Лекція 7

МЕТОДИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Теорема про включення та виключення

Дотепер ми розглядали задачі, які розв'язувались за допомогою комбінаторних формул або за правилами суми і добутку. Але існують такі задачі, що цього апарату недостатньо для їх розв'язання. Існують різні *комбінаторні методи і прийоми*. Одним з них є *принцип включення та виключення.* Він полягає у застосуванні формул, які вводяться у наступних трьох теоремах про потужність об'єднання скінченних множин.

Теорема 5.1 Нехай A та B - скінченні множини. Тоді для потужності їх об'єднання має місце формула $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Теорема 5.2 Для трьох скінченних множин вірна формула $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$.

Теорема 5.3 Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|. \tag{5.1}$$

Метод підрахування за формулою (5.1) називається *методом включень і виключень.*

Задача. Через відмінність програм у школах Запорізької області студенти першого курсу математичного факультету розділилися на наступні групи: 47 людей знають алгоритмічну мову, 35 – мову програмування Паскаль і 23 – обидві мови програмування. Скільки людей на курсі не знають мов програмування, якщо всього 67 студентів?

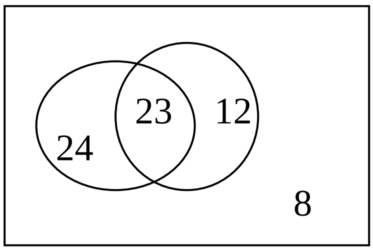

Рисунок 5.1

Розв'язання. Цю задачу можна

розв’язати за допомогою кругів Ейлера (рис. 5.1). Але можна використати метод включень і виключень для двох множин. Першою є множина A студентів, які знають алгоритмічну мову, другою – множина B знавців мови Паскаль. Перетином цих множин є множина студентів, які знають обидві мови. Тоді за теоремою 1 отримаємо кількість студентів, які знають хоча б одну мову програмування:

$$|A \cup B| = 47 + 35 - 23 = 59.$$

Універсальною є множина всіх студентів першого курсу, тому кількість тих студентів, які не знають жодної мови, дорівнює різниці $67 - 59 = 8$.

Розглянемо ситуацію з трьома множинами.

Задача. Нехай 47 студентів знають алгоритмічну мову, 35 – мову Паскаль, 20 – знають Бейсик, 23 – Паскаль і алгоритмічну мова, 12 – алгоритмічну мову й Бейсик, 11 – Паскаль і Бейсик, 5 – усі три мови. Скільки людей на курсі не знають жодної мови програмування, якщо всього 67 студентів?

Розв'язання. В цій задачі треба використати теорему 2, одержимо: $47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61$ – кількість студентів, які знають хоча б одну мову програмування. Таким чином, кількість не знайомих з мовами дорівнює $67 - 61 = 6$.

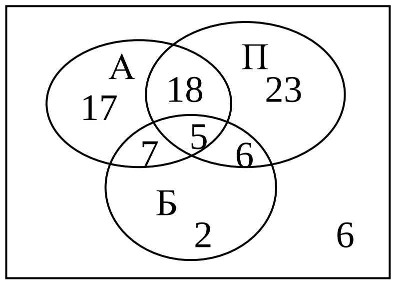

Рисунок 5.2 – Ілюстрація до задачі

Іноді метод включень і виключень подають у наступному формулюванні.

Нехай дано N предметів, деякі з яких мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Кожний з об'єктів може мати або не мати деякі із цих властивостей. Позначимо через $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$, $1 \le k \le n$ число об'єктів, які мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k})$ – число об'єктів, які не мають властивостей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Тоді має місце формула

$$N\left(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_n}\right)=$$
$$=N-N(\alpha_1)-\ldots-N(\alpha_n)+N(\alpha_1,\alpha_2)+\ldots+N(\alpha_{n-1},\alpha_n)-$$
$$-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-\ldots+(-1)^n N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Отже, наведена формула підраховує число предметів, що не володіють жодною із зазначених властивостей.

Зазначимо, що в розглянутих задачах властивостями є знання тієї чи іншої мови програмування, а питання задач пов’язані із знаходженням кількості тих, хто не має жодної властивості (не знає жодної мови програмування).

Задача. Скільки чисел від 1 до 100 не діляться ні на 5, ні на 7?

Розв'язання. У даному випадку $N=100$, α_1– «ділиться на 5», α_2 – «ділиться на 7». Тоді $N\left(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2}\right)=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)+N(\alpha_1,\alpha_2)$, причому

$$N(\alpha_1)=\left[\frac{100}{5}\right]=20, N(\alpha_2)=\left[\frac{100}{7}\right]=14, N(\alpha_1,\alpha_2)=\left[\frac{100}{35}\right]=2.$$

Таким чином, $N\left(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2}\right)=100-20-14+2=68$.

Пример 1.5. Пусть M, P и C — множества студентов, посещающих лекции по математике, физике и информатике соответственно. Известно, что $|M| = 300$, $|P| = 350$, $|C| = 450$, $|M\cap P| = 100$, и $|M\cap C| = 150$, $|P\cap C| = 75$ и $|M\cap P\cap C| = 10$. Сколько студентов посещает ровно один из указанных курсов?

Ясно, что

$$|\{M\cap P\}\setminus\{M\cap P\cap C\}| = 100-10 = 90,$$
$$|\{M\cap C\}\setminus\{M\cap P\cap C\}| = 150-10 = 140,$$
$$|\{P\cap C\}\setminus\{M\cap P\cap C\}| = 75-10 = 65.$$

Поэтому область, соответствующая множеству студентов, посещающих только математические курсы содержит $300-(90+10+140) = 60$ элементов. Аналогично подсчитывается число студентов, изучающих только физику (185) и только информатику (235). Поэтому ровно один из указанных курсов посещают $60+185+235 = 480$ студентов.

Числа Стірлінга другого роду (самостійно)

В якості ще одого прикладу застосування формули включень-виключень розглянемо таку комбінарну задачу (надалі $m\geq n$).

Задача. Скількома способами можна розкласти m різних куль по n різним коробкам так, щоб жодна з цих коробок не виявилась порожньою?

Розв’язання. Якщо коробки можуть бути порожніми, то кількість способів розкласти m різних куль по n різним коробкам дорівнює n^m - це кількість розміщень з повтореннями.

Нехай A_i - множина розташувань куль, при яких i-та коробка порожня ($i=1,2,\ldots,n$). Тоді шукане число $D(m,n)$ розташувань куль, при яких всі коробки непорожні, дорівнює:

$$D(m,n)=n^m-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=n^m-\sum_i|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots$$
$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$$

Очевидно, що

$$|A_i|=(n-1)^m,\ |A_i\cap A_j|=(n-2)^m,\ |A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)^m$$

і т.д. Отримуємо:

$$D(m,n)=n^m-C_n^1(n-1)^m+C_n^2(n-2)^m-C_n^3(n-3)^m+\ldots+C_n^1\cdot 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-k)^m.$$

Задача розв’язана.

Тепер припустимо, що коробки можуть бути порожніми.

Задача. Скількома способами можна розкласти m різних куль по n різним коробкам? На кількість куль в коробці обмежень немає.

Розв’язання. При довільному розташуванні наші m куль опиняться в деяких k коробках ($1\le k\le n$), а інші $n-k$ коробок будуть порожніми. Таке розташування можна здійснити $S(m,k)$ способами. Підсумовуючи по k, отримуємо шукане число способів:

$$\sum_{k=1}^{n}S(m,k).$$

Приклад. Скількома способами колоду з 36 карт можна поділити довільно на 2 частини?

За формулою Стірлінга другого роду знаходимо

$$S_2^{36}=\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{2-i}C_2^i i^{36}=\frac{1}{2}(-2+2^{36})=2^{35}-1.$$

Цей результат можна отримати по-іншому. Кількість розміщень 36 предметів довільно по двом коробкам дорівнює

$$\overline{A}_{36}^{2} = 2^{36}.$$

У двох випадках одна з коробок буде порожньою, якщо при цьому не враховувати порядок розміщення по двом коробкам, то маємо

$$\frac{2^{36}-2}{2!} = 2^{35}-1.$$

Рекурентні послідовності й рекурентні співвідношення

Означення. Нехай дана послідовність $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Говорять, що члени послідовності $\{u_n\}$ зв'язані *лінійним рекурентним співвідношенням*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такі, що для будь-якого $n \geq 1$:

$$u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \alpha_2 u_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k u_n. \qquad (5.2)$$

Число k називають *глибиною рекурентного співвідношення* (5.2) або його *порядком*.

Послідовність $\{u_n\}$ задається однозначно, якщо крім співвідношення (5.2) задані ще k перших членів цієї послідовності (*початкові умови*).

Приклади. 1) $a_{n+1} = 2a_n, \quad n \geq 1, a_1 = 1$ - лінійне рекурентне співвідношення першого порядку. Воно задає геометричну прогресію 1,2,4,8,…

1) Рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n + d, \quad n \geq 1$ задає арифметичну прогресію. Воно не є лінінійним.

Означення. *Характеристичним рівнянням лінійного рекурентного співвідношення* (5.2) називається рівняння виду

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \ldots - \alpha_k = 0. \qquad (5.3)$$

Твердження. Нехай послідовність $\{u_n\}$ задана лінійним рекурентним співвідношенням (5.2). Тоді

1) Якщо характеристичне рівняння (5.3) має попарно різні корені $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то загальний член цієї послідовності має вигляд:

$$u_n = C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1} + \ldots + C_k x_k^{n-1},$$

причому константи $C_i, i = \overline{1,k}$ однозначно визначаються із системи рівнянь

$$u_1 = C_1 + C_2 + \ldots + C_k,$$

$$u_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_k x_k,$$

$$\ldots$$

$$u_k = C_1 x_1^{k-1} + C_2 x_2^{k-1} + \ldots + C_k x_k^{k-1}.$$

2) Якщо характеристичне рівняння (5.3) має кратні корені: x_1 – кратності r_1, x_2 – кратності $r_2, \ldots,$ x_m – кратності r_m, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = k$, то загальний член послідовності має вигляд:

$$u_n = p_1 x_1^{n-1} + p_2 x_2^{n-1} + \ldots + p_m x_m^{n-1},$$

де p_i – многочлен степеня $r_i - 1$ від змінної $n-1$.   ах+в   а(п-1)+в

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дослідник ринку повідомляє наступні дані. З 1000 опитаних 811 подобається шоколад, 752 подобаються цукерки й 418 – льодяники, 570 подобається шоколад і цукерки, 356 – шоколад і льодяники, 348 – цукерки й льодяники, а 297 – усі три види насолод. Показати, що в цій інформації присутні помилки.

Розв'язання. Позначимо через A - властивість опитаного любити шоколад, через B – властивість опитаного любити цукерки, через C – властивість опитаного любити льодяники.

За умовою задачі $N(A) = 811$, $N(B) = 752$, $N(C) = 418$, $N(A,B) = 570$, $N(A,C) = 356$, $N(B,C) = 348$, $N(A,B,C) = 297$.

Обчислимо кількість опитаних людей, які люблять хоча б один вид насолод. Скористаємося формулою включення й виключення:

$$N = N(A) + N(B) + N(C) - N(A,B) - N(A,C) - N(B,C) + N(A,B,C) =$$
$$= 811 + 752 + 418 - 570 - 356 - 348 + 297 = 1004.$$

Оскільки відомо, що опитано було всього 1000 людей, то у запропонованій інформації присутні помилки.

Задача 2. Скільки натуральних чисел від 1 до 500 не діляться на жодне з чисел 3, 5, 11?

Розв'язання. Позначимо кількість чисел, що діляться на 3, 5, 11 відповідно p_3, p_5, p_{11}. Тоді $p_3 = \left[\frac{500}{3}\right] = 166$, $p_3 = \left[\frac{500}{5}\right] = 100$, $p_{11} = \left[\frac{500}{11}\right] = 45$. Кількість чисел, кратних 3 і 5, співпадає з кількістю чисел, кратних 15: $p_{15} = \left[\frac{500}{15}\right] = 33$. Аналогічно, $p_{33} = \left[\frac{500}{33}\right] = 15$, $p_{55} = \left[\frac{500}{55}\right] = 9$, $p_{165} = \left[\frac{500}{165}\right] = 3$. За принципом включення - виключення знаходимо

$$N = 500 - (p_3 + p_5 + p_{11} - p_{15} - p_{33} - p_{55} + p_{165}) =$$
$$= 500 - (166 + 100 + 45 - 33 - 15 - 9 + 3) = 243$$

Задача 3. Чи є функції: а) $u_k = 5^k$, б) $g(k) = 3$, в) $h(k) = 2k + 1$ розв'язками рекурентного співвідношення $u_{k+2} = 2u_{k+1} - u_k$.

Розв'язання. а) для перевірки знайдемо $u_{k+1} = 5^{k+1}$ і $u_{k+2} = 5^{k+2}$, підставимо в рекурентне співвідношення, отримаємо $5^{k+2} = 2 \cdot 5^{k+1} - 5^k$, звідки $25 \cdot 5^k = 10 \cdot 5^k - 5^k$. Остання рівність не є вірною, отже функція $u_k = 5^k$ не є розв'язком заданого рекурентного співвідношення. б) функція $g(k) = 3$ є сталою, тому рекурентне співвідношення набуває вигляду $3 = 2 \cdot 3 - 3$. Отже, $g(k) = 3$ є розв'язком. в) оскільки $h(k+1) = 2(k+1) + 1 = 2k + 3$, $h(k+2) = 2(k+2) + 1 = 2k + 5$, то після підстановки у рекурентне співвідношення отримаємо вірну рівність $2k + 5 = 2 \cdot (2k + 3) - 2k - 1$. Зауважимо, що розв'язок $h(k) = 2k + 1$ є загальним, а

$g(k) = 3$ - частинним.

Задача 4. Знайти перші п’ять членів послідовності, заданої рекурентним співвідношенням $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, якщо $u_1 = 0, u_2 = 1$.

Розв’язання. Задане співвідношення є лінійним порядку 2. Перші два члени відповідної послідовності задані початковими умовами: $u_1 = 0, u_2 = 1$. Залишилось знайти ще 3 члени: $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3$, $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 7$, $u_5 = 3u_4 - 2u_3 = 15$.

Задача 5. Знайти сотий член послідовності, заданної рекурентним співвідношенням $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_1 = 0, u_2 = 1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що задача може бути розв’язана безпосередньо, як і попередня, але треба буде зробити майже 100 кроків. Отже, треба застосувати певний метод. Нагадаємо, що рекурентне співвідношення є лінійним. За даним рекурентним співвідношенням складемо характеристичне рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Тоді запишемо загальний розв’язок даного рекурентного співвідношення $u_n = C_1 \cdot 1^{n-1} + C_2 \cdot 2^{n-1}$. Для обчислення невідомих C_1, C_2 використаємо початкові умови: $u_1 = 0, u_2 = 1$. Отримаємо систему рівнянь: $C_1 \cdot 1^0 + C_2 \cdot 2^0 = 0$, $C_1 \cdot 1^1 + C_2 \cdot 2^1 = 1$, розв’язком якої є $C_1 = -1, C_2 = 1$. Отже, $u_n = -1 + 2^{n-1}$ - явна формула загального члену послідовності, і $\mathrm{u}_{100} = -1 + 2^{100-1}$.

Задача 7. Розв’язати рекурентне співвідношення $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_1 = 0, u_2 = 1$.

Розв'язання. За даним рекурентним співвідношенням складемо характеристичне рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$. Його коренем є число $x_1 = 2$ кратності 2. Тоді запишемо загальний розв’язок даного рекурентного співвідношення $u_n = \left(C_1 + C_2 \cdot (n-1)\right) \cdot 2^{n-1}$. Для обчислення невідомих C_1, C_2 використаємо початкові умови: $u_1 = 0, u_2 = 1$. Отримаємо систему рівнянь:

$(C_1 + C_2 \cdot 0)\cdot 2^0 = 0$, $(C_1 + C_2 \cdot 1)\cdot 2^1 = 1$, розв'язком якої є $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $u_n = (n-1)\cdot 2^{n-2}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Серед 100 студентів другого курсу 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку. Причому є студенти, які вивчають по дві мови: 8 – англійську і німецьку, 10 – англійську і французьку, 5 – німецьку і французьку. Відомо також, що 3 студенти вивчають всі 3 мови одночасно. Скільки студентів не вивчають жодної мови?

2. Фірма має 100 підприємств, причому кожне підприємство випускає хоча б одну продукцію виду *A, B, C*. Продукцію всіх трьох видів випускають 10 підприємств, продукцію видів *A* і *B* – 18 підприємств, продукцію видів *A* і *C* – 15 підприємств, продукцію видів *B* і *C* - 21 підприємство. Кількість підприємств, що випускають продукцію *A* дорівнює кількості підприємств, що випускають продукцію *B* і дорівнює кількості підприємств, що випускають продукцію *C*. Знайти кількість підприємств, які випускають лише один вид продукції.

3. В групі спортсменів 30 чоловіків. З них 20 займаються плаванням, 18 – легкою атлетикою, 10 – лижами. Плаванням і легкою атлетикою займаються 11 спортсменів, плаванням і лижами – 8, легкою атлетикою і лижами – 6. Скільки спортсменів займаються всіма трьома видами спорту?

4. В класі 20 учнів. На іспитах з історії, математики і літератури 10 учнів не отримали жодної п'ятірки, 6 учнів отримали «п'ять» з історії, 5 – з математики, 4 – з літератури, 2 – з історії та математики, 2 – з історії та літератури, 1 – з математики та літератури. Скільки учнів отримали п'ятірки з усіх предметів?

5. Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення $u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n$, а також його частинний розв'язок при початкових умовах $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$.

Допомога. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ - характеристичне рівняння.

Відповідь. $u_n = 2^{n-2} + 3^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$.

6. Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення $u_{n+3} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0$, а також його частинний розв'язок при початкових умовах $u_1 = -1, u_2 = 3, u_2 = 5$.

Відповідь. $\mathrm{u}_n = (C_1(n-1)^2 + C_2(n-1) + C_3) \cdot (-1)^{n-1}$- формула загального члена послідовності.

7. За заданими коренями характеристичного рівняння $x_1 = x_2 = 2, x_3 = 3$ записати загальний розв'язок і отримати рекурентне співвідношення.

Допомога. $(x-2)^2(x-3) = 0$

Відповідь. $u_n = (C_1(n-1) + C_2) \cdot 2^{n-1} + C_3 \cdot 3^{n-1}$.

8. Розв'язати рекурентне співвідношення $u_{n+1} - u_n = 0$ при початкових умовах $u_1 = 1, u_2 = -3$. Зробити перевірку.