дає відмови лише типу «обрив», потрібно резервні елементи включати паралельно з початково наявним елементом.

Оскільки для включення резервованого осередку не потрібно ніяких змін функціональної схеми первісної системи, то це дає значну економію праці при проектуванні нових систем. Крім того, універсальність резервованих осередків дає можливість виготовляти їх заводським способом у вигляді окремих блоків.

Внутрішньоелементне резервування полягає в резервуванні внутрішніх зв'язків елемента. Якщо при одиничному резервуванні ви-

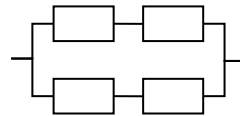


Рис. 6.56. Схема резервування одного елемента

користовуються схеми з існуючих елементів, то застосування внутрішньоелементного резервування пов'язане зі зміною конструкції елемента. Прикладом застосування внутрішньоелементного резервування може стати електромагнітне реле та шляхові вимикачі.

Схема змінного резервування, зображена на рис. 6.57, застосовується в об'єктах з однакових елементів. Воно полягає в тому, що використовується невелика кількість резервних елементів, які можуть підключатися замість кожного з елементів основної системи, які відмовили. Прикладом змінного резервування може бути одна резервна лінія зв'язку на три основні. Змінне резервування завжди є активним, завжди має перемикаючий пристрій, що визначає наявність відмови та включає резервний елемент.

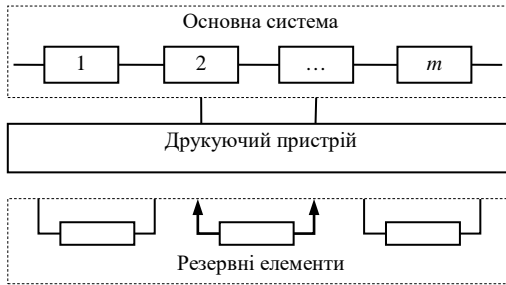


Рис. 6.57. Схема змінного резервування

Ймовірність безвідмовної роботи розглянутої системи зі змінним резервом має такий вигляд:

$$P_B(t) = \left[1 + m \frac{\lambda_B}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \right] \cdot e^{-m\lambda_n t}, \quad (6.25)$$

де m – елемент основної системи; λ_B – інтенсивність відмов працюючого (основного або резервного) елемента; λ_n – інтенсивність відмов перемикаючого пристрою.

Розділивши отримане значення $P_B(t)$ (6.25) на ймовірність безвідмовної роботи нерезервованої основної системи, вираємо у надійності за ймовірністю безвідмовної роботи:

$$\frac{P_B(t)}{P(t)} = 1 + m \frac{\lambda_B}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}).$$

Вибірчі схеми (рис. 6.58) можуть застосовуватися в інформаційних системах із навантаженим резервом. За резервування з виборчою схемою порівнюються сигнали на виході непарної кількості паралельно працюючих пристроїв. До зовнішнього ланцюга подається сигнал, наявний на виході більшості пристроїв.

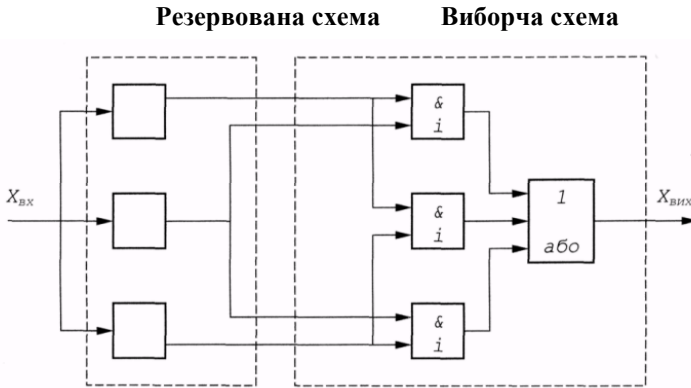


Рис. 6.58. Приклад використання виборчої схеми

Вибірчі схеми застосовуються в тих випадках, коли важко встановити відмовив чи ні окремий пристрій. Вибірчі схеми іноді називають «способом звіряння голосів» або «кворум-методом».

Для спрацьовування виборчої схеми за більшістю входних сигналів кількість паралельно працюючих ланцюгів, що обслуговуються цією схемою, повинна бути не менше трьох. На рис. 6.58 наведено приклад виборчої схеми, на виході якої з'являється сигнал у разі збігу сигналів від двох із трьох резервних пристроїв. Вибірча схема зібрана з логічних елементів типу «і» та «або».

Взагалі можна створити виборчі схеми, які забезпечують корекцію входних сигналів, перерозподіл функцій елементів, зміну параметрів елементів та виконання інших функцій.

Також резервовані об'єкти доцільно розрізняти за принципами обслуговування (рис. 6.59):

- об'єкти, які не обслуговуються – працездатність основних і

резервних елементів не контролюється, об'єкт використовується до моменту його відмови через вихід з ладу всіх резервних елементів;

– об'єкти з періодичним обслуговуванням – контроль та відновлення працездатності проводиться періодично: в перебігу часу (цикла) роботи об'єкта не можна проводити заходи з технічного обслуговування;

– об'єкти з постійним обслуговуванням – у процесі роботи об'єкта можна відновлювати елементи, які відмовили.



Рис. 6.59. Принципи обслуговування резервованих об'єктів

Оскільки для відновлення елемента необхідно його відключити, то відновлення застосовується при активному методі резервування. Для відновлюваних об'єктів поєднання резервування з відновленням має настільки ж велике значення, як для невідновлюваних об'єктів сполучення поєднання з періодичним контролем працездатності кожного з елементів окремо.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Визначте основні етапи математичного планування експерименту.
2. Які вимоги висуваються до функції відгуку?
3. Що таке матриця планування повного факторного експерименту, послідовність її побудови? Для чого здійснюють кодування факторів?
4. Що таке дробовий факторний експеримент?
5. У якій послідовності вибирають основний рівень?

6. Схема пошуку адекватної моделі. Що таке дисперсія адекватності та її розрахунок?
7. Які властивості матриць факторних експериментів?
8. Що таке помилка експерименту та її розрахунок?
9. Що таке дисперсія параметра оптимізації та її розрахунок у різних випадках?
10. За якими критеріями перевіряється однорідність дисперсій?
11. Як розраховують коефіцієнти моделі та перевіряють їх значимість при плануванні 1-го порядку?
12. Як перевіряють адекватність моделі при плануванні 1-го порядку?
13. Які рішення ухвалюють після побудови моделі? Що таке інтерпретація результатів експерименту?
14. Назвіть порядок побудови матриць планування при плануванні 2-го порядку.
15. Що таке ортогональне композиційне планування, коли його використовують?
16. Які випадки ухвалення рішень можливі в умовах ризику?
17. Як вирішують задачі математичного програмування графоаналітичним методом?
18. Назвіть методи вирішення багатокритеріальних задач оптимізації.
19. Які ухвалюють рішення в умовах ризику?
20. Які ухвалюють рішення в умовах невизначеності?
21. Що таке система масового обслуговування?
22. Предмет та задачі теорії масового обслуговування.
23. Що таке обслуговування?
24. Назвіть основні типи систем масового обслуговування.
25. Чим характеризують марковський випадковий процес?
26. Що таке потік подій?
27. Які основні задачі теорії масового обслуговування?
28. Наведіть приклади використання багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням.
29. Де і для чого використовують теорію графів?
30. Що таке множина? Які операції можна здійснювати над множинами?
31. Як на графі позначають вершини? Як зображають ізольовану вершину?

32. Як на графі позначають ребра? Що таке петля?
33. Як побудувати екстремальне дерево?
34. Як застосовувати теорію графів для розв'язування технічних задач?
35. Якими основними станами та подіями характеризується надійність?
36. Особливості активного резервування.
37. Від чого залежить ймовірність $P(t)$ безвідмовної роботи виробу?
38. Чим кількісно оцінюється ремонтпридатність?
39. Особливості пасивного резервування.
40. Як при одиничному резервуванні без складання спеціальних схем можна підвищити надійність системи?

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 6

Необхідно знати:

1. Необхідність та переваги математичного планування експерименту.
2. Відмінності повного та дробового факторного експерименту.
3. Структуру матриці планування для будь-якої кількості факторів.
4. Що таке помилка експерименту та дисперсія параметра оптимізації.
5. Особливості отримання рівняння моделі у вигляді степеневої функції.
6. Переклад адекватної моделі з абстрактної математичної мови мовою експериментатора.
7. Функцію відгуку як залежність між параметром оптимізації та факторами.
8. Умови та випадки ухвалення рішень можливі в умовах ризику та невизначеності.
9. Задачі теорії масового обслуговування.
10. Для чого використовують теорію графів?
11. Стани та події, що характеризують надійність.
12. Особливості активного резервування.

13. Особливості пасивного резервування.

Слід запам'ятати:

1. Алгоритм побудови матриці планування експериментів.
2. Схему визначення рівнів варіювання факторів.
3. Моделлю або функцією відгуку в МПЕ називається залежність між параметром оптимізації та факторами.
4. Зміст величини та знака коефіцієнтів рівняння регресії.
5. Послідовність визначення коефіцієнтів рівняння регресії та принцип відсіву незначущих факторів.
6. Перелік робіт, які потрібно виконати на пошуку адекватної моделі.
7. Алгоритм побудови екстремального дерева базується на послідовному введенні в дерево ребер із перевагою до мінімальної ваги.
8. Залежно від чого системи масового обслуговування поділяються на:
 - СМО з відмовами або втратами;
 - СМО з чергою або чеканням.
9. Основні вимоги до адекватності рівняння регресії.
10. Задача проектування оптимальної технічної системи неодмінно передбачає наявність критерію оптимальності.
11. Фізичний зміст параметра μ як інтенсивність обслуговування (середня кількість заявок за одиницю часу), а величина, обернена до нього, $(1/\mu)$ – середній час обслуговування.
12. Множина вважається визначеною якщо вказані її елементи
13. У яких випадках необхідно застосовувати критерії Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца.
14. Етапи пошуку адекватної математичної моделі.

Треба вміти:

1. При плануванні експерименту розрізняти два етапи (попередній та основний) та виділяти загальний алгоритм.
2. Будувати матриці планування для будь-якої кількості факторів.
3. Визначати рівні варіювання факторів.
4. Перевіряти адекватність моделі за критерієм Фішера.

5. Визначати дисперсію параметра оптимізації.
6. Застосовувати теорію графів для розв'язування технічних задач.
7. Виконувати всі етапи побудови екстремального дерева.
8. Правильно визначати ймовірність $P(t)$ безвідмовної роботи технічної системи, напрацювання до відмови, інтенсивності відмов та чисельні значення показників надійності.
9. Правильно використовувати критерії Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца в випадках, що супроводжуються невизначеністю.
10. Застосовувати формули:

$$t_P = \frac{|Y - \bar{Y}|}{S},$$

$$\Delta B_i = t S_{B_i},$$

$$X = \frac{2(X - X_{\text{MAX}})}{X_{\text{MAX}} - X_{\text{MIN}}} + 1$$

$$E_i = \frac{|y_{\text{имм}} - y_{\text{ід}}|}{y_{\text{ід}}}$$

Критерій Стюдента,

де Y – значення параметра оптимізації, яке поставлено під сумнів; \bar{Y} – середнє арифметичне значення параметра оптимізації в паралельних експериментах без врахування результату експерименту, який поставлено під сумнів; S – помилка паралельного експерименту.

Довірчий інтервал значимості коефіцієнтів,

де t – табличне значення критерію Стюдента; S_{B_i} – квадратична помилка коефіцієнтів.

Зв'язок між кодовим та натуральним значенням фактора,

де X – кодоване значення фактора; X – значення фактора, взяте всередині інтервалу варіювання в натуральних одиницях вимірювання; X_{MAX} , X_{MIN} – верхній та нижній рівні фактора в натуральних одиницях вимірювання.

Відносна похибка математичної моделі за i -м параметром,

де $y_{\text{имм}}$ – i -й параметр, розрахований за допомогою математичної

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}$$

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\bar{Y}_j \cdot X_{ij})}{\sum_{j=1}^N X_{ij}^2}$$

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i \cdot X_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^k B_{ij} \cdot X_i \cdot X_j + \\ + \sum_{i=1}^k B_{ii} \cdot X_i^2,$$

$$f_{ад} = N - K_1$$

$$P_{в\text{идм}} = P_{n+m} = \frac{P^{n+m}}{n^n \cdot n!} P_0$$

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P(\tau) = \prod_{i=1}^m P_i(\tau)$$

моделі; y_{i0} – дійсне значення того ж параметра.

Перевірка адекватності моделі, де F_p – розрахункове значення критерію Фішера; S_y^2 – дисперсія параметра оптимізації; $S_{ад}^2$ – дисперсія адекватності.

Визначення коефіцієнтів моделі, де i – номер фактора в матриці планування $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (нуль записано для визначення B_0); j – номер експерименту; N – кількість експериментів (рядків матриці – табл. 6.14); \bar{Y}_j – середнє арифметичне значення параметра оптимізації в j -му експерименті (рядку матриці); X_{ij} – кодоване значення i -го фактора (квадратичного ефекту) в j -му експерименті матриці планування.

Поліном другого порядку, де B_0, B_1, \dots, B_{ii} – коефіцієнти поліному; k – кількість факторів.

Кількість степенів вільності, де N – кількість експериментів матриці планування; K_1 – кількість визначених коефіцієнтів моделі.

Імовірність відмови в системі.

Імовірність того, що тривалість обслуговування закінчиться до настання часу t .

Імовірність при послідовному з'єднанні m i -х елементів.

$$P(\tau) = \prod_{i=1}^m (1 - P_i(\tau))$$

Імовірність при паралельному з'єднанні m різнотипних i -х елементів.

$$F(X) = \prod_{i=1}^n C_i F_i(X) \rightarrow \max (\min)$$

Цільова функція мультиплікативного критерію

7. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

7.1. Особливості застосування комп'ютерного моделювання в навчальному процесі

Розглянута в підрозд. 5.3 методика математичного моделювання містить етап 5 – «Комп'ютерне моделювання в середовищі розрахункових пакетів програм або САЕ-систем». Сучасне навчання не можливо уявити без використання програмних та технічних засобів. Певною мірою це стосується і курсу «Математичне моделювання систем і процесів», який вивчає більшість студентів технічних вищих навчальних закладів.

Сьогодні існує значна кількість пакетів прикладних програм математичного моделювання та навчальних версій САЕ-систем, направлених на реалізацію математичного моделювання задач аналізу, розробки та дослідження різноманітних технічних систем. Обираючи той чи інший програмний продукт, необхідно враховувати такі фактори:

- зручність та швидкість доступу до даних;
- легкість освоєння, зручний інтерфейс користувача;
- інтерактивна та швидка графіка;
- спрощені інструменти аналізу із застосуванням широкої математичної обробки даних і графічних залежностей;
- формування вихідних документів, які можуть бути використані для опублікування;
- автоматизація процесу обробки даних при вирішенні задач значної складності;
- направленість на вирішення питань майбутньої спеціальності студентів;
- наявність у програмі вбудованих віртуальних контрольно-вимірювальних приладів;

- наявність засобів моделювання як аналогових, так і цифрових блоків;
- можливість створення на базі програми обчислювально-вимірювальних комплексів.

Застосування комп'ютерного моделювання в навчальному процесі під час аналізу, розробки та дослідження технічних систем має істотні переваги [46]. Головними з них є такі:

1. Дослідження роботи компонентів схеми в різних режимах.
2. Вибір рівня складності об'єкта дослідження (від дослідження окремих елементів і підготовлених схем до самостійного проектування та розробки схеми, пошуку несправних елементів тощо).
3. Можливість планувати й перевіряти стратегію та методику вимірювального експерименту.
4. Можливість виконання експериментів на новітній елементній базі.
5. Можливість проведення температурних досліджень моделей цифрових вимірювальних приладів.
6. Аналіз впливу ушкоджень на роботу різних елементів схеми.
7. Формування масивів експериментальних даних, їх транспортування в інші середовища математичних розрахунків для виконання ретроспективного аналізу, статистичного аналізу тощо.
8. Можливість дистанційного виконання лабораторних досліджень, що особливо актуально при організації заочної та дистанційної форм навчання.
9. Можливість запам'ятовувати, зберігати та аналізувати великі масиви експериментальних даних.
10. Можливість багатократного повторення експериментальних досліджень при ідентичних умовах проведення експерименту.
11. Швидкий темп засвоєння та обсяги нової інформації.

До організаційних переваг використання комп'ютерного моделювання в навчальному процесі можна віднести:

1. Можливість організації фронтального виконання лабораторних робіт у режимі подання лекційного матеріалу, що осо-

бливо важливо в умовах навчання за кредитно-модульною системою.

2. Уніфікація лабораторних досліджень, що проводяться в межах різних дисциплін.
3. Можливість глибокої перевірки якості виконання курсових і дипломних проектів та робіт.
4. Висока економічна ефективність підготовки нових лабораторних циклів.

Працюючи за комп'ютером, слід розрізняти технічну процедуру вирішення поставленої задачі та суть справи. Не можна зводити постановку задачі та отримання рішень лише до прогнаних процедур: запису або представлення математичної моделі у формі, яка буде зручною для використання в інтегрованому комплексі прикладних програм, введення моделі в комп'ютер, вибору чисельного методу вирішення, виходячи з міркувань реального досягнення точності та часу вирішення, реєстрації рішення та ін. Проте людина, дотримуючись формального підходу, часто вважає, що її задача «повинна вирішуватися», але згодом розчарується у можливостях інформаційних систем.

Де помилка? Як її знайти? Чи коректно поставлене завдання? Відповіді на ці питання найкраще дає фізичний підхід, за якого комплекс або система, яка проектується, подана у вигляді сукупності заданих фізичних елементів, агрегатів, підсистем. Комплекс або система діляться на частини, для яких відомі точні рішення або експериментальні характеристики, а поєднання цих частин у моделі дають нові залежності. Модель аналізується і корегується за частинами, ніби за допомогою постановки додаткових експериментів у системах, які можна аналізувати окремо.

Для отримання достовірних результатів необхідно поєднати процес моделювання з фізичним змістом задачі, щоб бути впевненим в правильності отриманих результатів або отримати докази неправильної постановки завдання та знати, де шукати помилку.

Отже, моделювання на комп'ютері – не формальна процедура, а експериментальний пошук. Тому можна говорити про мистецтво моделювання як про мистецтво експерименту.

Суттєво спростити спілкування з комп'ютером дозволяє використання універсальних пакетів прикладних програм та інтегрованих середовищ САЕ-систем.

Формалізація задач синтезу та аналізу вимірювально-обчислювально-керуючих систем і комплексів, а також використання числових методів вирішення задач дозволяє використовувати добре вивчені прийоми вирішення та стандартне (універсальне) математичне забезпечення комп'ютера. Використання комп'ютера підвищує ефективність наукових досліджень, дозволяє проводити моделювання складних технічних систем.

Сучасні програми чисельного моделювання систем та процесів стають дедалі більше автоматизованими, полегшуючи користувачеві процес постановки і вирішення широкого класу складних задач. Ще більший ефект дають можливості якісного візуального зображення результатів.

7.2. Аналіз сучасних пакетів прикладних програм математичного моделювання

Для вирішення задач із дослідження, аналізу та розробок технічних систем, їх елементів та параметрів, а також внутрішніх і зовнішніх процесів популярними серед дослідників є такі пакети прикладних програм моделювання: MathCAD, Simulink, MatLAB, LabView, Electronics Wordbench, System View та ін.

Надзвичайна простота інтерфейсу MathCAD (розробник – компанія Mathsoft, США) зробила його одним із найпопулярніших математичних пакетів. Він надає користувачу широкий набір інструментів для реалізації графічних, аналітичних і числових методів вирішення математичних задач на комп'ютері. Виконуючи рутинні чи несуттєві операції, пакет дозволяє самостійно виконати громіздкі обчислення, розв'язати змістовні задачі, набути та закріпити навички з вирішення прикладних задач.

MathCAD – це математично орієнтована універсальна система комп'ютерної математики, призначена для автоматизації рішення масових математичних завдань у різних галузях науки і техніки. Назва системи походить від двох слів – Mathematics (математика) і CAD (Computer Aided Design – системи автоматичного проектування або САПР). Тож цілком виправдано вважати MathCAD математичними САПР [47].

MathCAD – це програмний засіб або середовище для виконання на комп'ютері різноманітних математичних і технічних розрахунків, що надає користувачу інструменти для роботи з формулами,

числами, графіками й текстами та забезпечене простим в освоєнні графічним інтерфейсом.

Крім числових та аналітичних обчислень, вони блискуче розв'язують складні оформлювальні завдання, які ледве вдається вирішити популярним текстовим редакторам або електронним таблицям. За допомогою MathCAD можна, наприклад, готувати статті, книги, дисертації, наукові звіти, дипломні й курсові проекти, що складаються лише з текстів, але й зі складних математичних формул, із вишуканим графічним поданням результатів обчислень і багатьма «живими» прикладами. Застосування бібліотек і пакетів розширення забезпечує професійну орієнтацію MathCAD на будь-яку галузь науки, техніки й освіти.

При вирішенні завдань інтеграції ця система забезпечує справжню інтеграцію з іншими математичними, графічними та офісними системами. Для цього до її складу входить спеціальний системний інтегратор MathConnex.

У середовищі MathCAD доступні більше сотні операторів і логічних функцій, призначених для числового і символьного вирішення технічних проблем різної складності. До складу MathCAD входять:

- велика бібліотека вбудованих математичних функцій;
- інструменти побудови графіків різних типів;
- засоби створення текстових коментарів та оформлення звітів;
- конструкції, подібні до програмних конструкцій мов програмування, що дозволяють писати програми для вирішення задач, які неможливо чи дуже складно розв'язати стандартними інструментами пакета;
- зручно організована інтерактивна система отримання довідки та оперативної підказки;
- засоби обміну даними з іншими windows-додатками через механізм OLE (Object Linking and Embedding – зв'язок і впровадження об'єктів);
- засоби переадресації готових робочих документів електронною поштою або через Інтернет у вигляді, представленому на екрані.

При проектуванні MathCAD ставилась мета – створити потужний, гнучкий та простий у користуванні засіб для проведення інженерних розрахунків.

Основною відмінністю MathCAD від інших програмних засобів цього класу є те, що математичні вирази на екрані комп'ютера представлені в загально прийнятній математичній нотації та мають такий вигляд, як в оригіналі. Записавши у звичній формі математичний вираз, можна виконати з ним найрізноманітніші символічні або числові математичні операції, можна забезпечити обчислення текстовими коментарями, ілюстраціями, побудованими в інших додатках, та отримати повний звіт про виконані обчислення.

Характерним представником цих систем також є MatLab (розробник – компанія MathWorks, США) [48].

Система **MatLab** – це сучасний програмний засіб, який є інформаційним середовищем для числового моделювання, розрахунків і розробки алгоритмів аналізу та візуалізації даних. Це продукт високоякісний, що містить обчислення, візуалізацію й програмування в зручному вигляді, де завдання та їх рішення виражаються у формі, близькій до математичного. MatLab складається з п'яти основних частин:

1. Мова MatLab. Мова матриць високого рівня з керуванням потоками, функціями, структурами даних, введенням-виведенням і особливостями об'єктно-орієнтованого програмування, що дозволяє створювати нескладні програми та більш складні додатки.

2. Середовище MatLab. Набір інструментів і пристосувань, з якими працює користувач або програміст MatLab. Воно містить засоби для керування змінними в робочому просторі MatLab, введенням і виведенням даних, а також створенням, контролем і налагодженням файлів і додатків MatLab.

3. Керована графіка. Графічна система MatLab, що містить команди для візуалізації дво- і тривимірних даних, обробки зображень, анімації та ілюстрованої графіки.

4. Бібліотека математичних функцій. Велика колекція обчислювальних алгоритмів від елементарних функцій, таких як сума, синус, косинус, комплексна арифметика до більш складних, таких як обіг матриць, обчислення власних значень, функції Бесселя, швидке перетворення Фур'є.

5. Програмний інтерфейс. Бібліотека, що дозволяє писати програми мовами програмування Сі та Fortran, взаємодіючи з MatLab. Вона також містить засоби для виклику програм із MatLab (динамічний зв'язок).

Крім названих частин у MatLab є доповнення Simulink – супутня програма, що є інтерактивною графічною системою для моделювання складних нелінійних динамічних та вбудованих систем. Це середовище, яке дозволяє моделювати процес за допомогою блоків діаграм на екрані та їхній маніпуляції. Simulink працює з лінійними, нелінійними, безперервними, дискретними та багатомірними системами.

Головна перевага системи MatLab полягає в тому, що в ній реалізовані численні ефективні математичні алгоритми практично для всіх галузей інженерної діяльності. Програмні засоби цього типу у вітчизняній літературі називають *універсальними математичними пакетами чи системами*.

Система **LabView**, розроблена фірмою National Instruments (США), є системою автоматизованого проектування, що має засоби для створення віртуальних обладнань різного призначення, отриманих як у режимі реального часу від фізичного об'єкта, так і у вигляді файлів. Ця фірма існує понад 25 років і є лідером з розробки інструментальних засобів моделювання контрольно-вимірювальної техніки [49].

Основним принципом побудови систем збору, обробки й управління на базі обладнання та програмного забезпечення фірми National Instruments є можливість перетворення персонального комп'ютера на вимірювальний комплекс із необхідними метрологічними характеристиками.

Конфігурувати вимірювальні комплекси в системі LabView можна як від датчиків і виконавчих механізмів (вимірювальна частина), так і від обробки даних (вимірювальна частина). Дуже важливо, що алгоритм обробки сигналів для першого і другого підходу є одним і тим же.

Поява програми LabView дозволила суттєво спростити та зробити універсальним комплекс об'єкт – вимірювання. З'явилась можливість на основі датчика, аналого-цифрового перетворювача та відповідних програмних засобів здійснювати функції множини вимірювальних пристроїв різного призначення, а також функції

обробки результатів вимірювань. Усе це в сукупності є характерною рисою так званого віртуального приладу. Запис великих масивів даних дає можливість запам'ятовувати результати експерименту, що дозволяє проводити ретроспективний аналіз, статичну обробку та ін.

LabView – система з великою кількістю бібліотек для розширеного аналізу сигналів. Програмування в LabView відбувається графічно, тобто відсутній звичайний текстовий опис алгоритму мовою програм високого рівня. Сама програма LabView цілком відкрита, дозволяє отримати доступ до будь-якого компоненту всередині неї.

Як універсальна система програмування програма LabView має величезні бібліотеки для роботи з периферійним зовнішнім обладнанням, засобами обробки, аналізу та представлення даних. На базі LabView можна навіть побудувати засоби дистанційного навчання.

Система жорсткого реального часу LabView Real Time застосовується в системах збору/обробки інформації/управління, коли потрібен жорсткий детермінізм і коли звичайні операційні системи не можна застосовувати.

Вимогам навчального процесу також відповідає пакет прикладних програм Electronics Wordbench (розробка фірми Interactive Image Technology (США)) [46]. Досвід використання пакета прикладних програм Electronics Wordbench свідчить про правильність зробленого вибору. Цей пакет програм як інструмент пізнання має важливу особливість – сприяє підвищенню зацікавленості студентів питаннями технічної творчості, більш глибокому розумінню ідеології побудови цифрових вимірювальних приладів, принципів перетворення вимірювальних сигналів, методів оцінювання метрологічних показників приладів тощо.

Пакет прикладних програм **Electronics Wordbench** містить значну бібліотеку електронних компонентів і дозволяє складати й досліджувати принципові схеми аналогових та цифрових вимірювальних приладів практично необмеженої складності. Лабораторія віртуальних вимірювань приладів та пристроїв, яку пропонує це середовище до послуг дослідника, забезпечує можливість виконання найрізноманітніших видів контролю режимів роботи приладів. До складу віртуальної лабораторії включено такі прилади та засоби: амперметри постійного та змінного струму; вимірювач амплітудно-частотних та фазочастотних характеристик; вольтметри пос-

тійного та змінного струму; генератор слова; двоканальний осцилограф; логічний аналізатор; мультиметр; функціональний генератор.

Вимогам до комп'ютерних засобів при використанні моделювання даних досліджень найкраще відповідають інструментальні засоби аналізу даних і технічна графіка (data analysis and technical graphics software), яка відрізняється від електронних таблиць та відповідного програмного забезпечення широким набором засобів аналізу даних і побудови графіків, можливістю роботи з різними типами та великими масивами даних, а також підвищеною продуктивністю внаслідок автоматизації дрібних задач. Одним із прикладів такого інструментального засобу є пакет Origin (рис. 7.1) – програмний продукт фірми OriginLab Corporation (розробник США).

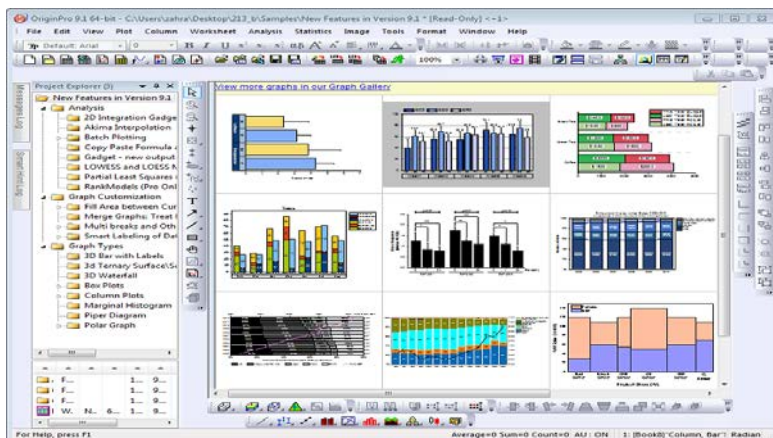


Рис. 7.1. Приклад використання інструментального засобу Origin для побудови різноманітних графіків

Програмний продукт Origin є одним із найрозповсюдженіших засобів графічного представлення табличних даних. Пакет Origin дозволяє не просто будувати графіки та оформлювати їх відповідно до вимог користувача. Він також надає можливість проводити потужну математичну обробку даних: шукати залежності в зміні отриманих даних; проводити числове диференціювання та інтегрування; здійснювати інтерполяцію та екстраполяцію; проводити ста-

тистичну обробку даних; виконувати необхідні перетворення даних безпосередньо в самому програмному середовищі тощо.

Origin є простим і прозорим у використанні при формуванні та збереженні баз даних, їх математичного аналізу та графічного представлення. Це сприяло його широкому застосуванню вченими та інженерами промислово розвинених країн світу, які працюють у різних галузях науки і техніки.

7.3. Аналіз сучасних САЕ-систем комп'ютерного моделювання

7.3.1. Класифікаційні групи систем комп'ютерного моделювання

Історія розвитку САЕ-систем починається ще з 1960-х років, коли Івану Сазерленду (США) в 1963 році вдалося підключити дисплей із можливостями CRT (традиційний тип проекторів) та обчислювальними здібностями комп'ютера. Процес створення системи для моделювання механічних частин технічних систем став можливий завдяки використанню світлового пера [50].

Пізніше Сазерленд і Девід Еванс заснували фірму Evans і Sutherland Computer Corporation (E & S), яка стала однією з лідерів на ринку САПР в галузі графічних робочих станцій. Разом з тим, на арені з'явилися й інші фірми (GE, DEC, IBM, CalComp та ін.), які почали створювати устаткування і програмне забезпечення для цієї галузі.

Першою твердотільною системою комп'ютерного моделювання вважають SynthaVision, випущену компанією MAGI (США) [50]. Чарльз Істман разом із Максом Генріоном розробили програмне забезпечення для вирішення завдань планування простору (рис. 7.2).

Кевін Вейлер з Істманом опублікували статтю про використання операторів Ейлера для геометричного моделювання.

MCS, ANSYS, Applicon, SDRC, Autotrol,



202

Рис. 7.2. Комп'ютерне моделювання на графічній робочій станції (1960-ті роки)

United Computing, McAuto, Intergraph, Autodesk, Bentley Systems, MicroControl Systems, Computervision, Dassault Systems, Miscellaneous, CalComp є найрезультативнішими компаніями, які зробили чималий внесок у стрімкий розвиток комп'ютерного моделювання та інженерних розрахунків [51].

Слід особливо відзначити результативність та ефективність розробників компанії MCS Software Corporation (США), яка в 2013 році святкувала свій 50-літній ювілей. Аналітики вважають, що саме компанія MCS справила величезний вплив на розвиток галузі і 70 % сучасних САЕ-систем використовують її ідеї [51].

У 1970-х роках увага здебільшого приділялася системам автоматизованого креслення, оскільки стало зрозуміло, що проектування можна реалізувати машинними засобами.

У 1980-ті роки комп'ютери стають доступними багатьом великим і дрібним компаніям. З'являється також 3D-моделювання. Спершу було лише поверхнєве моделювання, за якого інженер визначав виріб сімейством поверхонь.

Можливості систем на той час визначалися характеристиками наявних графічних апаратних засобів. Переважно використовувалися графічні термінали, що підключалися до мейнфреймів або до міні-ЕОМ типу PDP/11. Здебільшого працювали на комп'ютерах компаній CDC та IBM.

На початку 1990-х розробники САЕ-систем використовували комп'ютери на базі RISC-процесорів. Вони працювали під управлінням ОС Unix і були значно дешевшими за міні-машини та мейнфрейми (рис.7.3).



Рис. 7.3. Комп'ютерне моделювання на базі RISC-процесорів (1990-ті роки)

Так було створено передумови для розробки САЕ-систем ширшого застосування.

Сучасні комп'ютерні системи з інженерних розрахунків або САЕ-систем дозволяють проводити моделювання як окремих

технічних систем, так і їх елементів та процесів. Різноманіття фі-

зичних процесів, суб'єктивність у постановці задач аналізу, у підходах до формалізації та алгоритмізації процесів та елементів систем, у виборі методів моделювання та інші причини привели до створення багатьох спеціальних методик, алгоритмів, комп'ютерних програм і систем, призначених для вирішення задач інженерного аналізу та математичного моделювання.

За даними аналітиків Міжнародної консалтингової компанії CIMdata [51], обсяг промислового ринку CAE-систем у 2011 році зріс на 77,1 % порівняно з докризовим 2008 роком – з 2,275 до 4,029 млрд доларів США. Зростання частки ринку CAE свідчить про наявне підвищення/зростання значення та використання інструментів комп'ютерного моделювання, аналізу та розрахунків для отримання якісних результатів у процесі розробки, виготовлення та експлуатації сучасних промислових виробів.

Можна умовно виділити **три основні групи сучасних систем комп'ютерного моделювання.**

1. Системи повнофункціонального інженерного аналізу, що мають потужні засоби, великі сховища типів для сіток кінцевих елементів, а також різних фізичних процесів. У них передбачені власні можливості для моделювання геометрії. Крім того, є можливість імпорту через промислові стандарти Parasolid, ACIS та ін. Повнофункціональні CAE-системи позбавлені асоціативного зв'язку з CAD. Тому, якщо під час роботи з'являється потреба змінити геометрію, то користувачеві доведеться заново робити імпорт геометрії та вводити дані для розрахунку. Найвідомішими такими системами цієї групи є ANSYS та MSC.NASTRAN.

2. Системи інженерного аналізу, вбудовані у «важкі» CAD/CAM/CAE, мають менш потужні засоби аналізу. Проте вони асоціативні з геометрією, тому відстежують зміни моделі. Розрахункові дані структуровані та інтегровані в загальну систему проектування в інтегровані CAD/CAM/CAE-системи. До них належать Pro/MECHANICA для Pro/ENGINEER, NX CAE для Siemens PLM Software, Extensive Digital Validation CAE для I-deas, SIMULIA, DELMIA, CATIA для CATIA.

3. Спеціалізовані системи інженерного аналізу не мають потужних розрахункових можливостей і зберігають дані у власних форматах. Деякі з них вбудовуються в CAD-системи, інші зчитують геометрію з CAD. До перших належать COSMOS/Works,

COSMOS/Motion, COSMOS/FloWorks для SolidWorks, до других – visualNastran та ін.

Різні види аналізу, що виконуються в комп'ютерних системах першої, другої та третьої груп, ґрунтуються на класичних інженерних підходах до розробки математичних моделей поведінки виробу за різних впливів. При кінцево-елементній постановці задачі моделювання досліджувана область попередньо розбивається на обмежену множину кінцевих елементів, зв'язаних між собою кінцевою кількістю вузлів. Шуканими змінними рівнянь математичних моделей є переміщення, повороти, температура, тиск, швидкість, потенціали електричних чи магнітних полів. Ці змінні визначають степені вільності вузлів. Їх конкретний зміст залежить від типу (фізичної природи) елемента, зв'язаного з даним вузлом. Наприклад, у задачах аналізу на міцність для кожного елемента, з урахуванням степенів вільності його вузлів, можуть бути сформовані матриці мас, жорсткості (чи теплопровідності) та опору (чи питомої теплоємності). *Множину степенів вільності, що визначає стан усієї системи в даний момент, називають **хвильовим фронтом***, який може розширюватись чи звужуватись залежно від того, як невідомі змінні вводяться до сукупності, що розглядається, чи виводяться з неї. Після проходження хвильового фронту через усі елементи та врахування всіх шуканих змінних можна аналізувати отримані результати і будувати гіпотезу про поведінку досліджуваної технічної системи.

На рис. 7.4 зображено фрагмент комп'ютерного моделювання в інформаційному середовищі сучасної CAE-системи.

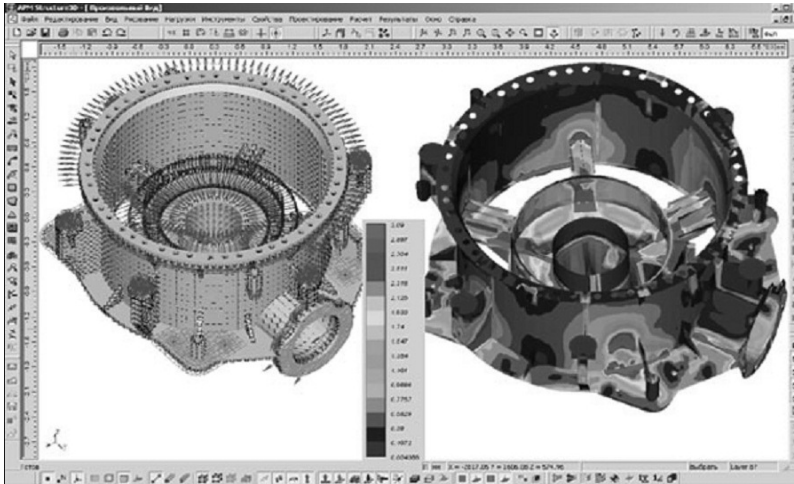


Рис. 7.4. Комп'ютерне моделювання в інформаційному середовищі CAE-систем WinMachine

7.3.2. Типові задачі комп'ютерного моделювання

Інженерні розрахункові задачі, як правило, є типовими, тобто можуть класифікуватися. Наведемо коротку класифікацію типових задач, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання [47–51].

Конструкційні задачі:

- статичний і динамічний аналіз конструкцій з урахуванням нелінійного поведіння матеріалів, включаючи повзучість, великі пластичні деформації, значний вигин, надластичність, накопичення залишкової деформації при циклічному навантаженні, мінливі умови контакту;
- визначення власних мод і резонансних спектрів вимушених коливань, а також зміщень і напружень за відомими вібраційними спектрами;
- динамічний аналіз перехідних процесів і точний динамічний аналіз, що моделює великі деформації в тих випадках, коли значущими стають сили інерції – ударне навантаження, дроблення, швидке формування і т.п.;
- контактні задачі (поверхня – поверхня, вузол – поверхня, вузол – вузол, стрижень – стрижень);

- завдання втрати стійкості конструкцій.

Теплові задачі:

- стаціонарні та нестаціонарні задачі теплофізики з урахуванням теплопровідності, конвекції, випромінювання;
- облік контактних термічних опорів, теплових ефектів при фазових перетвореннях.

Гідрогазодинамічні задачі:

- стаціонарні та нестаціонарні задачі гідрогазодинаміки;
- ламінарні і турбулентні течії стисливої й нестисливої рідини з урахуванням в'язкості, перехід від ламінарного до турбулентного стану;
- завдання з урахуванням вимушеної та природної конвекції, теплообмін випромінюванням, міжфазовий теплообмін;
- ньютонівські та неньютонівські рідини;
- завдання зовнішньої аеродинаміки, дозвуківий і надзвуківий режими;
- багатофазні течії. Моделі кавітації, конденсації; течії з твердими частинками, газовими бульбашками, краплями рідини;
- завдання розрахунку оптимальних систем охолодження електронних пристроїв;
- потоки рідин і газів у задачах переробної промисловості (обробка полімерів, заповнення форм, високотемпературне формоутворення);
- завдання потоків у системах опалення, вентиляції, кондиціонування в офісах, на заводах, стадіонах та інших громадських місцях; моделювання потоків повітря, теплоперенесення, поширення забруднювачів у системі вентиляції;
- лінеаризований аналіз;
- в'язко пружний/в'язко пластичний відгук.

Електростатичні та електромагнітні задачі:

- статичний і низькочастотний електромагнітний аналіз пристроїв, що працюють із джерелами постійного струму, струмами низької частоти, низькочастотними перехідними сигналами;

Типові завдання – трансформатор, двигун, пускач:

- обчислювані параметри: щільність магнітного потоку, інтенсивність поля, магнітні сили і моменти, опір, індуктивність, вихрові струми, втрата потужності;
- високочастотний електромагнітний аналіз пристроїв, що генерують електромагнітні хвилі.

Типові завдання – мікрохвильові й високочастотні пасивні компоненти, хвилеводи, коаксіальні конектори:

- визначення електричних полів, порушуваних зарядом або різницею потенціалів.

Типові завдання – високовольтні пристрої, лінії електропередач, мікроелектромеханічні системи:

- моделювання електромагнітного поля;
- електромагнітні перешкоди, електромагнітна сумісність;
- цілісність сигналу.

Типові завдання – електронні системи, електромеханічні системи, системи зв'язку, радіолокаційні станції (наземні, авіаційні, морського базування).

Спільні задачі

Вимагають залучення декількох модулів одночасно або послідовно, коли розрахункові результати одного модуля використовуються в наступному модулі як навантаження. Наприклад:

- визначення напруг (термічної і конструкційної);
- п'єзоелектричні ефекти (електричні і конструкційні);
- акустика (аеродинамічна і конструкційна);
- індукційний нагрів (магнітний і термічний);
- електронагрівальні системи (електричний і термічний аналіз);
- електродвигуни (електростатичний і конструкційний аналіз);
- взаємодія потоку рідини/газу та конструкції (спряження гідродинамічних розрахунків і розрахунків на міцність);
- лінеаризований аналіз.

Нестаціонарний нелінійний динамічний аналіз:

- моделювання складних, нелінійних явищ, які є результатом процесів, що породжують деформації. Области застосування: краш-тести, обробка металів тиском, штампування, катастрофічні відмови, аварії та крихке руйнування;

- моделювання нелінійної динаміки твердих тіл, рідин і газів та їх взаємодії.

7.3.3. Функціональні можливості сучасних інформаційних систем комп'ютерного моделювання

Коротко розглянемо функціональні можливості комп'ютерного моделювання систем кожної групи, які найчастіше застосовуються на українських підприємствах і в навчальному процесі технічних університетів та інститутів.

До першої групи належать універсальні CAE-системи, такі як ANSYS (США), MSC Software (США), SAMTECH (Бельгія), ABAQUS (Франція) та ін.

ANSYS – універсальна CAE-система кінцево-елементного аналізу, яка впродовж останніх 30 років є світовим лідером у галузі комп'ютерного моделювання та кінцево-елементного рішення лінійних і нелінійних, стаціонарних і нестаціонарних просторових задач механіки деформованого твердого тіла і механіки конструкцій (включаючи нестаціонарні геометрично і фізично нелінійні задачі контактної взаємодії елементів конструкцій), задач механіки рідини та газу, теплопередачі і теплообміну, електродинаміки, акустики, а також механіки зв'язаних полів.

Система ANSYS – це гнучкий і надійний засіб проектування та аналізу. Особливістю програмної системи є файлова сумісність усіх членів сімейства ANSYS для всіх використовуваних платформ. Багатоцільова спрямованість системи (реалізація в ній засобів для опису відгуку або реакції складної системи на впливи різної фізичної природи) дозволяє використовувати одну й ту ж модель для вирішення таких пов'язаних завдань, як міцність при теплових навантаженнях, вплив магнітних полів на міцність конструкції, тепломасоперенесення в електромагнітному полі. Як новачкам, так і досвідченим користувачам ця система пропонує безперервно зростаючий перелік розрахункових засобів, які дозволяють:

- врахувати різноманітні конструктивні нелінійності;
- вирішити найзагальніший випадок контактної взаємодії для просторових тіл складної конфігурації;
- врахувати великі (кінцеві) деформації, переміщення і кути повороту;

- виконати багатопараметричну оптимізацію в інтерактивному режимі;
- аналізувати вплив електромагнітних полів;
- вирішити завдання гідро- та аеродинаміки.

Також є багато інших можливостей, які разом з параметричним моделюванням та широкими можливостями створення макрокоманд за допомогою мови параметричного проектування системи ANSYS–APDL реалізують ефективне комп'ютерне моделювання.

Фірма Ansys Inc. (США) розробила сімейство програм аналізу. Основною багатоцільовою системою цього сімейства є ANSYS/Multiphysics. Доповненням до неї є створена підмножина автономних спеціалізованих пакетів, яка збільшує можливості основної системи. Серед них можна виділити:

- ANSYS/Mechanical – вирішення задач міцності, теплопередачі та акустики. Розрахунок та оптимізацію конструкції, визначення переміщень, напруг, зусиль, тиску і температур можна виконати за допомогою цього пакета;
- ANSYS/Structural – аналіз міцності виробу, що проектується з урахуванням геометричних і фізичних нелінійностей, нелінійної поведінки кінцевих елементів і втрати стійкості;
- ANSYS/LinearPlus – спрощена версія пакета ANSYS/Mechanical, призначена для рішення задач лінійної статичної, динамічної та стійкості конструкції;
- ANSYS/Thermal – може використовуватися для аналізу теплових стаціонарних і нестаціонарних процесів;
- ANSYS/PrePost – призначений для побудови кінцево-елементної сітки на стадії підготовки задачі та обробки результатів рішення до потрібного вигляду.

Розглянемо функціональні можливості комп'ютерного моделювання основних CAE-систем фірми **MSC Software**.

MSC/NASTRAN для Windows – це система інженерних розрахунків, що ґрунтується на методі кінцевих елементів. Геометричні моделі для MSC/NASTRAN можна формувати як за допомогою внутрішнього препроцесора системи, так й імпортувати з будь-якої іншої CAD-системи. MSC/NASTRAN для Windows має прямий інтерфейс із системою твердотільного параметричного моделювання SolidWorks. Крім того, система може працювати з готовими кінцево-елементними моделями, які були створені за допомогою інших

систем інженерних розрахунків і потім передані в MSC/NASTRAN.

MSC. PATRAN є інтегруючим середовищем і графічною оболонкою для MD Nastran, MSC Nastran, Marc, Dytran, Sinda та інших звичайно-елементних систем аналізу. Patran забезпечує імпорт геометричних моделей із CAD-систем, створення розрахункових моделей, запуску їх на розрахунок, графічне відображення та обробку отриманих результатів. Patran за допомогою повністю керованого графічного інтерфейсу та інтерактивної довідкової системи забезпечує краще вирішення завдань зі створення розрахункової моделі та обробки результатів. Patran містить функції створення та модифікації геометричних моделей, у тому числі твердотільне моделювання (включаючи булеві операції), створення серединних поверхонь, автоматичне розпізнавання і параметризацію отворів, заокруглень і фасок. Patran надає великий набір можливостей для завдання навантажень, граничних умов, властивостей матеріалів та елементів, параметрів розрахунку, а також для візуалізації, обробки та перетворення результатів рахунків. Є також можливості запуску розрахунку (у тому числі віддаленого і в гетерогенних комп'ютерних мережах, включаючи багатопроцесорні режими роботи), відстеження та контролю процесу вирішення задач. Функції «Групи», «Списки», «Суперелементи», «Області» та ін. дозволяють створювати й обробляти повнорозмірні докладні моделі складних виробів (літак, автомобіль тощо), що становлять мільйони кінцевих елементів. Ці функції, як і стандартні інтерфейси Patran, широко використовуються при веденні міжнародних проектів кількома компаніями або при організації робіт на розподілених робочих місцях при веденні великих проектів у рамках одного підприємства.

MSC.DYTRAN – аналіз високонелінійних швидкопротікаючих динамічних процесів: зіткнення конструкцій із руйнуванням, потрапляння предметів в авіадвигун, обрив лопатки, вибухи, штампування металу та ін.

MSC.MARC – комплексний нелінійний аналіз конструкцій та вирішення складних задач термоміцності.

MSC.FATIGUE – нові методи аналізу ресурсу та довговічності: втома, поява і збільшення тріщин, оптимізація конструкції за критерієм довговічності.

MSC.CFDesign – газо- та гідродинаміка в середовищі MSC.NASTRAN. Задачі стікання рідини та газу з урахуванням теплових процесів.

MSC.Digimat – унікальний програмний комплекс для нелінійного багаторівневого моделювання та розрахунків актуальних характеристик композиційних матеріалів.

MSC.Astran – програмний комплекс для аналізу виникнення, розповсюдження та поглинання шуму в закритих порожнинах і відкритому просторі, які виникають внаслідок механічного коливання конструкції або за наявності турбулентної течії газу.

MSC.Working Model – модуль, розроблений фірмою MSC/Working Knowledge (відділення американської компанії MSC/Software Corporation). Цей модуль служить для проведення експрес-аналізу міцності і динамічних характеристик виробу, а також вирішення завдань оптимізації. Він являє собою складову частину комплексу, що об'єднує, крім MSC/Working Model, такі модулі:

- Working Model Motion – кінематика і динаміка механізмів;
- Working Model Studio – анімація та фотореалістичні зображення;
- Working Model View – обробка та візуалізація даних із CAD/CAE-систем;
- Working Model 4D – спільне вирішення задач динаміки механізмів і міцності;
- MSC.Working FEA – розрахунки на міцність у пакетах AutoCAD, SolidWorks і SolidEdge;
- MSC.NVII_Manager – комплексний аналіз акустики, вібрації та стійкості автомобіля;
- MSC.AMS – пре- і постпроцесор для моделювання конструкції автомобіля;
- MSC.Flight Loads&Dynamics – комплексний аналіз аеропружних, динамічних і міцнісних характеристик літальних апаратів;
- MSC.MVISION – дані про властивості матеріалів.

MSC.Adams (США) – програмний комплекс для віртуального моделювання складних машин і механізмів. Adams використовується для розробки та вдосконалення конструкцій фактично всього, що рухається, – від простих механічних та електромеханічних при-

строїв до автомобілів і літаків, залізничної техніки і космічних апаратів і т.д. За допомогою Adams можна швидко створити цілковито параметризовану модель виробу, будуючи її безпосередньо в пре-процесорі або імпортуючи з найбільш поширених CAD-систем. Задавши зв'язки компонентів моделі, приклавши навантаження, визначивши параметри кінематичного впливу і запустивши розрахунок, можна отримати дані, цілковито ідентичні результатам натурних випробувань системи. Отже, уявлення про роботу виробу з'являється ще до початку розкрою металу або відливання пластика для виготовлення дослідного зразка.

Користувачеві доступні:

- визначення параметрів виробу, що визначають його працездатність і точність;
- ідентифікація зіткнень компонентів машини, визначення габаритних розмірів простору, необхідного для її рухомих частин;
- визначення рівня діючих навантажень, необхідної потужності приводів;
- оптимізація параметрів виробу.

Adams вирізняється такими характеристиками:

- широкий набір видів кінематичних зв'язків, пружних і дисипативних ланок, навантажень, кінематичних впливів;
- дружній, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс. Якщо ви знайомі з іншими програмними засобами CAE, то швидко опануєте Adams;
- цілковита параметризація віртуальних моделей – будь-які параметри прототипу можуть бути пов'язані функціональною залежністю, модифікація розміру моделі автоматично приводить до зміни її конфігурації тощо;
- ефективні засоби візуалізації результатів моделювання, включаючи анімацію та побудову графіків.

Компанія Samtech (Бельгія) у співпраці з Лабораторією аерокосмічних технологій Львівського університету розробила універсальну систему аналізу **SAMCEF**, усі розрахункові модулі якої зв'язані з єдиним графічним пре- і постпроцесором BACON.

Універсальна комплексна система SAMCEF має модульну структуру, включаючи:

- THERNL – нелінійний температурний аналіз стаціонарних і перехідних режимів, розрахунок задач електропровідності, конвекції, випромінювання. Дослідження електричних і теплових явищ, пов'язаних з ударом блискавки чи іскровим розрядом;
- ASEF – лінійний статичний аналіз з урахуванням нелінійних умов;
- SPECTRAL – розрахунок випадкових характеристик руйнувань від утомлюваності, що базується на спектральному аналізі;
- REPDYN – аналіз перехідних, гармонічних і сейсмічних процесів;
- STABI – визначення умов втрати стійкості конструкції;
- DYNAM – розрахунок особистих частот пружних систем.

Серед додаткових розробок цієї фірми можна виділити такі функціонально незалежні програмні модулі:

- FOURIER – лінійний статичний аналіз задач Фур'є;
- MECANO/STRUCTURE – нове програмне середовище, що відкриває можливості спільного нелінійного аналізу структури та податливості елементів механізмів. Уперше було використано для дослідження авіаційної та космічної техніки;
- ROTOR – унікальний інструмент динамічного аналізу обертальних механізмів;
- BOSS/QUATTRO – пакет, призначений для оптимізації роботи програмного середовища SAMCEF та ін.

ABAQUS (Dassault Systèmes, Франція) – кінцево-елементний комплекс загального призначення для проведення багатоцільового інженерного аналізу. ABAQUS дозволяє розраховувати складний нелінійний напружено-деформований стан технічних споруд та оцінювати їх міцність і стійкість з урахуванням багатофакторного навантажування (сейсмічного, теплового, вибухового та ін.). Системи можуть моделюватися з урахуванням впливу попереднього навантаження з одночасним розрахунком контактних взаємодій і моделюванням руйнувань.

Перевагою цього програмного комплексу також є наявність великої кількості нелінійних моделей матеріалів, що дозволяє ефективно та з великою точністю вирішувати завдання, які містять такі

типи матеріалів, з урахуванням їх реологічних властивостей.

Серед розв'язуваних за допомогою ABAQUS завдань слід відзначити:

- розрахунок міцності й довговічності конструкцій під впливом довільного за часом навантажування з урахуванням пластичного стану;
- оптимізацію конструкцій до зміни параметрів (наприклад, можна оптимізувати геометрію конструкції за напруженнями, що виникають у конструкції за заданих навантажень);
- розрахунок конструкцій на статичні, динамічні, сейсмічні й вітрові навантаження, а також на поєднання комбінацій навантажень (багатофакторність навантажування);
- розрахунок тріщиноутворення і концентраторів напружень;
- завдання з прогресуючого руйнування.

Особливістю ABAQUS є можливість використання власних підпрограм, що дозволяє створювати свої моделі поведінки різних матеріалів, кінцеві елементи і типи навантажень.

ABAQUS є надійною, якісною системою зі зручним інтерфейсом. Наявність вбудованої мови програмування PYTHON дозволяє створювати власні графічні оболонки, адаптовані для вирішення конкретних типів завдань. Програмний комплекс ABAQUS може застосовуватися на всіх обчислювальних платформах, включаючи багатоядерні обчислювальні системи та кластери.

До другої групи відносять системи, що об'єднують процеси проектування та аналізу в єдиний комплекс, наприклад, CAD/CAM/CAE – CATIA v6 (Франція) та ін. При їх використанні не виникають труднощі зі створенням складної та математично точної моделі виробу, бо вони мають найпотужніші засоби геометричного моделювання. Організація обміну між підсистемами конструювання та аналізу непомітна для користувача. Обидві підсистеми взаємодіють з однією базою даних або мають внутрішні формати даних. Склад різних видів аналізу обмежений порівняно зі складом універсальних програм, і здебільшого призначений для вирішення таких задач, як структурний аналіз, лінійний статичний аналіз, модальний аналіз, аналіз поздовжніх деформацій, тепловий аналіз, аналіз стійкого стану (електропровідність, лінійна конвекція) та ін.

Третю групу систем складають спеціалізовані системи комп'ютерного моделювання. До них можна віднести пакет

MSC.SuperForge (фірма MSC, США), призначений для об'ємного моделювання процесів штампування і кування. Результати аналізу можуть бути використані для проектування оснащення і технологічних процесів. Крім американської фірми MSC визнаними лідерами в галузі моделювання процесів штампування і кування є американська компанія SFTS (система DEFORM), французька компанія TRANVALOR (система FORGE) і російська фірма «Квантор-Софт» (система Qform).

COSMOS / Works (розробник – компанія Structural Research & Analysis Corporation, США) – кінцево-елементний комплекс, спеціально розроблений для спільного використання з системою твердотільного параметричного моделювання SolidWorks. Комплекс – це відкрита система модулів, призначених для вирішення задач міцності, стійкості, динаміки конструкцій, а також завдань оптимізації, гідродинаміки і магнітного випромінювання. Функціональні можливості комплексу можуть бути доповнені за допомогою спеціалізованих модулів: Assemblies – розрахунок складних складань; OPTSTAR – оптимізація та аналіз чутливості; Translators – перетворення звичайно-елементних форматів; Dynamic Designer/Motion – моделювання руху; COSMOS/HFS Suite – розрахунок високочастотних електромагнітних полів; COSMOS/Flow та FlowPlus – газота гідродинаміка.

DesignWorks – це комплекс цілком інтегрованих у SolidWorks систем інженерних розрахунків, розроблених фірмою CADSI (США). DesignWorks становить три самостійні програмні продукти: DesignWorks/Motion – для кінематичного аналізу складань, створених у SolidWorks; DesignWorks/Structure – для розрахунків на міцність; DesignWorks/Thermal – для теплових розрахунків.

Part Adviser – це перший програмний продукт із розроблюваної MoldFlow Corporation (США) серії програм Plastic Adviser. Part Adviser може швидко перевіряти будь-які деталі, одержані за допомогою литва пластмас під тиском, на максимальну відповідність умовам виробництва. Система створена на основі ньютонівського неізотермічного математичного вирішувача, що враховує реальну поведінку пластмаси при литті під тиском. Разом з системою поставляється база даних матеріалів, яка включає понад 4 000 різних полімерів, що застосовуються в усьому світі.

У галузі розробки програмних середовищ інженерного аналізу значних результатів досягнули російські фірми. Наведемо приклади пакетів і фірм-розробників та перелік основних задач, які вирішуються з їх допомогою:

Euler (розробник – фірма АвтоМеханіка, Росія) – динамічний аналіз багатокомпонентних механічних систем;

ИСПА (розробник – фірма АЛЕКСОФТ, Росія) – розрахунок та аналіз на міцність;

ПОЛІГОН (розробник – ЦНДІ матеріалів, Росія) дозволяє провести відпрацювання найбільш важливих технологічних параметрів ливарних процесів не на реальному литві, а на його моделі, програмно реалізованому на персональному комп'ютері. «Полігон» призначений для моделювання процесів затвердіння, визначення раковин і макропористості, визначення мікропористості, розвитку деформацій для прогнозу кристалізаційних тріщин, формування та розрахунок будь-яких «критеріїв якості» для прогнозу структури, механічних властивостей та інше.

РИМАН (розробник – фірма ПроПроГрупа, Росія) – це розрахунок та аналіз напружено-деформованого стану конструкції, вирішення пружних і пластичних задач, штампування та ударних напруг;

APM WinMachine (розробник – НТЦ АПМ, Росія) – це комплексне програмне забезпечення для розрахунку та автоматизованого проектування деталей машин, механізмів, елементів конструкцій і вузлів. Воно призначене для інженерів і конструкторів, зайнятих розробкою нового і модернізацією існуючого механічного устаткування. APM WinMachine складається з таких підсистем: розрахунку зубчастих, черв'ячних, ремінних ланцюгових передач із можливістю автоматичної генерації креслень елементів передач; розрахунку і проектування з'єднань деталей машин та елементів конструкцій, комплексного розрахунку всіх типів різбових, зварних, клепаных з'єднань і з'єднань деталей обертання; розрахунку, аналізу і проектування валів та осей; розрахунку підшипників кочення; розрахунку та проектування пружин та інших пружних елементів машин; розрахунку та проектування кулачкових і мальтійських механізмів; розрахунку та проектування важільних механізмів довільної структури; розрахунку та аналізу радіальних підшипників, що працюють в умовах рідинного і напіврідинного тертя; розрахунку неідеа-

льних передач поступального руху, гвинтових передач ковзання, кульково-гвинтових і планетарних гвинтових передач; розрахунку і проектування плоских ферменних конструкцій методом кінцевих елементів; розрахунку напружено-деформованого стану плоских деталей методом кінцевих елементів; розрахунку та проектування балочних елементів конструкцій; розрахунку напружено-деформованого стану тривимірних рамних конструкцій; розрахунку та проектування пластинчастих, оболонкових і стрижневих конструкцій, а також їх довільних комбінацій; модуль зберігання та редагування стандартних та інформаційних даних, необхідних для функціонування кожної з перерахованих вище підсистем. Система застосовується у навчальному процесі багатьох технічних університетів України та Росії.

У навчальному посібнику розглянуті САЕ-системи, які найчастіше застосовується для комп'ютерного моделювання технічних систем (об'єктів та процесів) інженерами на виробництві, науководослідними і навчальними інститутами та університетами. Більшість фірм-розробників передає навчальні версії своїх систем за незначну суму або безкоштовно. Послідовність комп'ютерного моделювання в інформаційному середовищі конкретної САЕ-системи специфічна, і, як правило, детально представлена в інструкціях користувача. Засвоюється це як самостійно, так і під час навчання фахівцями консалтингових фірм, які займаються впровадженням та супроводом САЕ-систем.

7.4. Застосування інструментального засобу Origin Pro для математичного моделювання технічних систем

У навчальній та науковій діяльності дедалі частіше виникає потреба у засобах аналізу даних великої розмірності, представленні даних і результатів їх обробки у вигляді графічних залежностей, моделюванні процесів і прогнозуванні їх поведінки тощо. При виборі програмних продуктів для вирішення подібних завдань основним критерієм є зручність їх застосування з урахуванням таких аспектів:

1. Зручність та швидкість доступу до даних.
2. Інтерактивна та швидка графіка.

3. Спрощені інструменти аналізу з використанням широкої математичної обробки даних і графічних залежностей.
4. Формування вихідних документів, які можуть застосовуватися для опублікування.
5. Автоматизація процесу обробки даних при вирішенні завдань значної складності тощо.

Найкраще вдало перерахованим вимогам задовольняють інструментальні засоби аналізу даних та технічної графіки (data analysis and technical graphics software), які відрізняються від електронних таблиць та відповідного програмного забезпечення широким набором засобів аналізу даних та побудови графіків, можливістю роботи з різними типами та великими масивами даних, а також підвищеною продуктивністю внаслідок автоматизації дрібних задач. Одним із прикладів такого інструментального засобу є пакет Origin – програмний продукт фірми OriginLab Corporation (розробник США).

Він є одним з найбільш розповсюджених засобів графічного представлення табличних даних. Пакет Origin дозволяє не просто будувати графіки та оформлювати їх відповідно до вимог користувача. Програмний продукт також дозволяє проводити потужну математичну обробку даних: шукати залежності в зміні отриманих даних; проводити числове диференціювання та інтегрування; здійснювати інтерполяцію та екстраполяцію; проводити статистичну обробку даних; виконувати необхідні перетворення даних безпосередньо у самому програмному середовищі тощо.

Origin є простим і прозорим у використанні при формуванні і збереженні баз даних, їх математичного аналізу і графічного представлення. Це привело до його широкого застосування вченими та інженерами промислово розвинених країн світу, які працюють у різних галузях науки і техніки.

Origin має всі необхідні інструменти для проведення аналітичних обчислень, включаючи математичний і статистичний аналіз, отримання даних при обчисленні математичних виразів, форматування графічних залежностей тощо. Щоб зробити процес аналізу більш ефективним, Origin підтримує більшість розповсюджених форматів для імпорту даних, а також дозволяє експортувати отримані графіки та таблиці в ряд форматів, таких як PDF, EPS, WMF, TIFF, JPEG, GIF та ін. Origin забезпечує оптимізацію робочого

процесу збереження даних та документів як аналіз шаблонів для повторного використання. Із більш ніж 70 вбудованих типів графіки Origin дозволяє створювати та налагоджувати графіки типографської якості відповідно до певних вимог (рис. 7.5). При цьому у графіці підтримується більшість популярних 2D- та 3D-типів.

Origin має дві вбудовані мови програмування – C та LabTalk: C – основна компільована мова; LabTalk – мова сценаріїв. Їх спільне використання дозволяє автоматизувати аналіз даних, їх математичну і статистичну обробку; побудову графіків. Злагоджена робота в Origin забезпечується відповідним інтегрованим середовищем розробки (IDE) – Code Builder, яке дозволяє описувати і налагоджувати свій код. Origin сумісна з MathLab та MathCad. Передбачена також інтеграція з системами збору даних, таких як LabView, DasyLab, LabWindows та ін. Origin також є сервером автоматизації для користувачів VB, C++, C# та LabVIEW. У наукових лабораторіях провідних країн світу інструментальні засоби Origin впроваджено як стандарт, за яким обробляються дані, отримані при проведенні наукових досліджень.

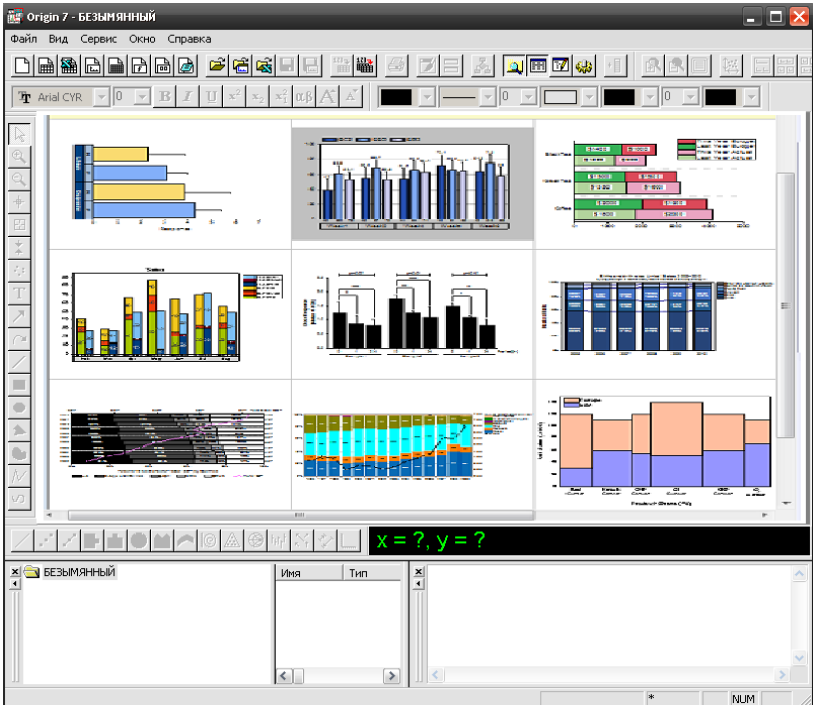


Рис. 7.5. Приклад використання інструментального засобу Origin для побудови різноманітних графіків

Початок роботи

Інтерфейс програми Origin практично не відрізняється від інтерфейсів більшості Windows-додатків. Основний склад Панелі інструментів – «Файл», «Правка», «Вид» – містить функції, які є і в більшості програм Windows-додатків.

При першому запуску програми Origin за замовчуванням всі її налаштування є стандартними. За потреби їх можна змінювати та налагоджувати під конкретного користувача за допомогою інтерфейсу управління. Процедуру зміни налаштувань, відображення панелі інструментів, наборів піктограм, збереження шаблонів тощо буде розглянуто нижче.

Окрім панелі інструментів головного меню існують і інші специфічні для Origin вкладки. Ці вкладки представлені на інтерфейсі

управління у вигляді набору піктограм, які призначені для швидкого виклику (запуску) різноманітних команд або опцій. Деякі з піктограм є активними з початку завантаження пакета Origin, а інші стають активними при роботі з табличними даними або графіками. При наведенні маркера комп'ютерної миші на будь-яку з піктограм з'являється підказка про її призначення.

Введення даних

При запуску програми Origin з'явиться вікно Data 1 з таблицею у вигляді двох колонок (рис. 7.6). Таблиця необхідна для введення даних за віссю X і віссю Y , отриманих при виконанні експерименту, наприклад, як показано на рис. 7.7.

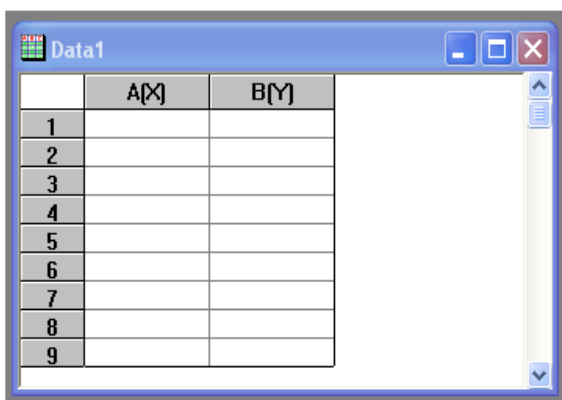


Рис. 7.6. Загальний вигляд вікна з таблицею для даних

Введення даних у кожен комірку повинно закінчуватися натисненням клавіші Enter (Введення). Інакше дані з такої комірки не сприйматимуться Origin в подальшій обробці або зникнуть після побудови графіків.

При введенні чисел із плаваючою крапкою як роздільник можна використовувати як крапку, так і кому. Це визначається опціями, які встановлюються в Origin для введення та виведення числових даних. При цьому можуть підтримуватися опції Windows або інші, які вибирає користувач.

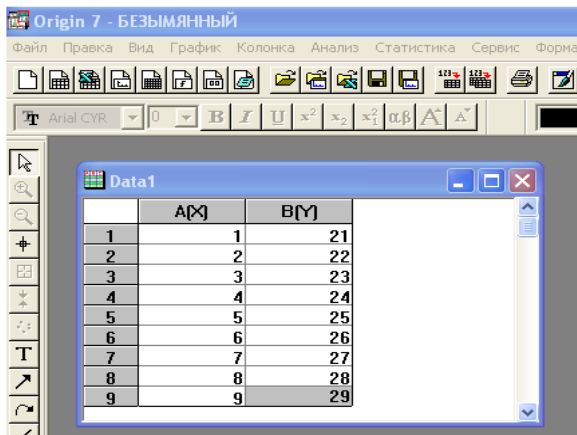


Рис. 7.7. Приклад таблиці з експериментальними даними

Формат числових даних визначається і встановлюється за допомогою панелі інструментів «Сервис» і операції «Параметры», наприклад, кількість значущих цифр після коми, формат роздільника (крапка чи кома) та інші опції (рис. 7.8).

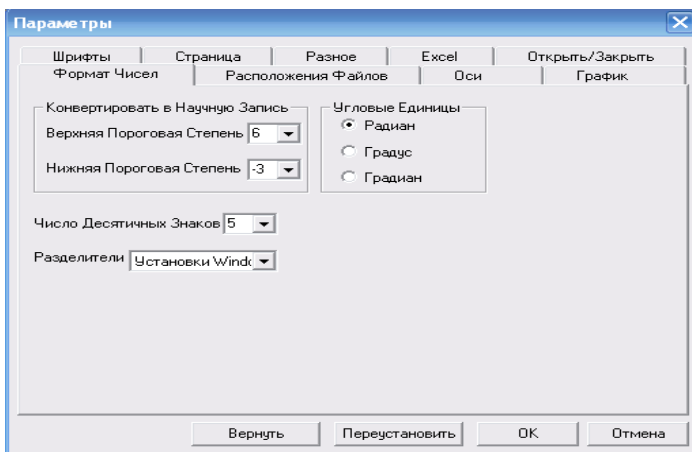


Рис. 7.8. Загальний вигляд вікна налаштування параметрів Origin

При введенні великих або малих чисел використовують різні формати. Наприклад, 240000000, $24E^7$, 0.000012, $1.2E^{-5}$. Представ-

лення дуже великих і дуже малих чисел Origin виконується автоматично з проведенням необхідних перетворень.

Дані можуть бути введені у таблицю пакета Origin із файла за допомогою використання стандартних команд копіювання і вставки. Крім того, дані можуть бути введені з використанням їх імпорту з необхідного файла. Для цього використовується операція «Імпорт», розташована в панелі інструментів «Файл», що буде розглянуто далі.

Для зручного користування таблицями даних стовпцям можна надати назви. Для цього необхідно скасувати стовпець, наприклад, А і двічі клацнути лівою кнопкою миші. З'явиться діалогове вікно «Формат колонок таблиці» (рис. 7.9). У вікні «Заголовок» і «Тип» слід задати необхідні параметри. Наприклад, «Заголовок» – АТІМЕ, «Тип» – Текст&Число. У вікні «Маркировка для графика» треба вказати роль цього стовпця або мітку прив'язки при побудові графіка. Наприклад, Х. При натисканні кнопки «Следующий» відбудеться перехід на наступний стовпець, де можна встановити необхідні параметри.

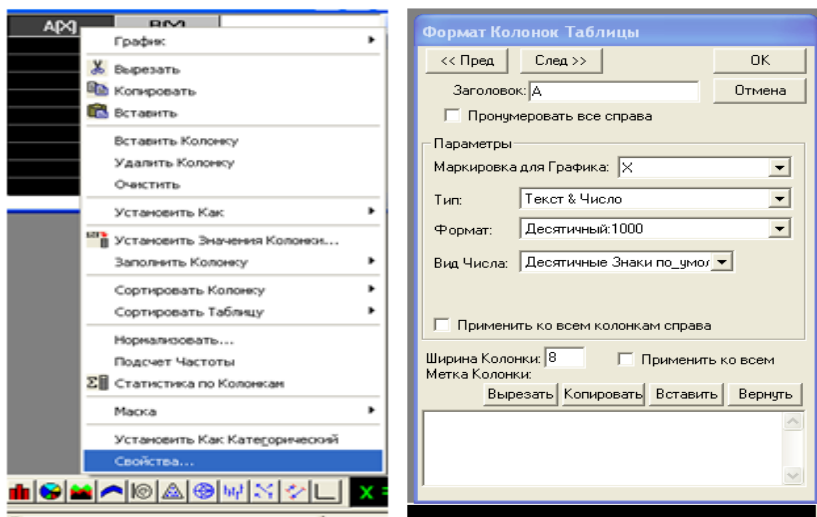


Рис. 7.9. Опції налаштування властивостей колонки

Для розширення набору даних можна збільшити кількість стовпців. Для цього необхідно зайти в панель інструментів «Колонки» головного меню і вибрати операцію «Добавить новые столбцы». З'явиться діалогове вікно «Добавить новые столбцы». Необхідно вказати кількість потрібних стовпців до додавання і натиснути кнопку «ОК».

Побудова графіків та робота з ними

Доступ до основних інструментів для побудови графіків здійснюється через панель інструментів «График» головного меню. У пакеті Origin існує достатньо велика кількість стандартних варіантів побудови графіків (рис. 7.10). Крім того існує і бібліотека шаблонів, доступ до яких здійснюється за допомогою вкладки «Библиотека шаблонов», розміщеної в панелі інструментів «График». Однак найчастіше використовується відображення результатів, занесених до таблиці даних, у вигляді графіків «Линия», «Точка» або «Линия + Символ».

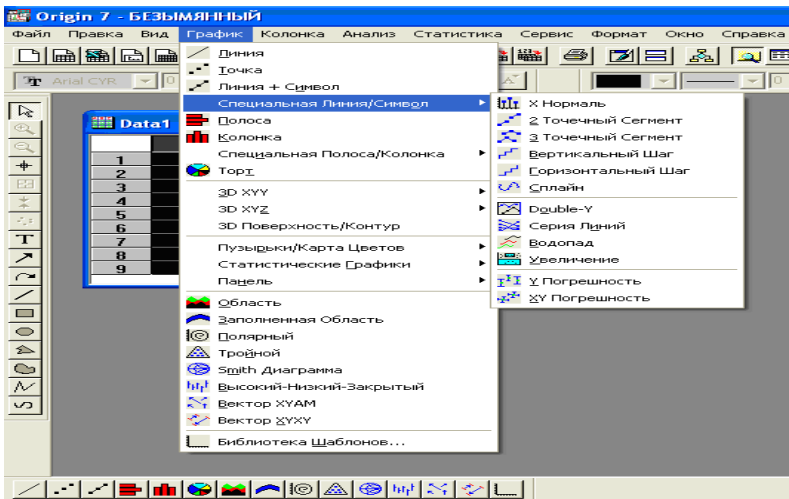


Рис. 7.10. Вибір варіанта побудови графіка

Для побудови графіка за даними з таблиці даних потрібно:

1. Виділити стовпець з міткою Y , наприклад, стовпець B (Y). Виділення стовпця (стовпців) проводиться або клацанням лівої кнопки миші, її утриманням та одночасним пересуванням миші по не-

обхідним даним, або клацанням лівої кнопки миші на назві необхідного стовпця (стовпцях).

2. У панелі інструментів «Графік» вибрати опцію побудови графіка «Точка», що приведе до автоматичної побудови вікна виведення з відповідним графіком (рис. 7.11).

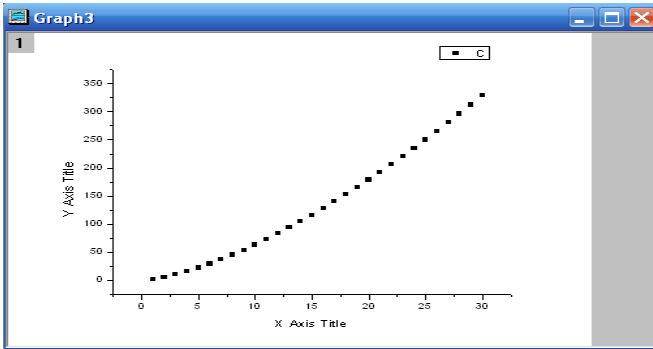


Рис. 7.11. Графік, який побудовано за значеннями в колонках

Будуючи графік, використовують дані з відміченого стовпця та стовпця з міткою X . Якщо було відмічено декілька графіків, то їх будують в одному вікні, і вони мають різні кольори. Далі можна проводити форматування побудованого графіка. Клацнувши двічі лівою кнопкою миші на одній із точок графіка, отримаємо вікно «Детали графика» (рис. 7.11).

На закладці «Символ» можна обрати загальний вигляд символів, список яких відкривається при натисканні на кнопку «Просмотр» з чорним трикутником; вказати розмір символів у списку «Размер», колір – у списку «Цвет». Якщо графік побудований «лінією» або «лінія + точка», то в меню «Детали графика» (рис. 7.12) додається опція роботи з лінією – «Линия». За цією опцією можна вибрати «Тип соединения», стиль лінії – «Стиль», товщину лінії – «Ширина», колір лінії – «Цвет» та інші опції.

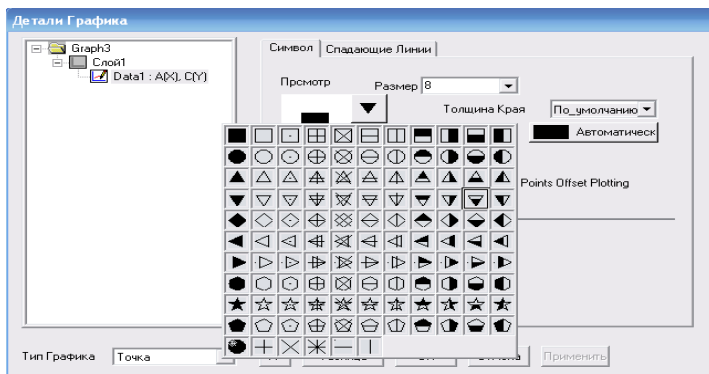


Рис. 7.12. Элементы налагодження символів для графіка «Точка»

На вкладці «Спадающие линии» можна встановити перемикачі «Горизонтальная» та «Вертикальная» (рис. 7.13). Після натискання на кнопку ОК на графіку з'являться лінії, що поєднують точки графіка з відповідними осями. Ці проєкції можуть полегшити зіставлення даних.

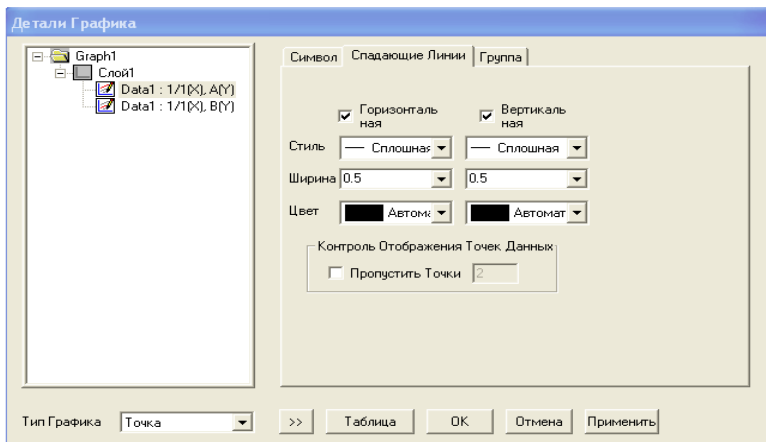


Рис. 7.13. Специфічні налаштування графіка «Точка»

Вид графіка, який будується за допомогою програми Origin за замовчуванням, не завжди задовольняє вимогам оформлення рисунків та графіків, що наводяться у наукових статтях. Це потребує

форматування шкал виведення, їх назв, розміщення позначень, створення додаткових осей та сіток тощо. Для цього використовується опції панелі інструментів «Формат» – «Оси», «Метки на осях», «Названия осей». Ці опції викликаються подвійним клацанням лівої кнопки миші на одній із осей графіка або натисканням відповідних опцій у панелі інструментів «Формат». При цьому виводиться вікно форматування, яке зображено на рис. 7.14.

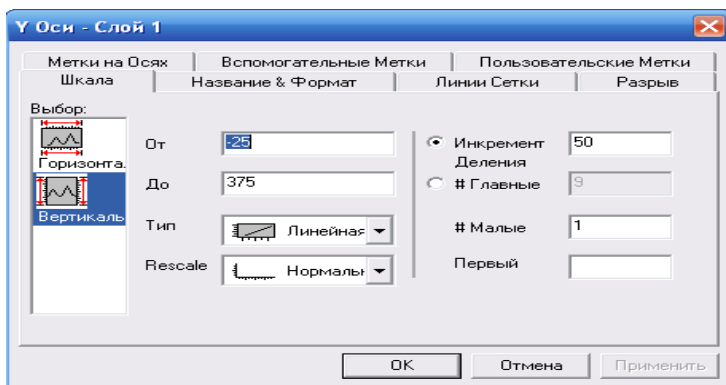


Рис. 7.14. Діалогове вікно оформлення графіка

Вкладка «Шкала» дозволяє встановлювати діапазон відображення числових даних на графіку по горизонтальній та вертикальній осях («От» – мінімальне значення по осі, «До» – максимальне значення по осі). Відповідна вісь вибирається в меню «Выбор» клацанням миші на відповідному графіку. Окрім діапазону зміни даних на графіку можна встановлювати шаг відображення числового прирощування шкал за осями («Инкремент»), встановлювати крок відображення міток на осях («Главные», «Малые») тощо.

Вкладка «Название и формат» використовується для форматування надписів та міток на графіку. При цьому можна ввести назву осей, вибрати колір для їх виведення, вибрати товщину і довжину міток на осях, напрями розташування міток (у межах або за межами графіка), будовання шкал по всіх сторонах графіка тощо.

Вкладка «Линии сетки» призначена для введення сітки на побудований графік (рис. 7.15). Опція дозволяє вибирати завдання ліній сітки по головних мітках на шкалах графіка («Основная») та додаткових мітках на шкалах графіка («Вспомогательная»). Для заданих

сіток можна вибирати їх колір («Цвет линии»), тип ліній («Тип линии» – суцільна, штрихова, точка тощо), товщину ліній («Толщина»), а також задавати додаткові лінії з вибором координат їх розташування.

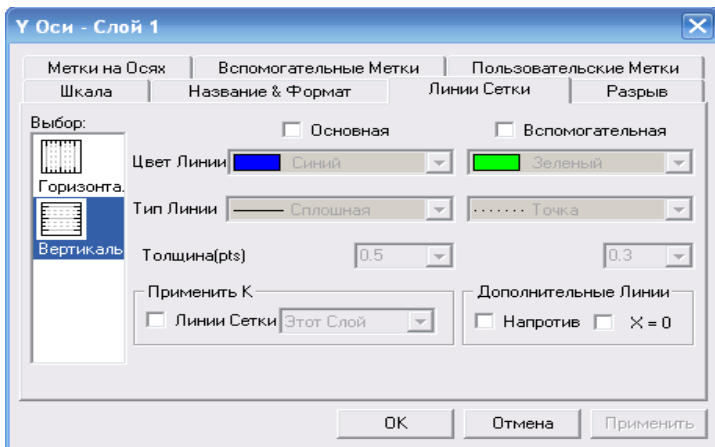


Рис. 7.15. Вигляд опції «Линии сетки» у діалоговому вікні оформлення графіка

Крім того, існують опції роботи з осями, наприклад, «Метки на осях» (див. рис. 7.15). Їх застосовують для вибору типу міток (цифрові, текстові, дата, час тощо), шрифту виведених міток, їх кольору та розміру тощо.

Слід зазначити, що для роботи з графіком можна використовувати й інші опції, які завантажуються за допомогою панелей інструментів або піктограм головного меню пакета Origin. До таких панелей інструментів належать – лупа; – зчитувач екрана; – селектор даних; – зчитувач даних тощо. Ці опції дозволяють оперативно отримувати інформацію за будь-якими даними, розміщеними на графічній залежності.

Імпорт та експорт даних

Пакет Origin дозволяє імпортувати дані різних форматів. До таких форматів відносяться дані, які представлені у вигляді текстових файлів, а також дані, які представлені у вигляді графіків. Текстові дані можуть бути імпортовані з файла формату ASCII – текс-

товий файл, який складається з чисел та тексту, що розділені будь-якими знаками або спеціальними символами. Стандартними форматами ASCII-файлів Origin є файли з розширенням *.dat, *.txt, *.csv. Можна вибирати і довільний тип розширення файла (*.*). Графічні дані можуть бути імпортовані з файла, який має графічний формат. Стандартними форматами графічних даних є файли з розширенням *.brn, *.psx, *.gif, *.jpg та багато інших.

Текстові дані імпортуються за допомогою виклику опцій «Імпорт ASCII» → «Одиночный файл»/«Несколько файлов», розташованих на панелі інструментів «Файл» (рис. 7.16).

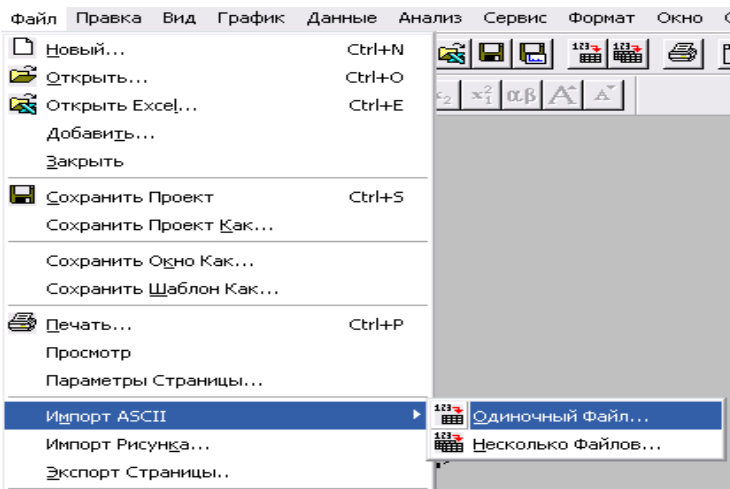



Рис. 7.16. Опції панелі інструментів «Файл»

Після вибору і завантаження опції «Імпорт ASCII» → «Одиночный файл» формується вікно імпорту текстових даних (рис. 7.17).

Для завантаження файла з даними у вікні «Імпорт ASCII» (див. рис. 7.17) необхідно провести пошук розташування необхідного файла із заданим ім'ям і завантажити його за допомогою натискання кнопки «Открыть». Дані з файла будуть автоматично зчитані і введені у таблицю даних (рис. 7.17). Кількість стовпців у таблиці відповідатиме кількості стовпців у текстовому файлі з даними.



Рис. 7.17. Вікно імпорту текстових даних

Origin автоматично присвоює назву файлу як назву таблиці з даними та використовує текст з файлу як надписи колонок. Слід зазначити, що дані імпортуються в активну таблицю. При цьому дані розшуковуються поверх даних, розташованих у таблиці, тобто дані втрачаються. Тому при імпорті нових даних з файлу, за умови необхідності збереження попередніх даних, потрібно створювати нову таблицю для даних. Для цього використовується опція «Новый→Таблица» панелі інструментів «Файл» головного меню або завантаження піктограми  (таблиця).

При імпорті текстових файлів із даними можна проводити налаштування або зміну параметрів імпорту ASCII-файлів. Для цього використовується кнопка «Настройка», розташована у вікні імпорту ASCII-файлів (див. рис. 7.17). При її натисканні формується вікно налаштування (рис. 7.18), у якому можуть задаватися параметри перетворення даних, які імпортуються з текстового файлу.

Параметри, які застосовано для імпорту текстових файлів, зберігатимуть постійно. Вони змінюватимуться при проведенні нового налаштування параметрів перетворення даних.

Графічні дані імпортуються за допомогою виклику опції «Импорт рисунка», розташованої на панелі інструментів «Файл» (див. рис. 7.16). Після вибору і завантаження опції «Импорт рисунка» формується вікно імпорту графічних даних, яке подібне до вікна імпорту текстових даних (див. рис. 7.17). Процедура завантаження графічних даних із файлу подібна до процедури завантажен-

ня текстових даних. Графічні дані завантажуються у вигляді рисунка, який може бути вставлений і збережений у вікні графіка, який будується за табличними даними.

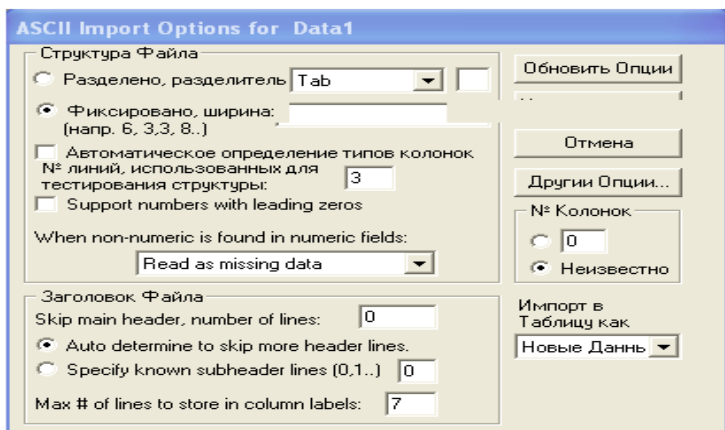


Рис. 7.18. Вікно налаштування параметрів імпорту файлів

Дані до таблиці даних можна ввести і шляхом їх розрахунку з використанням обчислень математичних виразів. Для цього необхідно у таблиці даних відмітити стовпець, у якому будуть збережені дані, зайти в панель інструментів «Колонка» головного меню пакета (див. рис. 7.18) і вибрати опцію «Установить значение столбца». При завантаженні даної опції формується вікно «Установить значение колонки» (рис. 7.19).

Для розрахунку даних, які повинні бути внесені у вибраний стовпець, необхідно ввести кількість точок для розрахунку даних (Для рядка $[i]$ від 1 до 1 000), додати стандартну функцію (Добавить функцию) або ввести інший вираз, за яким будуть проведені обчислення. Вираз вводиться у вікно, як показано на рис. 7.19. При введенні виразу використовується синтаксис, який є стандартним для більшості додатків Windows. Вираз може мати значну складність. Може бути незалежним від існуючих табличних даних або використовувати значення даних, внесених у необхідні стовпці. Після натискання кнопки «ОК» у вибраний стовпець автоматично заносяться розраховані дані.

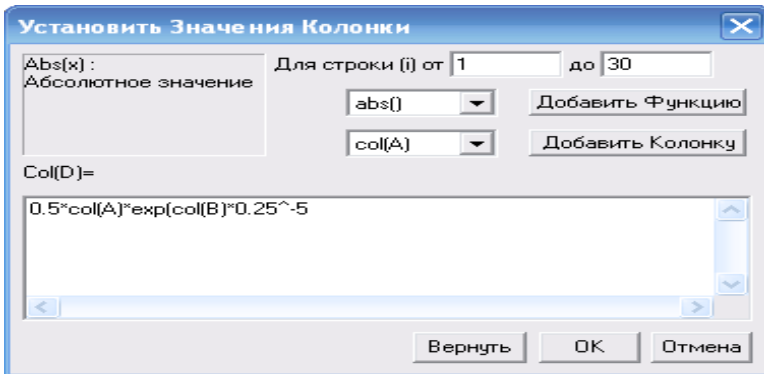


Рис. 7.19. Вікно встановлення значення стовпця

Табличні дані і результати їх обробки можна зберегти у вигляді текстових і графічних файлів. Для цього використовуються опції «Експорт ASCII» і «Експорт сторінки», розташовані в панелі інструментів «Файл» (див. рис. 7.16). Опція «Експорт ASCII» з'являється у панелі інструментів «Файл», якщо маркер миші розміщується на таблиці з даними або інших таблицях. Опція «Експорт сторінки» з'являється на панелі інструментів «Файл», якщо маркер миші розміщується у вікні з графіком.

При завантаженні опції «Експорт ASCII» формується вікно експорту текстових даних, яке подібне до вікна імпорту текстових даних (див. рис. 7.17). Однак воно спрямоване на збереження даних у файлі. Процедура збереження табличних даних у файлі подібна до процедури завантаження текстових даних з файлу, тобто формується ім'я файлу з розширенням з урахуванням шляху збереження, і відбувається його збереження.

При завантаженні опції «Експорт сторінки» формується вікно експорту графічних даних (рис. 7.20). Процедура збереження табличних даних у файлі подібна до процедури збереження текстових (табличних) даних у файлі, тобто формується ім'я файлу з розширенням з урахуванням шляху збереження, і відбувається його збереження. Однак при відмітці опції «Show export options» формується вікно параметрів збереження графічних даних (див. рис. 7.20).

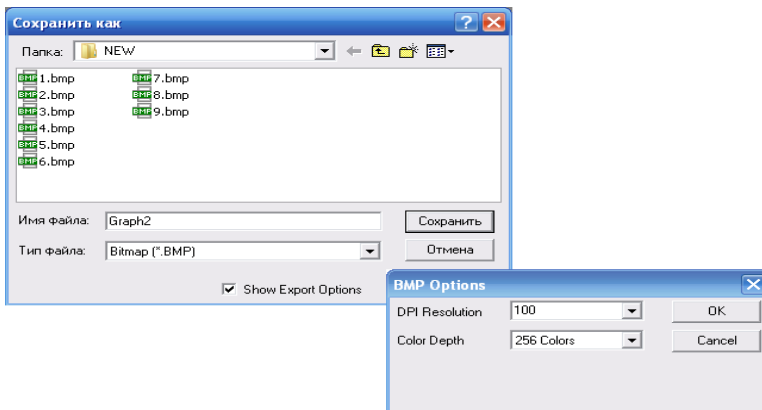


Рис. 7.20. Вікно експорту графічних даних

Це дозволяє вибрати розпізнавальну здатність за масштабом і розпізнавальну здатність за кольорами.

Апроксимація даних

При аналізі отриманих результатів виникає необхідність пошуку залежностей між даними або апроксимації експериментальних даних різними лінійними або нелінійними функціями. Origin має великий набір вбудованих функцій, які часто використовуються при аналізі даних (рис. 7.21).

Крім того, є можливість задавати свої власні функції. У меню є декілька пунктів, які дозволяють швидко проводити апроксимацію найбільш часто використовуваними функціями. Припустимо, що у нас є певні експериментальні дані (рис. 7.22).

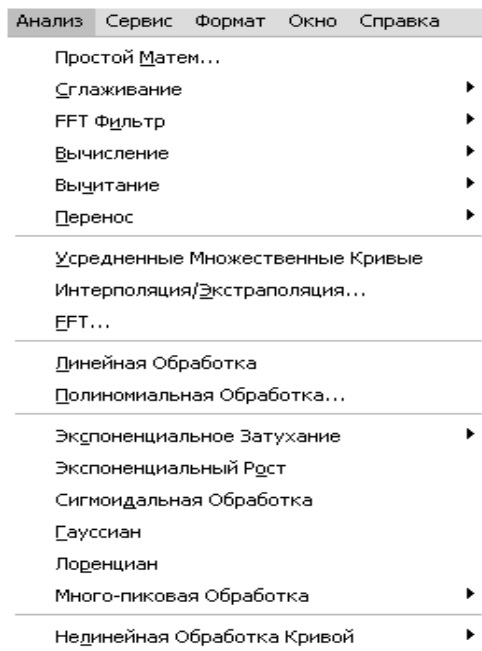


Рис. 7.21. Функції меню «Анализ»

	A(X)	B(Y)
1	1	30
2	2	35
3	3	38
4	4	42
5	5	46
6	6	50
7	7	56
8	8	60
9	9	66
10	10	72
11	11	78
12	12	82
13	13	88
14	14	92
15	15	99
16	16	105
17	17	112
18	18	120
19	19	128

Рис. 7.22. Експериментальні дані

Відповідно до підрозділу «Побудова графіків та робота з ними» побудуємо точковий графік, щоб дізнатися, яку графічну залежність отримано (рис. 7.23).

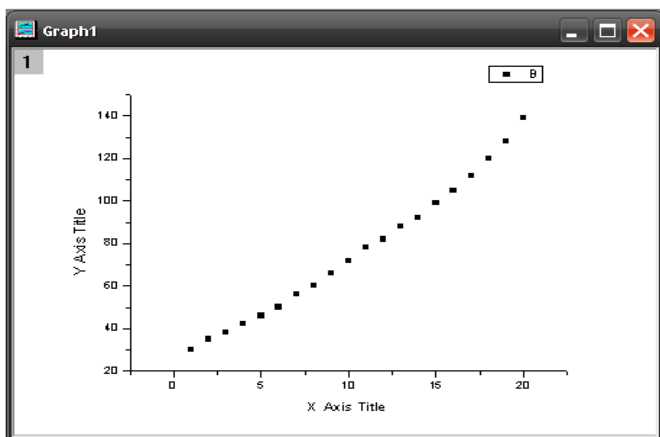


Рис. 7.23. Графічна залежність за експериментальними даними

Проведемо апроксимацію отриманої графічної залежності лінійною або нелінійною функцією, залежно від її виду. Будувати лінійну залежність між даними нескладно. Для цього в меню «Анализ» вибирається панель інструментів «Линейная обработка». У результаті використання цієї процедури на графіку з'явиться пряма лінія, а також активується вікно зображення результатів математичної обробки (рис. 7.24).

Origin обробляє дані, використовуючи метод найменших квадратів, тому у вікні математичних результатів, окрім параметрів A та B , які характеризують знайдену лінійну залежність, є і додаткова інформація: наприклад, коефіцієнт кореляції (r) та середньоквадратичне відхилення (SD), що дозволяє говорити про коректність отриманих результатів.

Для визначення толерантних та довірчих інтервалів необхідно зайти в меню «Сервис» вибрати панель інструментів «Линейная обработка». Поряд із графіком з'явиться вікно, в якому потрібно зазначити необхідність обробки з визначенням довірчих і толерантних інтервалів (рис. 7.25), встановити величину довірчих інтерва-

лів (у відсотках – 95 %) та кількість точок (за замовчуванням – 20), які будуть використані для побудови графіка.

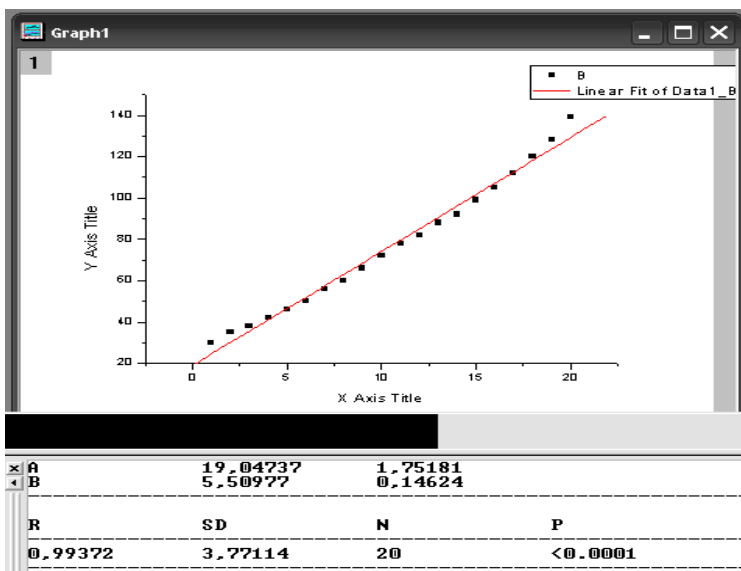


Рис. 7.24. Результат пошуку лінійної залежності

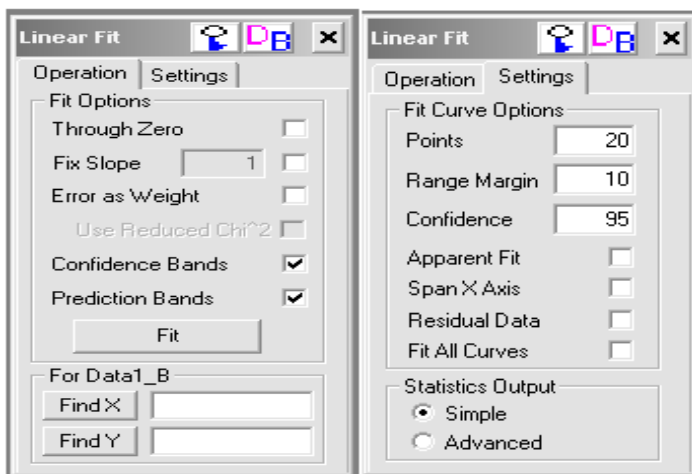


Рис. 7.25. Вікно налаштування апроксимації лінійною функцією

Після натискання на кнопку «Обработка» на графіку буде побудовано додатково чотири прямі, які графічно демонструють довірчі та толерантні інтервали (рис. 7.26), а також вікно зображення результату математичної обробки.

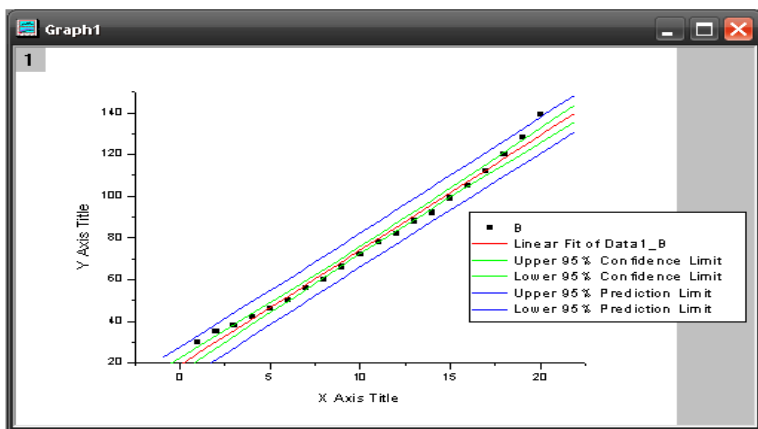


Рис. 7.26. Графічне зображення апроксимації лінійною функцією з визначенням довірчих та толерантних інтервалів

У деяких випадках залежність може мати вигляд полінома. Для пошуку таких залежностей вибирається в меню «Анализ» панель інструментів «Полиномиальная обработка». При цьому з'явиться діалогове вікно (рис. 7.27), в якому потрібно встановити степінь полінома та параметри X_{min} і X_{max} , які обмежують область пошуку залежності (у нашому випадку: від 1 до 20).

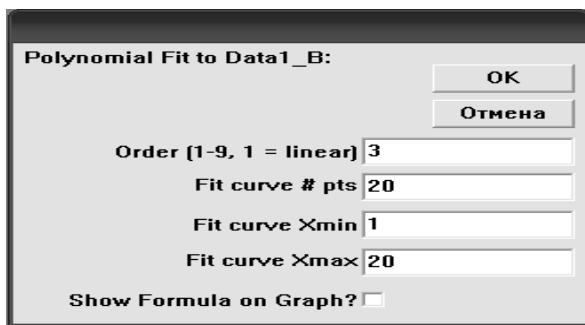


Рис. 7.27. Діалогове вікно пошуку поліноміальної залежності

Отримана на графіку поліноміальна залежність відображена у вигляді кривої (рис. 7.27).

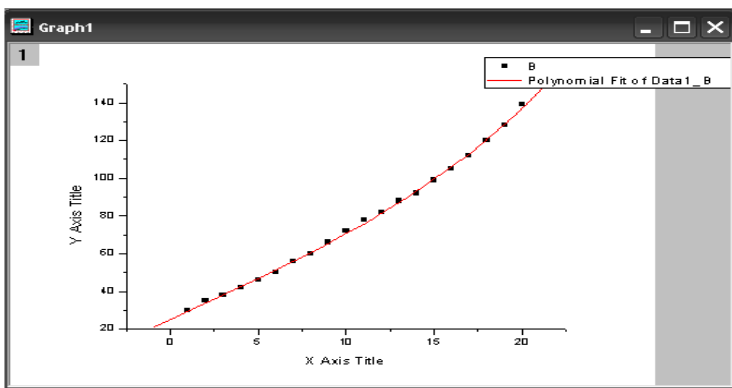


Рис. 7.27. Графічне зображення апроксимації поліноміальною функцією

Довірчі і толерантні інтервали визначаються так само, як і при лінійній апроксимації. Потрібно зайти в меню «Сервіс», вибрати панель інструментів «Полиномиальная обработка». Як з'явиться діалогове вікно, в якому позначають необхідність обробки з визначенням довірчих і толерантних інтервалів (рис. 7.29), установлюють величину довірчих інтервалів – 95 % та кількість точок – 100 для побудови графіка.

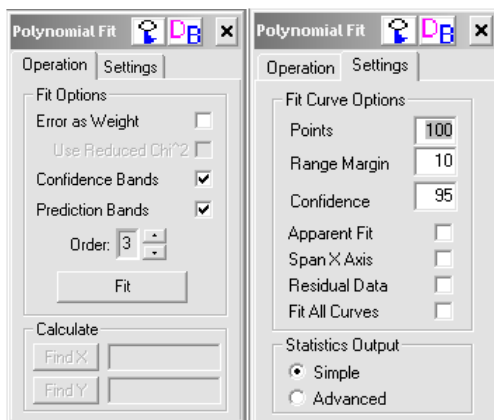


Рис. 7.29. Вікно налаштування апроксимації поліноміальною функцією

Автоматична побудова графічної залежності з довірчими інтервалами не дозволила дослідити межі інтервалів через автоматичну розстановку значень осей X та Y (рис. 7.30).

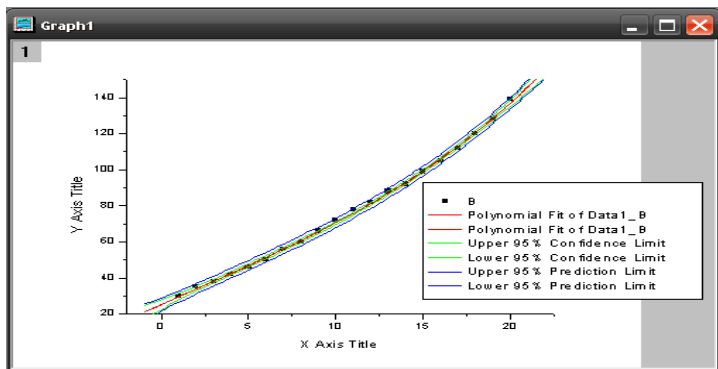


Рис. 7.30. Графічне зображення апроксимації поліноміальною функцією з визначенням довірчих та толерантних інтервалів

Тому заходимо в меню «Формат» та завантажуюмо панель інструментів «Оси», «Ось Y » та «Ось X ». Щодо вісі Y – встановлюємо значення «від 40 до 60»; щодо вісі X – «від 5 до 10». Отримуємо графічну залежність, яка візуально дозволяє визначити довірчі та толерантні інтервали (рис. 7.31).

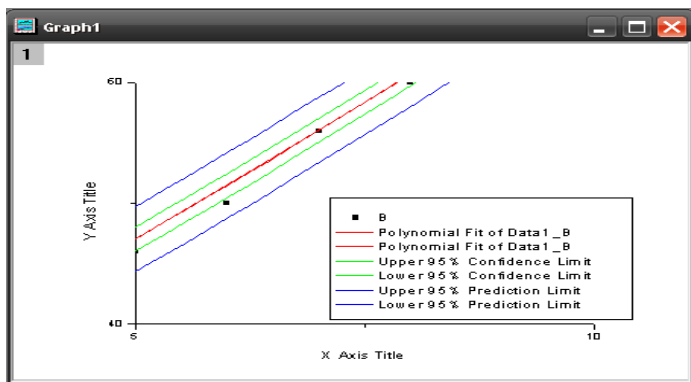


Рис. 7.31. Графічна залежність із визначенням довірчих та толерантних інтервалів (поліноміальна функція)

Крім того, буде виведено протокол результатів із значеннями знайдених параметрів та похибок (рис. 7.32).

Polynomial Regression for Data1_B:
 $Y = A + B1*X + B2*X^2 + B3*X^3$

Parameter	Value	Error
A	25,14097	1,30133
B1	4,46115	0,52361
B2	-0,04041	0,0572
B3	0,00486	0,00179

R-Square(COD)	SD	N	P
0,99889	1,19133	20	<0.0001

Рис. 7.31. Протокол результатів моделювання даних

Використання Origin суттєво полегшує роботу з підготовки статей, доповідей, дозволяючи відображати результати виконаної роботи. Було розглянуто лише основні елементи роботи з програмним пакетом Origin, які призначені для математичної обробки та графічного зображення даних.

Запитання та завдання для поточного контролю

1. Які переваги використання комп'ютерного моделювання в навчальному процесі?
2. Опишіть функціональні можливості та склад модулів MathCAD.
3. Які основні частини MatLab?
4. Опишіть переваги та функціональні можливості LabView.
5. Назвіть переваги пакета прикладних програм Electronics Wordbench.
6. Опишіть переваги та функціональні можливості Origin.
7. Опишіть основні групи сучасних систем комп'ютерного моделювання.
8. Як класифікують типові задачі комп'ютерного моделювання.
9. Опишіть функціональні можливості універсальної CAE-системи ANSYS.
10. Назвіть CAE-системи фірми MSC Software.

ПІДСУМКИ ДО РОЗДІЛУ 7

Необхідно знати:

1. Як проводиться вибір інформаційних систем для навчального процесу?
2. У чому переваги застосування комп'ютерного моделювання в навчальному процесі?
3. Функціональні можливості та переваги застосування пакетів прикладних програм математичного моделювання: MathCAD, Simulink, MatLab, LabView, Electronics Workbench, Origin.
4. Історичний шлях, пройдений дотепер інформаційними системами комп'ютерного моделювання.
5. За якими ознаками та функціональними можливостями виділено три групи сучасних систем комп'ютерного моделювання?
6. Які типові інженерні та дослідницькі завдання можуть вирішуватися засобами сучасних інформаційних систем комп'ютерного моделювання.
7. Особливості комп'ютерного моделювання інструментальними засобами CAE-системи ANSYS.
8. Особливості комп'ютерного моделювання інструментальними засобами основних CAE-систем фірми MSC Software: NASTRAN, PARTRAN, Adams.
9. Особливості універсальної CAE-системи SAMCEF.
10. Особливості CAE-системи ABAQUS.
11. Особливості CAD/CAM/CAE-системи CATIA.
12. Особливості спеціалізованої CAE-системи APM Win Machine.

Слід запам'ятати:

1. Чинники вибору інформаційних систем для навчального процесу.
2. Переваги застосування комп'ютерного моделювання в навчальному процесі.

3. Призначення та склад пакета прикладних програм MathCAD.
4. Призначення та склад пакета прикладних програм MatLab.
5. Призначення та склад пакета прикладних програм LabView.
6. Призначення та склад пакета прикладних програм Electronics Wordbench.
7. Призначення та склад пакета прикладних програм Origin.
8. Три основні групи сучасних систем комп'ютерного моделювання та їх представників (CAE- та CAD/CAM/CAE-систем).
9. Склад типових конструкційних завдань, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
10. Склад типових теплових завдань, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
11. Склад типових гідрогазодинамічних задач, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
12. Склад типових електростатичних та електромагнітних завдань, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
13. Склад типових завдань нестационарного нелінійного динамічного аналізу, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
14. Склад загальних завдань, що вирішуються за допомогою комп'ютерного моделювання.
15. Функціональні можливості CAE-системи комп'ютерного моделювання ANSYS.
16. Функціональні можливості CAE-систем комп'ютерного моделювання фірми MSC Software: NASTRAN, PARTRAN, Adams.
17. Функціональні можливості CAE-системи комп'ютерного моделювання SAMCEF.
18. Функціональні можливості CAE-системи комп'ютерного моделювання ABAQUS.
19. Функціональні можливості CAD/CAM/CAE-системи комп'ютерного моделювання CATIA.
20. Функціональні можливості CAE-системи комп'ютерного моделювання APM Win Machine.

Треба вміти:

1. Виконувати математичне моделювання інструментальними засобами не менше як одного з базових макетів прикладних програм – MathCAD, MatLab, LabView, Electronics Workbench, Origin.
2. За назвою основних CAE- та CAD/CAM/CAE-систем визначати їх належність до певної класифікаційної групи сучасних систем комп'ютерного моделювання.
3. Формулювати типові дослідницькі та інженерні завдання, які можуть вирішуватись в інформаційному середовищі CAE- та CAD/CAM/CAE-систем засобами комп'ютерного моделювання.
4. Виконувати комп'ютерне моделювання інструментальними засобами не менше як однієї з навчальних версій універсальної або спеціалізованої CAE-системи чи універсальної CAD/CAM/CAE-системи.

8. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Підготовка до виконання лабораторних робіт. Лабораторні роботи виконуються в обсязі, передбаченому навчальним планом підготовки у відповідності з робочою програмою дисципліни. Графік виконання робіт доводиться до відома студентів на першому занятті.

До виконання лабораторних робіт допускаються студенти, які засвоїли теоретичний матеріал за конспектом лекцій, підручником або методичними вказівками та дали правильні відповіді на питання викладача перед началом заняття.

При підготовці до лабораторної роботи необхідно передусім уважно прочитати підрозділ «Короткі теоретичні відомості». В цьому розділі наведено стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи. Незрозумілі питання, що виникають при підготовці до виконання лабораторної роботи, потрібно з'ясовувати під час консультацій.

Рекомендована література до кожної з робіт дозволяє студенту глибше розібратися в питанні, що поставлено та розкрито в лабораторній роботі, сформулювати відповідні висновки.

Оформлення звіту з виконаної роботи. Звіт оформляється відповідно до загальних вимог до текстових документів за ДСТУ 3973-2000.

Текст виконується від руки або друкується на принтері на одній стороні аркуша білого паперу формату А4 з обмежувальними рамками. Відстань від верхнього, нижнього та правого краю аркуша до обмежувальної рамки – 5 мм, від лівого – 20 мм. Не допускається оформлення частини тексту звіту від руки, а частини – друкуванням на принтері. Ця вимога не стосується до оформлення рисунків.

Перенесення слів в заголовках, запис заголовку на одній сторінці, а початок тексту на іншій, скорочення слів, крім загальноприйнятих, не допускається, крапку в кінці заголовка не ставлять.

Звіт з кожної роботи повинен мати приблизну структуру:

1. Титульний аркуш.
2. Тема та мета роботи.
3. Завдання і номер варіанта.
4. Короткі теоретичні відомості.

5. Послідовність виконання роботи
6. Результати роботи.
7. Висновки.

У підрозділі «Короткі теоретичні відомості» необхідно обов'язково навести основні визначення та рисунки (крім тих, які дозволяється не виконувати).

У підрозділі «Висновки» слід описати знання, вміння та навички, отримані та набуті при виконанні лабораторної роботи.

Усі підрозділи і рисунки повинні мати номер. Нумерація підрозділів та рисунків включає номер лабораторної роботи і порядковий номер підрозділу або рисунка в межах однієї лабораторної роботи. Номер рисунка розміщують під зображенням, за ним через риску вказується назва рисунка.

Наприклад: *Рисунок 1.1 – Крива нормального розподілу*, тобто перший рисунок у звіті з лабораторної роботи 1. Якщо на рисунку вказані елементи, то їх розшифровку рекомендовано наводити під рисунком, перед його назвою.

Формули нумеруються арабськими цифрами. Номер формули вказують на правому боці аркуша у круглих дужках на рівні формули. Цей номер складається з номера лабораторної роботи і порядкового номера формули в ній. Пояснення значень символів у формулах слід писати відразу під формулою в тій же послідовності, як вони подані у формулах. Кожне пояснення пишеться з нового рядка, перший рядок розпочинається словом «де» без двокрапки.

Після виконання всіх лабораторних робіт окремі звіти скріплюються в послідовності виконання робіт в загальний звіт, оформляється титульний аркуш, всі сторінки нумеруються. Нумерація наскрізна.

Здача відпрацьованих робіт. Робота вважається виконаною у тому разі якщо студент відповів на теоретичні питання з теми роботи, отримав у викладача індивідуальне завдання, провів необхідний обсяг розрахунків, оформив та захистив отримані результати.

Виконання і своєчасний захист всіх лабораторних робіт є обов'язковою умовою допуску студента до підсумкової атестації студента.

Лабораторна робота 1

Вивчення графічних можливостей пакета Origin Pro

Мета роботи: вивчення графічних можливостей пакета та графічного зображення малих масивів даних.

Послідовність виконання роботи

1. Завантажити програму для обробки та аналізу даних (Origin).
2. У таблиці даних у стовпці A(X) та B(Y) ввести дані, наведені у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Дані для побудови та аналізу графічної залежності

A(X)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
B(Y)	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25

3. Виділити стовпець B(Y). Побудувати точковий графік зміни параметра стовпця B(Y) від параметра стовпця A(X) – $B = f_1(A)$. Для цього необхідно зайти в панель інструментів «Графік» і завантажити панель інструментів «Графік точками».

4. Здійснити форматування графіка. Для цього необхідно зайти в панель інструментів «Формат» і завантажити панель інструментів «Оси». Провести форматування шкал виведення за віссю X і віссю Y, форматування найменувань шкал виведення, встановити виведення сіток за шкалами виведення, встановити товщину ліній та їх колір тощо (за описом роботи з пакетом Origin).

5. Провести апроксимацію отриманої графічної залежності нелінійною функцією залежно від її виду із застосуванням бібліотек функцій пакета Origin. При цьому застосувати два варіанти – апроксимацію поліноміальною функцією та апроксимацію степеневою функцією.

6. При апроксимації поліноміальною функцією в меню «Анализ» вибирають панелі інструментів «Полиномиальная обработка». При цьому потрібно використовувати поліноміальну функцію 2-го або 3-го порядку.

7. За результатами проведеної апроксимації визначити аналітичний вираз для опису графічної залежності із значеннями відповідних коефіцієнтів; коефіцієнт детермінації; значення дисперсії. Значення даних параметрів визначаються автоматично при проведенні апроксимації і зберігаються у вікні результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції (за описом роботи з пакетом Origin).

8. Зберегти отриману графічну залежність у вигляді графічного файла. Для цього потрібно зайти в панель інструментів «Файл», далі в «Експорт сторінки» і виконати послідовність операцій для збереження графіка у необхідному форматі.

9. Зберегти результати проведеної апроксимації у вигляді текстових даних. Для цього потрібно зайти у вікно результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції, скасувати отримані результати і здійснити їх копіювання у текстовий документ, в якому формуватиметься звіт за результатами роботи.

10. При апроксимації степеневою функцією в меню «Аналіз» вибирається панель інструментів «Нелинейная обработка», а далі – «Предварительная настройка». При цьому формується меню вибору апроксимуючого виразу, в якому вибирається степенева функція виду $y = ax^b$. Далі відбувається активація даних і проводиться їх апроксимація. При цьому критерієм оптимального вибору апроксимуючої функції є мінімум остаточної дисперсії, значення якої автоматично розраховується у процесі проведення апроксимації (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

11. За результатами проведеної апроксимації визначити аналітичний вираз для опису графічної залежності із значеннями відповідних коефіцієнтів; коефіцієнт детермінації; значення дисперсії. Значення цих параметрів визначаються автоматично при проведенні апроксимації та зберігаються у вікні результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції (за описом роботи з пакетом Origin).

12. Повторити п. 8 і п. 9.

13. Сформувати на одному із логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

14. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin з необхідним ім'ям у створеному каталозі (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

15. Провести моделювання функції виду

$$Y = e^{-x^2} \quad (1.1)$$

з побудовою і форматуванням графіка її зміни.

16. У таблиці даних у стовпці A(X) встановити значення X. Для цього потрібно виділити стовпець A(X), клацнути праву клавішу мишки і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для моделювання i від 1 до 200, ввести вираз $\text{col}(A) = i/100$ і завантажити операцію розрахунків на виконання (за описом роботи з пакетом Origin).

17. Виділити стовпець B10(Y). Клацнути праву клавішу мишки і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для розрахунків i від 1 до 200. У вікно введення функцій ввести вираз (1.1) для проведення моделювання у вигляді

$$\text{col}(B) = \exp(-\text{col}(A)^2). \quad (1.2)$$

18. Завантажити операцію розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці B10(Y).

19. Виділити стовпець B(Y). Побудувати графік зміни функції (1.1) від X. Для цього потрібно зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График линиями».

20. Оформити побудований графік (шкали виведення, назви вісей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

21. Повторити п. 8 і п. 9.

22. Сформувати на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

23. Зберегти результат проведеного моделювання у вигляді проекту Origin із необхідним ім'ям у створеному каталозі (за описом роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами вивчення графічних можливостей пакета та графічного зображення малих масивів даних:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати дії для збереження табличних даних у вигляді текстового файла (за описом роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон із табличними даними.
- Вставити збереженні табличні дані у звіт про виконання роботи.
- Розмістити у звіті результати розрахунків статистичних характеристик при моделюванні. Для цього потрібно зайти у вікно виведення результатів розрахунків статистичних характеристик при проведенні апроксимації отриманих залежностей. Відмітити всю інформацію у вікні і скопіювати її у звіт.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього необхідно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт сторінки». Зберегти графіки у вигляді графічного файла (за описом роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збереженні графіки у звіт про виконання роботи.

Лабораторна робота 2

Моделювання сигналів акустичної емісії залежно від швидкості процесів руйнування композиційного матеріалу

Мета роботи: моделювання закономірностей зміни сигналів акустичного випромінювання у часі, що виникають при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від швидкості процесів руйнування його елементів, а також обробка параметрів формованого акустичного випромінювання.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо процес переважного механічного руйнування розтягом зразка композиційного матеріалу, який складається з N_0 елементів зі своїми розмірами та фізико-механічними характеристиками. При переважному розвитку процесу механічного руйнування композиційного матеріалу розтягом відбувається формування акустичного випромінювання або сигналу акустичної емісії (АЕ), що реєструється за допомогою п'єзокерамічного датчика, встановленого на зразку композиційного матеріалу. Сигнал на виході датчика описується виразом

$$U(t) = u_0 t \alpha v_0 e^{rat} e^{-\frac{v_0}{ra}(e^{rat} - 1)}, \quad (2.1)$$

де $U(t)$ – зміна амплітуди сигналу акустичної емісії у часі при процесі руйнування елементів композиційного матеріалу; u_0 – максимально можливе зміщення, що розповсюджується по поверхні матеріалу при миттєвому руйнуванні зразка, який складається з N_0 елементів та має фізико-механічні характеристики; t – поточний час руйнування; α – швидкість навантаження (руйнування); v_0 та r – фізико-механічні характеристики композиційного матеріалу.

За формулою (2.1), на залежність зміни у часі амплітуди формованого сигналу акустичної емісії впливають швидкість навантаження α композиційного матеріалу та його фізико-механічні характеристики, які визначаються параметрами v_0 та r . При цьому па-

параметр r характеризує дисперсність розподілу властивостей елементів композиційного матеріалу за міцністю, а параметр ν_0 характеризує їх крихкість.

За формулою (2.1) проведемо моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії, які формуються у процесі руйнування композиційного матеріалу залежно від швидкості його навантаження α (руйнування). При цьому вважатимемо, що фізико-механічні характеристики композиційного матеріалу ν_0 та r є сталими величинами. Моделювання проводитимемо у відносних одиницях, тобто параметри, що входять до виразу (2.1), розглядатимемо у відносних (безрозмірних) величинах ($\tilde{\nu}_0$, \tilde{r} , $\tilde{\alpha}$, \tilde{t}). При моделюванні закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі значення параметра $\tilde{\alpha}$ змінюватимемо в діапазоні величин від 10 до 60 з кроком прирощування, який дорівнюватиме 10. Параметрам $\tilde{\nu}_0$ та \tilde{r} надамо значення $\tilde{\nu}_0 = 100\,000$, $\tilde{r} = 10\,000$. Значення \tilde{i}_0 дорівнюватиме одиниці, тобто $\tilde{i}_0 = 1$.

Послідовність виконання роботи

1. Завантажити програму для проведення моделювання та обробки даних (Origin).

2. У таблиці даних у стовпці $A(X)$ встановити значення поточного часу розвитку процесу руйнування елементів композиційного матеріалу (формованого сигналу акустичної емісії). Для цього потрібно виділити стовпець $A(X)$, натиснути праву клавішу «мишки» і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для моделювання i від 1 до 2 500, ввести вираз $\text{col}(A) = i/10^8$ і завантажити операцію розрахунків на виконання (див. опис роботи з пакетом Origin).

3. У таблицю даних додати необхідну кількість стовпців відповідно до кількості значень параметра α , які використовуватимуться для моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі (див. опис роботи з пакетом Origin).

4. Перейменувати додані стовпці B(Y), C(Y), D(Y), E(Y), F(Y), G(Y) на B10(Y), C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y) (відповідно опису роботи з пакетом Origin).

5. Виділити стовпець B10(Y). Клацнути праву клавішу «мишкі» і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для розрахунків закономірності зміни амплітуди сигналу акустичної емісії у часі i від 1 до 2 500. Ввести вираз (2.1) для проведення моделювання сигналу акустичної емісії із заданими значеннями ($\tilde{\alpha} = 10$, $\nu_0 = 100000$, $\tilde{r} = 10000$). Матимемо вираз

$$\text{col (B)}=1 \cdot 10 \cdot \text{col (A)} \cdot 100000 \cdot \exp (10000 \cdot 10 \cdot \text{col (A)}) \times \\ \times \exp ((-100000 / (10000 \cdot 10)) \cdot ((\exp (10000 \cdot 10 \cdot \text{col (A)}) - 1))). \quad (2.2)$$

6. Завантажити операцію з розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці B10(Y).

7. Повторити п. 8 для стовпців C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y). При цьому для кожного визначеного стовпця встановити відповідне значення параметра $\tilde{\alpha}$ при збереженні всіх інших параметрів незмінними.

8. У таблицю даних додати кількість стовпців відповідно до кількості значень параметра α (за описом роботи з пакетом Origin).

9. Перейменувати додані стовпці H(Y), I(Y), J(Y), K(Y), L(Y), M(Y) на H10(Y), I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y) (за описом роботи з пакетом Origin).

10. Виділити стовпець H10(Y). Клацнути праву клавішу «мишкі» і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для розрахунків закономірності зміни енергії сигналу акустичної емісії у часі i від 1 до 2 500. Ввести вираз для розрахунку закономірності зміни енергії модельованого сигналу акустичної емісії при $\tilde{\alpha}=10$, з урахуванням результатів моделювання закономірності зміни амплітуди сигналу акустичної емісії у часі при $\tilde{\alpha}=10$ (стовпець B10 (Y)) у вигляді

$$\text{col (H10)} = \text{col (B10)} \cdot \text{col (B10)}. \quad (2.3)$$

11. Завантажити операцію розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці H 10(Y).

12. Повторити п. 13 для стовпців I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y), з урахуванням результатів моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі при інших значеннях $\tilde{\alpha}$ (стовпці C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y)). При цьому у правій частині виразу (2.3) необхідно змінити найменування відповідних стовпців.

13. Виділити стовпці B10(Y), C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y). Побудувати графіки закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі для визначених значень параметра $\tilde{\alpha}$. Для цього треба зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График линиями».

14. Оформити побудовані графічні закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (див. опис роботи з пакетом Origin).

15. Виділити стовпці H10(Y), I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y). Побудувати графіки закономірностей зміни енергії сигналів акустичної емісії у часі для визначених значень параметра $\tilde{\alpha}$. Для цього треба зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График линиями».

16. Оформити побудовані графічні закономірності зміни енергії сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (див. опис роботи з пакетом Origin).

17. Сформувати на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

18. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin із необхідним ім'ям у створеному каталозі (за описом роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного моделювання і розрахунками параметрів сигналів АЕ при зміні швидкості руйнування композиційного матеріалу в такій послідовності:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому

форматі, наприклад, форматі «*.txt». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати дії зі збереження табличних даних у вигляді текстового файла (див. опис роботи з пакетом Origin).

- Вставити збережені табличні дані у звіт про виконану роботу.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього необхідно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт сторінки». Зберегти графік у вигляді графічного файла (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збереженні графіки у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 3

Дослідження закономірностей руйнування композиційного матеріалу залежно від швидкості процесів руйнування його елементів

Мета роботи: провести моделювання закономірностей зміни параметрів сигналів акустичної емісії при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від швидкості його руйнування, описати отримані закономірності з визначенням їх статистичних характеристик.

Послідовність виконання роботи

1. Завантажити проект пакета Origin із результатами, отриманими при виконанні лабораторної роботи 2.

2. У стовпцях $B10(Y)$, $C20(Y)$, $D30(Y)$, $E40(Y)$, $F50(Y)$, $G60(Y)$, що відповідають результатам моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії, та стовпцях $H10(Y)$, $I20(Y)$, $J30(Y)$, $K40(Y)$, $L50(Y)$, $M60(Y)$, які відповідають результатам моделювання закономірностей зміни енергії сигналів акустичної емісії, визначити значення параметрів \tilde{U}_{\max} , \tilde{E}_{\max} і $\tilde{\tau}_0$, де \tilde{U}_{\max} – максимальна амплітуда промодельованого сигналу акустичної емісії; \tilde{E}_{\max} – максимальна енергія промодельованого сигналу акустичної емісії; $\tilde{\tau}_0$ – тривалість переднього фронту промодельованих сигналів акустичної емісії, яка відповідає моменту часу для значень \tilde{U}_{\max} і \tilde{E}_{\max} (значення всіх параметрів за результатами моделювання у відносних одиницях).

3. Створити новий проект (див. опис роботи з пакетом Origin).

4. У таблицю даних додати необхідну кількість стовпців, які у сумі повинні охоплювати дані, які вводитимуть: $\tilde{\alpha}$ – швидкість навантаження композиційного матеріалу; \tilde{U}_{\max} – максимальна амплітуда промодельованого сигналу акустичної емісії для заданої швидкості навантаження; \tilde{E}_{\max} – максимальна енергія промодельо-

ваного сигналу акустичної емісії; $\tilde{\tau}_0$ – тривалість переднього фронту промодельованого сигналу.

5. Перейменувати стовпців $B(Y)$, $C(Y)$, $D(Y)$ на $BU(Y)$, $CE(Y)$, $DT(Y)$ (за описом роботи з пакетом Origin).

6. Ввести дані до стовпців $A(X)$, $BU(Y)$, $CE(Y)$, $DT(Y)$: $A(X)$ – значення параметра $\tilde{\alpha}$, який застосовувався при моделюванні сигналів акустичної емісії у лабораторній роботі 1; $BU(Y)$ – значення параметра \tilde{U}_{\max} для відповідних значень $\tilde{\alpha}$; $CE(Y)$ – значення параметру \tilde{E}_{\max} для відповідних значень $\tilde{\alpha}$; $DT(Y)$ – значення параметра $\tilde{\tau}_0$ для відповідних значень $\tilde{\alpha}$.

7. Виділити стовпець $BU(Y)$. Побудувати графік закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії в залежності від параметру $\tilde{\alpha} - U_{\max} = f_1(\alpha)$. Для цього потрібно зайти в меню «Графік» і завантажити панель інструментів «Графік точками».

8. Провести апроксимацію отриманої графічної залежності лінійною чи нелінійною функцією (залежно від її виду) із використанням бібліотек функцій пакета Origin. У випадку нелінійної функції в меню «Аналіз» вибирають панель інструментів «Полиноміальна обробка». При цьому можна застосувати поліноміальну функцію 2-го або 3-го порядку. У випадку лінійної функції в меню «Аналіз» вибирають панель інструментів «Лінійна обробка». При цьому критерієм оптимального вибору апроксимуючої функції є мінімум остаточної дисперсії, значення якої автоматично розраховується у процесі проведення апроксимації (за описом роботи з пакетом Origin).

9. За результатами проведеної апроксимації визначити аналітичний вираз для опису графічної залежності із значеннями відповідних коефіцієнтів; коефіцієнт кореляції чи детермінації; стандартне відхилення (дисперсія). Значення цих параметрів визначають при проведенні апроксимації і зберігають у вікні результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції.

10. Повторити п. 7, ..., п. 9 для стовпців $CE(Y)$, $DT(Y)$ з побудовою та апроксимацією залежностей зміни максимальної енергії (\tilde{E}_{\max}) і тривалості ($\tilde{\tau}_0$) переднього фронту сигналів акустичної

емісії при зростанні параметра $\tilde{\alpha}$, тобто функцій $E_{\max} = f_2(\alpha)$ і $\tau_0 = f_3(\alpha)$.

11. Оформити побудовані графічні закономірності зміни параметрів сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (за описом роботи з пакетом Origin).

12. Визначити довірчі та толерантні інтервали для закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії залежно від параметра $\tilde{\alpha}$.

13. Виконати п. 7.

14. У випадку отримання лінійної функції для опису залежності $U_{\max} = f_1(\alpha)$ (за п. 8 та п. 9) зайти в меню «Сервіс» і завантажити панель інструментів «Линейная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Линейная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (95 %) та позначити необхідність обробки з визначенням довірчих і толерантних інтервалів. Після натискання на панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі та толерантні інтервали.

15. У випадку отримання нелінійної функції для опису залежності $U_{\max} = f_1(\alpha)$ (за п. 8 та п. 9), зайти в меню «Сервіс» і завантажити панель інструментів «Полиномиальная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Полиномиальная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (95 %) та відмітити необхідність обробки з визначенням довірчих та толерантних інтервалів. Після натискання на панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі та толерантні інтервали.

16. Виконати п. 14 та п. 15 з визначенням довірчих та толерантних інтервалів для закономірності зміни максимальної енергії та тривалості сигналів акустичної емісії ($E_{\max} = f_2(\alpha)$ і $\tau_0 = f_3(\alpha)$), отриманих за п. 10.

17. Сформувані на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

18. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin з необхідним ім'ям у створеному каталозі (див. опис роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного моделювання закономірностей зміни параметрів сигналів акустичної емісії при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від швидкості його руйнування з описом отриманих закономірностей та їх статистичних характеристик. Для цього:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям як текстовий формат, наприклад, форматі «*.txt». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати дії зі збереження табличних даних у вигляді текстового файла (за описом роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з табличними даними.
- Вставити збереженні табличні дані у звіт про виконання роботи.
- Вставити у звіт результати розрахунків статистичних характеристик при моделюванні. Для цього необхідно зайти у вікно виведення результатів розрахунків статистичних характеристик при проведенні апроксимації отриманих залежностей. Позначити всю інформацію у вікні і скопіювати її у звіт.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт сторінки». Виконати дії щодо збереження графіка у вигляді графічного файла (за описом роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збереженні графіки у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 4

Моделювання сигналів акустичної емісії залежно від дисперсності властивостей композиційного матеріалу

Мета роботи: моделювання закономірностей зміни сигналів акустичного випромінювання у часі, які виникають при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від дисперсності його властивостей, а також обробка параметрів формованого акустичного випромінювання.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо процес переважного механічного руйнування розтягом зразка композиційного матеріалу, що складається з N_0 елементів, які мають визначені розміри та фізико-механічні характеристики. При переважному розвитку процесу механічного руйнування композиційного матеріалу розтягом відбувається формування акустичного випромінювання або сигналу акустичної емісії, що реєструється за допомогою п'єзокерамічного датчика, встановленого на зразку композиційного матеріалу. Сигнал на виході датчика описується виразом виду

$$U(t) = u_0 t \alpha \nu_0 e^{rat} e^{-\frac{\nu_0}{ra} (e^{rat} - 1)}, \quad (4.1)$$

де $U(t)$ – зміна амплітуди сигналу акустичної емісії у часі при розвитку процесу руйнування елементів композиційного матеріалу; u_0 – максимально можливе зміщення, яке розповсюджується по поверхні матеріалу при миттєвому руйнуванні зразка заданого розміру, який складається з N_0 елементів та має задані фізико-механічні характеристики; t – поточний час руйнування; α – швидкість навантаження (руйнування); ν_0 та r – фізико-механічні характеристики композиційного матеріалу.

За формулою (4.1) на залежність зміни у часі амплітуди формованого сигналу акустичної емісії впливають швидкість навантаження α композиційного матеріалу та його фізико-механічні хара-

ктеристики, які визначаються параметрами ν_0 та r . При цьому параметр r характеризує дисперсність розподілу властивостей елементів композиційного матеріалу за міцністю, а параметр ν_0 характеризує їх крихкість.

Відповідно до формули (4.1) проведемо моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії, які формуються при розвитку у часі процесу руйнування композиційного матеріалу залежно від дисперсності розподілу властивостей елементів композиційного матеріалу за міцністю r . При цьому вважатимемо, що швидкість навантаження α та крихкість композиційного матеріалу ν_0 постійні величини. Моделювання проводитимемо у відносних одиницях, тобто параметри, що входять до виразу (4.1), розглядатимемо у відносних (безрозмірних) величинах ($\tilde{\nu}_0$, \tilde{r} , $\tilde{\alpha}$, \tilde{t}). При моделюванні закономірностей зміни у часі амплітуди сигналів акустичної емісії значення параметру \tilde{r} будемо змінювати у діапазоні величин від 10 000 до 30 000 з кроком прирощування, який буде дорівнювати 4 000. Нехай $\tilde{\nu}_0 = 100\ 000$; $\tilde{\alpha} = 10$. Значення \tilde{t}_0 приймемо рівним одиниці, тобто $\tilde{t}_0 = 1$.

Послідовність виконання роботи

1. Завантажити програму для проведення моделювання та обробки даних (Origin).

2. У таблиці даних у стовпці $A(X)$ встановити значення поточного часу розвитку процесу руйнування елементів композиційного матеріалу (формованого сигналу акустичної емісії). Для цього потрібно виділити стовпець $A(X)$, клацнути праву клавішу «мишки» і завантажити панель інструментів «Установить значення в столбце». У меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для моделювання i від 1 до 2500, ввести вираз $\text{col}(A) = i/10^8$ і завантажити операцію розрахунків на виконання (див. опис роботи з пакетом Origin).

3. У таблицю даних додати необхідну кількість стовпців (відповідно до кількості значень параметра r), які використовувати-

муть для моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі (див. опис роботи з пакетом Origin).

4. Перейменувати додані стовпці B(Y), C(Y), D(Y), E(Y), F(Y), G(Y) на B10(Y), C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y) (за описом роботи з пакетом Origin).

5. Виділити стовпець B10(Y). Клацнути праву клавішу «мишки» і завантажити панель інструментів «Встановити значення у стовпці». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для розрахунків закономірності зміни амплітуди сигналу акустичної емісії у часі i від 1 до 2500. Ввести вираз (4.1) для проведення моделювання сигналу акустичної емісії із значеннями заданих параметрів: $\tilde{\alpha} = 10$, $\tilde{\nu}_0 = 100\ 000$, $\tilde{r} = 10\ 000$ у вигляді

$$\text{col}(B) = 1 \cdot 10 \cdot \text{col}(A) \cdot 100000 \cdot \exp(10000 \cdot 10 \cdot \text{col}(A)) \times \\ \times \exp((-100000 / (10000 \cdot 10)) \cdot ((\exp(10000 \cdot 10 \cdot \text{col}(A))) - 1)). \quad (4.2)$$

6. Завантажити операцію розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці B10(Y).

7. Повторити п. 5 для стовпців C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y). При цьому для кожного визначеного стовпця встановити відповідне значення параметра \tilde{r} при збереженні всіх інших параметрів незмінними.

8. У таблицю даних додати кількість стовпців відповідно до кількості значень параметра r (див. опис роботи з пакетом Origin).

9. Провести перейменування доданих стовпців H(Y), I(Y), J(Y), K(Y), L(Y), M(Y) на H10(Y), I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y) (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

10. Виділити стовпець H10(Y). Клацнути на праву клавішу «мишки» і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для розрахунків закономірності зміни енергії сигналу акустичної емісії у часі i від 1 до 2500. Ввести вираз для розрахунку закономірності зміни енергії модельованого сигналу акустичної емісії при $\tilde{r} = 10\ 000$ з урахуванням результатів моделювання закономірності зміни амплітуди сигналу акустичної емісії у часі при $\tilde{r} = 10\ 000$ (стовпець B10(Y)) у вигляді

$$\text{col (H10)} = \text{col (B10)} \cdot \text{col (B10)} . \quad (4.3)$$

11. Завантажити операцію розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці H 10(Y).

12. Повторити п. 10 для стовпців I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y) з урахуванням результатів моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі за інших значень \tilde{r} (стовпці C20(Y); D30(Y); E40(Y); F50(Y); G60(Y)). При цьому у правій частині виразу (4.3) потрібно змінити найменування відповідних стовпців.

13. Виділити стовпці B10(Y), C20(Y), D30(Y), E40(Y), F50(Y), G60(Y). Побудувати графіки закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі для визначених значень параметра \tilde{r} . Для цього потрібно зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График линиями».

14. Оформити побудовані графічні закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (див. опис роботи з пакетом Origin).

15. Виділити стовпці H10(Y), I20(Y), J30(Y), K40(Y), L50(Y), M60(Y). Побудувати графіки закономірностей зміни енергії сигналів акустичної емісії у часі для визначених значень параметра \tilde{r} . Для цього потрібно зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График линиями».

16. Оформити побудовані графічні закономірності зміни енергії сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (за описом роботи з пакетом Origin).

17. Сформувати на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

18. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin з необхідним ім'ям у створеному каталозі (за описом роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного моделювання і розрахунків параметрів сигналів АЕ при зміни дисперсності властивостей композиційного матеріалу, а саме:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі під потрібним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати дії зі збереження табличних даних у вигляді текстового файла (за описом роботи з пакетом Origin).
- Вставити збереженні табличні дані у звіт про виконану роботу.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього потрібно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт сторінки». Зберегти графік у вигляді графічного файла (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збереженні графіки у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 5

Визначення статистичних характеристик руйнування композиційного матеріалу залежно від швидкості процесів руйнування його елементів

Мета роботи: провести моделювання закономірностей зміни параметрів сигналів акустичної емісії при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від дисперсності його властивостей, виконати опис отриманих закономірностей із визначенням їх статистичних характеристик.

Послідовність виконання роботи

1. Завантажити проект пакета Origin із результатами, які отримані при виконанні лабораторної роботи 4.

2. У стовбцях $B10(Y)$, $C20(Y)$, $D30(Y)$, $E40(Y)$, $F50(Y)$, $G60(Y)$, які відповідають результатам моделювання закономірностей зміни амплітуди сигналів акустичної емісії, та стовбцях $H10(Y)$, $I20(Y)$, $J30(Y)$, $K40(Y)$, $L50(Y)$, $M60(Y)$, які відповідають результатам моделювання закономірностей зміни енергії сигналів акустичної емісії, визначити значення параметрів \tilde{U}_{\max} , \tilde{E}_{\max} і $\tilde{\tau}_0$, де \tilde{U}_{\max} – максимальна амплітуда промодельованого сигналу акустичної емісії; \tilde{E}_{\max} – максимальна енергія промодельованого сигналу акустичної емісії; $\tilde{\tau}_0$ – тривалість переднього фронту промодельованих сигналів акустичної емісії, яка відповідає моменту часу для значень \tilde{U}_{\max} і \tilde{E}_{\max} (значення всіх параметрів, відповідно до результатів моделювання, у відносних одиницях).

3. Створити новий проект (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

4. У таблицю даних додати необхідну кількість стовпців, які у сумі повинні охоплювати дані, що вводяться: \tilde{r} – параметр, який характеризує дисперсність розподілу властивостей елементів композиційного матеріалу за міцністю; \tilde{U}_{\max} – максимальна амплітуда промодельованого сигналу акустичної емісії для заданої швидкості навантаження; \tilde{E}_{\max} – максимальна енергія промодельова-

ного сигналу акустичної емісії; $\tilde{\tau}_0$ – тривалість переднього фронту промодельованого сигналу.

5. Переіменувати стовпці B(Y), C(Y), D(Y) на BU(Y), CE(Y), DT(Y) (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

6. Ввести дані в стовпці A(X), BU(Y), CE(Y), DT(Y): A(X) – значення параметра \tilde{r} , який використовувався при моделюванні сигналів акустичної емісії у лабораторній роботі 3; BU(Y) – значення параметра \tilde{U}_{\max} , для відповідних значень \tilde{r} ; CE(Y) – значення параметра \tilde{E}_{\max} , для відповідних значень \tilde{r} ; DT(Y) – значення параметра $\tilde{\tau}_0$, для відповідних значень \tilde{r} .

7. Виділити стовпець BU(Y). Побудувати графік закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії залежно від параметра $\tilde{r} - U_{\max} = f_1(r)$. Для цього необхідно зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График точками».

8. Провести апроксимацію отриманої графічної залежності лінійною або нелінійною функцією, залежно від її виду, з використанням бібліотек функцій пакета Origin. У випадку нелінійної функції в меню «Анализ» вибирається панель інструментів «Полиномиальная обработка». При цьому можна використовувати поліноміальну функцію 2-го або 3-го порядку. У випадку лінійної функції в меню «Анализ» вибирається панель інструментів «Линейная обработка». При цьому критерієм оптимального вибору апроксимуючої функції є мінімум остаточної дисперсії, значення якої автоматично розраховується у процесі проведення апроксимації (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

9. За результатами проведеної апроксимації визначити аналітичний вираз для опису графічної залежності із значеннями відповідних коефіцієнтів; коефіцієнт кореляції або детермінації; стандартне відхилення або дисперсію. Значення цих параметрів визначаються при проведенні апроксимації і зберігаються у вікні результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції.

10. Повторити пп. 7–9 для стовпців CE(Y), DT(Y) із побудовою та апроксимацією залежностей зміни максимальної енергії (\tilde{E}_{\max}) і

тривалості ($\tilde{\tau}_0$) переднього фронту сигналів акустичної емісії при зростанні параметра \tilde{r} , тобто функцій $E_{\max} = f_2(r)$ і $\tau_0 = f_3(r)$.

11. Оформити побудовані графічні закономірності зміни параметрів сигналів акустичної емісії у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

12. Визначити довірчі та толерантні інтервали для закономірності зміни амплітуди сигналів акустичної емісії залежно від параметра \tilde{r} .

13. Виконати п. 7.

14. У випадку отримання лінійної функції для опису залежності $U_{\max} = f_1(r)$, відповідно до пп. 8–9, зайти в меню «Сервіс» і завантажити панель інструментів «Линейная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Линейная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (у відсотках – 95%) та відмітити необхідність обробки з визначенням довірчих та толерантних інтервалів. Після натискання панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі та толерантні інтервали.

15. У випадку отримання нелінійної функції для опису залежності $U_{\max} = f_1(r)$, відповідно до пп. 8–9, зайти в меню «Сервіс» і завантажити панель інструментів «Полиномиальная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Полиномиальная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (у відсотках – 95 %) та відмітити необхідність обробки з визначенням довірчих та толерантних інтервалів. Після натискання панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі та толерантні інтервали.

16. Виконати пп. 14–15 з визначенням довірчих та толерантних інтервалів для закономірності зміни максимальної енергії і тривалості сигналів акустичної емісії $E_{\max} = f_2(r)$ і $\tau_0 = f_3(r)$, отриманих за п. 10.

17. Сформувати на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання.

18. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin з необхідним ім'ям у створеному каталозі (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного моделювання закономірностей зміни параметрів сигналів акустичної емісії при механічному руйнуванні композиційного матеріалу залежно від дисперсності його властивостей описом отриманих закономірностей та їх статистичних характеристик:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt». Для цього необхідно встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати послідовність дій для збереження табличних даних у вигляді текстового файла (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон із табличними даними.
- Вставити збережені табличні дані у звіт про виконання роботи.
- Вставити у звіт результати розрахунків статистичних характеристик при моделюванні. Для цього необхідно зайти у вікно виведення результатів розрахунків статистичних характеристик при проведенні апроксимації отриманих залежностей. Виділити всю інформацію у вікні і скопіювати її у звіт.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього необхідно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути панель інструментів «Експорт сторінки». Виконати послідовність дій для збереження графіка у вигляді графічного файла (відповідно до опису роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збережені графіки у звіт про виконання роботи.

Лабораторна робота 6

Моделювання та прогнозування розвитку процесу у часі

Мета роботи: моделювання та прогнозування розвитку процесу у часі за результатами обробки його параметра, який реєструється на виході первинного перетворювача при проведенні моніторингу процесу, змінного у часі.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо об'єкт, на якому встановлено первинний перетворювач, що реєструє певний параметр. Наприклад, температуру, тиск, коливання тощо (рис. 6.1).



Рис. 6.1

Проводився моніторинг об'єкта протягом 20 годин, тобто вимірювався параметр на виході первинного перетворювача щогодини протягом 20 годин. Результати проведеного моніторингу зведено до табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Результати моніторингу об'єкта

Час	1	2	3	4	5
Значення P	101,02	99,23	99,456	102,324	101,123
Час	6	7	8	9	10
Значення P	100,541	102,432	99,653	98,731	99,556
Час	11	12	13	14	15
Значення P	100,133	101,324	102,1	100,213	101,238
Час	16	17	18	19	20
Значення P	98,66	101,365	99,524	98,742	99,133

Послідовність виконання роботи

1. За результатами проведеного моніторингу необхідно визначити статистичні характеристики досліджуваного процесу (середнє значення параметра P , його стандартне відхилення та дисперсію), побудувати графік зміни параметра P у часі з визначенням апроксимуючого виразу для його опису з отриманням статистичних характеристик, провести моделювання з прогнозуванням розвитку процесу у наступні 30 годин.

2. Завантажити програму для проведення моделювання та обробки даних (Origin).

3. У таблиці даних у стовпці $A(X)$ встановити значення поточного часу розвитку процесу за результатами моніторингу відповідно до табл. 6.1.

4. У таблиці даних у стовпці $B(Y)$ встановити значення параметра P , які відповідають поточному часу розвитку процесу за результатами моніторингу відповідно до табл. 6.1.

5. Виділити стовпець $B(Y)$. Отримати статистику за колонкою $B(Y)$. Для цього потрібно зайти в меню «Статистика», вибрати панель інструментів «Описательная статистика» і натиснути на панель інструментів «Статистика по колонке».

6. У вікні результатів статистичного аналізу виділити віконце «Улучшенная статистика» і натиснути на панель інструментів «Пересчет» з отриманням таблиці із результатами статистичного аналізу, де відображаються значення середньої величини параметра P , його стандартне відхилення, дисперсія та інші статистичні характеристики.

7. Виділити стовпець $B(Y)$. Побудувати графік зміни параметра P у часі – $P = f_1(t)$. Для цього необхідно зайти в меню «График» і завантажити панель інструментів «График точками».

8. Провести апроксимацію отриманої графічної залежності лінійною або нелінійною функцією (залежно від її виду) з використанням бібліотек функцій пакета Origin. У випадку нелінійної функції в меню «Анализ» вибирають панель інструментів «Полиномиальная обработка». При цьому можна використовувати поліноміальну функцію 2-го або 3-го порядку. У випадку лінійної функції в меню «Анализ» вибирають панель інструментів «Линейная обработка». При цьому критерієм оптимального вибору ап-

роксимуючої функції є мінімум остаточної дисперсії, значення якої автоматично розраховується у процесі проведення апроксимації (за описом роботи з пакетом Origin).

9. За результатами проведеної апроксимації визначити аналітичний вираз для опису графічної залежності із значеннями відповідних коефіцієнтів; коефіцієнт кореляції або детермінації; стандартне відхилення (дисперсію). Значення цих параметрів визначаються при проведенні апроксимації і зберігаються у вікні результатів розрахунків, яке формується автоматично по завершенні апроксимації для визначеної функції (див. опис роботи з пакетом Origin).

10. Оформити побудовану графічну залежність зміни параметра P у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (див. опис роботи з пакетом Origin).

11. Провести моделювання з прогнозуванням розвитку процесу у наступні 30 годин.

12. У таблиці даних у стовпці $A(X)$ додати значення наступного часу розвитку процесу з 21 години до 50 годину.

13. У таблиці даних у стовпці $B(Y)$ виділити рядки, які відповідають наступному часу розвитку процесу з 21 години до 50 години. Клацнути праву клавішу «мишки» і завантажити панель інструментів «Установить значение в столбце». У відкритому меню роботи з операцією встановити значення кількості точок для моделювання розвитку процесу у наступні 30 годин, тобто встановити значення i від 21 до 50. Ввести вираз, який отримано у пп. 9–10 для проведення моделювання розвитку процесу у наступні 30 годин.

14. Завантажити операцію розрахунків на виконання та отримати результати моделювання у стовпці $B(Y)$ з 21 години до 50 години наступного розвитку процесу за параметром P .

15. Виділити стовпець $B(Y)$. Повторити п. 6,..., п. 10 із побудовою графічної залежності зміни параметра P у часі $P = f_2(t)$ для отриманих даних з урахуванням результатів моделювання наступного розвитку процесу у часі.

16. Оформити побудовану графічну залежність зміни параметра P у часі (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (за описом роботи з пакетом Origin).

17. Визначити довірчі та толерантні інтервали для закономірності зміни параметра P у часі.

18. Виконати п. 8 з побудовою графічної залежності $P = f_2(t)$.

19. У випадку отримання лінійної функції для опису залежності $P = f_2(t)$ (відповідно до п. 16) зайти в меню «Сервис» і завантажити панель інструментів «Линейная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Линейная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (95 %) та позначити необхідність обробки з визначенням довірчих і толерантних інтервалів. Після натискання на панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі й толерантні інтервали.

20. У випадку отримання нелінійної функції для опису залежності $P = f_2(t)$ (згідно з п. 16) зайти в меню «Сервис» і завантажити панель інструментів «Полиномиальная обработка». Після завантаження панелі інструментів «Полиномиальная обработка» в меню операції встановити величину довірчих інтервалів (95 %) та позначити необхідність обробки з визначенням довірчих і толерантних інтервалів. Після натискання панелі завантаження операції автоматично формуються графічні залежності з визначеною апроксимуючою функцією, довірчі й толерантні інтервали.

21. Оформити побудовану графічну залежність зміни параметра P у часі з толерантними та довірчими інтервалами (шкали виведення, назви осей, товщина ліній, кольори виведення тощо) (за описом роботи з пакетом Origin).

22. Сформувати на одному з логічних дисків каталог для зберігання результатів моделювання та прогнозування.

23. Зберегти результати проведеного моделювання у вигляді проекту Origin, присвоївши ім'я, у створеному каталозі (див. опис роботи з пакетом Origin).

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного моделювання та прогнозування розвитку процесу, який реєструється на виході первинного перетворювача при проведенні моніторингу процесу, що розвивається у часі:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt». Для цього необхідно

встановити маркер на вікно з табличними даними, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт ASCII». Виконати послідовність дій для збереження табличних даних у вигляді текстового файла (за описом роботи з пакетом Origin).

- Повторити операцію для всіх вікон із табличними даними.
- Вставити збережені табличні дані у звіт про виконання роботи.
- Вставити у звіт результати розрахунків статистичних характеристик при моделюванні. Для цього потрібно зайти у вікно виведення результатів розрахунків статистичних характеристик при проведенні апроксимації отриманих залежностей. Виділити всю інформацію у вікні та скопіювати її у звіт.
- Зберегти отримані графічні залежності у вигляді графічних файлів у форматі «*.bmp». Для цього необхідно встановити маркер на вікно з визначеним графіком, зайти у меню «Файл» і натиснути на панель інструментів «Експорт сторінки». Виконати дії зі збереження графіка у вигляді графічного файла (див. опис роботи з пакетом Origin).
- Повторити операцію для всіх вікон з отриманими графіками.
- Вставити збережені графіки у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 7

Вибір значущих факторів методом рангової кореляції

Мета роботи: аналіз апріорної інформації та виявлення чинників, що найбільше впливають на параметр оптимізації.

Короткі теоретичні відомості

Одним із основних завдань аналізу таких даних є виділення чинників, що найбільше впливають на параметр оптимізації. При цьому фактори, їх інтервали та рівні варіювання відбираються на неформалізованому інтуїтивному рівні. На стадії попереднього вивчення об'єкта дослідження є ефективним застосування так званого «психологічного експерименту», що полягає в об'єктивному представленні даних, отриманих в результаті опитування фахівців, які працюють у цій галузі.

Після вибору вихідного параметра (параметра оптимізації) математичної моделі приступають до вибору чинників, що суттєво впливають на об'єкт моделювання. При цьому доводиться вирішувати компромісну задачу.

З одного боку, необхідно прагнути розглянути якнайбільше чинників, тобто врахувати всі можливі чинники, що впливають на технічну систему. Якщо якийсь із них виявиться неврахованим, то розроблена математична модель призведе до неправильних висновків.

З іншого боку, не можна розглядати всі відомі чинники, оскільки це призведе до значного ускладнення моделі та здорожчання експериментальних досліджень, що залежить від кількості дослідів.

Компромісне вирішення може бути знайдене шляхом відбору чинників, які найбільше впливають на об'єкт дослідження.

На етапі попереднього вивчення технічної системи необхідно досліджувати всю наявну в розпорядженні дослідника інформацію, щоб врахувати найбільшу кількість чинників, дати їм жорстку класифікацію і за допомогою «відсіваючих» експериментів позбутися незначних чинників.

Технічні системи – складні системи, на які впливає велика кількість керованих, контрольованих та неконтрольованих факторів. Ступінь їх впливу на параметр оптимізації неоднакова. Тому на

етапі попереднього вивчення технічної системи необхідно використати всю наявну в розпорядженні дослідника інформацію, щоб формалізувати та врахувати якнайбільшу кількість чинників. Для цього аналізуються літературні джерела та думки фахівців щодо досліджуваного процесу. Інтуїтивний відбір істотних факторів досить суб'єктивний і може призвести до помилкових результатів. Тому на етапі попереднього дослідження широко застосовуються математичні методи відбору чинників.

Систематизація думок фахівців найбільш об'єктивно показує положення, що склалося в цій галузі досліджень. По суті, це є той самий літературний огляд, представлений у формалізованому вигляді. При опитуванні необхідно врахувати погляди найбільшої кількості чинників, які належать до різних шкіл.

У процесі опитування кожному фахівцеві пропонується заповнити анкету, складену за спеціальною формою (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Структура анкети рангів

Найменування чинників	Операційне визначення			Ранг
	Позначення	Розмірність, одиниця вимірювання	Інтервал варіювання	
X_1				
...				
X_k				
<i>Інші чинники</i>				

При складанні таблиці для однозначного трактування фахівцями одного чинника спеціально вводять операційне визначення чинника. Фахівець повинен точно уявляти, як і з якою точністю вимірюється цей чинник, яке його абсолютне значення. Тому вводиться стовпець «розмірність». До анкети бажано додавати ескіз із вказівкою розмірів та необхідних пояснень. Оскільки вплив чинника може виявитися неоднаковим у різних областях факторного простору, то для кожного чинника варто вказати інтервал його зміни.

Вимоги до чинників:

1. За чинник приймають контрольовану змінну об'єкта – вели-

чину, яка характеризує ту чи іншу властивість процесу або режиму роботи певного вимірювального пристрою, обладнання і яка є основним показником цього об'єкта. Така величина, числове значення якої вимірюється в межах зміни, повинна безпосередньо впливати на параметр оптимізації.

2. При визначенні величин кількісних оцінок до уваги повинні братися лише ті чинники, які мають *чіткий метрологічний зміст*.

3. Склад чинників технічної системи визначається розробником при аналізі існуючих процесів. *Інші чинники повинні залишатися незмінними*.

4. Межі зміни чинників об'єкта визначають так, щоб *забезпечити умови фізичної реалізації змінних чинників*, тобто стандартні процеси технічної системи з очікуваним показником параметра оптимізації. Зв'язок параметра оптимізації Y з чинниками процесу X_1, X_2, \dots, X_k у загальному вигляді записують як

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

6. Чинники повинні бути *керованими*, тобто дозволяти експериментально встановлювати необхідне значення чинника та підтримувати це значення протягом дослідження.

7. Для будь-якої пари чинників повинна виконуватись *умова сумісності*, тобто умова, за якої можливий взаємний вплив чинників не призведе до порушення процесів технічної системи.

8. Чинники повинні бути *незалежними*, тому що має бути можливість встановлення чинника на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших чинників.

9. Чинники повинні бути *однозначними*, тобто не повинні бути функцією інших чинників та безпосередньо впливати на параметр оптимізації.

10. Чинники повинні бути *визначені операційно*, тобто має бути певна послідовність дій (операцій), за допомогою яких встановлюються дійсні значення рівнів чинників.

10. *Точність* встановлення граничних значень чинників повинна бути максимально високою, тобто відхилення дійсного значення фактору від заданого планом експерименту значення не може перевищувати допустиму похибку.

При проведенні психологічного експерименту фахівець повинен

розташувати чинники в порядку зменшення їх впливу на параметр оптимізації. Цифри в останньому стовпці анкети відповідають місцю, відведеному даному чиннику в ранжованому рядку.

Результати опитування зводяться та обробляються за формою табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Обробка результатів опитування

Досліджуваний об'єкт	Фактори					$\sum_j (t_j^3 - t_j)$
	X_1	X_2	X_3	...	X_k	
1						
2						
...						
m						
Сума рангів $\sum_{i=1}^m a_{ij}$						
Відхилення від середньої суми рангів Δ_i						
Квадрати відхилень Δ_i^2						

Надалі задача зводиться до оцінки ступеня узгодження поглядів всіх спеціалістів. Така оцінка може бути отримана за допомогою так званого коефіцієнта конкордації

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k)}, \tag{7.1}$$

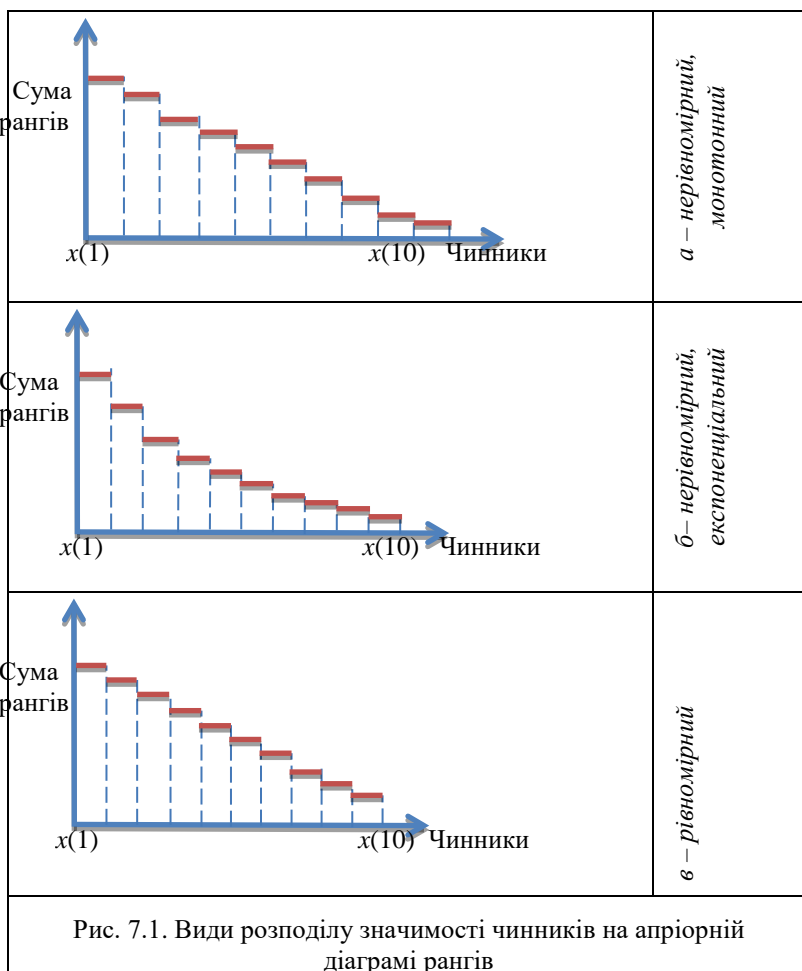
де S – сума квадратів відхилень, яка обчислюється за формулою

$$S = \sum_{i=1}^m \Delta_i^2. \tag{7.2}$$

Значимість коефіцієнта конкордації проводять за χ^2 -критерієм Пірсона, який визначається за формулою

$$\chi^2 = m(k-1)W. \tag{7.3}$$

Після оцінки узгодженості поглядів усіх спеціалістів будують середню апріорну діаграму рангів, відкладаючи на одній осі фактори, на іншій – відповідні їм суми рангів (рис. 7.1).



Для випадків із дуже великою кількістю чинників, крім загального узгодження думок дослідників, розглядають узгодженість за кожним чинником окремо. Для цього розглядається нуль-гіпотеза про рівномірне ранжування проти альтернативи про нерівномірне ранжування за допомогою χ^2 -критерію. При цьому нуль-гіпотеза приймається, якщо з приводу ролі чинника існують різні погляди, та заперечується, якщо погляди збігаються.

Для оцінки ступеня узгодженості середніх ранжувань різних шкіл чи поглядів дослідників розраховується коефіцієнт рангової

кореляції R за формулою

$$R = \frac{6 \sum_{i=1}^k d_i^2 - k^3}{k^3 - k}, \quad (7.4)$$

де d_i – різниця рангів двох дослідів для i -го чинника.

Для $k \leq 7$ критичне значення R протабульоване.

Значимість коефіцієнта рангової кореляції оцінюють за допомогою χ^2 -критерію Пірсона (додаток табл. А.2).

Після обробки результатів опитування та побудування апріорної діаграми рангів можна ухвалити відповідне рішення. У випадку нерівномірного розподілу значимості чинників за діаграмою монотонного їх спадання, за можливості, до експерименту необхідно включати всі чинники.

Послідовність виконання роботи

1. При запуску програми `gangsof.exe` на екрані монітора з'являється вікно, зображене на рис. 7.2. Відразу після запуску програми доступно дві кнопки: «Ввести фактори» та «Выход». При натисканні на кнопку «Выход» програма завершує свою роботу.

2. При натисканні на кнопку «Ввести фактори» на екрані з'являється вікно, яке дозволяє вводити й редагувати чинники (рис. 7.3) для їх наступного ранжування. Вікно містить поле номера поточного чинника, яке заповнюється автоматично, та поля введення атрибутів чинника, до яких вводять необхідні значення (програма дозволяє залишати поля незаповненими). Крім полів введення вікно містить такі кнопки:

– «Следующий фактор» – при натисканні цієї кнопки програма зчитує дані з полів введення та виводить їх у вікно відображення введених чинників, відбувається перехід до введення або редагування наступного чинника;

– «Предыдущий фактор» – аналогічна кнопці «Следующий фактор», але різниця полягає в тому, що відбувається перехід до редагування атрибутів попереднього чинника;

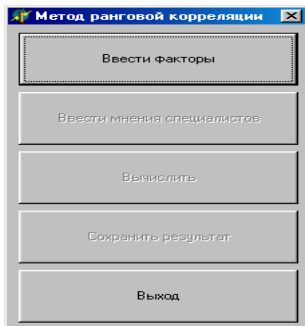


Рис. 7.2. Видяк вікна програми відразу після запуску

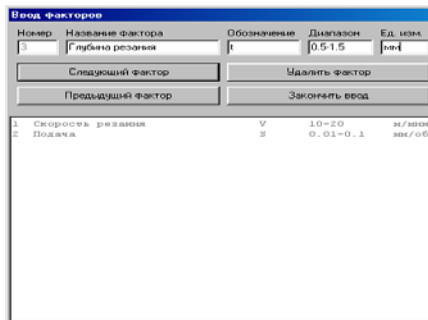


Рис. 7.3. Зовнішній вигляд вікна для введення чинників

- «Удалить фактор» – відбувається видалення поточного чинника та здійснюється перехід до редагування попереднього чинника;
- «Закончить ввод» – відбувається зчитування даних із полів введення та закривається поточне вікно. У випадку, якщо кількість введених чинників перевищує або дорівнює трьом, активується кнопка головного вікна (рис. 7.4) «Ввести мысли специалистов».

3. Дані вводяться за допомогою введення даних у поля. Переміщення між полями атрибутів чинника здійснюється за допомогою «миші» або клавіш [Tab], [Shift]+[Tab]. Перехід до введення наступного чинника здійснюється натисканням кнопки «Следующий фактор» або клавіші [Enter]. За потреби редагування використовуються кнопки «Предыдущий фактор», «Следующий фактор», «Удалить фактор». Після введення останнього чинника натискається кнопка «Закончить ввод» або клавіша [Esc].

4. При натисканні кнопки «Ввести мысли специалистов» (див. рис. 7.4) на екрані з'являється відповідне вікно (рис. 7.5). Це вікно містить поле відображення ранжованих чинників, текстову інформацію про порядковий номер опитуваного фахівця і номер поточного чинника, поле введення оцінки фахівця з поточного чинника та такі кнопки:

- «Следующий фактор», «Предыдущий фактор» – призначення й принцип дії аналогічні відповідним кнопкам у вікні для введення чинників;

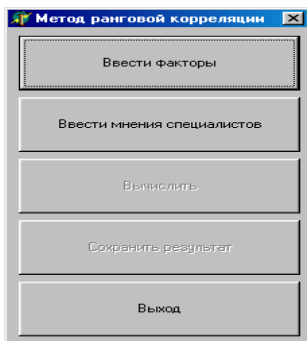


Рис. 7.4. Головне вікно програми після введення чинників

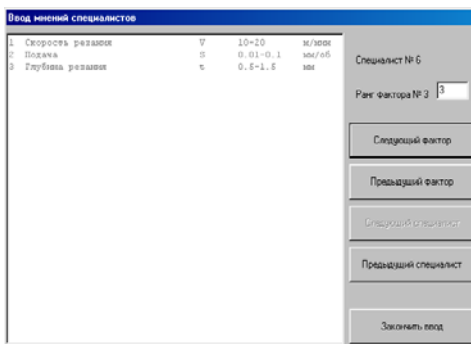


Рис. 7.5. Вигляд вікна для введення про-ранжованих оцінок кожного фахівця

– «Следующий фактор», «Предыдущий специалист» – кнопки для зміни номера поточного фахівця. Кнопка «Следующий специалист» активується після введення оцінок поточного фахівця з усіх чинників. Кнопка «Предыдущий специалист» активується при номері поточного фахівця більше «1»;

– «Закончить ввод» – при натисканні це вікно закривається. Якщо в одного з фахівців невідомі оцінки деяких чинників, то його думка не враховується. Для активації кнопки «Вычислить» необхідно, щоб кількість опитаних фахівців була більшою або дорівнювала п'яти.

5. Думки фахівців вводяться так. У поле введення вноситься оцінка даного фахівця з поточного чинника й натискається кнопка «Следующий фактор» або клавіша [Enter]. Після введення оцінок фахівця з усіх чинників натискається кнопка «Следующий специалист», яка в цей момент стає активною, або клавіша [Enter]. У результаті відбувається перехід до введення оцінок наступного фахівця. Після введення думок усіх фахівців необхідно натиснути кнопку «Закончить ввод» або клавішу [Esc].

6. Після введення оцінок фахівців стає активною кнопка «Вычислить» головного вікна програми. При натисканні цієї кнопки з'являється вікно виведення результатів роботи програми, яке містить:

- поле для виведення даних у порядку зростання їх значимості;
- діаграму значимості чинників;

- текстову інформацію про значення коефіцієнта конкордації, критерію χ^2 -Пірсона, середньої суми рангів;
- кнопку «Закрить».

7. При натисканні кнопки «Закрить» вікно закривається та активується кнопка «Сохранить результат» (рис. 7.6).

При натисканні кнопки «Сохранить результат» з'являється вікно (рис. 7.7), у якому розташовані поле введення імені файлу, а також кнопки «Сохранить» та «Отменить сохранение». У випадку натискання кнопки «Отменить сохранение» або клавіші [Esc] це вікно просто закривається. При натисканні кнопки «Сохранить» або клавіші [Enter] це вікно закривається та зберігається файл з ім'ям, зчитаним із поля введення.



Рис. 7.6. Видгляд головного вікна програми

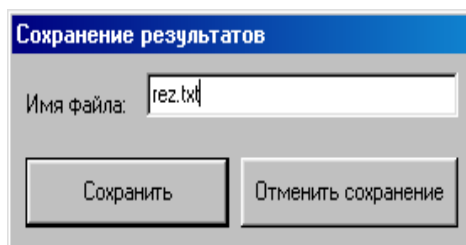


Рис. 7.7. Вікно збереження результатів

У файл результатів виводяться: введені вихідні дані (анкета рангів), чинники в порядку зростання значимості, найбільш значимі чинники, а також коефіцієнт конкордації, розрахункове значення критерію χ^2 -Пірсона, середня сума рангів.

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами проведеного аналізу апріорної інформації та виявлених чинників, які найбільш істотно впливають на параметр оптимізації:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt».
- Вставити збереженні табличні дані у звіт про виконану роботу.
- Вставити збереженні графіки у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 8

Аналіз даних проведених експериментів

Мета роботи: визначити помилкові експерименти для запропонованих значень параметрів оптимізації (після реалізації дослідів) відповідно до матриці планування.

Короткі теоретичні відомості

Для відкидання результатів помилкових експериментів використовують t -критерій Стьюдента:

$$t_p = \frac{|Y - \bar{Y}|}{S}, \quad (8.1)$$

де t_p – розраховане (експериментальне) значення критерію Стьюдента; Y – результат паралельного експерименту, який поставлено під сумнів; \bar{Y} – середнє арифметичне паралельних експериментів без урахування результату помилкового експерименту; S – помилка паралельних експериментів без урахування результату помилкового експерименту.

Послідовність виконання роботи

1. Визначити середнє арифметичне паралельних експериментів за формулою

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, \quad (8.2)$$

де i – номер паралельного експерименту; n – кількість паралельних експериментів; Y_i – значення параметра оптимізації в i -му паралельному експерименті.

2. Визначити помилку експерименту (середнє квадратичне відхилення) за формулою

$$S = +\sqrt{S^2}, \quad (8.3)$$

де S^2 – дисперсія паралельних експериментів.

3. Визначити дисперсію паралельних експериментів за формулою

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}. \quad (8.4)$$

4. Порівняти значення tp із табличним значенням критерію Стьюдента $t_{\text{табл}}$ (додаток А табл. А.4). Якщо виявиться, що $tp > t_{\text{табл}}$, то цей експеримент вважають помилковим (бракованим) і, навпаки, якщо $tp < t_{\text{табл}}$, то експериментальне значення безпомилкове, що належить загальній сукупності.

Процедура порівняння розрахованої характеристики з табличним її значенням називається перевіркою гіпотези. Застосування табличної характеристики потребує деяких коментарів. А саме – вхідними параметрами до цієї таблиці є кількість степенів вільності f та рівень значимості α .

Поняття «кількість степенів вільності» часто зустрічатиметься і надалі уточнюватиметься. У цьому випадку

$$f = n - 1, \quad (8.5)$$

де n – кількість паралельних експериментів без урахування помилкового експерименту.

5. Рівень значимості – міра наших вимог до відповіді. Як правило, при вирішенні інженерних задач рівень значимості приймають рівним 0,05.

Значення, яке ще називають 5-відсотковим рівнем ризику, відповідає ймовірності правильної відповіді при перевірці висунутої гіпотези $P = 1 - 0,05$ або 95 %. При цьому кажуть, що в середньому тільки у 5 % випадків перевірки гіпотези в аналогічних ситуаціях можлива помилка.

6. Теорія похибок показує, що для багатьох вимірів ($n > 30$), якщо випадкову похибку прийняти рівною середньому квадратичному відхиленню $\Delta_{\text{вип}} = \sigma$, то довірча ймовірність дорівнює 0,68.

Якщо за оцінку випадкової похибки взяти подвоєне значення середнього квадратичного відхилення $\Delta_{\text{вип}} = 2\sigma$, то дійсне значення потраплятиме в середину цього збільшеного інтервалу (при багатьох вимірах) з довірчою ймовірністю $P = 0,95$, для інтервалу $\Delta_{\text{вип}} = 3\sigma$ ймовірність $P = 0,997$ (рис. 8.1).

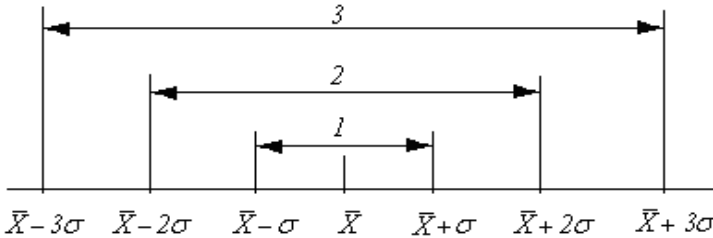


Рис. 8.1. Довірчі інтервали середньоквадратичного відхилення σ

До інтервалу 1 (рис. 8.1) істинне значення величини X може потрапити з ймовірністю $P = 0,68$; до інтервалу 2 – з ймовірністю $P = 0,95$; до інтервалу 3 – з ймовірністю $P = 0,997$.

Для відповідальних вимірювань застосовують оцінку $\Delta_{\text{вип}} = 2\sigma$ з $P = 0,95$. В особливо відповідальних випадках, коли проведені виміри пов'язані зі створенням еталонів або відповідальних прецизійних вимірів, оцінку випадкової похибки беруть 3σ , для якої ймовірність становить $P = 0,997$.

7. Результати розрахунків рекомендовано звести до табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Результати розрахунків помилкових експериментів

№ з/п	Значення Y_i , що перевіряється	\bar{Y}	S^2	S	t_p	$t_{\text{таб}}$	Висновок	
1								
2								
...								
8								

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами визначення помилкових експериментів відповідно до матриці планування для запропонованого ряду значень параметрів оптимізації (після реалізації дослідів):

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt».
- Внести розрахункові значення помилкових експериментів до табл. 8.1 та розмістити у звіті про виконану роботу.
- Вставити збереженні табличні дані у звіт про виконану роботу.

Лабораторна робота 9

Дослідження технічної системи за допомогою повного факторного експерименту

Мета роботи: ознайомитися з методикою математичного планування експериментів та аналізу отриманого рівняння регресії. Отримати модель технічної системи і дослідити її для удосконалення або розробки їх підсистем.

Короткі теоретичні відомості

Дослідження для оптимізації технічних систем містить важливий етап – визначення (відшукування) математичної моделі – рівняння зв'язку вихідного показника досліджуваного об'єкта (цільової функції, параметра оптимізації) з параметрами відповідного процесу (вхідними факторами). *Модель* – це спрощена система, що відображає окремі сторони явищ досліджуваного об'єкта. Кожен досліджуваний процес можна описати різними моделями, при цьому жодна модель не може зробити це абсолютно повно і всебічно. Однак використання спрощеної моделі, що відображає окремі риси досліджуваного об'єкта, дозволяє ясніше побачити взаємозв'язок причин і наслідків, входів і виходів, швидше зробити необхідні висновки, ухвалити правильні рішення.

Математичне моделювання є методом якісного або кількісного опису об'єктів (процесів), при цьому реальний об'єкт, процес або явище спрощується, схематизується й описується певним рівнянням. У більшості випадків математична модель являє собою рівняння регресії, тобто геометричне місце точок математичних очікувань умовних розподілів цільової функції. Найпростішим прикладом такої моделі є рівняння парної кореляції, де на цільову функцію впливає один фактор. На практиці на цільову функцію впливає багато факторів, і шукане рівняння регресії стає багатомірним.

Розвиток математичної статистики та її широке проникнення в техніку та різноманітні сфери науки дали можливість створити математичну теорію експерименту. За допомогою цієї теорії розв'язуються різноманітні питання експериментальних дослі-

джень, у тому числі й математичне планування експерименту, оптимізації технічних систем та інше.

Сутність методу базується на тому, що на основі обмеженої кількості проведених експериментів встановлюється кореляційна залежність між показниками процесу та вихідними параметрами досліджуваного об'єкта.

Останнім часом набули широкого розвитку математичні моделі, якими є рівняння, що виражають залежність параметра оптимізації (Y) від факторів (x_1, x_2, \dots, x_k):

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (9.1)$$

Наведена функція отримала назву функції відгуку – функція, яка характеризує процес, що досліджується.

При оптимізації створюваних або вже існуючих складних технічних систем, при дослідженні нових матеріалів потрібно завжди прагнути, щоб при найменших витратах матеріальних засобів та часу отримати найбільш повну та точну інформацію про вплив кожного досліджуваного фактора на функцію відгуку (параметр оптимізації). Тому на першому етапі дослідження завжди перевіряється можливість опису досліджуваного процесу за допомогою лінійної моделі, яка може бути використана для передбачення значення досліджуваної функції в різних точках обраного факторного простору (інтерполяційна модель) або для пошуку області оптимуму «методом крутого сходження». Для знаходження лінійної моделі застосовуються плани 1-го порядку.

У кожному досліді окремий фактор може набувати лише одне із декількох значень, яке називають *рівнем*.

Найбільш розповсюдженим планом цієї групи є повний факторний експеримент (ПФЕ), в якому кожний рівень одного фактора комбінується зі всіма рівнями решти факторів. Для отримання лінійної моделі кількість рівнів варіювання r всіх факторів приймається сталим та мінімально можливим ($r = 2$). Такі плани називаються ПФЕ типу 2^k , де k – кількість досліджуваних факторів.

Оскільки випадкові збурення неконтрольовані, то зміна \tilde{Y}_i має випадковий характер, а тому для отримання математичного опису в цьому випадку застосовуються методи регресивного аналізу на ос-

нові статистичних даних, які накопичені в результаті постановки експерименту.

При дослідженні технічних систем у ролі вихідних параметрів приймають продуктивність, точність, якісні характеристики. Під оптимізацією розуміють найкраще розв'язання поставленої задачі, яке зводиться до знаходження екстремуму, тобто мінімуму або максимуму однієї або декількох змінних величин.

Вибрати оптимальний варіант за допомогою цільової функції (критерію оптимізації), під якою розуміють функцію, екстремум значення якої потрібно встановити. Реалізація методу математичного планування експерименту передбачає чітке розділення факторів на залежні та незалежні, на керовані та некеровані.

За попередньо проведеними експериментами та дослідженнями визначити допустимі межі зміни режимів x_1, x_2, x_3, x_4 , а саме – верхній (+) та нижній (–) рівні процесу.

На підставі цих дослідів потрібно скласти матрицю багатофакторного експерименту та рівняння регресії, загальний вигляд якого такий:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n. \quad (9.2)$$

Вільний член рівняння a_0 та коефіцієнти a_i відповідно обчислюються за формулами:

$$\hat{a}_i = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{i_{\text{дос}}}}{n}, \quad (9.3)$$

$$a_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_{i_{\text{дос}}}}{n}, \quad (9.4)$$

де n – кількість дослідів; $Y_{i_{\text{екс}}}$ – експериментальне значення цільової функції.

При складанні матриці планування (табл. 9.1) ПФЕ необхідно перейти до кодованих значень кожного фактора, що дозволяє здійснити лінійне перетворення координат факторного простору з переносом початку координат у центр досліджуваної області та вибором масштабів за новими осями в одиницях інтервалів варіювання факторів, тобто план набуває стандартної форми. Для цього засто-

вугється залежність

$$x_k = \frac{x_i - x_o}{\Delta x}, \quad (9.5)$$

де x_k – кодоване значення k -го фактора; x_i – поточне значення i -го фактора; x_o – основний рівень зміни фактора; Δx – інтервал варіювання фактора

$$\Delta x = 0,5(x_{i_{\max}} - x_{i_{\min}}). \quad (9.6)$$

Основні рівні та інтервали варіювання для факторів вибирають на підставі апіорних даних, на підставі аналізу літературних джерел або результатів раніше проведених експериментів. Після обробки даних багатофакторних експериментів можуть бути отримані математичні моделі процесу в простій матричній формі, які відображають зв'язки досліджуваних факторів із вихідними параметрами.

Таблиця 9.1

Матриця планування експерименту для трьох факторів

№ з/п	X_1	X_2	X_3	Y	
1					Ядро матриці планування
...					
8					Зоряні точки
9					
...					Нульові точки
14					
15					Нульові точки
16					
17					

Незалежно від кількості факторів, для отримання оптимальної математичної моделі необхідно, щоб матриця ПФЕ мала такі властивості:

1. *Симетричність* відносно центра експерименту: алгебрична сума елементів вектор-стовпця кожного фактора дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N X_{ji} = 0, \quad (9.7)$$

Де j – номер фактора $j = 1, 2, \dots, k$; i – номер дослід; N – кількість дослідів.

2. *Умова нормування даних*: сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{i=1}^N X_{ji}^2 = N. \quad (9.8)$$

Це говорить про те, що значення факторів у матриці задаються $+1$ та -1 .

3. *Ортогональність* матриці планування: сума почлених добутоків будь-яких двох вектор-стовпців дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N X_{ji} \cdot X_{ui} = 0, \quad (9.9)$$

де $j \neq u$, $j, u = 0, 1, 2, \dots, k$.

Як відомо, будь-яку функцію без нескінчених розривів можна розкласти в ступеневий ряд Тейлора. Тому в теорії експерименту найчастіше математичний опис представляється у вигляді полінома шляхом розкладу в ряд Тейлора:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j + \sum_{i,j=0}^n b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{j=1}^n b_{jj} \cdot x_j^2 + \dots, \quad (9.10)$$

де b_0 , b_j , b_{ij} , b_{jj} – сталі коефіцієнти рівняння, оцінки яких потрібно визначити в результаті постановки та проведення пасивного експерименту; n – кількість найсуттєвіших вхідних величин, отриманих у результаті відсіюючого експерименту.

Оскільки для обробки даних з метою пошуку оцінок коефіцієнтів рівняння (9.10) та для статистичної оцінки результатів пасивного експерименту застосовуються методи регресивного аналізу, то потрібно виконати низку передумов:

1. Результати спостережень y_1, y_2, \dots, y_n вихідної величини в точках факторного простору є незалежні випадкові величини, які розподілені за нормальним законом, а процес зміни \tilde{y} повинен бути стаціонарним у часі.

2. Дисперсії $Dy_l (l = \overline{1, n})$ цих випадкових величин повинні бути однаковими (вибіркові оцінки S^2_l однорідні).

3. Усі значення вхідних величин $x_j (j = \overline{1, n})$ повинні вимірюватися з найменшою помилкою (порівняно з помилкою вимірювання) вихідної величини \tilde{y} .

4. Вхідні величини $x_j (j = \overline{1, n})$ не повинні бути корельовані між собою.

5. Усі сусідні вимірювання за кожною j -ю вхідною величиною повинні бути незалежними.

Кількість коефіцієнтів рівняння визначають об'єм експерименту. Тому вибирають такий поліном, який містить найменше коефіцієнтів, але задовольняє вимогу простоти та адекватності, під якою розуміють здатність моделі прогнозувати результати експерименту в заданій області з необхідною точністю.

У загальному випадку, для будь-якої кількості факторів коефіцієнти рівняння регресії обчислюються за формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{ji}}{\sum_{i=1}^N x_{ji}^2}, \quad (9.11)$$

де $j = 0, 1, 2, 3, \dots, k$ – номер фактора (нуль записаний для обчислення b_0).

Якщо матриця планування симетрична, то $\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N$. Після відповідних скорочень формули для обчислення коефіцієнтів матимуть вигляд:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \quad (9.12)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{1i}}{N} \text{ і т.д.} \quad (9.13)$$

Коефіцієнти при ефектах взаємодії двох факторів обчислюються за формулою

$$b_{uj} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i X_{ji} X_{ui}}{N}, \quad (9.14)$$

де $u, j = 1, 2, 3, \dots, k$ – номери факторів, $u \neq j$.

Послідовність виконання роботи

1. Здійснити перетворення факторів.
2. Відсіяти грубі похибки експерименту. Для відсіювання беруть крайні значення.
3. Після проведення відсіювання перевірити на відтворення дослідів за критерієм Кохрена. Обчислити відношення максимальної дисперсії до суми дисперсій в якомусь досліді. Це відношення – розрахункове значення Кохрена. Дисперсія відтворювання розраховується не тільки за рядками плану, а й за експериментом у нульовій точці.

4. Після розрахунку коефіцієнта Кохрена перейти до розрахунку коефіцієнта рівняння регресії.

5. Перевірити гіпотезу про статистичну значимість коефіцієнта рівняння регресії за допомогою коефіцієнта Стьюдента. Критерій Стьюдента застосовують для розрахунку довірчого інтервалу.

6. Перевірити адекватність математичної моделі за допомогою критерію Фішера. Критерій Фішера визначається як відношення дисперсії неадекватності до дисперсії відтворювання. Адекватність математичної моделі перевіряють за коефіцієнтом множинної кореляції. Що ближче коефіцієнт множинної кореляції до одиниці, то точніше математична модель описує процес, що вивчається. Використовується у разі, коли математична модель не забезпечує потрібної точності, інші коефіцієнти – непрямі критерії адекватності математичної моделі.

Здійснити інтерпретацію математичної моделі графічним або аналітичним способами.

Графічний спосіб

Зробити розрізи поверхні відгуку, отримати ізолінії, які можна відобразити на площині. Один із факторів змінюється, а інші залишаються незмінними.

Аналітичний спосіб

Інтерпретувати аналітичним методом можна у факторах, що ко-

дуються.

1. Величина коефіцієнта моделі – кількісна міра цього впливу за умови, що інтервали варіювання факторів порівнювальні (їх величина перебуває в межах 10...25 % від максимальної величини значення факторів). Про характер впливу факторів судять за знаком коефіцієнтів. За багатofакторного планування розглядають ефекти взаємодії. За додатних значень коефіцієнтів при ефекті взаємодії можна говорити, що для збільшення параметра оптимізації потрібне одночасне збільшення або зменшення факторів. Для зменшення параметра оптимізації необхідно фактори змінювати в різних напрямках. Якщо значення коефіцієнта від'ємне, то для збільшення параметра оптимізації фактори повинні змінюватися в різних напрямках. Для зменшення параметра оптимізації потрібне одночасне зменшення або збільшення факторів.

2. Ранжування факторів. Якщо якийсь фактор має малий коефіцієнт (не входить до довірчого інтервалу), то фактор незначний. Сигнал про незначимість факторів має бути перевіреном.

3. Апріорні відомості з результатами можуть не збігатися з двох причин:

- неправильне уявлення про досліджуваний процес;
- в експерименті є помилки.

Для виключення впливу систематичних факторів необхідно проводити рандомізацію.

Результати виконання роботи

Оформити звіт за результатами отриманої моделі технічної системи і дослідження її для удосконалення або розробки її підсистем:

- Зберегти результати розрахунків і моделювання у вигляді табличних даних у файлі з необхідним ім'ям у текстовому форматі, наприклад, форматі «*.txt».
- Внести розрахункові значення матриці планування експерименту для трьох факторів до табл. 9.1 та вставити у звіт про виконану роботу.
- Вставити збереженні табличні та розрахункові дані у звіт про виконану роботу.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Абстрактна модель – це опис досліджуваного об'єкта певною мовою.

Адекватність математичної моделі – її здатність відображати задані властивості об'єкта з похибкою, не більшою від заданої.

Алгоритмізованість – можливість розроблення відповідних алгоритму і програми, що реалізовує математичну модель на комп'ютері.

Алгоритмічні математичні моделі – виражають зв'язки між вихідними параметрами і вхідними та внутрішніми параметрами у вигляді алгоритму.

Аналіз – це процес дослідження властивостей, притаманних системі.

Аналітичне моделювання. Процеси функціонування елементів системи подаються у вигляді функціональних співвідношень (алгебричних, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих та ін.) або за принципом логіки.

Аналітичні математичні моделі – математичні вирази вихідних параметрів як функцій від вхідних та внутрішніх параметрів.

Аналогова модель – модель, що описується рівняннями з неперервних величин.

Аналого-цифрова модель – описується рівняннями, до яких входять неперервні та дискретні величини.

Аналогове моделювання – ґрунтується на застосуванні аналогій різних рівнів. Найвищим рівнем є цілковита аналогія, яка використовується тільки для дуже простих об'єктів.

Апроксимація – наближене відтворення одних математичних об'єктів за допомогою інших (наближене відображення складної функції за допомогою однієї або кількох простіших).

Безвідмовністю називається властивість системи постійно зберігати свою працездатність за заданих режимів та умов експлуатації.

Безперервне моделювання – відображає неперервні процеси в системах.

Відтворюваність результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї і тієї самої величини, отриманих у різних місцях, різни-

ми методами і засобами вимірювань, різними операторами, але зведених до одних і тих самих умов.

Властивості – якості, що дозволяють описувати систему та виділяти її серед інших систем. Вони можуть мати кількісну або якісну міру.

Впливова величина – це фізична величина, яка не вимірюється засобами вимірювання, але впливає на їх результати.

Вхідний потік вимог (регулярний чи випадковий) – це послідовність однорідних подій, які надходять через рівні чи випадкові інтервали часу.

Гіпотези. Наукові припущення, зроблені для пояснення певних явищ дійсності. Визначають невідомі закономірності у системі або постановку завдання. За відсутності інформації висувають гіпотези щодо можливих результатів, які потім перевіряють експериментально.

Гіпотетичне моделювання. Дослідником враховується гіпотеза про закономірність перебігу процесу в реальному об'єкті, що відображає рівень знань дослідника про об'єкт і ґрунтується на причинно-наслідкових зв'язках між входом і виходом досліджуваного об'єкта.

Гносеологічні моделі – спрямовані на вивчення об'єктивних законів природи, наприклад, моделі сонячної системи, біосфери, Світового океану, катастрофічних явищ природи.

Гранична невідповідність – це коли ідеалізація, прийнята під час побудови моделі об'єкта вимірювання, зумовлює невідповідність параметра моделі досліджуваній властивості об'єкта.

Декомпозиція технічної системи (розбиття завдання на підзадачі). Проводиться для складних систем у випадку, коли побудова набору співвідношень між характеристиками системи є неможливою або складною.

Детерміновані завдання – виникають у ситуаціях, коли кожна стратегія приводить до єдиного результату.

Детерміноване моделювання – відображає детерміновані процеси, з яких вилучаються будь-які випадкові впливи.

Детерміновані математичні моделі – описують поведінку об'єкта з позицій повної визначеності в теперішньому і майбутньому часі.

Динамічне програмування – методи вирішення оптимізаційних задач, в основі яких лежить ідея розбиття початкової задачі на послідовний ряд більш простих задач, що вирішують багатокрокові процеси, які протікають у часі.

Дискретно-неперервне моделювання – використовують для випадків, де є дискретні та неперервні процеси.

Дисперсія – числова характеристика розподілу ймовірностей випадкової величини X , яка характеризує міру розсіювання випадкової величини відносно її математичного сподівання та визначається за формулою $D(X) = \sigma_x^2 = M(x - M(X))^2$.

Довговічність – оцінюється кількісно як середній термін служби між ремонтами.

Достовірність вимірювань – визначається ступенем довіри до результату вимірювання та характеризується ймовірністю того, що істинне значення вимірюваної величини перебуває в зазначених межах. Таку ймовірність називають довірчою.

Економічність математичної моделі – витрати обчислювальних ресурсів на її реалізацію.

Елементи – це частина або компоненти системи, які умовно вважають нероздільними.

Емпіричні математичні моделі – створюються в результаті проведення експериментів (вивчення зовнішніх проявів властивостей об'єкта за допомогою вимірювання його параметрів на вході та виході) та оброблення їх результатів методами математичної статистики.

Завдання в умовах невизначеності – виникають у ситуаціях, коли невідомо, які результати можуть бути отримані.

Засіб вимірювання – це технічний засіб, призначений для вимірювань, який дозволяє вирішувати вимірювальне завдання шляхом порівняння вимірюваної величини з одиницею фізичної величини.

Збіжність результату вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї і тієї самої величини, виконуваних повторно одними й тими самими методами та засобами вимірювань, в одних і тих же умовах. Збіжність вимірювань відображає вплив випадкових похибок на результат вимірювання.

Зв'язки – це те, що з'єднує елементи та їх властивості з іншими елементами. Кожен елемент системи з'єднаний зв'язками безпосередньо чи опосередковано з будь-яким іншим елементом.

Змінні параметри – величини, значення яких потрібно знайти шляхом розв’язання задачі за допомогою математичного моделювання.

Імітаційне моделювання. Алгоритм, що реалізує модель, відтворює процес функціонування системи у часі. Метод конструювання моделі системи та проведення експериментів на моделі. Істотними особливостями цього виду моделювання є опис структури модельованої системи, застосування засобів відтворення функціонування (поведінки) системи на моделі, відображення властивостей середовища, у якому функціонує досліджувана система.

Імітаційні математичні моделі – це алгоритмічні моделі, які відображають розвиток процесу (поведінка об’єкта дослідження) у часі при заданні зовнішніх дій на процес (об’єкт).

Імовірнісні задачі (з ризиком) – при розв’язанні яких можуть бути отримані різні результати, ймовірності досягнення яких відомі або можуть бути оцінені.

Інтенсивність потоку подій λ – це середня кількість подій, яка відбувається за одиницю часу.

Інтервалом варіювання факторів називають число, додавання якого до основного рівня дає верхній, а віднімання – нижній рівень фактора.

Інтерпретація – це складний процес, який здійснюється у декілька етапів:

- 1) оцінка величини і напрямку впливу факторів та їх взаємодій;
- 2) порівняння впливу сукупності факторів;
- 3) перевірка правильності апріорних уявлень про вплив факторів.

Інформаційні моделі – описують поведінку об’єкта – оригіналу, але не копіюють його.

Інцидентність – це відношення між різними об’єктами, а сумісність – відношення між однорідними об’єктами.

Керовані фактори $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. За їх допомогою заданий технічний режим реалізується та підтримується сталим протягом потрібного часу.

Кібернетичне моделювання – несхожість фізичних процесів, що відбуваються в моделях, з реальними процесами.

Кількісні фактори – це змінні величини, які можна оцінити кількісно, тобто виміряти, зважити.

Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання – під час аналізу та синтезу систем об'єднує переваги аналітичного та імітаційного моделювання.

Комп'ютерне моделювання – реалізація процесу моделювання за допомогою комп'ютера. Важливою особливістю комп'ютерного моделювання є його **інтерактивність** – наявність можливості втручання користувача в процес моделювання та впливу на його результати. Вона забезпечується узгодженістю дій користувача та моделі, яка відтворює об'єкти реального середовища або гіпотетичні події та процеси.

Концептуальна модель – це абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, притаманні досліджуваному об'єкту, істотні в межах певного дослідження.

Критерій оптимальності – показник міри ефективності досліджуваної технічної системи, величина якого за екстремального значення цільової функції (максимального чи мінімального) визначає оптимальний розв'язок для заданих умов, тобто оптимальне значення змінних параметрів моделі.

Макроаналіз – спрямовується на систему загалом – її властивості, поведінку, взаємодію з навколишнім середовищем.

Макетування. Уявний макет застосовується тоді, коли у реальному об'єкті відбуваються процеси, які не піддаються фізичному моделюванню або можуть передувати проведенню інших видів моделювання.

Математичне моделювання – процес установалення відповідності математичного об'єкта (математичної моделі) до реально названого та дослідження цієї моделі з метою отримання характеристики розглянутого об'єкта.

Математична модель об'єкта вимірювання – це сукупність математичних символів і відношень між ними, у якій адекватно описано властивості об'єкта вимірювання, якими цікавиться суб'єкт.

Математична модель системи – опис формальною мовою, що дозволяє робити висновки про певні риси поведінки цієї системи за допомогою формальних процедур з її описом.

Математична модель технічної системи – це сукупність математичних об'єктів (чисел, змінних, матриць, множин та ін.) та відношень між ними, яка адекватно відображає властивості, особ-

ливості та поведінку технічної системи, що цікавлять інженера, який розробляє або досліджує цю систему.

Математичні моделі на макрорівні виробничого процесу – описують у цілому технологічні процеси як сукупність технологічних операцій.

Математичні моделі на метарівні виробничого процесу – описують такі технологічні системи, як ділянки, цехи та підприємство в цілому.

Математичні моделі на мікрорівні виробничого процесу – відображають фізичні процеси, що відбуваються, наприклад, при різанні металів на рівні технологічного переходу (структурна частина операції).

Метрологічні характеристики – це характеристики властивостей засобів вимірювання, які впливають на результат вимірювань і його похибки, призначені для оцінювання технічного рівня та якості засобів вимірювання, а також для визначення результатів вимірювань і розрахункової оцінки характеристик інструментальної складової похибки вимірювань.

Мікроаналіз – це вивчення й моделювання структури системи та властивостей її елементів. Його часто можна замінити дослідженням функцій елементів і процесу функціонування системи.

Множина – це об'єднання в одне ціле об'єктів, добре розрізних нашою інтуїцією або нашою думкою.

Метод випадкового балансу ґрунтується на застосуванні дисперсного аналізу та плануванні експерименту.

Метод дисперсійного аналізу. Однорідність дисперсій ω перевіряється розрахунком критеріїв та порівнянням його значення з табличним за вибраного рівня достовірності

$$\omega = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^q a_{n-i+1} [y_{n_i(n-i+1)} - y_{n_i}] \right\}^2}{\sum_{i=1}^{n_u} y_{n_0}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n_q} y_{n_i}}{n_u}}$$

де a_{n-i+1} – коефіцієнт, значення якого задані в таблиці залежності кількості паралельних дослідів та кількості серії дослідів; $q = n_u / 2$ – за

парної кількості паралельних дослідів; $q = (n_u - 1)/2$ – за непарної; y_{ni} – величини із ранжованої вибірки значень залежної змінної кожної серії дослідів, тобто $y_{n_1} \leq y_{n_2} \leq \dots \leq y_{n_n}$.

Метод рангової кореляції – ґрунтується на систематизації апріорної інформації, яку отримують із літературних довідників та з опитування фахівців. При ньому не потрібно виконувати натурні чи машинні експерименти, достатньо психологічного експерименту.

Мовне моделювання. В основі лежить тезаурус, який утворюється з набору вхідних тезаурусів, причому цей набір має бути фіксованим.

Модель – це відображення на основі подібності з об'єктом його характеристик з метою подальшого його вивчення.

Моделювання – це процес зображення об'єкта дослідження подібною до нього моделлю і виконання експериментів з нею для отримання інформації про об'єкт дослідження.

Модульність – відповідність конструкцій моделі структурним складовим об'єкта (технічної системи).

Надійність математичної моделі – забезпечення безпечної роботи з нею, правильність отриманих результатів, прийняттого інтервалу розбіжності результатів моделювання з реальними показниками технічної системи.

Наочність – зручне візуальне сприйняття моделі користувачем.

Наочне моделювання – на основі спостережень про реальні об'єкти створюються різні наочні моделі, які відображають явища та процеси, що в них відбуваються.

Напрацювання до відмови – напрацювання об'єкта від початку його експлуатації до виникнення первинної відмови.

Напрацювання на відмову – відношення часу напрацювання відновлюваного об'єкта до сумарної кількості простоїв.

Натурне моделюванням – проведення дослідження на реальному об'єкті з наступним обробленням результатів експерименту на основі теорії подібності.

Некеровані контрольовані фактори $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Характеризують якість сировини або проміжних продуктів, можливості технічних систем та підсистем.

Некеровані неконтрольовані фактори $(W = w_1, w_2, \dots, w_i)$. Їх дію не можна врахувати під час експериментів.

Нормальна область значень впливової величини – це область значень, у межах якої зміною результату вимірювань під дією впливової величини можна знехтувати відповідно до встановлених норм точності.

Нормальні умови вимірювань – це умови, за яких впливові величини мають нормальні значення або значення в межах нормальної області.

Об'єкт моделювання – це суцільна технічна система або її складові структурні частини (підсистеми).

Об'єктно-орієнтований підхід – передбачає використання об'єктів – сутностей, які визначаються ідентичністю, станом та поведінкою.

Обмеження – області можливих значень змінних умов за заданих конкретних умов технічної системи, що вивчається і для якої знаходиться найкраще (оптимальне) рішення.

Обслуговування – оброблення потоку замовлень, що надходять до обслуговуючої системи у випадкові моменти часу.

Обчислюваність – можливість ручного або за допомогою комп'ютера дослідження якісних і кількісних закономірностей функціонування об'єкта (технічної системи).

Організаційні одиниці (підприємства, підрозділу, персоналу, окремі виконавці) – це окремий вид ресурсів, які являють собою об'єднання людей, яке використовує інші ресурси для виконання виробничих процесів.

Перевіркою гіпотези називають процедуру порівняння обчисленої характеристики з табличним значенням.

Перевірка достовірності (верифікація). Процес визначення того, що модель (виконувана імітація) точно відтворює детальний концептуальний опис, прийнятий розробником. Перевірка достовірності також оцінює ступінь відповідності моделі або імітації змісту та проводиться з використанням методів програмування.

Помилку експерименту S визначають як корінь квадратний із дисперсії експерименту $S = +\sqrt{S^2}$.

Постановка завдання – це формулювання питань, на які потрібно отримати відповіді під час моделювання та докладне викладення ситуації, що склалась (проблеми, умови завдання, обмеження).

Постійні параметри – величини, які в процесі всього моделювання залишаються незмінними.

Потік подій – послідовність однорідних подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Похибка – це відхилення ΔX результату вимірювання $X_{\text{вим}}$ від істинного значення $X_{\text{іс}}$ вимірюваної величини, що визначається за формулою $\Delta X = X_{\text{вим}} - X_{\text{іс}}$.

Правильність вимірювання – це характеристика вимірювання, що відображає близькість до нуля систематичних похибок результатів вимірювань.

Під **працездатністю** розуміють такий стан системи, за якого вона в даний момент часу відповідає всім вимогам, встановленим до основних параметрів, які характеризують належне виконання заданих функцій.

Реальне моделювання. Досліджують характеристики цілого об'єкта або його частин.

Результат аналізу – створення моделі процесів, що відбуваються у складних системах, і закономірностей, притаманних процесам і системам.

Ремонтопридатність – це пристосованість об'єкта до попередження та виявлення причин виникнення відмов, пошкоджень та усунення їх наслідків за допомогою ремонту і технічного обслуговування.

Ресурси – це сутності (суб'єкти), за допомогою яких здійснюються виробничі процеси.

Рівень варіювання – це значення кожного фактору за час проведення дослідю.

Робочий об'єкт – це сутність, над якою виконується певна дія (перетворення, оброблення, формування тощо).

Сенсуальна модель – це модель якихось почуттів, емоцій або моделі, що впливають на почуття людини (наприклад, малярство, музика, поезія та ін.).

Символічне моделювання – це штучний процес створення логічного об'єкта, який замінює реальний і виражає його основні відношення за допомогою системи знаків чи символів.

Системний аналіз – передбачає послідовний перехід від загального до часткового, коли в основі розгляду є мета, а досліджуваний об'єкт виділяють з навколишнього середовища.

Синтез – це процес створення функцій та структур, необхідних і достатніх для досягнення певних результатів. Відшукуючи функції, які реалізує система, знаходять деяку абстрактну систему, про яку відомо лише те, що вона буде функціонувати.

СМО з відмовами (втратами) – це коли замовлення, яке надійшло, отримує відмову, оскільки всі канали зайняті, та залишає СМО і більше не обслуговується.

СМО з чергою (очікуванням) – це коли замовлення, яке надійшло, не йде далі, а стає в чергу й чекає на обслуговування, оскільки всі канали зайняті.

Стандартність математичної моделі – необхідність використання відповідного математичного апарату, що дозволяє застосовувати його для групи однотипних технічних систем.

Статичне моделювання – описує поведінку об'єкта в певний момент часу.

Структурно-алгоритмічний підхід – основними блоками моделі при використанні цього підходу є функції (процедури).

Стохастичне моделювання – відображає ймовірнісні процеси й події. Аналізують можливість реалізації випадкового процесу та оцінюють середні характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.

Стохастичні математичні моделі – враховують вплив випадкових факторів на поведінку об'єкта – оцінюють його майбутнє з позицій імовірності тих чи інших подій.

Структура системи – спосіб організації елементів у системі з певними властивостями та визначенням між ними взаємозв'язків.

Структурні математичні моделі – використовуються для відображення структурних властивостей об'єктів.

Тезаурус – словник, який унеможливорює неоднозначність, тобто кожному слову може відповідати лише єдине значення, хоча у звичайному словнику одне слово може мати кілька значень.

Теоретичні математичні моделі – створюються в результаті дослідження об'єктів (процесів) на теоретичному рівні.

Теорія розкладів – це наука, яка займається дослідженнями детермінованих обслуговуючих систем щодо оптимізації розкладів їх функціонування.

Термін служби – календарна тривалість від початку експлуатації об'єкта (або її відновлення після ремонту) до переходу його в граничний стан.

Технічний ресурс – напрацювання об'єкта від початку експлуатації (або її відновлення після ремонту) до переходу у граничний стан (невипадкова, детермінована величина).

Технічна система – цілісний об'єкт (множина взаємопов'язаних об'єктів), у межах якого визначено його функціональне призначення, сформульовані цілі, поставлені перед системою, та визначено показник якості її функціонування, що кількісно визначає мету функціонування.

Типові математичні схеми. Стосовно конкретної системи, що моделюється, розробнику математичної моделі допомагають лише ті математичні схеми (типові), які апробовані для певного класу систем і показали свою ефективність у прикладних дослідженнях на комп'ютері.

Точність вимірювання – характеристика якості вимірювання, що відображає близькість до нуля похибки його результату.

Точність математичної моделі – оцінюється ступенем збігу значень вихідних параметрів реального об'єкта та значень тих самих параметрів, які розраховані за допомогою моделі.

Універсальність математичної моделі – характеризує повноту відображення в ній властивостей реального об'єкта.

Уявне моделювання – часто єдиний спосіб моделювання об'єктів, які або практично нереалізовані в заданому інтервалі часу, або існують поза умовами, можливими для їх фізичного створення. Може реалізовуватись у вигляді наочного, символічного і математичного.

Фактор – це засіб впливу на об'єкт дослідження (змінну величину), що вимірюється та набуває певного значення у певний момент часу.

Фізичні моделі – складаються із сукупності матеріальних об'єктів.

Фізичне моделювання. Дослідження проводять на установках, які зберігають природу явищ і мають фізичну подібність.

Функція (дія, операція). Перетворює вхідні робочі об'єкти у вихідні або модифікує їх.

Функціональне моделювання – процес моделювання функцій об'єкта, шляхом створення наочного структурованого зображення, яке показує, що, як і ким робиться в межах функціонування об'єкта

та об'єктів, що з'єднують ці функції, з урахуванням наявної інформації.

Функціональні математичні моделі – призначені для відображення інформаційних, фізичних, часових процесів, що відбуваються в працюючому обладнанні в ході виконання технологічних процесів та ін.

Цифрова модель – описується рівняннями із дискретних величин, поданих у вигляді цифр.

Цільова функція – пов'язує критерій оптимальності зі змінними та постійними параметрами. У процесі створення моделей відбувається пошук оптимального рішення та визначення таких значень змінних параметрів, які надають цільовій функції мінімаксного значення.

Час обслуговування – це час виконання вимоги на обслуговування з моменту надходження замовлення до обслуговуючої системи.

Числовий метод – дозволяє досліджувати широкий діапазон класу систем, проте отримані при цьому розв'язки мають індивідуальний характер.

Якісні фактори – це змінні величини, які характеризуються якісними властивостями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Норенков И. П.* Информационная поддержка наукоемких изделий. CALS-технологии / И. П. Норенков, П. К. Кузьмик. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 320 с.
2. *Павлов В. В.* CALS-технологии в машиностроении (математические модели) / В. В. Павлов. – М. : Изд-во МГТУ «Станкин», 2002. – 187 с.
3. *Павленко П. М.* Автоматизовані системи технологічної підготовки розширених виробництв. Методи побудови та управління: монографія / П. М. Павленко. – К. : НАУ, 2005. – 280 с.
4. *Автоматизація* технічної підготовки виробництва : навч. посіб. / П. М. Павленко, Є. І. Яблочников, Ю. А. Буренников, Л. Г. Козлов. – Вінниця : ВНТУ, 2006. – 114 с.
5. *Энгельке У. Д.* Как интегрировать САПР и АСТПП. Управление и технология / Пер. с англ.; под ред. Д. А. Корягина // У. Д. Энгельке. – М. : Машиностроение, 1990. – 320 с.
6. *Компьютерно-интегрированные* производства и CALS-технологии в машиностроении: учеб. пособ. / Т. А. Альперович, В. В. Баранов, А. Н. Давыдов и др.; под ред. Б. И. Черпакова. – М. : ГУП «ВИМИ», 1999. – 512 с.
7. *CALS в авиастроении* / А. Г. Братухин, Ю. С. Давыдов, Ю. С. Елисеев и др. – М. : Изд-во МАИ, 2000. – 304 с.
8. *Дмитров В. И.* Аналитический обзор международных стандартов ISO 10303 STEP / В. И. Дмитров, Ю. М. Макаренков // САПР и графика. – 1997. – № 11. – С. 6–11.
9. *Smith J. M.* CALS. An introduction to CALS: The Strategy and the Standards / J. M. Smith. – Dublin : The Cromwell Press Ltd, 1990. – 143 p.
10. *Управление* жизненным циклом продукции / А. Ф. Колчин, М. В. Овсянников, А. Ф. Стрекалов, С. В. Сумароков; под ред. А. Пальчикова. – М. : Анахарсис, 2002. – 304 с.
11. *Jari S.* CALS / S. Jari. – Stockholm: Magnusson Torbjorn Holm, 1996. – 182 p.
12. *Интеграция* данных об изделии на основе ИПП/CALS-технологий / А. Ф. Колчин, Ю. Г. Коган, М. В. Овсянников и др. – М. : Европ. центр по качеству, 2002. – Ч. 1. – 174 с.
13. *Автоматизация* производственных процессов в машиностроении / Н. М. Капустин, П. М. Кузнецов, А. Г. Схиртладзе и др. ; под ред. Н. М. Капустина. – М. : Высш. шк., 2004. – 415 с.

14. *Информационно-вычислительные системы в машиностроении. CALS-технологии* / Ю. М. Соломенцев, В. Г. Митрофанов, В. В. Павлов, Л. В. Рыбаков. – М. : Наука, 2003. – 292 с.
15. *Law A. M. Simulation Modeling and Analysis* / A. M. Law, W. D. Kelton. – New York : McGraw-Hill Publishing Co, 2000. – 3-rd edit. – 560 p.
16. *Hay D. C. Requirments Analysis: From Business Views to Architecture* / D. C. Hay. – NJ : Prentice Hall, 2003. – 596 p.
17. *Лягушкин А.* От программных продуктов к отраслевым решениям / А. Лягушкин // САПР и графика. – 2008. – №4. – С. 54–58.
18. *Советов Б. Я.* Моделирование систем. Практикум: учеб. пособие для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 1998. – 224 с.
19. *Томашевський В. М.* Імітаційне моделювання систем і процесів: навч. посіб. / В. М. Томашевський. – К. : ІСДО, 1994. – 124 с.
20. *Самарский А. А.* Математическое моделирование : идеи, методы, примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 2-е изд. – 316 с.
21. *Гліненко Л. К.* Основи моделювання технічних систем: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Л. К. Гліненко, О. Г. Сухоносів. – Львів : Бескид Біт, 2003. – 176 с.
22. *Лебідь Р. Д.* Математичні методи в моделюванні систем: навч. посіб. для студ. вузів / Р. Д. Лебідь, І. А. Жуков, М. М. Гузій. – К. : КМУЦА, 2000. – 158 с.
23. *Томашевський В. М.* Моделювання систем: підруч. для студ. ВНЗ / за заг. ред. М. З. Згуровського. – К. : Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
24. *Томашевський В. М.* Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання / В. М. Томашевський, О. Г. Жданова, О. О. Жолдаков. – К. : Корнійчук, 2001. – 267 с.
25. *Введение в математическое моделирование: учеб. пособие* / В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер, О. Б. Наймарк. – М. : Логос, 2005. – 440 с.
26. *Струтинський В. Б.* Математичне моделювання процесів та систем механіки: підруч. / В. Б. Струтинський. – Житомир : ЖІТІ, 2001. – 611 с.
27. *Павленко П. М.* Основи математичного моделювання систем і процесів : навч. посіб. / П. М. Павленко. – К. : НАУ, 2014. – 274 с.

28. *Основы системного анализа и проектирования АСУ* : учеб. пособие / А. А. Павлов, С. Н. Гриша, В. Н. Томашевский и др.; под общ. ред. А. А. Павлова. – К. : Вища шк., 1991. – 367 с.

29. *Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении*: учеб. пособие / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М. : МГУ «Дело», 2000. – 439 с.

30. *Кузьменко И. В. Основы моделирования сложных систем*: учеб. пособие / под общ. ред. д-ра техн. наук И. В. Кузьменко. – К. : Вища шк., 1981. – 360 с.

31. *Пальчевський Б. О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація)*: навч. посіб. / Б. О. Пальчевський. – Львів : Світ, 2001. – 232 с.

32. *Шевченко В. В. Математическое моделирование переходных процессов в электрических цепях и электромеханических системах*: учеб. пособие / В. В. Шевченко. – Николаев : НУК, 2004. – 147 с.

33. *Метрология. Основные понятия и математические модели*: учеб. пособие для вузов / Н. Г. Назаров. – М. : Высш. шк., 2002. – 348 с.

34. *Назаров Н. Г. Измерения: планирование и обработка результатов* / Н. Г. Назаров. – М. : Изд-во стандартов, 2000. – 304 с.

35. *Федорков Б. Г. Микросхеми ЦАП і АЦП : функціонування, параметри, застосування* / Б. Г. Федорков, В. А. Телець; под ред. Б. Г. Федоркова. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 320 с.

36. *Иванченко О. В. Математическая модель цифрового средства измерений с двухзвенным аналого-цифровым преобразователем последовательных приближений* / О. В. Иванченко, М. В. Кривонос, Д. Ю. Бирюков // Вісн. СевНТУ: зб. наук. пр. – 2011. – Вип. 114/2011. – С. 90–94.

37. *Саати Т. Принятие решений: метод анализа иерархий* / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 254 с.

38. *Силин В. Б. Поиск структурных решений комбинаторными методами* / В. Б. Силин. – М. : МАИ, 1992. – 216 с.

39. *Дегтярев Ю. И. Системный анализ и исследование операций*: учеб. пособие для вузов по спец. АСОИУ / Ю. И. Дегтярев. – М. : Высш. шк., 1996. – 335 с.

40. *Волкова В. Н. Основы теории систем и системного анализа* / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – СПб. : Изд-во СПб ГТУ, 1999. – 512 с.

41. *Волкова В. Н. Методы формализованного представления систем*: учеб. пособие / В. Н. Волкова, А. А. Денисов, В. Ф. Темников. – СПб. : Изд-во СПб ГТУ, 1993. – 107 с.

42. *Азерман М. А.* Выбор вариантов: основы теории / М. А. Азерман, Ф. Т. Алескеров. – М. : Наука, 1990. – 240 с.
43. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.
44. *Плюта В.* Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании / пер. с польск. В. В. Иванова. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 175 с.
45. *Лесин В. В.* Основы методов оптимизации / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – М. : Изд-во МАИ, 1998. – 344 с.
46. *Wiegiers K. E.* Software Requirements / К. Е. Wiegiers. – Redmond : Microsoft Press, 2003. – 2-nd edition. – 516 p.
47. *Йордон Э.* Структурные модели в объектно-ориентированном анализе и проектировании / Э. Йордон, К. Аргила; пер. с англ. П. Быстров. – М. : ЛОРИ, 1999. – 264 с.
48. *Железнов И. Г.* Сложные технические системы (оценка характеристик): учеб. пособие для техн. вузов / И. Г. Железнов. – М. : Высш. шк., 1984. – 119 с.
49. *Трахтенгерц Э. А.* Компьютерная поддержка принятия решений: науч.-практ. изд. / Э. А. Трахтенгерц. – М. : СИНТЕГ, 1998. – 367 с. – (Серия «Информатизация России на пороге XXI века»).
50. *Мишукаев В. И.* Основы инженерного творчества: учеб. пособие для вузов / В. И. Мишукаев, В. Е. Токарев. – М. : Дрофа, 2005. – 254 с.
51. *Цифрові вимірювальні прилади.* Комп'ютерний лабораторний практикум : навч. посіб. / В. П. Бабак, В. С. Єременко, Ю. В. Куц, В. М. Мокійчук; за ред. чл.-кор. НАНУ В. П. Бабака. – К. : Книжк. вид-во Націон. авіац. ун-ту, 2006. – 168 с.
52. *Дьяконов В. П.* VisSim + Mathcad + MATLAB. Визуальное моделирование / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004. – 384 с.
53. *Дьяконов В. П.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002. – 297 с.
54. *Магда Ю.С.* LabVIEW / Ю.С. Магда. – ДМК Пресс, 2012. – 208 с.
55. *Кунву Ли.* Основы САПР / Ли Кунву. – СПб. : Питер, 2004. – 205 с.
56. *CAE-технологии в 2011 году: обзор достижений и анализ рынка.* – CAD/CAM/CAE Observer. – 2012. № 4 (72). – С. 26–27.
57. *Системные методы в автоматизации проектирования изделий машиностроения* / А. Ф. Тарасов, Г. Б. Бильк, П. И. Сагайда и др. – Краматорск : ДГМА, – 2005. – 260 с.

58. *Методология* функционального моделирования IDEF0. Руководящий документ. – М. : ГОССТАНДАРТ РОССИИ, 2000. – 62 с.
59. *Тельнов Ю. Ф.* Реинжиниринг бизнес-процессов: учеб. пособие. – М. : Моск. гос. ун-т экономики, статистики и информатики (МЭСИ), 2004. – 116 с.
60. *Хаммер М.* Реинжиниринг корпорации. Манифест революции в бизнесе / М. Хаммер, Дж. Чампи; пер. с англ. – СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1997. – 332 с.
61. *Основы* формальных методов описания бизнес-процессов : учеб. пособие / К. Е. Самуйлов, Н. В. Серебренникова, А. В. Чукарин, Н. В. Яркина. – М. : РУДН, 2008. – 130 с.
62. *Design/IDEF User's Manual for Microsoft Windows 3.5.* Meta Software Corporation, 1996. – 230 p.
63. Jacobson I., Ericsson M., Jacobson A. The Object Advantage : Business Process Reengineering with Object Technology / I. Jacobson, M. Ericsson, A. Jacobson. //ACM Press. – Addison-Wesley Publishing, 1995. – 137 p.
64. *Lucas H. C.* Information Technology for Management. Sixth edition. International Editions, 1997. – 714 p.
65. *Войнов И. В.* Моделирование экономических систем и процессов. Опыт построения ARIS-моделей : моногр. / И. В. Войнов, С. Г. Пудовкина, А. И. Телегин. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 392 с.
66. *ReThink User's Guide. Version 3.1* Gensym. – 1999. – 317 p.
67. *Scheer A. W.* Business Process Engineering: Reference Models for Industrial Enterprises. –1995. – 217 p.
68. *Репин В. В.* Процессный подход к управлению. Моделирование бизнес-процессов / В. В. Репин, В.Г. Елиферов. – М. : РИА «Стандарты и качество», 2004. – 330 с.
69. *Черемных С. В.* Структурный анализ систем : IDEF-технологии / С. В. Черемных, И. О. Семенов, В. С. Ручкин. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 334 с.
70. *Шеер А. В.* Бизнес-процессы. Основные понятия. Теория. Методы. – М. : Весть–МетаТехнология, 1999. – 282 с.
71. *Фаулер М.* UML. Основы / М. Фаулер, К. Скотт. – СПб. : Символ-Плюс, 2002. – 270 с.

РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

- | | |
|--|--|
| http://www.scs.org/ | – Міжнародне товариство комп'ютерного моделювання; |
| http://eurosim.cashburn.at/ | – Федерація європейських товариств з моделювання; |
| http://www.simulation.org.ua/ | – український портал з імітаційного моделювання; |
| http://www.gpss.ru/ | – російський портал з імітаційного моделювання; |
| http://www.efg2.com/Lab/Library/SimulationAndModeling.htm | – загальні ресурси з моделювання; |
| http://www.simulationinformation.com/ | – національний центр США з моделювання; |
| www.tbm.tudelft.nl/webstaf/edwinv/SimulationSoftware/Review_Simple/htm | – загальна характеристика пакетів моделювання; |
| http://ermak.cs.nstu.ru/~shalag/enter.html | – підручник із моделювання; |
| http://yevgeny.nm.ru/institut/model.html | – конспект лекцій із дисципліни «Моделювання»; |
| http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/glossary/index.php | – глосарій із математичного програмування; |
| http://pespmc1.vub.ac.be/ASC/indexASC.html | – мережевий словник із кібернетики та систем; |
| http://www.ntcnvg.ru/up.htm | – навчальний посібник із прикладної математики; |
| www.3ds.com/ru | – розробник PLM-рішень; |
| www.calscenter.com | – навчальний центр CALS-технологій |

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

абстрактна модель, 52
адекватність математичної моделі, 78
алгоритмізованість, 79
алгоритмічні математичні моделі, 76
аналіз, 23
аналітичні математичні моделі, 75
аналогова модель, 35
аналого-цифрова модель, 35
аналогове моделювання, 28
апроксимація, 150

Б

безвідмовність, 259
безперервне моделювання, 28

В

вимірювання, 93
відтворюваність результатів
вимірювань, 114
властивості, 44
впливова величина, 112
вхідний потік вимог, 221

Г

гіпотетичне моделювання, 28
гранична невідповідність, 99
гносеологічні моделі, 52

Д

декомпозиція системи, 135
детерміновані задачі, 133
детерміноване моделювання, 26
детерміновані математичні моделі, 77
динамічне програмування, 256
дискретне моделювання, 28
дискретно-неперервне моделювання, 28
дисперсія, 158
диференційний метод, 97
довговічність, 262
достовірність вимірювань, 114

Е

економічність математичної моделі, 78
елементи, 44
емпіричні математичні моделі, 77

З

задачі в умовах невизначеності, 134
збіжність результатів
вимірювань, 114
зв'язки, 44
змінні параметри, 80

І

імітаційні математичні моделі, 76
імовірнісні задачі, 134
інтенсивність потоку подій, 229
інтервал варіювання факторів, 154
інтерпретація, 166
інформаційні моделі, 52
інцидентність, 212

К

керовані фактори, 60
кібернетичне моделювання, 36
кількісні фактори, 60
комбіноване моделювання, 34
концептуальна модель, 52
критерій оптимальності, 84

М

макроаналіз, 24
математичне моделювання, 29
математична модель об'єкта
вимірювання, 99
математична модель технічної
системи, 81
математичні моделі на макрорівні, 74
математичні моделі на метарівні, 74
математичні моделі на мікрорівні, 74
метрологічні характеристики, 102

М

мікроаналіз, 23
метод вимірювання, 95
метод випадкового балансу, 67
метод дисперсійного аналізу, 66
метод заміщення, 97
метод збігів, 98
метод рангової кореляції, 64
множина, 208
мовне моделювання, 29
модель, 51
моделювання, 54
модульність, 79

Н

надійність математичної моделі, 79
наочність, 79
наочне моделювання, 28
напрацювання до відмови, 262
напрацювання на відмову, 262
натурне моделювання, 34
некеровані контрольовані фактори, 60
некеровані неконтрольовані фактори, 60
нормальна область значень впливової величини, 112
нормальні умови вимірювань, 112
нульовий метод, 97

О

об'єкт вимірювання, 93
об'єкт моделювання, 54, 80
обмеження, 80
обслуговування, 221
обчислюваність, 79

П

перевірка гіпотези, 159
постановка задачі, 134
постійні параметри, 80
потік подій, 229
помилка експерименту, 158
похибка, 114
правильність вимірювання, 114
працездатність, 259
принцип вимірювання, 90

Р

реальне моделювання, 34
результат аналізу, 23
ремонтпридатність, 262
рівень варіювання, 154

С

сенсуальна модель, 52
символічне моделювання, 29
системний аналіз, 24
синтез, 23
СМО з відмовами, 223
СМО з чергою, 223
статичне моделювання, 26
стохастичне моделювання, 26
стохастичні математичні моделі, 77
структура системи, 44
структурні математичні моделі, 74

Т

тезаурус, 29
теоретичні математичні моделі, 76
теорія розкладів, 249
термін служби, 262
технічний ресурс, 262
технічна система, 46
типові математичні схеми, 20
точність вимірювання, 114
точність математичної моделі, 77

У

універсальність математичної моделі, 79
уявне моделювання, 28

Ф

фактор, 60
фізичні моделі, 51
фізичне моделювання, 35
функція, 225
функціональне моделювання, 220
функціональні математичні моделі, 74

Ц

цифрова модель, 35

цільова функція, 80

Ч

час обслуговування, 221

числовий метод, 30

Я

якісні фактори, 60

Навчальне видання

Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М.,
Трейтяк В. В., Власенко Ю. В.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Редактор *Р. М. Шульженко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *Л. М. Романова*
Комп'ютерна верстка *Л. А. Шевченко*

Підп. до друку 15.11.16. Формат 60x84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 14,41. Обл.-вид. арк. 15,5
Тираж 100 пр. Замовлення № 85-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680, Київ–58, просп. Космонавта Комарова, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07. 2002