

## ЛЕКЦІЯ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ДОСЛІДЖУВАНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПРИНЦИПИ ПОДОБИ. ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ.

### План лекції:

1. *Моделювання досліджуваних об'єктів та принципи подоби.*
2. *Особливості моделювання коливальних систем.*

### 3.1 Моделювання досліджуваних об'єктів та принципи подоби

Дослідження роботи будь-якого металургійного обладнання передбачає експериментальну перевірку того чи іншого вузла або деталі з точки зору правильності виконання ними своїх функцій. Добре, коли в розпорядження дослідника надходить дослідний зразок машини в натуральну величину, як це має місце, наприклад, при випробуваннях літаків або автомобілів. Дані натурних випробувань є найбільш достовірними, бо машини перевіряються саме в тих умовах, в яких їм доведеться працювати.

Однак, найчастіше в силу багатьох причин проведення натурних випробувань виявляється неможливим. Так, наприклад, при розрахунку станин прокатних станів на обмежену довговічність необхідно достовірно знати їх втомні характеристики. Такі характеристики можна отримати лише випробувавши і зруйнувавши станину на спеціальному стенді. Однак, такий підхід економічно недоцільний, оскільки станини відносять до категорії так званих незамінюваних деталей, тобто зазвичай на складах відсутні запасні станини. Тому такі деталі як станини, робочі валки, шпинделі, приводні вали і т.д. мало зручні для безпосереднього дослідження відбуваються в них процесів.

У цих випадках доводиться вдаватися до фізичного моделювання. *Моделі* - це по суті справи, зменшені і спрощені копії самих машин або деталей, що мають ту ж саму фізичну природу. Модель може відрізнятися від природи геометричними розмірами, матеріалом, значенням і характером діючих зусиль, швидкістю протікання процесу і т.д., тобто фізична модель не повинна бути точною копією оригіналу, а повинна бути подібна йому в деяких цікавлять нас відносинах.

Правильно виконана модель дозволяє з найменшими витратами часу, праці і коштів провести вивчення цих об'єктів і отримані дані, що можуть бути використані для створення нового або поліпшення існуючого обладнання.

Метод моделювання широко використовується для дослідження металургійного обладнання і процесів, що протікають в ньому. Він дозволяє встановити межі застосування різних теоретичних рішень, проаналізувати вплив різних чинників на поведінку системи і отримати вихідні дані для математичного опису явища. Завдання зменшення розмірів за умови збереження напруженості і жорсткості модельованого об'єкта вирішується так званої теорією подібності, що є теоретичною основою експерименту на моделях, яка вказує як необхідно здійснити експеримент, обробити дані, а також узагальнювати і поширювати отримані результати та інші об'єкти.

В основі сучасної теорії подібності лежать наступні положення [5]:

1. Подібними явищами будуть тільки ті, які описуються аналогічними

диференціальними рівняннями, мають подібні умови однозначності і рівні визначені критерії, що входять до складу цих умов.

2. Будь-які рівняння, що описують будь-яке явища, можна представити у вигляді однозначного зв'язку між критеріями подібності, тобто привести ці рівняння до критеріального виду.

3. Подібні явища мають чисельно однакові і рівні критерії подібності.

Для перерахунку величин, визначених на моделі, необхідно знати перехідні масштабні коефіцієнти моделювання, які знаходяться з рівності визначальних критеріїв природи і моделі. Для цього в системі математичних рівнянь, що описують єдине явища, кожен параметр для природи представляється у вигляді добутку відповідного параметра моделі на масштаб. Потім встановлюється співвідношення між масштабами з умови інваріантності всіх математичних залежностей, які називають умовою моделювання.

У практиці моделювання розрізняють так звані локальні моделі, які відтворюють не всю конструкцію цілком, а лише окремих її вузол або деталь, які можуть послужити причиною відмови або поломки. Такі моделі завжди мають схожість з природою, вони простіше по влаштуванню всеосяжних моделей, їх зовнішній вигляд визначається тими умовами, в яких доводиться працювати моделюється деталі, і вони є наближеними.

У приводах металургійних машин і агрегатів широке поширення набули, наприклад, зубчасті муфти. У певний момент така муфта повинна передати обертання від одного вала до іншого. Устрій зубчастої муфти наступний: на одному валу посажена втулка з зовнішніми зубцями, інший вал має на кінці зубчасту обойму. Зубці втулки входять в пази між зубцями обойми і тоді обидва валу обертаються заодно. Муфти працюють в умовах ударних і знакозмінних навантажень і часто виходять з ладу. Для того, щоб виявити можливість продовження терміну служби муфти, треба знати, як навантажується кожен зуб, як розподіляється навантаження між окремими зубцями. Для цієї мети при випробуваннях зазвичай виготовляють дві моделі, кожна з яких лише віддалено нагадує досліджуваний прототип [ 16]. На першій моделі видаляють всі зуб'ї, крім трьох, причому, у двох з них спилують край. Крутний момент передається одним зубом, який сприймає тепер цілком певне навантаження. Друга модель дає уявлення про розподіл навантаження між зубцями. Вона майже схожа на справжню муфту. Майже через те, що в ній немає другорядних деталей, проте є і доповнення в порівнянні з природою: в середній частині зроблена вставка з оптично активної пластмаси. При просвічуванні її поляризованим світлом можна відносно точно визначити, яка частка навантаження припадає на кожен зуб.

Ще один приклад - навантаження сталерозливного ковша в одному з експериментів перевірялося на двох моделях. Перша розкривала картину напружень біля цапф, на яких був підвішений ківш, а друга демонструвала взаємодію пояса жорсткості і стінок ковша [16].

Все викладене відноситься до фізичних моделей дослідження. Перевага методу фізичного моделювання полягає в тому, що не потрібно знати рівняння, що описують поведінку досліджуваного об'єкта, саме складання яких навіть наближено представляє складну задачу, а досить лише на підставі будь-яких загальних фізичних або математичних міркувань встановити деякі критерії подібності, при виконанні яких натурний об'єкт і модель будуть фізично

подібними. Основним недоліком методу фізичного моделювання є те, що для кожного конкретного завдання доводиться будувати нову модель, причому змінювати її параметри під час досліджень досить складно, а іноді і неможливо без істотної перебудови самої моделі.

Для моделювання цілого ряду процесів можна обійтися і без їх фізичного відтворення. Досить, щоб між процесом і його моделлю була математична подібність. Таке моделювання називають математичним. Воно являє собою [14] сукупність математичних рівнянь, формул і нерівностей, логічних операторів і т.д., які описують фізичні процеси, характерні для досліджуваного явища. В основу математичного моделювання покладено відомі аналогії між механічними, електричними, гідродинамічними, тепловими та іншими фізичними явищами. Отже, вивчення одного явища в цьому випадку проводиться шляхом аналізу якісно іншого фізичного явища. Дуже часто буває доцільно і зручно поєднувати методи математичного моделювання з фізичними моделями або з реальними об'єктами. При цьому необхідні дослідження значно спрощуються і здешевлюються.

Характерним прикладом математичного моделювання з використанням принципів подібності є розробка В.П. Когаєвим рівняння подібності втомного руйнування деталі [17], що дозволяє на підставі знання меж витривалості гладкого лабораторного зразка визначати межу витривалості деталі. У рівняння входить відношення периметра робочого перетину деталі, прилеглого до зони концентрації напружень, до відносного градієнту першого головного напруження в точці найбільшої напруженості, назване критерієм подібності втомного руйнування. Сенс цього критерію полягає в тому, що якщо зразок, модель і деталь мають різні розміри і конфігурацію, але однакові відношення периметра до градієнту, то вони будуть мати і збігаються функції розподілу меж витривалості. Рівняння подібності дають гарні якісні та кількісні описи статистичних закономірностей впливу концентрації напружень і масштабного фактора на середні значення і розсіювання меж витривалості, вони з успіхом використовуються при розрахунках деталей металургійного устаткування на обмежену довговічність [20].

В процесі розроблення та використання математичних моделей здійснюються різноманітні дії, які можна умовно назвати етапами [44].

Спочатку здійснюється постановка задачі моделювання, окреслюються мета і результати досліджень, прогнозується вихід моделі.

Постановка задачі здійснюється на основі інформаційних досліджень, обробки та аналізу інформаційних джерел, досвіду розроблення і використання аналогічних моделей.

Після постановки задачі та визначення мети моделювання здійснюється безпосередня розробка загального плану моделі об'єкта дослідження, який формалізується шляхом введення та обґрунтування припущень, що слугують для отримання максимально простої математичної моделі. Кожне з припущень обґрунтовується і здійснюється шляхом оцінки порядку величин дослідним шляхом або іншим дослідженнями. Тут можна застосовувати і досвід розробки аналогів. Для введення припущень проводять ранжування факторів з метою визначення ступеню їх впливу на об'єкт дослідження і, звісно, на результати дослідження.

Ранжування факторів полягає у дослідженні впливу вхідних параметрів (факторів) на вихід (відклик) моделі. Фактори, які суттєво не впливають на вихід, відкидаються.

Важливим моментом при моделюванні є побудова розрахункової схеми, яка є результатом ідеалізації реального об'єкта дослідження. Вона має відображати всі його основні параметри, його логіку і функціональне призначення. Вибір стратегії моделювання здійснюється для раціоналізації процесу розробки моделі і полягає у визначенні необхідної послідовності виконання необхідних операцій, отриманні і використанні проміжних результатів, зменшенні можливості появи помилок та застосуванні відомих фрагментів моделей, методів і методик дослідження.

На підґрунті створення стратегії і розрахункової схеми здійснюється розроблення базової математичної моделі, що являє собою систему рівнянь, складену на основі фундаментальних фізичних законів, які відображають стан досліджуемого об'єкту (наприклад, рух машини чи напруженість її вузлів). Для спрощення процесу моделювання базова модель може приводитись до стандартного типу або вигляду, котрий утворюється з базової моделі шляхом математичних перетворень і має великий ступінь загальності. Наприклад, якщо записати систему диференціальних рівнянь в матрично-векторному вигляді, то це надасть можливість розробляти універсальну методику розв'язання цих задач, або ж, навпаки, - використовувати готові методики.

Розглянемо принципи складання математичних моделей на прикладі планування добового випуску продукції. Процес виготовлення виробів двох видів складається в послідовній обробці кожного з них на трьох верстатах, при цьому відомі наступні параметри: час експлуатації кожного верстата за добу, обробки одиниці кожного виробу на кожному верстаті, вартість реалізації одиниці кожного виробу. Потрібно скласти для підприємства план добового випуску виробів таким чином, щоб дохід від їх продажу був максимальним.

В даному прикладі умови полягають у тому, що нам відома мета (збільшення прибутку від продажу випущених за добу виробів двох видів) та задані параметри.

У наведеному прикладі відомими є такі параметри:

- добові норми  $b_1, b_2, b_3$  експлуатації верстата 1, верстата 2 та верстата 3 відповідно;
- час  $a_{ij}$  обробки одиниці виробу виду  $i$  на верстаті типу  $j$ ;
- вартості продажу одиниці виробу виду 1 та 2 -  $c_1$  та  $c_2$  відповідно;

Усі ці параметри є некерованими, оскільки вони задані (їх значення можна знайти в довідниках або нормативах, визначити з минулого досвіду).

Шуканими є величини обсягу добового випуску виробу виду 1 та виробу виду 2. Ці два параметри можна вважати керованими, оскільки підприємство саме визначає їх величину (виходячи з реальних умов).

Далі для складання математичної моделі задачі потрібно ввести систему позначень невідомих параметрів задачі. Для нашого прикладу зробимо такі позначення:

$x_1$  - обсяг добового випуску одиниць виробу виду 1;

$x_2$  - обсяг добового випуску одиниць виробу виду 2.

Тоді прибуток від продажу  $x_1$  і  $x_2$  буде визначатися як «  $c_1 x_1 + c_2 x_2$  », а час,

необхідний для обробки  $x_1, x_2$  одиниць виробів на верстаті  $j$  – як « $a_{ij} x_1 + a_{2j} x_2$ , ( $j = 1,2,3$ )».

Тепер поставлену задачу можна сформулювати математично:

$$\begin{aligned}c_1 x_1 + c_2 x_2 &\rightarrow \max, \\a_{11} x_1 + a_{21} x_2 &\leq b_1, \\a_{12} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_1, \\a_{13} x_1 + a_{23} x_2 &\leq b_1, \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Умови невід'ємності змінних впливає із сенсу величин  $x_1$  і  $x_2$  - це доповнення моделі відсутньою інформацією. Наведений запис і є задачею математичного програмування з цільовою функцією  $c_1 x_1 + c_2 x_2$  і множиною допустимих рішень  $X$ , що описується п'ятьма нерівностями.

Наведена модель описує конкретну задачу прийняття рішення.

Позначимо через  $N = \{1,2,\dots,n\}$  множину сторін, що приймають участь у даній конкретній задачі, де кожен елемент і множина  $N$  називаються особами, що приймають рішення (ОПР), наприклад, окрема особистість, плановий орган великого концерну, уряду та інші. Кожен елемент  $i \in N$  характеризується своїми можливостями. Позначимо через  $X_i$  множину усіх його допустимих рішень (стратегій, альтернатив). Припустимо, що такі множини математично описані:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Після цього процес прийняття рішення всіма ОПР зводиться до такого формального акту: кожна з ОПР вибирає конкретний елемент  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$  зі своєї припустимої множини рішень. У результаті отримується набір  $x = (x_1, \dots, x_n)$  обраних рішень, що називається ситуацією.

Формалізація цілей прийняття рішення здійснюється за такою схемою. Тим або іншим способом будуються аналітичні закони (функції)  $f_1, \dots, f_n$ , що ставлять у відповідність кожної ситуації  $x$  набір з  $n$  чисел  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ .

Функція  $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n)$  називається критерієм якості  $i$ -ої ОПР. Число  $f_i(x)$  є кількісною оцінкою ситуації  $x$  для  $i$ -ої ОПР з погляду переслідуваної нею мети. Тому в моделі мета  $i$ -ої особи формалізується таким чином: вибрати таке рішення  $x_i \in X_i$ , щоб досягти найбільшого значення функції  $f_i$ . Однак досягнення цієї мети цілком від нього не залежить з огляду наявності інших сторін, що впливають на загальну ситуацію  $x$  з метою досягнення своїх власних цілей. Цей факт перетинання інтересів (конфліктність) пояснюється тим, що функція  $f_i$  крім  $x_i$  залежить і від інших змінних  $x_j$  ( $i \neq j$ ). Тому в моделях прийняття рішення з багатьма учасниками застосовуються складніші принципи оптимального поведіння, ніж пряма максимізація або мінімізація критерію якості.

Сукупність усіх цих умов, що виступають у моделі у вигляді деяких рівнянь зв'язку, позначимо одним символом  $\Sigma$  Математично система  $\Sigma$  містить опис зв'язків між керованими і некерованими змінними, опис впливу випадкових факторів, облік динамічних характеристик та інші.

Таким чином, загальна структура задачі прийняття рішення з багатьма учасниками виглядає так:

$$\langle N; X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n; \Sigma \rangle \quad (3.1)$$

За допомогою математичного моделювання здійснюються розрахунки об'єкту дослідження з метою вибору раціональних або оптимальних значень параметрів, прогнозування надійності його роботи та аналіз критичних режимів роботи.

В залежності від призначення застосовуються різні класи моделювання. За описом об'єкта розрізняють моделі в розподілених параметрах і моделі в зосереджених параметрах. Наприклад, маса при моделюванні може зосереджуватись в певних точках, чи розподіляється у просторі. Модель із зосередженням параметрів є суттєво простіша, ніж модель, що враховує їх розподіл у просторі. При цьому опис такої моделі здійснюється звичайними диференціальними рівняннями. В той час, як при просторовому розподілі параметрів вимагається використання рівнянь в частинних похідних, розв'язок яких є значно складніший.

Математичні моделі поділяються на лінійні і нелінійні. Лінійні базуються на припущенні про лінійність математичних залежностей, що описують характеристики досліджуваного об'єкту. Проте реальні об'єкти, як правило, мають деякі параметри, що не можуть бути описані лінійними залежностями. До цих параметрів, в першу чергу, відносяться сили тертя і опору, зазори, насичення і обмеження, розриви і т.п. Нелінійні моделі точніші за лінійні і більш реально відображають властивості об'єкта дослідження. В той же час лінійні моделі значно простіші, ніж нелінійні, і надають більш широкі можливості для узагальнення, що суттєво знижує трудомісткість процесу моделювання і дозволяє використовувати відпрацьовані раніш методи математичного опису об'єкта дослідження.

Математичні моделі також поділяються на детерміновані і стохастичні. Детерміновані включають лише визначені параметри і характеристики об'єктів, а стохастичні – випадкові величини, функції і умови і слугують для імітації реальних процесів, що значно спрощує опис властивостей і підвищує достовірність отриманих результатів.

За видом математичного опису моделі поділяються на неперервні і дискретні. Перші оперують залежностями, які визначені в певних проміжках часу чи простору, а другі описують процес в окремих точках. Дискретні моделі застосовуються для опису складних фізичних процесів і відзначаються надійністю, високою точністю та достовірністю отриманих результатів, а також можливістю широкого застосування сучасних інформаційних технологій.

В залежності від того, який математичний апарат застосовується, моделі бувають у вигляді функціональних залежностей та моделі у вигляді співвідношення (диференціальні і інтегральні рішення).

При проектуванні і експлуатації сучасних швидкохідних і важких машин необхідно приділяти особливу увагу динаміці систем з пружними зв'язками, тобто, проблемі пружних коливань. Конструктор в одних випадках повинен передбачити і попередити можливість їх появи, прийнявши заходи щодо їх усунення, в інших випадках – задати такий режим роботи машини, щоб навпаки, можна було корисно застосовувати коливання. В механіці мають місце як стаціонарні періодичні коливальні процеси з постійними амплітудою і періодом,

так і нестационарні періодичні процеси, що виникають під час перехідних режимів роботи машини.

При динамічному навантаженні в машинах виникають коливання, які в одних випадках перешкоджають нормальній роботі, в інших випадках можуть викликати стомленість і пошкодження найбільш навантажених вузлів. А поява резонансу супроводжується різким зростанням амплітуд коливань і, отже, деформацій, що взагалі може призвести до руйнування машин і споруд. Таким чином, одним із основних напрямків математичного моделювання має бути моделювання динаміки механічних об'єктів, що базується на теорії коливань. Тільки на основі інженерної теорії коливань можливо знайти оптимальні розміри деталей машин і їх конструктивні форми, а також режими роботи машини, що запобігають створенню небезпечного коливального стану.

Інтенсифікація виробничих процесів і зростання швидкостей вимушують в багатьох випадках відмовлятися від звичайних силових розрахунків машин, в яких припускається, що потужність ланок не впливає на закон руху мас, і побудувати розрахунки таким чином, щоб стало можливим визначати дійсні навантаження з врахуванням коливального руху мас в неусталених і перехідних фазах руху машини. Особливо це важливо при проектуванні важких машин, коли практично неможливо виготовити дослідний зразок.

Звичайно, що розроблена математична модель не може на 100% відтворювати реальну картину і вносить певні похибки в результати досліджень. Тому вона має перевіритись на адекватність, тобто на придатність (відповідність) її використання. Перевірка адекватності здійснюється шляхом порівняння з експериментальними чи іншими достовірними даними.

Слід відзначити, що математичне моделювання – ця дуже складна задача, потребує від розробників значних трудовитрат, навичок, знань і може бути виконана лише за наявності необхідного обсягу попередньої змістовної інформації. Для обчислення доцільно використовувати сучасне програмне забезпечення, зокрема MatCAD і MATLAB тощо.

### **3.2 Особливості моделювання коливальних систем**

При динамічних розрахунках реальну машину (рис.3.1,а) подають у вигляді багатомасової системи з пружними ланками (рис. 3.1, б, в) або у вигляді двомасової системи (рис. 3.2. г, д). Перед розрахунками, як правило, всі фізичні параметри приводяться до якогось одного вала, наприклад вала двигуна. Число ступеней вільності для коливальних систем є функціями часу і основна задача дослідження зводиться до визначення цих функцій, тобто, у визначенні закону руху системи. Після цього можуть визначатись інші параметри.

Рівняння, що описують коливальний процес механічної системи, можна скласти в різноманітній формі. Перш за все, за допомогою диференціальних рівнянь можна встановити зв'язок між переміщенням окремих мас, їх похідними і зовнішніми збуреннями.

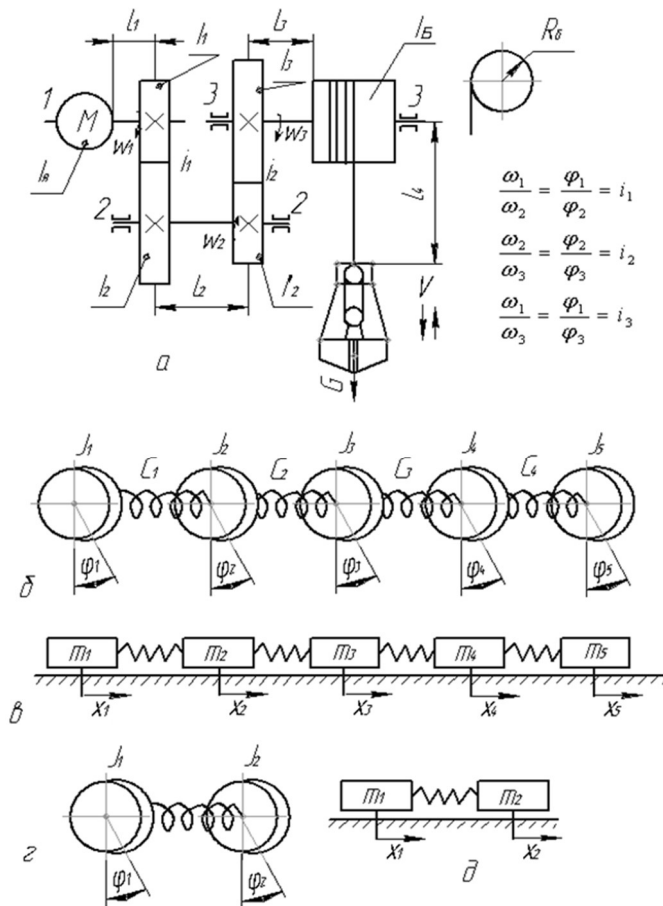


Рисунок 3.1 - Приведення моментів інерції, мас і жорсткостей

Рівняння руху мас можна перетворити так, що будуть встановлені співвідношення між моментами сил пружності зв'язків (ділянки між масами) і зовнішніми моментами. Розв'язок такої системи диференціальних рівнянь зводиться до знаходження виразів для моментів сил пружності, діючих на окремих ділянках валау

Другу систему рівнянь краще використовувати у тих випадках, коли необхідно отримати значення моментів сил пружності для розрахунків на міцність при стаціонарних чи при перехідних режимах роботи машини.

При дослідженні коливань механічних систем з обмеженою кількістю степенів вільності застосовують рівняння руху Лагранжа другого роду. Ці рівняння можуть бути отримані і безпосередньо із загального рівняння руху. При застосуванні рівнянь Лагранжа положення системи, що має  $n$  степенів вільності, визначається  $n$  – параметрами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , які не залежать один від іншого (узагальнені координати). В кожному окремому випадку можна встановити, якими параметрами зручно користуватись (кутом закручування, лінійним переміщенням і т. д.).

Рівняння Лагранжа виходить із загального рівняння руху динамічної системи [46]

$$\sum_{i=1}^n [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0,$$



де  $\ddot{x}$  - прискорення;  $x$  – переміщення  
 $X_i, Y_i, Z_i$  – складові заданих сил  
 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  – проекції можливих переміщень, сукупних із зв'язками для даного моменту часу.

В остаточному вигляді рівняння Лагранжа буде таким [17]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2)$$

де  $q_i$  – узагальнена координата (кут закручування  $\varphi_i$  чи переміщення  $s_i$ );  
 $\dot{q}_i$  – узагальнена швидкість (кутова  $\dot{\varphi}$  чи лінійна  $\dot{s}$ )  
 $Q_i = Q_{Ri} + Q_{Fi}$  – узагальнена сила, що прикладена до  $i$ -тої маси системи (момент чи зусилля);

$Q_{Ri}$  – узагальнена сила, що відповідає силам опору (дисипативним силам)  $R_i$ ;

$Q_{Fi}$  – узагальнена сила, що відповідає збурюючим (зовнішнім) силам  $F_i$ ;

$n$  – число степенів вільності механічної системи;

$E_{\Pi}$  - потенціальна енергія системи;

$E$  – кінетична енергія системи.

Рішення рівняння Лагранжа може бути використано у двох основних випадках при розгляді як вільних коливань механічної системи, так і вимушених. В першому випадку обов'язковою є наявність в рівнянні пружних і відсутність зовнішніх збурюючих сил і в деяких випадках сил опору, тобто права частина рівняння може дорівнювати нулю. В другому випадку обов'язковою є наявність в рівнянні збурюючих і пружних сил.

Сили опору в обох випадках можуть враховуватись чи ні, тому що їх врахування різко ускладнює аналітичне рішення.

### Питання для самоперевірки

1. Назвіть послідовність етапів виконання теоретичних досліджень.
2. Назвіть критерії подоби.
3. Назвіть і охарактеризуйте основні стадії побудови математичної моделі.